ских изменений на зависимость между нагрузкой и деформацией для пластических тел// Механика. – М., 1962. – № 1 (72). – С. 73–86. 4. Чирас А.А. Математические модели анализа и оптимизации упругопластических систем. – Вильнюс, 1982. – 112 с. 5. Танаев В.С. Декомпозиция и агрегирование в задачах математического программирования. – Мн., 1987. – 183 с.

УДК 539.3-615.471

А.Е. КРУШЕВСКИЙ, Ю.И. КОЦЮРА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ МОСТОВИДНОГО ПРОТЕЗА С ТРЕМЯ ОПОРАМИ

Полученные в работах [1, 2] формулы для упругих перемещений периодонта позволяют определить податливость опор зубных протезов в более точной постановке, а именно: учесть овальность поперечного сечения корня зуба, а также закругленность в области его вершины. При этом можно более точно определить неравномерность нагружения протеза под действием различных сил.

В данной статье решается задача определения опорных реакций трехопорного протеза под действием вертикальной силы в зависимости от точки ее приложения при учете овальности поперечного сечения периодонта с помощью модели эллиптического конуса.

Пусть дан трехопорный протез (рис. 1), который будем рассматривать как абсолютно твердое тело с двумя степенями свободы. Жесткость каждой опоры при поступательном вертикальном перемещении обозначим c_1, c_2, c_3, а жесткость при повороте вокруг каждой опоры – μ_1, μ_2, μ_3. Следуя работам [1, 2], запишем

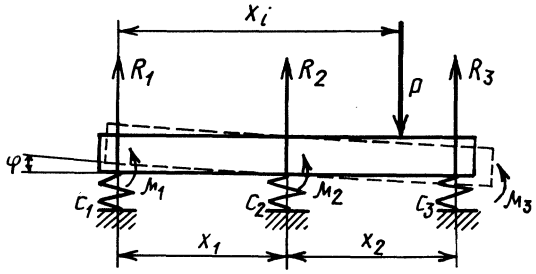
$$c = \frac{\pi G H^2}{h_0}\left(\frac{\gamma a b}{H^2} + \frac{b}{2a} + \frac{a}{2b}\right),$$

$$\mu = \frac{\pi G H^2}{h_0}\left\{\frac{b}{4a}\left[\frac{b^2-a^2}{4} + \gamma a^2\left(\frac{b^2}{H^2} + \frac{H^2}{b^2} + 1\right) + (\gamma+1)a^2 + H^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2H^2\left[\frac{\gamma a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{(\gamma+1)ab}{H^2}\right]^2}{9\left(\frac{\gamma a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{2ab}{H^2}\right)}\right\},$$

где G – модуль сдвига; $\gamma = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$ (для периодонта $\gamma = 17/7$); ν – коэффициент Пуассона (для периодонта $\nu = 0{,}15$); a, b – полуоси эллипса в наибольшем поперечном сечении периодонта; H – высота периодонта; h – толщина периодонта; $h_0 = h/\sin\alpha$; α – половина угла раствора конуса в осевом сечении периодонта.

Рис. 1. Схема действия вертикальной нагрузки и реакций периодонта опорных зубов трехопорного мостовидного протеза



В дальнейшем для определения реакций опор понадобится лишь отношение жесткостей периодонта при вертикальном перемещении и повороте

$$\frac{\mu}{c} = \frac{H^2}{\left(\frac{\gamma ab}{H^2} + \frac{b}{2a} + \frac{2a}{b}\right)} \left[\frac{b^2}{4H^2}\left(\frac{b}{4a} + \frac{\gamma ab}{H^2}\right) + \frac{17}{36}\left(\frac{\gamma a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(136\gamma - 27)ab}{144H^2} + \frac{(\gamma - 1)^2 a^2 b^2}{9H^4\left(\frac{ab}{H^2} + \frac{\gamma a}{2b} + \frac{b}{2a}\right)} \right].$$

Пусть U_1 и U_2 – вертикальные перемещения первой и второй опор. Тогда угол поворота протеза

$$\varphi = (U_2 - U_1)/x_1 ,$$

а перемещение третьей опоры

$$U_3 = U_2 + \varphi x_2 = \frac{1}{x_1}[U_2(x_1 + x_2) - U_1 x_2].$$

Реакции опор определяем из уравнений статики:

$$R_1 + R_2 + R_3 = P,$$

$$M_1 + M_2 + M_3 + R_2 x_1 + R_3(x_1 + x_2) = P x_i ,$$

где R_1, R_2, R_3, M_1, M_2, M_3 – неизвестные силы и моменты в опорах. Выражая моменты через силы:

$$M_1 = \frac{\mu_1}{x_1}\left(\frac{R_2}{c_2} - \frac{R_1}{c_1}\right), \quad M_2 = \frac{\mu_2}{x_1}\left(\frac{R_2}{c_2} - \frac{R_1}{c_1}\right),$$

$$M_3 = \frac{\mu_3}{x_1}\left(\frac{R_2}{c_2} - \frac{R_1}{c_1}\right),$$

находим:

$$R_1 = \frac{P}{\Delta}[x_1 + \frac{c_3(x_1+x_2)^2}{c_2x_1} + \frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{c_2x_1} - x_i\ (1+\frac{c_3x_1+c_3x_2}{c_2x_1})],$$

$$R_2 = \frac{P}{\Delta}[x_i(1-\frac{c_3x_2}{c_1x_1}) + \frac{c_3x_2(x_1+x_2)}{c_1x_1} + \frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{c_1x_1}],$$

$$R_3 = \frac{Pc_3}{\Delta}[\frac{x_i}{x_1}(\frac{x_1+x_2}{c_2} - \frac{x_2}{c_1}) - \frac{x_2}{c_1} + \frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{c_1c_2x_1}],$$

где

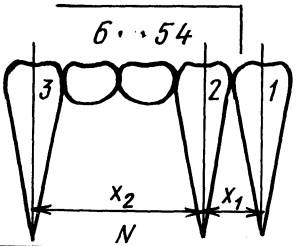
$$\Delta = x_1 + \frac{c_3x_2^2}{c_1x_1} + \frac{c_3(x_1+x_2)^2}{c_2x_1} + \frac{(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{x_1}(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{c_3}{c_1c_2}).$$

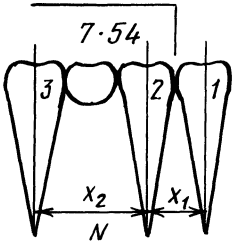
Если принять вертикальную жесткость периодонта одинаковой для всех трех опор ($c_1 = c_2 = c_3 = c$) и пренебречь жесткостью при повороте ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$), то найдем известные значения для R_1, R_2 и R_3 без учета овальности поперечного сечения периодонта [1]. Следовательно, полученные выше формулы являются более общими и позволяют учесть различную жесткость периодонта в форме эллиптического конуса всех трех опор как при вертикальном перемещении, так и при повороте протеза. В табл.1 k ($k = 1, 2, 3$)

Таблица 1

Реакции опор трехопорного протеза

k \ i	1	2	3
1	$\frac{P}{\Delta c_2x_1}[c_2x_1^2+c_3(x_1+x_2)^2+$ $+\mu_1+\mu_2+\mu_3]$	$\frac{Pc_3}{\Delta c_2x_1}(x_1x_2+x_2^2+$ $+\frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{c_3})$	$-\frac{P}{\Delta c_2x_1}(x_1x_2c_2-\mu_1-\mu_2-\mu_3)$
2	$\frac{P}{\Delta c_1x_1}[c_3x_2(x_1+x_2)+$ $+\mu_1+\mu_2+\mu_3]$	$\frac{P}{\Delta c_1x_1}(c_1x_1^2+c_3x_2^2+$ $+\mu_1+\mu_2+\mu_3)$	$\frac{P}{\Delta c_1x_1}[c_1x_1(x_1+x_2)+$ $+\mu_1+\mu_2+\mu_3]$
3	$\frac{Pc_3}{\Delta c_1x_1}[-x_1x_2+$ $+(\mu_1+\mu_2+\mu_3)/c_2]$	$\frac{Pc_3}{\Delta c_2x_1}[x_1(x_1+x_2)+$ $+(\mu_1+\mu_2+\mu_3)/c_1]$	$\frac{Pc_3}{\Delta c_1c_2x_1}[c_1(x_1+x_2)^2+c_2x_2^2+$ $+\mu_1+\mu_2+\mu_3]$





k \ i	1	2	3
1	0,4362p	0,3815p	0,1436p
2	0,4385p	0,4083p	0,2768p
3	0,1253p	0,2102p	0,5796p

I

k \ i	1	2	3
1	0,4693p	0,3986p	0,0805p
2	0,4581p	0,4177p	0,2419p
3	0,0726p	0,1837p	0,6776p

II

k \ i	1	2	3
1	0,5162p	0,4201p	0,0012p
2	0,4827p	0,4295p	0,1981p
3	0,0011p	0,1504p	0,8007p

III

k \ i	1	2	3
1	0,5597p	0,4409p	-0,0762p
2	0,5068p	0,4412p	0,1553p
3	-0,0665p	0,1179p	0,9209p

k \ i	1	2	3
1	0,3843p	0,3335p	0,1872p
2	0,3834p	0,3582p	0,2856p
3	0,2323p	0,3083p	0,5272p

I

k \ i	1	2	3
1	0,4263p	0,3517p	0,1367p
2	0,4042p	0,3672p	0,2505p
3	0,1695p	0,2811p	0,5028p

II

k \ i	1	2	3
1	0,4925p	0,3802p	0,0568p
2	0,4371p	0,3814p	0,2208p
3	0,0704p	0,2384p	0,7224p

III

k \ i	1	2	3
1	0,5783p	0,4173p	-0,0468p
2	0,4796p	0,3998p	0,1696p
3	-0,0579p	0,1829p	0,8772p

Схема 1. Численные результаты реакций опор трехопорного мостовидного протеза

9 Зак. 6157

Таблица 1

Жесткости периодонта различных зубов

a	7,4	8,4	6,7	10,8	7,8	7,9	6,4
b	5,1	8,6	4,8	7,2	4,6	5,6	6,4
H	15,6	14,3	14,7	13,8	14,6	18,1	13,3
c/μ	0,0024859	0,0035022	0,0028067	0,00346802	0,00273927	0,0018376	0,00393099

указывает номер опоры, в которой определяется реакция, а i ($i = 1, 2, 3$) - номер опоры, к которой приложена сила. Если положить $c_3 = \mu_3 = 0$, то получим формулы для реакций протеза на двух опорах как мостовидного, так и консольного.

Для расчета реакций опор составим таблицу значений c/μ при различных параметрах периодонта a, b, H (табл. 2).

Интересно отметить, что эллиптическая модель поперечного сечения периодонта обнаруживает значительное увеличение жесткости периодонта при повороте зуба. Так, в работе [1] отношение c/μ лежит в пределах 0,01–0,03 1/мм^2, а в данной работе это отношение составляет 0,002–0,004 1/мм^2, т. е. меньше в 5–7,5 раза.

Анализ численных результатов показывает, что учет жесткости периодонта при повороте протеза уточняет значения реакций в опорах. Так, для всех указанных моделей протеза при отсутствии атрофии не возникают растягивающие силы в опорах. И только при третьей степени атрофии, т. е. при разрушении периодонта на $\frac{3}{4}H$, появляются растягивающие силы в опорах (см. схему 1).

Таким образом, овальная форма поперечного сечения периодонта при учете жесткости поворота зуба дает более равномерную картину распределения давлений на опоры зубного протеза мостовидной формы.

В заключение отметим, что аналогичным образом решается вопрос определения других составляющих реакций в опорах протезов. Для этой цели нужно использовать результаты статей [3, 4, 5], в которых определены три составляющие вектора поступательного перемещения и три составляющие вектора вращения зуба под действием произвольной силы. При этом определяем жесткости каждой опоры протеза при поступательных перемещениях вдоль трех осей координат и при повороте вокруг трех осей координат. Решение задачи определения реакций опор в такой общей постановке выходит за рамки данной статьи и может послужить идеей для дальнейших исследований работоспособности протезов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Величко Л.С., Крушевский А.Е., Соснин Г.П. Решение задачи о равновесии периодонта при действии на зуб внешних сил // Теорет. и прикл. механика. – Мн., 1976. – Вып. 3. – С. 63–80. 2. Крушевский А.Е. Решение задачи о равновесии перио-

донта как оболочки, ограниченной двумя эллиптическими двуполостными гиперболоидами // Теорет. и прикл. механика. – Мн., 1983. – Вып. 10. – С. 11–21. 3. Соснин Г.П. Основы расчета и конструирования бюгельных протезов: Автореф. дис. ... д-ра мед. наук. – М., 1971. – 39 с. 4. Крушевский А.Е. Аналитическое исследование напряженного состояния зерна шлифовальника в области соединения его со связкой // Машиностроение. – Мн., 1985. – Вып. 10. – С. 32–36. 5. Крушевский А.Е., Жигалко Н.И., Крушевский Е.А. Определение частот собственных колебаний зерен алмазного шлифовальника // Машиностроение. – Мн., 1986. – Вып. 11. – С. 33–35.