костью является решение сравнительно большого числа уравнений, что с появлением нового поколения ЭВМ не является принципиальной.

Р е з ю м е. Дан анализ методов решения вариационного уравнения Лагранжа в зависимости от выбора координатных функций в классе степенных рядов.

Л и т е р а т у р а

1. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1957. 2. К р у ш е в с к и й А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск, 1967. 3. К р у ш е в с к и й А.Е., К о н д р а т ю к В.Ф. Об одном способе построения уравнения Лагранжа первого рода в теории упругости. -- В сб.: Теоретическая и прикладная механика, вып. 1. Минск, 1974. 4. Л у р ь е А.И. Полиномное представление уравнений теории упругости. -- В сб.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., 1970. 5. Р в а ч е в В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев, 1967.

УДК 539.311

В.Я. Р у б е н ч и к, канд.техн.наук
(Минский тракторный завод)

## ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Система двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода, рассмотренная в работах [1,2], представлена в виде одного уравнения в комплексных переменных. Показана связь с интегральным уравнением, предложенным Н.И. Мусхелишвили [3]. Использован аппарат плоской теории в комплексных переменных для определения перемещений и напряжений в области. Приведено решение для сосредоточенной силы, более краткое по сравнению с работой [4].

1. Интегральное уравнение в комплексных переменных имеет вид

$$\Phi_o - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma A(t,t_o)\,\mathrm{Re}\,\frac{\Phi\,dt}{t-t_o} = \tfrac{1}{2}p_o + \frac{1}{2\pi i}\frac{d\bar{t}_o}{dt_o}\int_\Gamma \frac{p\,dt}{\bar{t}-\bar{t}_o}, \quad (1)$$

где для краткости положено

$$A(t,t_o) = 1 - \frac{d\bar{t}_o}{dt_o}\,\frac{t-t_o}{\bar{t}-\bar{t}_o}\,; \quad \mathrm{Re}\,\frac{\Phi\,dt}{t-t_o} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Phi\,dt}{t-t_o} + \frac{\bar{\Phi}\,d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_o}\right).$$

Интегралы в (1) берутся по границе Γ области; $t = x + iy$ – комплексная координата точки контура; $dt = ie^{i\beta} ds$ – дифференциал комплексной переменной при обходе по контуру (при обходе в положительном направлении область остается слева; $ds$ – элемент длины граничной кривой; $\beta$ – угол наклона внешней нормали, который отсчитывается от оси x против часовой стрелки); чертой сверху помечены комплексно-сопряженные величины, индексом 0 – значения аргумента и функций в выделенной (нулевой) точке интегрального уравнения, вместо $\frac{dt_o}{dt_o}$ можно было бы писать – $e^{-2i\beta_o}$.

Неизвестной (искомой) является функция

$$\phi = \phi(t) = \frac{1}{4}(\sigma + i\tilde{\sigma}),$$

где $\sigma$ – сумма главных напряжений; $\tilde{\sigma}$ – сопряженная гармоническая функция.

В правой части (1) $p = p_n + i p_s$ – внешняя нагрузка ($p_n$, $p_s$ – нормальные и касательные внешние напряжения, приложенные к границе области, положительные направления соответствуют внешней нормали и касательной, оставляющей область слева).

В нулевой точке функция левой части (1) содержит неопределенность, раскрытие которой с использованием правила Лопиталя дает

$$\lim_{t \to t_o} A(t,t_o)\ \mathrm{Re}\frac{\phi\, dt}{t-t_o} = -ik_o ds\, \mathrm{Re}\,\phi_o, \qquad (2)$$

где $k_o$ – кривизна в нулевой точке, $k_o = \frac{d\beta}{ds}$.

Правая часть (1) содержит сингулярный интеграл, который в вычислительных целях должен быть представлен в форме с исключенной особенностью. Используя равенства из теории интегралов Коши

$$\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_o} = i(\pi - \alpha)\ ; \int_\Gamma \frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_o} = -i(\pi - \alpha) \qquad (3)$$

($\alpha = 0$ для конечной области, а в случае полубесконечной области, которая "в большом" представляет собой клин, $\alpha$ – угол раствора клина), получим

$$\text{правая часть (1)} = \frac{\alpha}{2\pi} p_o + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(p\frac{dt}{d\bar{t}} - \frac{d\bar{t}_o}{dt_o} p_o\right)\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_o}, \qquad (4)$$

причем раскрытие неопределенности в нулевой точке дает

$$\lim_{t\to t_o}(p\,e^{2i(\beta-\beta_o)}-p_o)\,\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_o}=(p'_o+2ik_o p_o)ds, \qquad (5)$$

где $p'_o$ -- производная в нулевой точке, $p'_o=\frac{dp}{ds}$ .

2. Интегральное уравнение, предложенное Н.И. Мусхелишвили, представим в форме

$$\varphi(t_o)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\varphi(t)\,d\,\ln\frac{t-t_o}{\bar{t}-\bar{t}_o}+\overline{\varphi(t)}\,d\frac{t-t_o}{\bar{t}-\bar{t}_o}\right]=$$

$$=\tfrac{1}{2}\,f(t_o)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)\,d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_o}\,. \qquad (6)$$

С функциями, представленными в (1), имеет место дифференциальная связь: $\varphi'(t)=\Phi$ ; $f'(t)=p$.

Переход от (6) к (1) выполняется с помощью дифференцирования по $t_o$ и преобразований интегрированием по частям по схеме:

Левая часть $\to\varphi(t_o)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\ln\frac{t-t_o}{\bar{t}-\bar{t}_o}\,\varphi'(t)\,dt+\frac{t-t_o}{\bar{t}-\bar{t}_o}\,\overline{\varphi'(t)}\,dt\right]\to$

$$\to\varphi(t_o)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(1-\frac{d\bar{t}_o}{dt_o}\,\frac{t-t_o}{\bar{t}-\bar{t}_o}\right)\left(\frac{\varphi'(t)dt}{t-t_o}+\frac{\overline{\varphi'(t)}\,d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_o}\right).$$

Правая часть $\to\frac{1}{2}\,f'(t_o)+\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\bar{t}_o}{dt_o}\int_\Gamma\frac{f(t)\,d\bar{t}}{(\bar{t}-\bar{t}_o)^2}\to$

$$\to\tfrac{1}{2}f'(t_o)+\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\bar{t}_o}{dt_o}\int_\Gamma\frac{f'(t)\,dt}{\bar{t}-\bar{t}_o}\,.$$

Эти выкладки требуют некоторых рассуждений, связанных с поведением функций вблизи точки $t_o$, которые для краткости опускаем.

Таким образом, приходим к (1). Возможен также непосредственный вывод уравнения (1), в общем сходный с выводом, предложенным Н.И. Мусхелишвили в отношении уравнения (6). Вывод уравнения в действительных переменных дан в работе [1].

Как уже упоминалось [1,2] , уравнение (1) является более удобным в вычислительных целях по сравнению с уравнением

(6), поскольку отпадает необходимость численного дифференцирования для определения напряжений (после решения уравнений), что бывает связано с потерей точности.

3. Решение интегрального уравнения (1) определяет функцию $\Phi = \Phi(t)$ и, следовательно, напряжения у поверхности. Для выражения напряжений в области и перемещений привлекается наряду с $\Phi(t)$ функция $\Psi(t)$, определяемая граничным условием задачи [3]:

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{dt}{d\bar{t}}\left[\bar{t}\,\Phi'(t) + \Psi(t)\right] = \bar{p}. \qquad (7)$$

Формула Коши определяет функции в области

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi(t)\,dt}{t-z}\;;\quad \Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi(t)\,dt}{(t-z)^2}\;;$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Psi(t)\,dt}{t-z}\;. \qquad (8)$$

Напряжения в области выражаются формулами

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z);$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)\right]. \qquad (9)$$

Перемещения с точностью до слагаемого, выражающего жесткий поворот тела, представляются в виде

$$2G(u+iv) = \varkappa\int\Phi(z)\,dz - z\,\overline{\Phi(z)} - \int\overline{\Psi(z)}\,d\bar{z}; \qquad (10)$$

где $G$ -- модуль упругости при сдвиге; $\varkappa = 3-4\mu$ -- при плоской деформации и $\varkappa = \frac{3-\mu}{1+\mu}$ -- при плоском напряженном состоянии ( $\mu$ -- коэффициент Пуассона).

Особое значение имеют перемещения точек граничной кривой. С применением (7) для замены $\overline{\Psi(z)}$ и несложного интегрирования по частям они определяются в виде

$$2G(u+iv) = (\varkappa+1)\int\Phi dt - \int p\,dt. \qquad (11)$$

Вычисляя относительное смещение, следует одну из точек принять за неподвижную, тогда в (10), (11) неопределенные интегралы заменяются определенными.

Интегральное уравнение (1) в случае многосвязных областей должно быть дополнено условиями однозначности смещений при

обходе внутренних контуров, которые на основании (11) имеют вид

$$(\chi+1)\int_{\Gamma_j}\phi dt = \int_{\Gamma_j} p dt, \quad j=1,2,\ldots \tag{12}$$

4. Обратимся к случаю действия на границу области сосредоточенной силы. Предполагаем, что сила одна. Это правомерно для полубесконечной области. В общем случае действия нескольких сил и распределенной нагрузки в правой части будет фигурировать соответствующая сумма.

Ориентируясь на переход

$$\int_{\Delta s} p ds = P, \quad \Delta s \to 0, \tag{13}$$

где $\Delta s$ -- малый участок контура; $P = P_n + iP_s$ -- сосредоточенная сила, замечаем, что помехой является первый член правой части (1). Поэтому применим подстановку $\Phi = \Phi_1 + \frac{1}{2} p$, что дает

$$L(\Phi_1, t_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[A(t,t_o)\mathrm{Re}\frac{pdt}{t-t_o} + \frac{d\bar{t}_o}{dt_o}\frac{pdt}{\bar{t}-\bar{t}_o}\right],$$

где через $L(\Phi_1, t_o)$ для краткости обозначена левая часть уравнения.

Считаем, что вне участка $\Delta s$ нагрузки нет, выполняем переход (13) и возвращаемся к прежнему обозначению искомой функции ($\Phi_1 = \Phi$), полагая, что в точке приложения силы она не определена. Имеем

$$L(\Phi, t_o) = \frac{1}{2\pi i} A(t_i, t_o)\mathrm{Re}\frac{ie^{i\beta_1}P}{t_1 - t_o} + \frac{1}{2\pi}\frac{d\bar{t}_o}{dt_o}\frac{e^{i\beta_1}P}{\bar{t}_1 - \bar{t}_o}, \tag{14}$$

где $t_1, \beta_1$ -- координата и угол наклона нормали точки приложения силы $P$.

В точке приложения силы искомая функция испытывает разрыв, что затрудняет численное решение. Устраняя особенность, положим

$$\Phi = \Phi^* + \frac{1}{2\pi}\frac{d\bar{t}}{dt}\frac{e^{i\beta_1}P}{\bar{t}_1 - \bar{t}}. \tag{15}$$

Вновь введенная функция $\Phi^*$ не имеет разрыва. Интегральное уравнение принимает вид

$$L(\phi^*, t_o) = \frac{1}{2\pi i} A(t_1, t_o) \operatorname{Re} \frac{ie^{i\beta} P}{t_1 - t_o} + \frac{1}{2\pi^2 i} \times$$

$$\times \int_\Gamma A(t, t_o) \operatorname{Re} \frac{e^{i\beta_1} P\, d\bar{t}}{(t - t_o)(\bar{t}_1 - \bar{t})} \cdot \qquad (16)$$

Последний интеграл, сингулярный в связи с делителем $(\bar{t}_1 - \bar{t})$, преобразуем с использованием формул (3) и получим окончательно

$$L(\phi^*, t_o) = \frac{1}{\pi i}\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) A(t_1, t_o) \operatorname{Re} \frac{ie^{i\beta_1} P}{t_1 - t_o} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2 i} \int_\Gamma \left[ A(t, t_o) \operatorname{Re} \frac{e^{i\beta_1} P\, d\bar{t}}{(t - t_o)(\bar{t}_1 - \bar{t})} - \right.$$

$$\left. - A(t_1, t_o) \operatorname{Re} \frac{e^{i\beta_1} P\, d\bar{t}}{(t_1 - t_o)(\bar{t}_1 - \bar{t})} \right] . \qquad (17)$$

Раскрытие неопределенности в точке $t = t_o$ выполняется аналогично (2), а в точке $t = t_1$ приводит к конечному результату (т.е. интеграл можно понимать в обычном смысле и заменять суммой), однако не предполагая, что сила P приложена в одной из узловых точек квадратурной формулы (чего всегда можно добиться), соответствующее довольно громоздкое выражение здесь опускаем.

Уравнение (14) полностью соответствует работе [3], но получено более кратким путем. Обработка особенности в точке приложения силы здесь выполнена иначе, чем в работе [3], что позволило исключить из вычислений длину граничной кривой и упростить программу.

Выполнена значительная работа по программированию задачи в универсальной форме применительно к полубесконечной односвязной области.

Р е з ю м е. Интегральное уравнение, имеющее функцию $\phi(t)$ в качестве неизвестной, позволяет эффективно решать плоскую задачу по крайней мере для полубесконечных односвязных областей.

Л и т е р а т у р а

1. Р у б е н ч и к В.Я. Интегральные уравнения для расчета напряжений у поверхности детали в плоском случае. -- В сб:

Теоретическая и прикладная механика, вып. 3. Минск, 1976. 2. Рубенчик В.Я. Концентрация напряжений вблизи выемок. -- "Вестник машиностроения", 1975, № 12. 3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954. 4. Рубенчик В.Я. Интегральные уравнения плоской теории упругости в случае сосредоточенных сил. -- В сб.: Теоретическая и прикладная механика, вып. 4. Минск, 1977.

УДК 539.3

Г.Е. Овсянников (Белорусский Государственный университет)

# РАВНОВЕСИЕ СФЕРИЧЕСКОГО КУПОЛА ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В работе рассматривается задача равновесия тонкой сферической оболочки, находящейся под действием внешнего давления, симметричного относительно произвольной точки сферы.

Будем предполагать, что срединная поверхность оболочки отнесена к системе географических координат на сфере $\varphi$, $\vartheta$, где $0 \le \varphi < 2\pi$ -- долгота; $0 \le \vartheta \le \vartheta_1$ -- широта, и по краю $\nu = \vartheta_1$ оболочка жестко защемлена. Предположим далее, что внешняя нагрузка $Q(\varphi, \vartheta)$ симметрична относительно точки с координатами $\varphi = \pi$, $\vartheta = \vartheta_0$ (рис. 1). Введем новую координатную систему $\psi$, $\tau$ таким образом, что точка $\varphi = \pi$, $\vartheta = \vartheta_0$ соответствует значению широты $\tau = 0$ и плоскости нулевых меридианов $\varphi = 0$, $\psi = 0$ совпадают. Для этой системы справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} \cos\tau &= \cos\vartheta\cos\vartheta_0 - \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos\varphi; \\ \operatorname{ctg}\psi &= \operatorname{ctg}\varphi\cos\vartheta_0 + \operatorname{ctg}\vartheta\sin\vartheta_0(\sin\varphi)^{-1} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

и внешняя нагрузка $Q$ зависит лишь от $\tau$.

Напряженное состояние сферической оболочки описывается системой двух уравнений относительно нормального прогиба $w$ и нормального вращения $\chi$ [1]

$$\left.\begin{aligned} L_1 w \equiv \left[\frac{h^2k^2}{12(1-\nu^2)}(\Delta + 1)^2 + 1\right](\Delta + 2)w = \\ \frac{(1-\nu+\Delta)Q}{Ehk^2}; \quad L_2\chi \equiv (\Delta+2)\chi = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$