интегральной кривой (5.2) из точки $w=z=+\infty$ приводит в начало координат). При $a<0$, двигаясь по интегральной кривой из точки $w=-\infty$, $z=+\infty$, мы приходим в некоторую точку $M(w_*\ z_*)$, расположенную на параболе $(w+1)=\alpha z$. Эта точка является образом предельной линии $L$ течения в плоскости $(x,\ t)$. Можно доказать, что эта линия является прямой, параллельной линии $x=U_0 t$, и одновременно является $C_+$-характеристикой. Следовательно, при $a<0$ поставленная выше задача имеет бесчисленное множество решений.

## Литература

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М., 1965. 2. Крашенникова Н.Л. О неустановившихся движениях газа, вытесняемого поршнем. – "Изв. АН СССР.ОТН," 1955, №8. 3. Григорян С.С. Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа ( автомодельные движения). – ПММ, Т 22, вып.2, 1958. 4. Гродзовский Г. Л., Крашенинникова Н.Л. Автомодельные движения газа с ударными волнами, распространяющимися по покоящемуся газу. – ПММ. Т.23. Вып.5, 1959. 5. Rangarao M.P., Purohit S.C. A selfsimilar piston problem. – "Journ.Eng.Math," 1971, т.5, №4. 6. Райзер Ю.П. Распространение ударной волны в неоднородной атмосфере в сторону уменьшающейся плотности. ЖПМТФ. 1964, №4. 7. Мозжилкин В.В., Фалькович С.В. Распространение ударных волн в среде с экспоненциальной плотностью. – "Изв. АН СССР. МЖГ." 1970, №6. 8. Устинов М.Д. Некоторые аналитические решения уравнений одномерного движения газа и их приложения. – "Изв. АН СССР. МЖГ". 1973, №2. 9. Устинов М.Д. Преобразование и некоторые решения уравнений движения идеального газа. –"Изв. АН СССР. МЖГ". 1966, №3. 10. Андронов А.А. и др. Качественная теория динамических систем. М., 1966.

Р.В. Шаймуратов

# К РАСЧЕТУ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА ЖИДКОСТЕЙ В СИСТЕМЕ СКВАЖИН

Из-за больших трудностей, возникающих при точном решении системы дифференциальных уравнений, которые описывают вытеснение нефти водой при площадном заводнении пласта, в на-

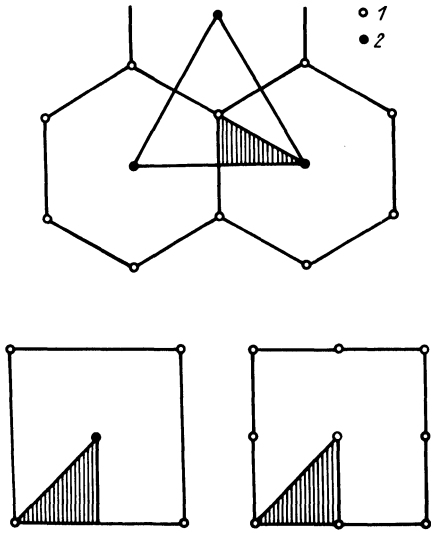


Рис. 1. Схема размещения скважин:
1—эксплуатационные скважины; 2— нагнетательные.

стоящее время широко используются приближенные методы расчета, содержащие ряд допущений и недостаточно полно учитывающие образование зоны двухфазного течения. В связи с этим определенный практический интерес представляет численное решение такого рода задач с учетом различия физических свойств фильтрующихся жидкостей и геометрии потока в системе скважин. При этом последнее принимается во внимание из-за симметрии в расположении скважин при площадном заводнении пласта. Действительно, при четырех-, пяти-, семи- или девятиточечной системе размещения скважин достаточно выделить общий элемент области фильтрации в виде прямоугольного треугольника (рис. 1), которым можно покрыть все поле течения, и определить характеристики фильтрационного потока в этом элементе для построения общей картины движения жидкостей.

Рассмотрим неограниченный тонкий горизонтальный пласт единичной мощности с постоянными проницаемостью $k$ и пористостью $m$. Пласт вскрыт равномерной пятиточечной системой скважин. Общим элементом области фильтрации является равнобедренный прямоугольный треугольник, вершины острых углов которого совпадают с центрами эксплуатационной и нагнетательной скважин.

Считаем, что заполняющие поровой объем пласта жидкости несжимаемы и не смешиваются между собой, в начальный момент времени $t = 0$ пласт полностью занят нефтью и связан-

ной водой, все скважины включаются в работу одновременно, при $t>0$ в нагнетательные скважины закачивается вода с дебитом $q(t)$.

Приведем алгоритм численного решения дифференциальных уравнений, описывающих процесс вытеснения нефти водой в общем элементе поля течения с учетом геометрии потока, свойств фильтрующихся жидкостей (вязкостей, фазовых проницаемостей, капиллярного давления), граничных и начальных условий до и после прорыва воды в эксплуатационную скважину.

Пользуясь законом Дарси, зависимостью капиллярного давления $p_к(\rho)=p_н-p_в$ от насыщенности и уравнениями неразрывности, имеем следующую систему уравнений (1):

$$\nabla\left(k\frac{F_в}{\mu_в}\nabla p_в\right)=m\frac{d\rho}{dp_к}\left(\frac{\partial p_н}{\partial t}-\frac{\partial p_в}{\partial t}\right), \qquad (1)$$

$$\nabla\left(k\frac{F_н}{\mu_н}\nabla p_н\right)=-m\frac{d\rho}{dp_к}\left(\frac{\partial p_н}{\partial t}-\frac{\partial p_o}{\partial t}\right). \qquad (2)$$

Здесь $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$ – оператор Гамильтона; $F_н(\rho)$, $F_в(\rho)$ – относительные проницаемости соответственно для нефти и воды; $\mu_н$, $\mu_в$ – вязкости нефти и воды; $p_н(x,y,t)$, $p_в(x,y,t)$ – давления в нефтяной и водяной фазах; $\rho(x,y,t)$ – насыщенность породы водой.

Согласно симметрии в расположении скважин, границы вне скважин, данные уравнениями: $y=0$, $x=a$ и $x=y$, являются непроницаемыми для обеих фаз (рис.2). Нагнетание воды с переменным дебитом в скважину-точку (0,0) учитывается добавлением члена $8q_{в\,0,0,n}/\Delta x\,\Delta y$ к левой части конечно-разностного аналога дифференциального уравнения (1). Здесь $q_{в\,0,0,n}$ – объемный дебит воды, отнесенный к единичной мощности пласта за интервал времени $\Delta t_n$; $\Delta x$, $\Delta y$ – шаги сетки по осям x и y. Коэффициентом "8" вводится восьмикратная симметрия поля течения. Поток нефти в точке (0,0) отсутствует.

Аналогично учитывается граничное условие в точке извлечения нефти (a, a) до прорыва воды в эксплуатационную скважину. Это достигается добавлением члена $q_{н\,a,a,n}/\Delta x\,\Delta y$ к левой части конечно-разностного аналога дифференциального уравнения (2), где $q_{н\,a,a,n}$ – объемный дебит нефти, отнесенный к единичной мощности пласта за время $\Delta t_n$. Поток жид-

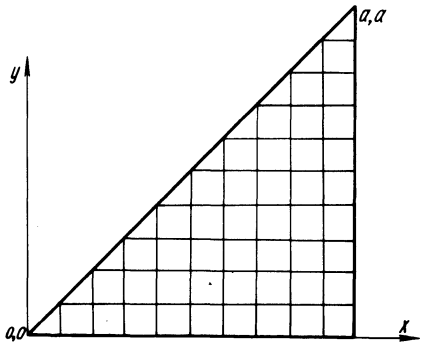


Рис. 2. Основной элемент области фильтрации при пятиточечной системе размещения скважин.

кости, нагнетаемый в пласт, считается положительным, извлекаемый из пласта – отрицательным. Отметим, что до прорыва воды $q_{н\,a,a,n} = q_{в\,0,0,n}$.

После прорыва воды в точке (a, a) одновременно отбираются нефть и вода. На основании известных теоретических исследований и ряда промысловых экспериментов можно положить, что жидкости в этой точке извлекаются согласно отношению их подвижностей, т.е.

$$\frac{q_{н,a,a,n}}{q_{в,a,a,n}} = \frac{\mu_в}{\mu_н} \; \frac{F_{н,a,a,n}}{F_{в,a,a,n}} \; . \qquad (3)$$

Далее из уравнения материального баланса с учетом несжимаемости жидкостей имеем

$$q_{в\,0,0,n} = q'_{н\,a,a,n} + q'_{в\,a,a,n} \; . \qquad (4)$$

Таким образом, согласно (3) и (4) граничное условие на эксплуатационной скважине после прорыва воды учтется добавлением членов $8\,q'_{в,a,a,n} / \Delta x\,\Delta y$, $-8\,q'_{н\,a,a,n} / \Delta x\,\Delta y$ соответственно к левым частям конечно-разностных аналогов уравнений (1) и (2).

В начальный момент времени распределение насыщенности и, следовательно, давления в обоих фазах принимаются постоянными.

Известны следующие экспериментальные данные о фазовых проницаемостях и капиллярном давлении, представленные в виде функциональной зависимости.

$$F_н = \left(\frac{0,9-\rho}{0,8}\right)^3 \; ; \quad F_в = \left(\frac{\rho - 0,1}{0,8}\right)^3 \; ; \tag{5}$$

$$P_к = \sigma \cos\theta \, \varphi(\rho) \sqrt{к/m} \; , \tag{6}$$

где $\varphi(\rho) = 0,3\sqrt{\ln \frac{0,9}{\rho}}$ – безразмерная функция капиллярного давления; $\sigma$ – коэффициент межфазного натяжения; $\theta$ –краевой угол между жидкостями и породой.

Складывая и вычитая уравнения (1) и (2) и вводя новые функции

$$M = к\left(\frac{F_н}{\mu_н} + \frac{F_в}{\mu_в}\right) \; ; \tag{7}$$

$$N = к\left(\frac{F_н}{\mu_н} - \frac{F_в}{\mu_в}\right) \; ,$$

зависимые переменные

$$U = \frac{1}{2}(P_н + P_в) \; ;$$

$$V = \frac{1}{2}(P_н - P_в) = \frac{1}{2} P_к \tag{8}$$

и безразмерные величины

$$\bar{x} = x/a \; ; \; \bar{y} = y/a \; ; \; \bar{t} = t\, q_{в0,0,n} / 4ma^2 \; ;$$

$$\bar{M} = M\mu_в / k \; , \quad \bar{N} = N\mu_в / k \; ; \tag{9}$$

$$\bar{u} = u\,\omega_n \; , \quad \bar{v} = v\omega_n \; , \; \omega_n = k/100\,\mu_в\, q_{в0,0,n} \; ;$$

$$\bar{q}'_{в1,1,n} = \frac{q'_{вa,a,n}}{q_{в0,0,n}} \; ; \quad \bar{q}'_{н1,1,n} = \frac{q'_{нa,a,n}}{q_{в0,0,n}} \; ;$$

$$\bar{q}_{н\,1,1,n} = \frac{q_{на,а,n}}{q_{в,0,0,n}} ,$$

получим систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно $\bar{u}$ и $\bar{v}$

$$\left.\begin{aligned} A[\bar{u},\bar{v}] &\equiv \nabla(\bar{M}\,\nabla\bar{u}) + \nabla(\bar{N}\,\nabla\bar{v}) = 0 ; && (10)\\ B[\bar{u},\bar{v}] &\equiv \nabla(\bar{N}\nabla\bar{u}) + \nabla(\bar{M}\nabla\bar{v}) + \alpha\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} = 0 , && (11)\end{aligned}\right\}$$

где $\alpha = \mu_в\, q_{в0,0,n} / \sqrt{km}\,\sigma\cos\theta$ .

Запишем граничные условия в новых переменных.

Условия непроницаемости границ $\bar{y}=0$, $\bar{x}=1$, $\bar{x}=\bar{y}$ :

$$\left.\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\right|_{\bar{x}=1} = 0 ; \quad \left.\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right|_{\bar{y}=0} = 0 ; \quad \left.\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right|_{\bar{x}=1} = 0 ;$$

$$\left.\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right|_{\bar{y}=0} = 0 ; \quad \left.\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{n}}\right|_{\bar{x}=\bar{y}} = 0 ; \quad \left.\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{n}}\right|_{\bar{x}=\bar{y}} = 0 , \qquad (12)$$

где $\bar{n}$ – нормаль к линии $\bar{x}=\bar{y}$.

Условия в точке нагнетания (0,0):

$$A\,[\bar{u},\bar{v}]_{\bar{y}=0}^{\bar{x}=0} + 8\lambda\,\bar{q}_{в0,0,n} = 0 ;$$

$$B\,[\bar{u},\bar{v}]_{\bar{y}=0}^{\bar{x}=0} - 8\lambda\,\bar{q}_{в0,0,n} = 0 . \qquad (13)$$

где $\lambda = 1/100 \quad \Delta\bar{x} \quad \Delta\bar{y}$.

Условия в точке извлечения (1,1) до прорыва воды:

$$\left.\begin{aligned} A[\bar{u},\bar{v}]_{\bar{y}=1}^{\bar{x}=1} - 8\lambda\,\bar{q}_{н\,1,1,n} &= 0 ;\\ B[\bar{u},\bar{v}]_{\bar{y}=1}^{\bar{x}=1} - 8\lambda\,\bar{q}_{н\,1,1,n} &= 0 .\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Условия в точке извлечения (1,1) после прорыва воды:

$$\left.\begin{aligned} &A\left[\bar{u},\bar{v}\right]_{\bar{y}=1}^{\bar{x}=1} - \lambda = 0 \; ; \\ &B\left[\bar{u},\bar{v}\right]_{\bar{y}=1}^{\bar{x}=1} + \lambda\left(1-2\bar{q}'_{H1,1,n}\right)=0 \; . \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Систему уравнений (10), (11) вместе с граничными и начальными условиями предполагается решить методом конечных разностей (2). Согласно этому методу область фильтрации (прямолинейный треугольник) покрываем сеткой, как это представлено на рис.2. Пусть $\Delta\bar{x} = \Delta\bar{y} = h$ – шаг сетки по осям $\bar{x}$ и $\bar{y}$, а $\Delta\bar{t} = l$ – шаг по оси $\bar{t}$. Для достаточно малых $h$ и $l$ разностные уравнения, соответствующие дифференциальным уравнениям (10), (11), имеют вид

$$L_1\left[\bar{u}_{i,j}, \bar{u}_{i-1,j}, \bar{u}_{i+1,j}, \bar{u}_{i,j-1}, \bar{u}_{i,j+1}; \right. \qquad (16)$$

$$\left. \bar{v}_{i,j}, \bar{v}_{i-1,j}, \bar{v}_{i+1,j}, \bar{v}_{i,j-1}, \bar{v}_{i,j+1}\right] = 0 \; ;$$

$$\bar{v}_{i,j,n+1} = L_2\left[\bar{u}_n, \bar{v}_n\right] / \alpha \frac{d\rho}{d\varphi} \; , \qquad (17)$$

где $L_1$, $L_2$ – линейные операторы; $\frac{d\rho}{d\varphi}$ – переменный коэффициент.

Дифференцируя уравнение (6), получим зависимость $\frac{d\rho}{d\varphi}$ от $\rho$ в виде

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\rho}{0,15}\sqrt{\ln\frac{0,9}{\rho}} \; . \qquad (18)$$

Уравнения (16), (17) для внутренних узлов сетки ( $i$ , $j$ ) рассматриваемой области в совокупности с разностными уравнениями для граничных узлов, полученными с учетом граничных условий (12 – 15), представляет замкнутую систему линейных алгебраических уравнений. Исходными данными для решения этой системы являются известные значения переменных на временном слое $n$ ; результатом решения – ранее известные величины на слое $n+1$.

Одновременное решение уравнений (16), (17) относительно переменных $\bar{u}$ и $\bar{v}$ сопряжено с громоздкой вычислительной работой. Во избежание этого предлагается следующий метод, который значительно уменьшает объем вычислений.

1. По начальным данным водонасыщенности $\rho_0$ и экспериментальными зависимостями (5), (6) рассчитываются с помощью уравнений (7), (8), (9), (18) величины $\bar{M}(\rho_0)$, $\bar{N}(\rho_0)$, $\bar{v}(\rho_0)$ и $\frac{d\rho}{d\varphi}/\rho=\rho_0$.

2. Решается система уравнений (16) вместе с дополнительными условиями для определения дискретных значений $\bar{u}_{i,j;0}$ в начальный момент времени.

3. Используя данные пункта 2, решается система уравнений (17) вместе с дополнительными условиями для нахождения величин $\bar{v}_{i,j,1}$ в момент времени $\Delta\bar{t}$.

4. Используя соотношения (8), (9) и результаты решения пункта 3, находим величину водонасыщенности в каждом узле $\rho_{i,j,1}$ в момент времени $\Delta\bar{t}$. Затем весь расчет повторяется для следующего интервала времени до тех пор, пока не будет достигнут заданный предел обводнения скважины (1,1) (например, обводненность нефти 50%). При достижении заданной обводненности расчет автоматически прекращается.

Изложенный алгоритм расчета процесса вытеснения нефти водой в системе скважин при площадном заводнении пласта позволяет учесть влияние свойств фильтрующихся жидкостей, геометрии потока и дает более полное описание процесса вытеснения. Так, например, в каждой точке пласта на различных стадиях вытеснения расчет дает не только распределение насыщенности (и, следовательно, давления) воды и нефти, но также направление, величину скоростей жидкостей и местные значения подвижностей.

Следует отметить, что девятиточечная система размещения скважин отличается от четырех-, пяти-, семиточечной систем тем, что основной элемент поля течения содержит две эксплуатационные и одну нагнетательную скважину. Поэтому при рассмотрении девятиточечной системы площадного заводнения необходимо наряду с граничными условиями вышеназванных систем учесть влияние второй эксплуатационной скважины на процесс фильтрации. Решение же задачи о фильтрации жидкостей при четырехточечной схеме совпадает с решением семиточечной системы, если поменять местами эксплуатационные и нагнетательные скважины (рис. 1).

Литература

1. Douglas I., Peaceman D., Rachford H.A Method for calculating multidimensional immiscible displacement. - "Petroleum tausactions.AIME",1956, v.216. 2. Вахитов Г.Г. Эффективные способы решения задач разработки неоднородных нефтеводоносных пластов. М., 1963.

Ю.А. Кашин, Л.Б. Школьников

## АНАЛИЗ РАБОТЫ ДЕЛИТЕЛЯ ПОТОКА

Рассматривается работа автоматического делителя потока, устройство и принцип работы которого состоят в следующем. Узел разветвления потока представляет собой камеру с подвижным поплавком (рис. 1). Жидкость, поступая в камеру под давлением $P_0$, протекает в левый и правый каналы, на входе в которые поддерживаются соответственно давления $P_1$ и $P_2$. На поплавок, таким образом, при течении жидкости действуют силы, обусловленные переменным давлением по длине канала, а также силы вязкого трения потока о неподвижную поверхность поплавка. В зависимости от соотношения давлений при данном конструктивном исполнении камеры и поплавка последний занимает некоторое положение равновесия, при котором в левом и правом каналах устанавливаются расходы жидкости $q_1$ и $q_2$. Считая, что $q_2 \neq 0$, обозначим отношение

$$\frac{q_1}{q_2} = k, \qquad (*)$$

которое будем называть коэффициентом деления потока. При ином соотношении давлений положение поплавка будет таким, что расходы жидкости в каналах будут $q_1'$ и $q_2'$, чему будет соответствовать коэффициент деления потока

$$k = \frac{q_1'}{q_2'}.$$

Целью настоящего исследования является определение зависимости коэффициента деления потока от соотношения давлений