$$\gamma_{CO_2\text{-}CO_2} = \frac{2\alpha_D}{\pi\alpha_L P_D F_D(0)}, \qquad (2)$$

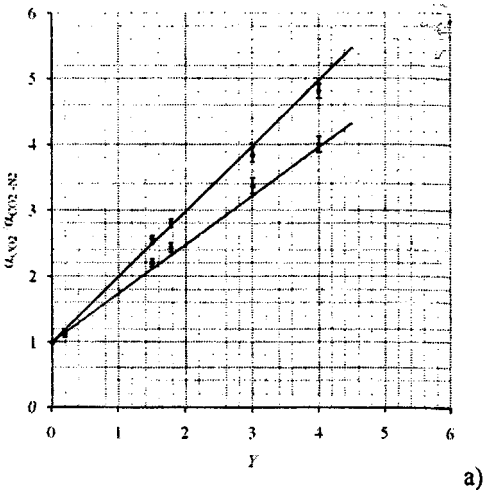
где $F_D(0)$ – значение форм-фактора в центре линии с доплеровским контуром. Для них получен другой, значительно меньший показатель степени из выражения (1) n = 0,35. Причиной получения двух зависимостей $\gamma_{CO_2\text{-}CO_2}(T)$ с различными значениями показателя n является использование во второй методике измеренной температурной зависимости $\alpha_D(T)$.

Значения относительных коэффициентов столкновительного уширения линии b_M буферными газами N_2 и He b_{N_2} и b_{He} определялись по результатам измерений КП в чистом CO_2 α_{CO_2} и в бинарных смесях CO_2:N_2, CO_2:He $\alpha_{CO_2:M}$ с соотношениями компонент $P_{CO_2} : P_M = 1 : Y$ при давлениях $P_C = P_\Sigma$ = 100 Торр. Строились зависимости

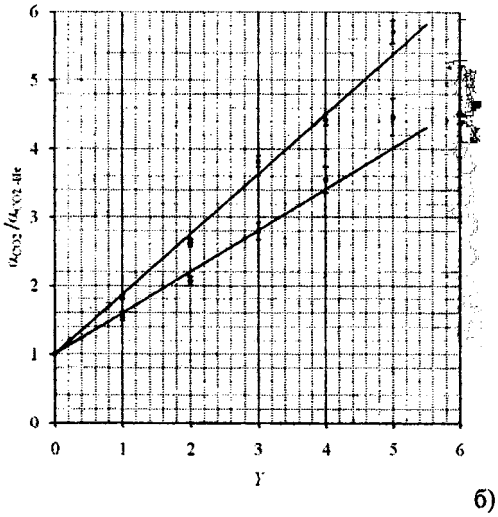
$$\alpha_{CO_2}/\alpha_{CO_2\text{-}M} = 1 + Yb_M \qquad (3)$$

и по наклону прямых определялись коэффициенты b_{N_2} и b_{He}. Получено, что в исследованном диапазоне температур отношения КП $\alpha_{CO_2}/\alpha_{CO_2\text{-}N_2}$ и $\alpha_{CO_2}/\alpha_{CO_2\text{-}He}$, следовательно, и коэффициенты b_{N_2} и b_{He} увеличиваются с ростом температуры. На рисунке 3 (а, б) представлены примеры таких зависимостей.

Наклон этих прямых дает: при температуре 320 К b_{N_2} = 0,74 ± 0,03 и b_{He} = 0,603 ± 0,04, а при температуре 700 К b_{N_2} = 0,995 ± 0,03 и b_{He} = 0,876 ± 0,03, соответственно.



а)



б)

Рисунок 3 – Зависимости отношений КП $\alpha_{CO_2}/\alpha_{CO_2\text{-}N_2}$ (а) и $\alpha_{CO_2}/\alpha_{CO_2\text{-}He}$ (б) от состава смесей при T = 320 К (нижние прямые) и T = 700 К (верхние прямые)

УДК 539.214

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА ПРИ ДВУХОСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Нифагин В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

Конструктивные материалы, как правило, содержат дефекты в виде трещин, полостей и включений. Для различных материалов, включая металлы, размер, форма и распределение неоднородностей определяющим образом влияют на концентрацию напряжений в их окрестности. Для оценки влияния указанных дефектов на напряженное состояние вблизи концентратора фундаментальное значение имеет задача об эллипсоидальной полости в упругопластическом пространстве, которая включает множество частных случаев, таких как задача о линейной трещине или сферической полости [1–3].

Рассматривается краевая задача о двуосном растяжении на бесконечности упругопластического пространства с эллипсоидальной полостью (рисунок 1) вращения, в рамках теории пластичности с нелинейным упрочнением. Применяется метод разложения по параметру нагружения редуцирующий физически нелинейную задачу к последовательности связанных линейных задач с фиктивными массовыми силами. Система разрешающих уравнений на каждом этапе метода:

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} = 2G\varepsilon_{ij}^{(n)} + \left(K - 2G\right)\varepsilon^{(n)}\delta_{ij} - p_{ij}^{(n)},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(u_{j,i}^{(n)} + u_{i,j}^{(n)}\right),\ \varepsilon^{(n)} = \frac{1}{3}u_{k,k}^{(n)}, \qquad (1)$$

$$-A_{ij}u_j^{(n)} = p_i^{(n)} - p_{ij,j}^{(n)},\ A_{ij}(\cdot) =$$

$$= G\delta_{ij}\Delta(\cdot) + \frac{1}{3}(K+G)(\cdot)_{,ij}$$

$$B_{ij}u_j^{(n)} = T_i^{(n)}(\cdot) + p_{ij}^{(n)}n_{ij},\ B_{ij} =$$

$$= G\left(\delta_{ij}n_k(\cdot)_{,k} + n_j(\cdot)_{,i}\right) +$$

$$+\frac{1}{3}(K-2G)n_i(\cdot)_{,j}.$$

Затем краевая задача решается сведением ее к системе интегральных уравнений, в пространстве матричного комплексного переменного C^2. Решение строится на основе разложения функций плотности в ряды по однородным гармоническим полиномам с учетом трех начальных приближений. Проводится сравнение с аналогичными результатами в линейной и нелинейной теории упругости.

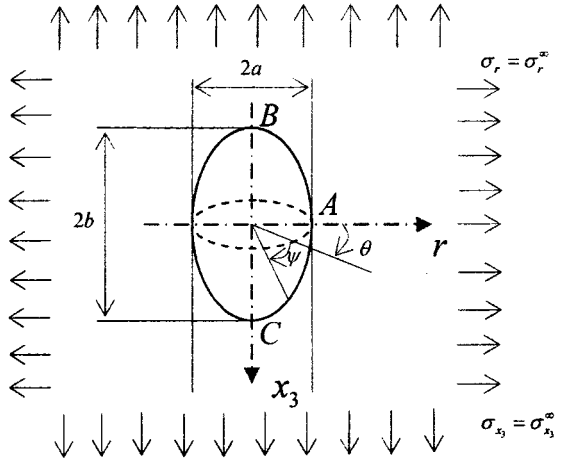


Рисунок 1 – Эллипсоидальная полость в упругопластическом пространстве при двуосном растяжении

Анализ решений в напряжениях производится в произвольной точке (r, θ, x_3), когда усилия действуют в направлениях r, x_3 в точке пространства цилиндрической системы координат.

Система интегральных уравнений имеет вид:

$$\frac{a_1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left(\overline{{}^0t}\,{}^0\Phi^{(n)}({}^0t)\right)'d\,{}^0t}{{}^0t - {}^0\kappa} +$$

$$+\frac{b_1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{{}^0\Phi^{(n)}({}^0t)}\,d\,\overline{{}^0t}}{{}^0t - {}^0\kappa} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{{}^0\chi^{(n)\prime}({}^0t)d\,{}^0t}{{}^0t - {}^0\kappa} = A_1^{(n)}({}^0\kappa);\ (2)$$

$$\frac{a_1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left({}^0t\,\overline{{}^0\Phi^{(n)}({}^0t)}\right)'d\,{}^0t}{{}^0t - {}^0\kappa} +$$

$$+\frac{b_1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{{}^0\Phi^{(n)}({}^0t)d\,{}^0t}{{}^0t - {}^0\kappa} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{{}^0\chi^{(n)\prime}({}^0t)}\,d\,\overline{{}^0t}}{{}^0t - {}^0\kappa} = A_2^{(n)}({}^0\kappa)$$

где Γ – пространственный плоский граничный контур на эллипсоиде.

$$A_1^{(n)}({}^0\kappa) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{{}^0N^{(n)}({}^0t)d\,{}^0t}{{}^0t - {}^0\kappa};$$

$$A_2^{(n)}({}^0\kappa) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{{}^0N^{(n)}({}^0t)}\,d\,\overline{{}^0t}}{{}^0t - {}^0\kappa}.$$

Через пространственные аналитические функции ${}^0\Phi^{(n)}({}^0\kappa)$, ${}^0\chi^{(n)}({}^0\kappa)$, сопряженные к ним, а также их производные выражаются компоненты тензора напряжений [3]. Для их нахождения зададимся граничными условиями на граничной поверхности эллипсоида в криволинейных координатах:

$$\sigma_{x_3}^{(n)}\Big|_\Gamma = -\sigma_{x_3}^\infty \sin^2\psi_0;\ \sigma_r\big|_\Gamma = \sigma_r^\infty \cos^2\psi_0$$

где $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

ψ_0 – угол между осью r и нормалью к эллипсоиду.

Функции плотностей:

$${}^0\Phi^{(n)}({}^0t) = \sum_{m\geq 0} a_{im}^{(n)}\,{}^0P_{im}({}^0t);$$

$${}^0\chi^{(n)}({}^0t) = \sum_{m\geq 0} b_{im}^{(n)}\,{}^0P_m({}^0t)$$

разлагаются в ряды по однородным гармоническим полиномам пространственной переменной и находятся идентификацией коэффициентов слева и справа.

Расчет напряжений для эллиптической полости $\left(a/b < 1\right)$ производился для материалов с материальными постоянными $k = 1{,}752066E11\ н/м^2$, $G = 0{,}442431E11\ н/м^2$, $A_2 = 1{,}3270501E-05$ (медь) и $k = 1{,}752066E11\ н/м^2$, $G = 0{,}836793E11\ н/м^2$, $A_2 = 3{,}212411E-06$ мартеновская сталь) максимум напряжений достигается в окрестности точек $B(\psi = -90°)$ и $C(\psi = 90°)$ для различных a/b. В сравнении с линейной упругостью разница составляет от 11 % до 18 %. Для этих же материалов в случае нелинейной упругости отличие составляет от 7 % до 12 %.

Для проверки полученных результатов рассматривался случай сферической полости $\left(a/b=1\right)$ с учетом первых трех приближений. Численные результаты отличаются на величину не более 2 % для напряжений, что связано с редукцией комплексных рядов к действительным переменным.

1. Панасюк, В.В. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями / В.В. Панасюк, М.М. Стаднюк, В.П. Силованюк. – Киев : Навуковая Думка, 1986.
2. M.K. Kassir and G.C.Sih, Some three dimensional problems in elasticity, Int. J. Solids Struct., 4, 225–241 (1968).
3. Нифагин, В.А. Методы функций многих комплексных переменных в пространственных задачах математической теории пластичности / В.А. Нифагин. – Мн : БНТУ, 2008. – 191 с.

УДК 51-7

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С РАЗРЫВНЫМИ СИЛАМИ И СИСТЕМАХ С УПРАВЛЕНИЕМ

Нифагин В.А., Кондратьева Н.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

Рассмотрим механическую систему, силовое поле которой разрывно. Такие силовые поля возникают в системах с сухим трением, системах с переключением или в случаях движения в нескольких средах, с различающимися силами сопротивления [1]. Изучим вопрос о существовании траекторий таких механических систем, соединяющих две заданные точки x_1 и x_2 конфигурационного пространства. Известно, что для евклидова пространства дифференциальное уравнение второго порядка с непрерывной и ограниченной правой частью имеет решение для любого отрезка времени $[t_1,t_2]$ и $x(t_1)=x_1$, $x(t_2)=x_2$. В случае нелинейных конфигурационных пространств, проблема носит более сложный характер. Построим два примера механических систем на двумерной сфере. В первом примере силовое поле гладкое, автономное и не зависит от скорости, т.е. – ограничено. При этом ни одна из траекторий системы выходящей из точки $S(0,0,-1)$ не достигает точки $N(0,0,1)$. Во втором примере силовое поле зависит от скорости, гладко, автономно и ограничено. При этом для любой пары точек на концах диаметра сферы нет соединяющей их траектории системы. В тоже время для любых двух точек x_1, x_2, которые не сопряжены вдоль хотя бы одной геодезической Римановой метрики, задающей кинетическую энергию системы, в случае ограниченного, непрерывного силового поля, существует траектория системы, соединяющая эти точки.

Аналогичные эффекты возникают в механических системах с силовыми полями гироскопического типа.

Рассмотрим систему на единичной сфере $S_p \subset \mathbb{R}^3$. Силовое поле задается вектором $\overrightarrow{F(\vec{r})}=(-x_2,x_1,0)$, где $\vec{r}=(x_1,x_2,x_3)\in S_p(0,1)$. Применяя принцип Даламбера для случая голономной связи $\vec{P}(\vec{r})\equiv 1$, $\|\vec{r}\|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ система уравнений в $\mathbb{R}^3$ для траектории точки имеет вид:

$$\begin{cases}\ddot{x}_1=-x_2-2Kx_1\\ \ddot{x}_2=x_1-2Kx_2\\ \ddot{x}_3=-2Kx_3\end{cases} \qquad (1)$$

где $K=\frac{1}{2}\|\dot{F}\|^2=\frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2\right)$ – кинетическая энергия, с граничными условиями:

$$x_1(t_0)=x_{01},x_2(t_0)=x_{02},x_3(t_0)=-x_{03},$$

где $x_{03}=-\sqrt{1-x_{01}^2-x_{02}^2}$

$$x_1(t_1)=x_{11},x_2(t_1)=x_{12},x_3(t_1)=x_{13}, \qquad (2)$$

где $x_{13}=\sqrt{1-x_{11}^2-x_{21}^2}$

Изучим изменение траектории $\vec{r}(t)$. Траектория $\vec{r}(t)$ осциллирует возле экватора сферы, асимптотически к нему приближаясь, но не достигая точки полюса N (рисунки 1, 2).

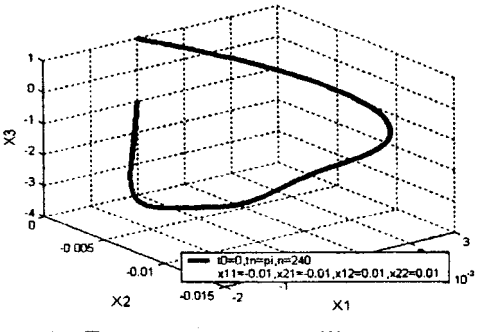


Рисунок 1 – Траектория системы (1) для краевых значений, не лежащих на геодезической линии сферы