Для проверки полученных результатов рассматривался случай сферической полости $\left(a/b=1\right)$ с учетом первых трех приближений. Численные результаты отличаются на величину не более 2 % для напряжений, что связано с редукцией комплексных рядов к действительным переменным.

1. Панасюк, В.В. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями / В.В. Панасюк, М.М. Стаднюк, В.П. Силованюк. – Киев : Навуковая Думка, 1986.
2. M.K. Kassir and G.C.Sih, Some three dimensional problems in elasticity, Int. J. Solids Struct., 4, 225–241 (1968).
3. Нифагин, В.А. Методы функций многих комплексных переменных в пространственных задачах математической теории пластичности / В.А. Нифагин. – Мн : БНТУ, 2008. – 191 с.

УДК 51-7

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С РАЗРЫВНЫМИ СИЛАМИ И СИСТЕМАХ С УПРАВЛЕНИЕМ

Нифагин В.А., Кондратьева Н.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

Рассмотрим механическую систему, силовое поле которой разрывно. Такие силовые поля возникают в системах с сухим трением, системах с переключением или в случаях движения в нескольких средах, с различающимися силами сопротивления [1]. Изучим вопрос о существовании траекторий таких механических систем, соединяющих две заданные точки x_1 и x_2 конфигурационного пространства. Известно, что для евклидова пространства дифференциальное уравнение второго порядка с непрерывной и ограниченной правой частью имеет решение для любого отрезка времени $[t_1,t_2]$ и $x(t_1)=x_1$, $x(t_2)=x_2$. В случае нелинейных конфигурационных пространств, проблема носит более сложный характер. Построим два примера механических систем на двумерной сфере. В первом примере силовое поле гладкое, автономное и не зависит от скорости, т.е. – ограничено. При этом ни одна из траекторий системы выходящей из точки $S(0,0,-1)$ не достигает точки $N(0,0,1)$. Во втором примере силовое поле зависит от скорости, гладко, автономно и ограничено. При этом для любой пары точек на концах диаметра сферы нет соединяющей их траектории системы. В тоже время для любых двух точек x_1, x_2, которые не сопряжены вдоль хотя бы одной геодезической Римановой метрики, задающей кинетическую энергию системы, в случае ограниченного, непрерывного силового поля, существует траектория системы, соединяющая эти точки.

Аналогичные эффекты возникают в механических системах с силовыми полями гироскопического типа.

Рассмотрим систему на единичной сфере $S_p \subset \mathbb{R}^3$. Силовое поле задается вектором $\overrightarrow{F(\vec{r})}=(-x_2,x_1,0)$, где $\vec{r}=(x_1,x_2,x_3)\in S_p(0,1)$. Применяя принцип Даламбера для случая голономной связи $\vec{P}(\vec{r})\equiv 1$, $\|\vec{r}\|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ система уравнений в $\mathbb{R}^3$ для траектории точки имеет вид:

$$\begin{cases}\ddot{x}_1=-x_2-2Kx_1\\ \ddot{x}_2=x_1-2Kx_2\\ \ddot{x}_3=-2Kx_3\end{cases} \qquad (1)$$

где $K=\frac{1}{2}\|\dot{F}\|^2=\frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2\right)$ – кинетическая энергия, с граничными условиями:

$$x_1(t_0)=x_{01},x_2(t_0)=x_{02},x_3(t_0)=-x_{03},$$

где $x_{03}=-\sqrt{1-x_{01}^2-x_{02}^2}$

$$x_1(t_1)=x_{11},x_2(t_1)=x_{12},x_3(t_1)=x_{13}, \qquad (2)$$

где $x_{13}=\sqrt{1-x_{11}^2-x_{21}^2}$

Изучим изменение траектории $\vec{r}(t)$. Траектория $\vec{r}(t)$ осциллирует возле экватора сферы, асимптотически к нему приближаясь, но не достигая точки полюса N (рисунки 1, 2).

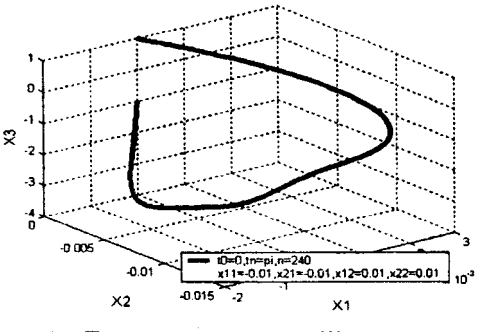

Рисунок 1 – Траектория системы (1) для краевых значений, не лежащих на геодезической линии сферы

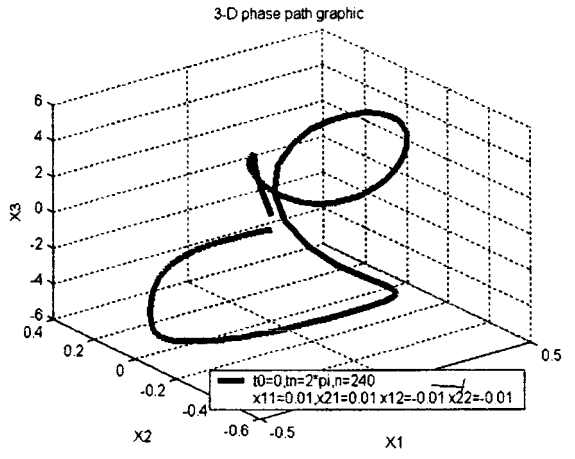

Рисунок 2 – Траектория системы (1) для краевых значений, лежащих на геодезической линии сферы

Это вытекает из того, что при $t_2 > t_1$, такого что $\dot{x}_3(t_2) = 0$, $x_3(t)$ возрастает на $[t_1, t_2]$. Из третьего уравнения (1) заключаем, что $x_3(t_2) > 0$, следовательно $\ddot{x}_3(t_2) < 0$, т.е. $loc\max x_3(t) = t_2$ и в силу того, что K возрастает вдоль $\vec{r}(t)$, то $x_3(t_2) < 1$. Аналогично можно показать, что во всех точках $x_3(t_i)$, где $\dot{x}_3(t_i) = 0$ выполняется условие $\operatorname{sgn} x_3(t_i) = (-1)^{i+1}$ и $|x_3(t_i)| > |x_3(t_{i+1})| > 0$.

Во втором примере заменим силовое поле $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ на $\dfrac{[\dot{\vec{r}}, \vec{r}]}{1 + \|\dot{\vec{r}}\|}$. Тогда векторные уравнения движения запишутся в виде

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) - 2K\vec{r} \qquad (3)$$

с граничными условиями

$$\vec{r}(t_0) = S \qquad \vec{r}(t_1) = N \qquad (4)$$

В этом случае непосредственные вычисления приводят к тому, что вдоль траектории $\vec{r}(t)$ решения (3) производная $\dot{K} = 0$, т.е. кинетическая энергия постоянно на траектории решения. Если имеем траекторию $\vec{r}(t)$, соединяющую противоположные точки на диаметре сферы, то приходим к противоречию с ограниченностью силового поля. В тоже время две точки не лежащие на концах диаметра сферы можно соединить траекторией [2] (рисунки 3, 4).

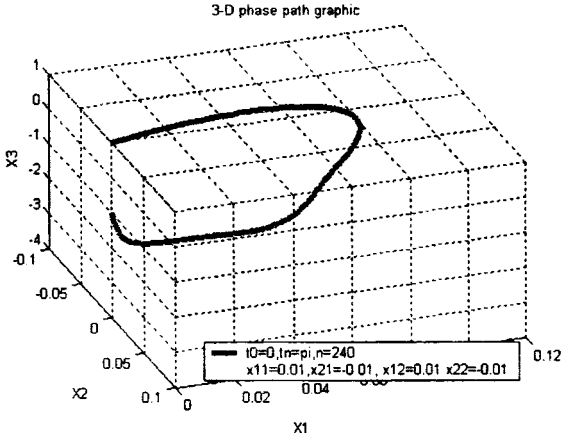

Рисунок 3 – Траектория системы (2) для краевых значений, не лежащих на геодезической линии сферы

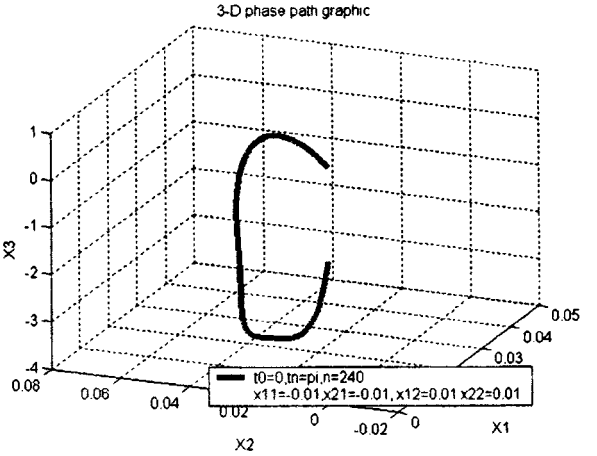

Рисунок 4 – Траектория системы (2) для краевых значений, лежащих на геодезической линии сферы

Расчеты выполнялись в среде Matlab.

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
2. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. М., 1984.

УДК 62-52 (075)

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В СРЕДЕ Mathcad

Пащенко А.В., Габец И.С.

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

В современной метрологии широко используются автоматизированные и автоматические информационно-измерительные системы. При анализе и проектировании таких систем могут быть применены методы теории автоматического управления.