

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра
«Теоретическая механика и механика материалов»

Л.Е. Реут

**ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ.
РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ**

Учебно-методическое пособие
для студентов машиностроительных специальностей

Электронное учебное издание

Реут Л.Е.

Динамические нагрузки . Расчеты на прочность при упругих колебаниях: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей (электронное учебное издание) / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2025. – 165 с.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории сверхтвёрдых и износостойких материалов Института порошковой металлургии им. академика О.В. Романа *Л.Н. Дьячкова*;

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Машиноведение и детали машин» Белорусского национального технического университета *Е.М. Дубовская*

Электронное учебное издание представляет собой пособие по дисциплине «Механика материалов» и рассматривает важный раздел курса, посвященный изучению поведения и расчетам на прочность деталей машин и механизмов, работающих в режиме динамических нагрузок и, в частности, в условиях механических колебаний. В пособии представлен теоретический аспект темы, а также предложен набор практических инженерных задач с решениями, анализом, пояснениями и методическими рекомендациями.

Учебное пособие предназначено для студентов всех технических специальностей дневной и заочной форм обучения высших технических учебных заведений, а также для преподавателей при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	5
1. Классификация механических колебаний. Кинематика колебательного процесса	5
2. Собственные колебания систем с одной степенью свободы	18
2.1. Продольные колебания	18
2.2. Поперечные (изгибные) колебания	21
2.3. Крутильные колебания	24
3. Свободные затухающие колебания систем с одной степенью свободы	28
4. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы	36
4.1. Вынужденные колебания без учета затухания	37
4.2. Вынужденные колебания с учетом затухания	41
4.3. Резонанс. Меры борьбы с резонансом	45
4.4. Напряжения и деформации при вынужденных колебаниях. Расчеты на прочность	50
4.5. Критическая скорость вращения вала	53
5. Параметрические колебания	59
6. Автоколебания	67
7. Учет массы упругой системы при колебаниях. Энергетические методы расчета	71
8. Колебания упругих систем с конечным числом степеней свободы	91
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	98
1. Собственные колебания систем с одной степенью свободы	98
2. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы. Расчеты на резонанс	125
3. Собственные колебания систем с двумя степенями свободы	161
Литература	165

ВВЕДЕНИЕ

Детали современных технических конструкций, машин и механизмов работают в сложных условиях нагружения, подвергаясь интенсивным динамическим нагрузкам, потенциально опасным для прочности элемента. Особую значимость среди таких нагрузок занимают *механические колебания упругих систем*, которые наблюдаются при работе всех механических устройств – колебания в быстровращающихся деталях из-за неуравновешенности вращающихся масс, колебания в трансмиссии машин, обусловленные работой двигателя и внешним воздействием, крутильные колебания коленчатых валов, колебания от соударения деталей, вибрации валов и осей при нарушении их жесткости, колебания, возникающие в массивных деталях, движущихся с большими скоростями при пуске и торможении, колебания при потере устойчивости, вибрации корпусов и станин и т.д.

Механические колебания вызывают опасные динамические процессы в элементах машин и сооружений и могут причинять значительный вред, создавая угрозу прочности весьма ответственным конструкциям, таким, как турбинные лопатки, воздушные винты самолетов и вертолетов, мосты, перекрытия промышленных зданий, фундаменты и др. Механические колебания могут нарушать условия эксплуатации оборудования, как например, вибрации станков, снижающие качество обработки деталей, или колебания приборов, установленных на вибрирующем основании (на автомобиле или самолете), нарушающие показания приборов. Колебания, возникающие в работающем механизме, часто являются причиной большинства аварий и катастроф, они приводят к возникновению резонансных явлений и аварийных ситуаций, вызывают усталостное разрушение элементов конструкций. Поэтому для увеличения надежности, безопасности и долговечности создание и проектирование современных машин должно осуществляться с учетом динамических нагрузок, теоретическим фундаментом для расчета которых является теория механических колебаний. Теория механических колебаний особенно важна в области машиностроения, приборостроения, авиа- и судостроения, промышленного и транспортного строительства, а также в некоторых других областях техники. Она служит научной основой решения многих технических задач, имеющих большое практическое значение.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Классификация механических колебаний.

Кинематика колебательного процесса

Процесс изменения физической величины вследствие многократного поочередного ее возрастания или убывания во времени относительно начального значения, называется *колебательным процессом* или просто *колебаниями*. Колебательные процессы отличаются большим разнообразием и чрезвычайно широко распространены в природе, технике и человеческой деятельности: колебания звезд, космических объектов и земной коры, приливы, отливы и климатические изменения на земле, распространение света, звука и гравитационные волны, колебания температуры и плотности воздуха, биение сердца и ритмы головного мозга, колебания атомов и молекул в твердом теле, силы тока в электрической цепи и колебания электромагнитных полей, колебания элементов и механических систем в работающих узлах, механизмах, строительных устройствах.

Теория колебаний представляет большой раздел физики и рассматривает колебания различной физической природы: магнитные и электромагнитные, звуковые, ультразвуковые, механические и электромеханические, колебания концентрации, давления, температур и т.д. В машиностроительных конструкциях, работающих в условиях силового воздействия, особую значимость имеют **механические колебания** упругих систем – движения, происходящие относительно положения равновесия с определенной периодичностью во времени, и приводящие ко многим негативным явлениям, опасным для прочности элемента. И хотя колебательные системы, с которыми приходится иметь дело в различных отраслях техники, имеют свою специфику и значительно отличаются друг от друга, колебательно-волновые процессы, происходящие в системах, подчиняются общим закономерностям и решаются на основе общих принципов и методов, составляющих содержание теории колебаний. Эта теория является частью механики, рассматривающей колебательные явления, и лежит в основе изучения всех видов механических колебаний – свободных, вынужденных, параметрических, автоколебаний. Предметом изучения данного курса являются механические колебания элементов строительных и машиностроительных конструкций, колеблющимися величинами в которых могут быть координата, скорость, ускорение, описывающие механическое движение, а также сила (момент), напряжения и деформации, изменяющиеся в процессе работы механизма и определяющие его прочность и жесткость .

Классификация механических колебаний

Все динамические нагрузки, в условиях которых работает большинство деталей машин и механизмов, вызывают колебания упругих систем, т.е. приводят их к движениям, обладающим в той или иной степени определенной повторяемостью во времени.

① В зависимости от постоянного или кратковременного поступления энергии к элементу различают —

- ★ Свободные колебания;
- ★ Вынужденные колебания.

***СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ** – это движения, которые совершает система при отсутствии непрерывно действующей силы, т.е. система, мгновенно выведенная из положения равновесия и предоставленная самой себе. **ВЫНУЖДЕННЫЕ** – это колебания, совершаемые системой, под действием постоянно действующей возмущающей силы.*

② В зависимости от учета влияния сил сопротивления колебательному процессу различают —

- ★ Затухающие колебания;
- ★ Незатухающие колебания.

В реальных условиях **свободные колебания** систем всегда **затухающие**, так как при колебательном процессе энергия, задаваемая системе кратковременным импульсом, постепенно расходуется на преодоление различного рода сил сопротивления — сил трения колеблющейся детали о воздух, сил трения в сопрягающихся деталях и сочленениях, сил внутреннего межчастичного (вязкого) трения в материале и др. В результате амплитуда колебательных движений постепенно уменьшается и колебания полностью прекращаются. Свободные колебания не представляют опасности для прочности конструкций, но имеют важное значение при расчете колебательного процесса.

При вынужденных колебаниях происходит непрерывная подпитка колебательной системы энергией в виде постоянно действующей возмущающей силы. Эта сила раскачивает систему, задавая ей определенный запас энергии, и восполняет потери энергии, не позволяя колебаниям затухать несмотря на действие сил сопротивления. Поэтому **вынужденные колебания** систем являются **незатухающими**.

Вопрос рассеяния энергии (диссипации) является сложной задачей, поскольку потери энергии имеют разнообразный характер и часто с неустановленным законом протекания, поэтому рассеянием энергии

в колебательных системах часто пренебрегают. Как известно, всякий колебательный процесс характеризуется превращением одного вида энергии в другой и при свободных колебаниях происходит превращение потенциальной энергии (для маятника – это энергия, определяемая положением системы, для упругих тел – это потенциальная энергия деформации) в кинетическую энергию движения, и наоборот. Если рассеянием энергии пренебречь, то при отсутствии энергетической подпитки сумма потенциальной и кинетической энергий остается величиной постоянной и колебания не затухают. Такие *незатухающие свободные колебания* называются **собственными колебаниями**, поскольку их частота определяется только собственными свойствами самой системы – ее массой, размерами, геометрией и жесткостью. В действительности свободных колебаний без затухания в природе не существует, поэтому **собственные колебания** рассматриваются только как *теоретические*. При вынужденных колебаниях система, управляемая внешней силой, совершает колебания с частотой, задаваемой возмущающей силой.

③ В зависимости от характера колебательного движения различают –

- ★ Периодические колебания;
- ★ Непериодические колебания.

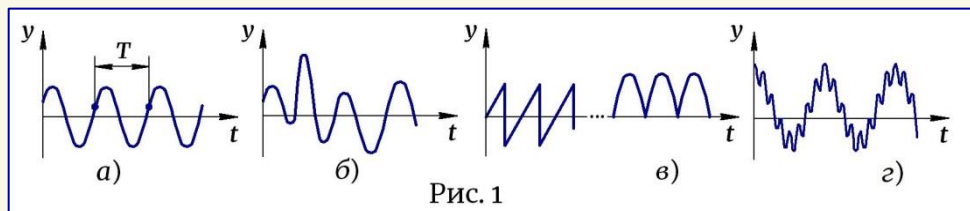
ПЕРИОДИЧЕСКИМ называется процесс, при котором колеблющаяся величина, взятая в любой момент времени t , через промежуток времени T , называемый **ПЕРИОДОМ**, принимает то же значение:

$$f(t+T) = f(t) \text{ – математическая запись периодической функции.}$$

НЕПЕРИОДИЧЕСКИМИ называются все остальные процессы, не удовлетворяющие условию периодичности.

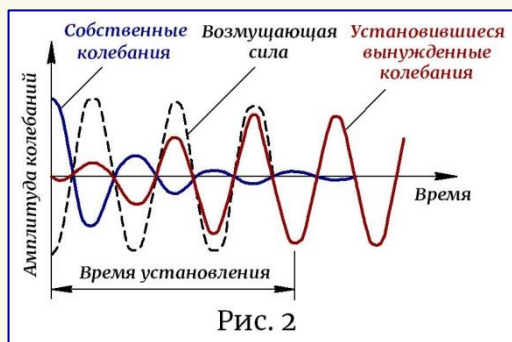
Простейшим примером *периодических колебаний* являются **гармонические** колебания, при которых изменение физической величины происходит по *синусоидальному* закону или закону *косинуса* (рис. 1, а). **Непериодические** – это колебания, которые не подчиняются закону периодической функции (рис. 1, б). Такие колебания не имеют постоянного периода колебаний и являются процессами, в которых состояние системы повторяется через произвольные и, как правило, неодинаковые интервалы времени. Непериодические колебания гораздо разнообразнее периодических и на практике встречаются чаще. Примером непериодических колебаний являются изменения атмосферного давления, колебания уровня моря, численности популяций в природных условиях, сейсмические колебания и др. Встречаются

также *периодические негармонические* колебания (рис. 1, в) и колебания *непериодические негармонические* (рис. 1, г). Периодические колебания могут быть как простыми, так и сложными, представляющими собой наложение нескольких гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами и частотами. Непериодические колебания всегда являются сложными.



Работа механических конструкций происходит чаще всего в условиях периодически действующих нагрузок, а поэтому, колебания механических систем часто имеют характер, близкий к гармоническому. Источником возникновения периодических нагрузок являются различные машины и механизмы – электродвигатели, вентиляторы, центрифуги, грохоты, металлообрабатывающие станки, дробилки, насосы, поршневые компрессоры, штамповочные машины и т.д.

Под действием периодической силы в колебательной системе возбуждаются два процесса – свободные колебания с собственной частотой, определяемой свойствами системы, и вынужденные колебания с частотой возмущающей силы. Но с течением времени свободные колебания из-за потери энергии прекращаются и остаются только вынужденные колебания – их называют **установившимися** (рис. 2). Если



внешняя сила изменяется по гармоническому закону, то при установившихся вынужденных колебаниях в механической системе устанавливается периодический режим с частотой действующей возмущающей силы, но с возможным отставанием по фазе. Время установления вынужденных колебаний примерно равно време-

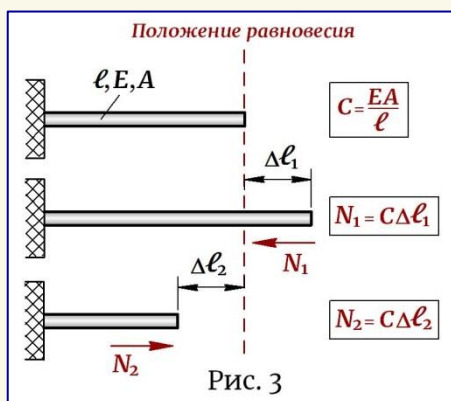
ни затухания свободных колебаний в колебательной системе. Затухающие колебания играют роль только на этапе установления колебаний, поэтому при расчете вынужденных колебаний в установившемся режиме свободные колебания системы не рассматриваются.

④ По характеру изменения восстанавливающей силы различают —

- ★ Линейные колебания;
- ★ Нелинейные колебания.

При отклонении системы от положения равновесия возникает возвращающая сила, которая всегда направлена к положению равновесия и увеличивается при удалении от этого положения. Возвращающая сила может иметь различную природу: при колебаниях маятника эта сила является следствием действия силы тяжести, а в упругих телах такой возвращающей силой является сила упругости, поэтому колебания таких тел называются *упругими* (колебания камертона, струны и др.). И если между возвращающей силой и отклонением системы от положения равновесия существует пропорциональная зависимость, такие колебания называются *линейными* колебаниями.

При колебаниях механических систем отклонение элемента от положения равновесия является его деформацией, которая связана с силой упругости пропорциональной зависимостью, называемой законом Гука (рис. 3) и где в качестве коэффициента пропорциональности выступает жесткость элемента (продольная, изгибная, кру-



тильная). Поэтому колебания упругих элементов, подчиняющихся закону Гука, являются *линейными* колебаниями.

Колебания элементов, материал которых не подчиняется закону Гука, являются *нелинейными*. К таким материалам относятся композитные материалы, пластики, полимеры и разного рода неоднородные материалы с выраженными вязкоупругими свойствами.

⑤ По виду деформаций различают —

- ★ Продольные колебания;
- ★ Поперечные (изгибные) колебания;
- ★ Крутильные колебания.

⑥ Классификация по числу степеней свободы —

Под числом степеней свободы в динамике машин понимают число независимых геометрических координат, определяющих положение всех масс колебательной системы в каждый момент времени.

Всякое свободное материальное тело под действием силы (момента) способно получать перемещение соответствующего направления, которое в трехмерной системе координат можно представить в виде шести составляющих – трех поступательных перемещений в направлении осей $X - Y - Z$ и трех вращательных относительно этих же осей. А это значит, что каждое твердое тело в трехмерном пространстве обладает шестью степенями свободы и его колебательное движение может быть полностью описано в виде комбинации шести простейших движений. Для плоских систем, обладающих тремя степенями свободы, таких колебательных движений будет три.

По числу степеней свободы колебательные системы разделяются на классы —

- ★ Системы с одной степенью свободы;
- ★ Системы с конечным числом степеней свободы;
- ★ Системы с бесчисленным числом степеней свободы.

В системах с *одной степенью свободы* положение колеблющегося элемента в любой момент времени определяется одной единственной координатой, т.е. направлением, по которому можно обеспечить полную фиксацию геометрического состояния системы. В качестве точки, координата которой определяет положение колеблющейся системы, рассматривается некая сосредоточенная масса " m ", расположенная в местах размещения различных механизмов и машин, создающих динамическое воздействие на упругий элемент и вызывающих его колебания. Сам упругий элемент рассматривается как невесомый, его массой пренебрегают либо она приводится в точку приложения основной массы " m " — источника колебаний (рис. 4). Однако при этом упругие свойства элемента сохраняются и учитываются при выполнении расчетов.

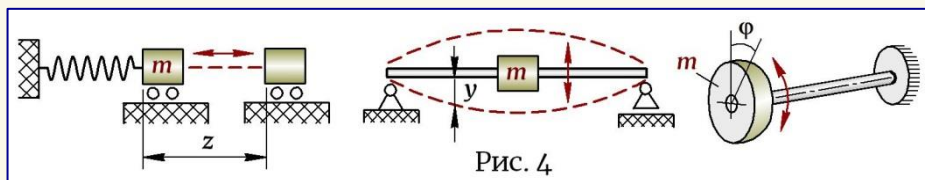


Рис. 4

Система с *конечным числом степеней свободы* — это система с дискретно расположенными массами $m_1, m_2, m_3 \dots$, сосредоточенными в характерных точках и узлах системы (рис. 5). Остальные элементы конструкции принимаются невесомыми, но сохраняющими свои упругие свойства. Рассредоточение дискретных масс может быть

различным и давать различные решения, поэтому для получения необходимой точности расчета важным является правильный выбор

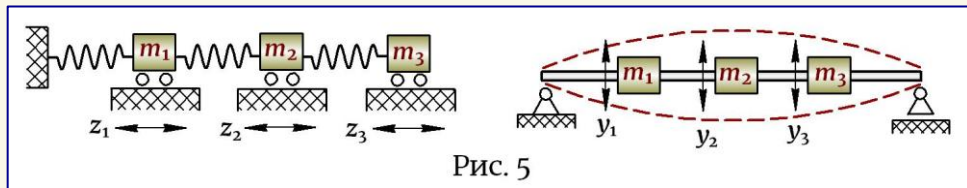


Рис. 5

расчетной модели. Иногда точное решение обеспечивается несколькими сосредоточенными массами, достаточными для описания колебательного процесса, но если требуется более высокая точность, число степеней свободы (число дискретных масс) следует увеличить, но объем вычислений при этом значительно возрастает.

Всякая реальная упругая система, если ее массу рассматривать как совокупность распределенных элементарных масс, является системой с бесчисленным числом степеней свободы, так как для определения положения всех масс в каждый момент времени необходимо рассматривать бесчисленное множество координат. Однако при такой постановке задачи расчет колебательного процесса представляется крайне сложным и используется только для самых простейших систем – балок, пластин, некоторых типов оболочек. Поэтому во многих технических расчетах, допуская некоторую погрешность, колебательную систему с бесконечно большим числом степеней свободы заменяют системой с дискретно расположенными массами.

Кинематика колебательного процесса

Рассмотрим некую материальную точку массой " m ", находящуюся первоначально в положении равновесия, а затем отведенную от этого положения на расстояние z (рис. 6). Как только происходит отклонение от положения равновесия, возникает восстанавливающая сила F , стремящаяся вернуть точку к исходному состоянию. При линейных колебаниях эта сила пропорциональна отклонению —

$$F = Cz, \quad (1)$$

где C – коэффициент пропорциональности.

Восстанавливающая сила имеет наибольшее значение в наиболее удаленном положении точки и равна нулю на линии равновесия.

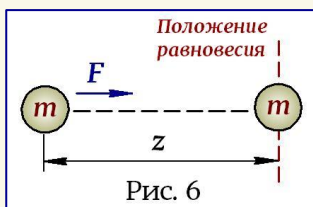


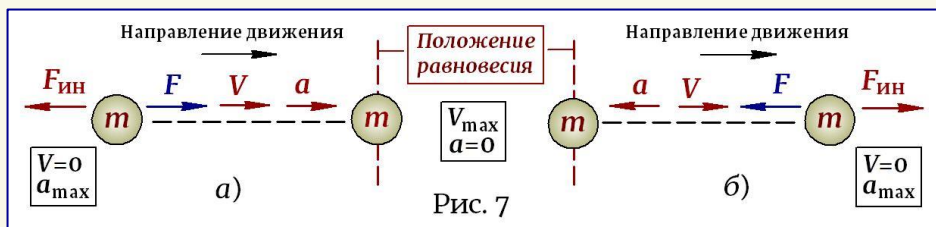
Рис. 6

Возвращение точки к равновесному положению (рис. 7, а) происходит со скоростью V , направленной в сторону движения, и ускорением a , изменяющимися на этом пути: при амплитудном смещении точки скорость равна нулю, а ускорение максимально, на линии равновесия наоборот – скорость максимальна, а ускорение равно нулю. Сила инерции, всегда возникающая при ускорении, стремится препятствовать изменению скорости движения – ее увеличению от нуля до $V_{\max}$, поэтому обратна ускорению по направлению и с учетом его изменения во времени равна –

$$F_{\text{ин}} = -ma = -m \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (2)$$

изменяясь по такому же закону, как и восстанавливающая сила. Знак «минус» в выражении (2) означает, что ускорение и сила инерции всегда противоположны по направлению.

При достижении положения равновесия под действием восстанавливающей силы вследствие того, что скорость точки здесь максимальна, масса " m " по инерции переходит через это положение и начинает от него удаляться (рис. 7, б). На этом пути скорость, всегда имеющая вектор по направлению движения, убывает, а ускорение меняет направление к положению равновесия и растет, достигая максимума в амплитудном положении точки. Восстанавливающая сила при переходе через положение равновесия и движении от него тоже изменяет свое направление, стремясь вернуть точку к исходному состоянию, и растет пропорционально отклонению. Также изменяет направление и сила инерции (2), теперь препятствуя уменьшению скорости от $V_{\max}$ до нуля. При достижении точкой амплитудного положения начинается движение в обратную сторону и весь процесс повторяется.



Таким образом, при колебательном процессе восстанавливающие и инерционные силы постоянно изменяются и по величине, и по направлению, в результате чего происходит непрерывное превращение потенциальной энергии положения системы (при упругих коле-

баниях – потенциальной энергии деформации) в кинетическую энергию, связанную с инерционными силами, и обратно.

Примечание.

Следует понимать, что для тела, движущегося с ускорением, никакой силы инерции (в понимании воздействия на него) в действительности не существует. И если инертность тела как стремление противостоять изменениям и сохранить состояние движения является вполне понятным внутренним свойством всех материальных тел, то четкого определения понятию силы инерции в современной физике до сих пор нет. Ее рассматривают и как фиктивную, и как реальную силу. Для описания ускоренного движения в неинерциальных системах отсчета сила инерции является фиктивной, условной, вводимой в расчет как математический прием для возможности использования законов статики и динамики при решении динамических задач. Однако эта «несуществующая» сила, фиктивная по отношению к ускоряемому телу, является вполне реальной, проявляясь в воздействии на другие тела, препятствующие движению тела.

Описание колебательного процесса, как и других динамических задач, основано на концепции статического равновесия, которое может быть обеспечено, если к движущейся с ускорением системе приложить дополнительную силу – силу инерции системы, которая, согласно принципу Даламбера, будет уравниваться всеми действующими на систему силами. Учет сил инерции позволяет для составления уравнений движения при колебаниях применять уравнения статики, которые от классических статических уравнений равновесия отличаются по сути именно наличием инерционных сил. Однако при рассмотрении такого «равновесия» следует понимать, что речь идет о равновесии в данный момент времени (мгновение), поэтому при динамических нагрузках предполагают равновесие не вообще, а так называемое *мгновенное* или *динамическое* равновесие. И тогда на основании выражений (1) и (2) получаем **уравнение свободных гармонических колебаний (без учета затухания)**:

$$\sum Z = 0: F = F_{\text{ин}} \rightarrow Cz = -m \frac{d^2 z}{dt^2} \rightarrow \boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0}, \quad (3)$$

где

$$\boxed{\omega^2 = \frac{C}{m}}, \quad (4)$$

а значение $\boxed{\omega}$ — это **круговая (циклическая) частота колебаний** — число колебаний, совершаемых за время 2π секунд [рад/сек]. Без учета затухания — это **круговая частота собственных колебаний**, которая,

как сказано выше, зависит только от свойств самой системы – ее массы, размеров, геометрии и жесткости. В теоретические формулы входит значение ω , а в технике обычно используют **линейную частоту (техническую) колебаний** $\boxed{v}$ – число колебаний за 1 секунду, измеряемую в $\boxed{1/\text{сек} = \text{Гц}}$, которая связана с круговой как $\boxed{\omega = 2\pi v}$.

Решение уравнения гармонических колебаний (3) позволяет получить основные характеристики колебательного процесса:

① Отклонение системы от положения равновесия в момент t :

$$\boxed{z = A \sin \varphi = A \sin(\omega t + \varphi_0)} , \quad (5)$$

где $\varphi = (\omega t + \varphi_0)$ – *фаза колебания* – физическая величина, описывающая состояние колебательной системы в данный момент времени $\boxed{\text{[рад]}}$; φ_0 – *начальная фаза колебания* в момент времени $t = 0$ – смещение колеблющейся величины от момента отсчета времени, т.е. доля периода, прошедшая от начала колебаний до начала отсчета (иногда начальная фаза вводится с противоположным знаком); A – *амплитуда колебаний* – наибольшее по модулю отклонение системы от положения равновесия.

② Мгновенная скорость:

$$\boxed{V = \frac{dz}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)} . \quad (6)$$

Примечание.

Альтернативной формой гармонических колебаний являются колебания, изменяющиеся по закону косинуса – $\boxed{z = A \cos(\omega t + \psi_0)}$, где ψ_0 – новая введенная начальная фаза, равная $\boxed{\psi_0 = \varphi_0 - \pi/2}$. Поскольку синус и косинус преобразуются друг в друга сдвигом аргумента на $\pi/2$, в заданном через косинус уравнении колебаний нетрудно доказать тригонометрически $\rightarrow \boxed{\cos(\omega t + \psi_0) = \sin(\omega t + \varphi_0)}$, что соответствует синусоидальной функции (5). А значит, колебания, описываемые синусом и косинусом, представляют собой колебания, сдвинутые по фазе на $\pi/2$ (рис. 8). Следовательно, из анализа значений (5) и (6) видно, что такой же сдвиг фаз возникает между скоростью и колеблющейся величиной и при любом законе колебаний (через $\sin$ или $\cos$) скорость всегда опережает колеблющуюся величину по фазе на $\pi/2$.

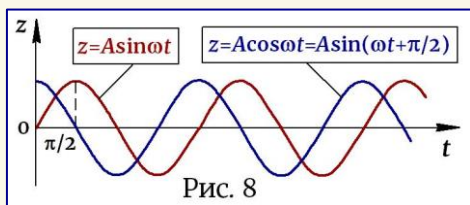


Рис. 8

колеблющейся величиной и при любом законе колебаний (через $\sin$ или $\cos$) скорость всегда опережает колеблющуюся величину по фазе на $\pi/2$.

③ Ускорение:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) . \quad (7)$$

Из выражений (6) и (7) видно, что скорость V и ускорение a , изменяющиеся по закону косинуса и синуса, смещены по фазе на $\pi/2$, поскольку $\cos(\omega t + \varphi_0) = \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)$, и имеют такую же частоту колебаний, как и колеблющаяся величина Z (5), принимая амплитудные значения, равные $V_{\max} = A\omega$ и $a_{\max} = A\omega^2$. Анализ значений (5) и (7) также показывает, что ускорение a и отклонение системы Z смещены по фазе на π , т.е. колебание этих величин происходит в противофазе, так как при одновременном прохождении через нуль они имеют противоположные направления (рис. 9). Кроме того, из выражений (7) и (5) видно, что $a = -\omega^2 Z$, т.е. при гармонических колебаниях ускорение пропорционально отклонению системы от положения равновесия, что соответствует уравнению (3).

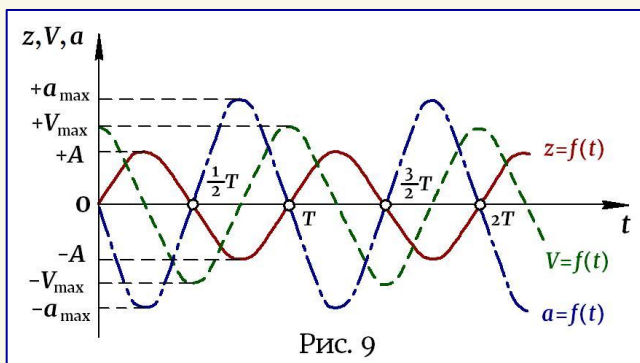


Рис. 9

④ Амплитуда A и начальная фаза φ_0 колебаний определяются из начальных условий колебательного процесса для момента времени $t = 0$, когда $Z = Z_0$ и $V = V_0$, и на основании (5) и (6) равны —

$$Z_0 = A \sin \varphi_0 ; V_0 = A\omega \cos \varphi_0 , \quad (8)$$

откуда:

$$\varphi_0 = \arctg (Z_0 \omega / V_0) ; A = \sqrt{ Z_0^2 + (V_0 / \omega)^2 } . \quad (9)$$

Примечание.

Как видно из формулы (9), при наличии ненулевой начальной скорости амплитуда колебаний A , равная величине максимального смещения тела от положения равновесия, может превосходить начальное смещение Z_0 .

⑤ **Период колебаний T** — промежуток времени, в течение которого совершается одно полное колебание, т.е. колеблющаяся величина принимает первоначальное значение (по величине и направлению — для векторных величин, по величине и знаку — для скалярных). Так как функция " $\sin$ " при изменении аргумента на 2π повторяет свое значение, то при увеличении времени t на величину T аргумент φ , стоящий под знаком синуса (5), изменится на 2π —

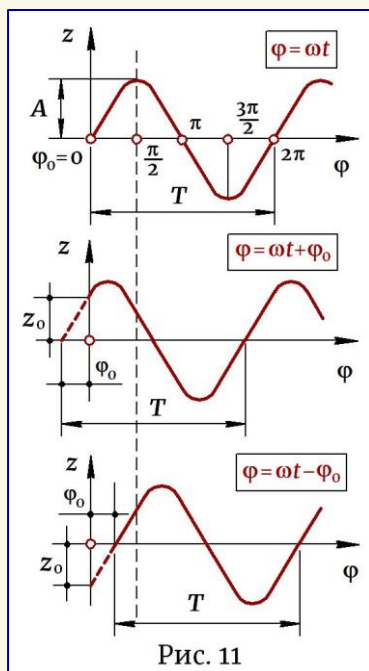
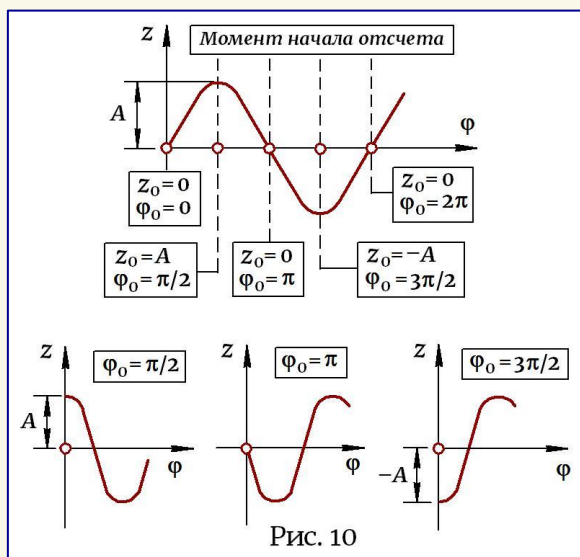
$$[\omega(t+T) + \varphi_0] - [\omega t + \varphi_0] = 2\pi, \text{ откуда:}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \text{ [сек]}. \quad (10)$$

Примечание.

Значение (10) не включает z_0 и V_0 , а значит, период колебаний не зависит от начальных условий движения.

Начальная фаза колебаний φ_0 в функции (5) определяется моментом начала отсчета времени (рис. 10) и может быть как положительной, так и отрицательной: положительную откладывают влево от начала координат, отрицательную — вправо (рис. 11).



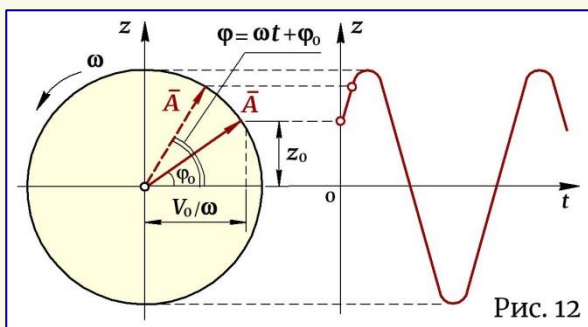
Примечание.

Решение дифференциального уравнения (3) может быть представлено в виде — $\boxed{z = k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t}$, где z — отклонение колеблющейся системы от положения равновесия в момент времени t с соответствующей

скоростью, равной — $\boxed{V = \frac{dz}{dt} = -k_1 \omega \sin \omega t + k_2 \omega \cos \omega t}$. Постоянные ин-

тегрирования k_1 и k_2 в этих выражениях определяются из начальных условий колебательного процесса — при $t = 0 \rightarrow z = z_0$ и $V = V_0$, откуда получаем: $k_1 = z_0$; $k_2 = V_0/\omega$. Тогда решение уравнения гармонических колебаний принимает вид — $\boxed{z = z_0 \cos \omega t + (V_0/\omega) \sin \omega t}$, из которого

видно, что гармоническое колебание с произвольной начальной фазой, отличной от нуля, может быть представлено в виде суммы двух гармонических колебаний с нулевыми начальными фазами, происходящих по законам



синуса и косинуса, при соответствующем подборе амплитуд составляющих. Несложно доказать, что запись уравнения колебаний в полученном виде полностью соответствует решению (5), рассмотренному выше. Если гармонические колебания представить в виде **векторной диа-**

граммы (рис. 12) как вращение вектора, образующего с осью угол Φ_0 , вокруг неподвижного центра с постоянной угловой скоростью ω , то проекции вектора на оси будут изменяться по гармоническому закону: с амплитудой A , равной длине вектора; с круговой частотой ω , равной угловой скорости вращения, и с начальной фазой Φ_0 , равной углу, образованному вектором с осью. В начальный момент времени проекции вектора на оси равны: $\boxed{z_0 = A \sin \Phi_0}$ и $\boxed{V_0/\omega = A \cos \Phi_0}$ (линейная и угловая

скорости связаны соотношением $V = \omega R$, а в момент времени $t = 0 \rightarrow R = A \cos \Phi_0$), что видно из рис. 12 и соответствует значениям (8). Если эти величины подставить в уравнение гармонических колебаний, то после преобразования оно будет приведено к амплитудному виду (5) —

$$z = z_0 \cos \omega t + \left(\frac{V_0}{\omega} \right) \sin \omega t = A \sin \Phi_0 \cos \omega t + A \cos \Phi_0 \sin \omega t = \boxed{A \sin(\omega t + \Phi_0)},$$

называемому «кинематическим уравнением гармонических колебаний».

2. Собственные колебания систем с одной степенью свободы

2.1. Продольные колебания

К продольным колебаниям относятся такие колебательные движения, при которых перемещения всех точек упругого элемента происходят вдоль оси стержня, в результате чего возникает его удлинение или укорочение, поэтому продольные колебания называют *колебаниями растяжения-сжатия*.

Рассмотрим упругий элемент, находящийся в покое и нагруженный на конце грузом Q (рис. 13, а). Пренебрегая собственной массой элемента, считаем, что он растягивается только под действием груза и в результате принимает новое *положение статического равновесия*. В этом положении продольная сила упругости N_{cm} , возникающая в элементе, определяется методом сечений и равна (рис. 13, б):

$$\sum Z = 0: N_{cm} = Q. \quad (11)$$

Далее отведем упругий элемент от положения *статического равновесия* (рис. 13, а) на расстояние Z и предоставим ему возможность свободно колебаться относительно линии равновесия. Колебательную систему будем рассматривать как консервативную, в которой энергия не убывает и колебательный процесс не затухает, а значит, свободные колебания здесь являются *собственными колебаниями*.

Примечание.

Как было сказано выше, в реальных системах всегда имеет место рассеяние энергии. Однако во многих случаях оно происходит медленно и незначительно влияет на колебания, поэтому рассеянием энергии при свободных колебаниях пренебрегают и рассматривают колебательную систему в идеализированном виде как консервативную систему.

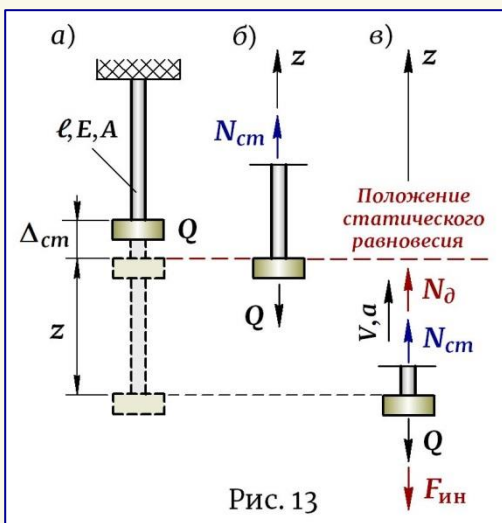


Рис. 13

Так как элемент предполагается невесомым, его положение в каждый момент времени будет определяться единственной координатой

Z — координатой положения груза Q , а значит, такая система является системой с одной степенью свободы.

Рассмотрим полную систему сил, действующих на элемент в смещенном от равновесия состоянии (рис. 13, в). Элемент по-прежнему подвергается действию груза Q и силы N_{cm} , вызываемой этим грузом. Но при смещении элемента от положения равновесия возникает восстанавливающая сила — динамическая сила упругости N_{∂} , которая стремится вернуть элемент к исходному состоянию. Возвращение элемента к положению равновесия происходит со скоростью V и ускорением a , направленными по направлению движения, как это было сказано ранее (рис. 7, а), и так как это движение является ускоренным, возникает сила инерции $F_{ин}$, препятствующая возрастанию скорости и направленная в сторону, обратную ускорению.

На основании принципа Даламбера рассматриваем *мгновенное (динамическое)* равновесие системы —

$$\sum Z = 0: N_{cm} + N_{\partial} = Q + F_{ин}, \quad (12)$$

откуда с учетом равенства (11) получаем:
$$N_{\partial} = F_{ин}. \quad (13)$$

Вывод. При вертикальном расположении элемента вес груза не изменяет характер колебаний и не влияет на колебательный процесс. Происходит лишь смещение положения равновесия системы и дальнейшие колебания происходят относительно нового (статического) положения равновесия. Параметры колебаний при этом не изменяются.

Динамическая сила упругости N_{∂} , возвращающая элемент к положению равновесия, пропорциональна его отклонению (линейные колебания), а сила инерции $F_{ин}$ пропорциональна ускорению, и тогда согласно значениям (1) и (2) $\rightarrow \boxed{N_{\partial}} = Cz; \boxed{F_{ин}} = -ma = -m \frac{d^2 z}{dt^2},$

которые подставляем в (13) $\rightarrow Cz = -m \frac{d^2 z}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{C}{m} z = 0$ и получаем *уравнение собственных продольных гармонических колебаний:*

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0}, \quad (14)$$

где $\omega_0^2 = C/m$ — **круговая частота собственных колебаний**. (15)

Решением уравнения (14) являются основные характеристики колебательного процесса z, V, a, A, φ_0, T , определяемые по формулам (5)-(7), (9) и (10), рассмотренным выше.

Установим физический смысл коэффициента пропорциональности C , определяющего круговую частоту собственных колебаний (15).

При продольном нагружении упругого элемента его статическая деформация, согласно закону Гука, пропорциональна силе упругости

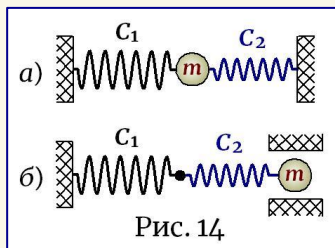
и определяется как — $\Delta_{cm} = \frac{N_{cm}\ell}{EA} = \frac{N_{cm}}{EA/\ell} = \frac{N_{cm}}{C}$, т.е. $N_{cm} = C\Delta_{cm}$,

а значит, коэффициентом пропорциональности $C = EA/\ell$ при растяжении-сжатии является **продольная жесткость элемента**, которая зависит исключительно от геометрии элемента, его размеров и механических свойств, но *не зависит от способа нагружения* — будет элемент нагружаться статически или динамически.

Примечание.

Если колебаниям подвергается конструкция из соединенных элементов, то при параллельном их соединении (рис. 14, а) жесткость системы определяется как $C = C_1 + C_2$, а при после-

довательном (рис. 14, б) — $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.



И тогда на основании сказанного **круговая частота колебаний** (15) с учетом равенства $N_{cm} = Q$ (11) может быть определена как:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{N_{cm}/\Delta_{cm}}{Q/g}} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}}, \quad (16)$$

где m — масса груза Q ; g — ускорение свободного падения.

Если рассмотреть состояние элемента, нагруженного в направлении действия груза Q единичной силой $\bar{Q} = 1$, приложенной в том же сечении, то статическую деформацию от этого груза можно представить в виде $\Delta_{cm} = \delta_{11}Q$, где δ_{11} — перемещение сечения от единич-

ной силы, определяемое методом Максвелла-Мора. И тогда становится очевидным, что $\boxed{\delta_{11} = 1/C}$, а значит, по физическому смыслу перемещение δ_{11} представляет собой *податливость* упругого элемента – величину, обратную его жесткости, а круговая частота колебаний (16) может быть представлена в виде:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}}. \quad (17)$$

Метод использования перемещений " δ " от единичных нагрузок является наиболее удобным при исследовании колебаний систем с двумя и более числом степеней свободы.

Таким образом, представленные выше формулы показывают, что амплитуда A и начальная фаза колебаний φ_0 определяются начальными условиями (9), а круговая частота ω_0 (16,17) и период T (10) определяются только внутренними параметрами самой колебательной системы – ее массой, геометрией, схемой нагружения и жесткостью, но не зависят от начального возмущения. При этом частота собственных колебаний возрастает с увеличением жесткости системы и уменьшением массы.

2.2. Поперечные (изгибные) колебания

Поперечные колебания называют *колебаниями изгиба*, при которых перемещения точек происходят по направлению, перпендикулярному продольной оси элемента. Примером поперечных колебаний являются колебания валов, вызванные наличием несбалансированных масс – маховиков, шкивов, зубчатых колес и т.п.; колебания стержня от действия ударной нагрузки, производимой в поперечном к оси направлении; колебания различных строительных сооружений – мостов, перекрытий; колебания упругой балки с установленным на ней механизмом, являющимся возбудителем колебаний, например, электродвигателем, где вследствие неуравновешенности ротора возникает центробежная сила инерции, вертикальная составляющая которой вызывает колебания опорной конструкции, в результате чего балка получает поперечные упругие деформации, изгибаясь в одну и другую сторону относительно начального положения равновесия.

В пространственных системах каждая материальная точка обладает шестью степенями свободы и способна в заданной системе координат совершать колебания по шести направлениям – трем линейным и трем угловым. Однако расчет таких систем является сложной задачей, поэтому расчетную схему упрощают – собственными массами конструкций пренебрегают, а установленные на них грузы, считая их малыми по размерам, рассматривают как сосредоточенные массы, для которых также, если это допустимо техническими нормами, с целью уменьшения сложности и объема расчетов снижают расчетное число степеней свободы, рассматривая только наиболее важные для прочности направления колебаний.

Плоские конструкции обладают тремя степенями свободы и при нагружении каждое их сечение, а значит, и сечения расположения грузов, имеют возможность колебания в плоскости по трем направлениям – двум линейным (вдоль и поперек оси) и одному угловому (на повороте сечения). Поэтому плоская система, если считать ее невесомой, является системой с $3n$ числом степеней свободы, где n – количество сосредоточенных масс, установленных на конструкции, и где каждая колеблющаяся масса способна создавать в плоскости продольные, поперечные и угловые колебания.

Однако при расчете плоских систем, работающих на изгиб, продольными и угловыми колебаниями, как правило, пренебрегают, так как они по сравнению с поперечными колебаниями опасности для прочности не представляют и в расчетах не учитываются. Поэтому невесомая балка с установленным на ней, например, одним грузом рассматривается как *одномассовая система* с одной степенью свободы, в которой положение колеблющейся системы в каждый момент времени определяется единственной поперечной координатой – координатой положения воздействующего на нее груза.

Примечание.

В случае, если установленный груз имеет значительные размеры, происходит смещение его центра масс и положение груза определяется не только прогибом балки в месте его установки, но и углом поворота сечения. Такая одномассовая система имеет две степени свободы (рис. 15).

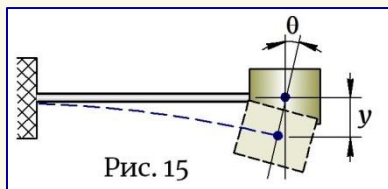


Рис. 15

Теория поперечных колебаний не отличается от теории продольных колебаний. Учитывая вес груза, прогибающего балку при установке, здесь также колебания происходят относительно нового **положения статического равновесия** (рис. 16), что не изменяет характер колебаний и не влияет на колебательный процесс.

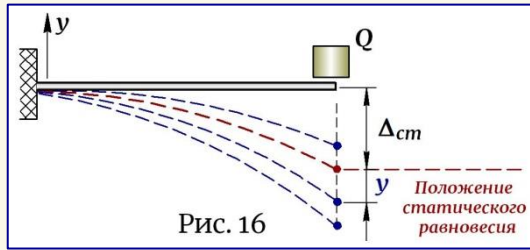


Рис. 16

Рассматривая на основании принципа Даламбера динамическое равновесие балки, получаем **уравнение собственных поперечных гармонических колебаний** в виде:

$$\left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \right], \quad (18)$$

где $\omega_0^2 = C/m$ — **круговая частота собственных колебаний**; C — **изгибная жесткость балки**, определяемая расчетной схемой балки, ее длиной, размерами и формой сечения, свойствами материала.

Решение уравнения (18) позволяет получить основные параметры колебательного процесса y, V, a, A, φ_0, T , определяемые по формулам (5)-(7), (9) и (10), рассмотренным выше. Круговая частота собственных поперечных колебаний ω_0 определяется свойствами колебательной системы и может быть вычислена по формуле (16), где

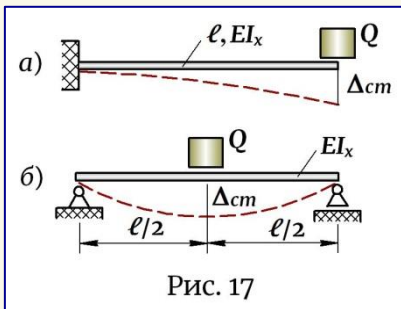


Рис. 17

прогиб $\Delta_{см}$ от веса груза зависит от расчетной схемы балки и для простейших случаев нагружения равен:

— балка (рис. 17, а) — $\Delta_{см} = \frac{Q\ell^3}{3EI_x}$;

— балка (рис. 17, б) — $\Delta_{см} = \frac{Q\ell^3}{48EI_x}$.

Для более сложных расчетных схем балок, а также для плоских рам, где возможны вертикальные, горизонтальные и угловые колебания, статическое перемещение в направлении колебаний может быть определено с помощью интеграла Максвелла-Мора или методом перемножения эпюр, а вычисление круговой частоты колебаний может быть выполнено по формуле (17).

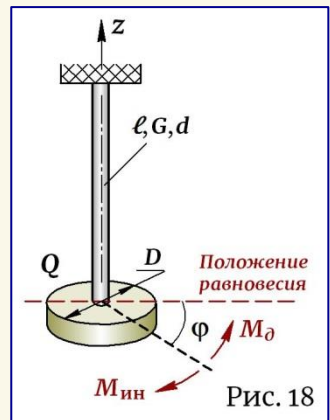
2.3. Крутильные колебания

Крутильные колебания – это периодические *угловые колебания* в плоскости вращения сосредоточенных масс, установленных на валу и вызывающих под действием циклически меняющегося крутящего момента закручивание и раскручивание вала, создавая для всех точек крутильной системы окружные движения переменного направления вокруг оси вращения. Поперечные сечения вала при этом остаются плоскими и поворачиваются вокруг оси как жёсткие диски.

Крутильным колебаниям подвергаются коленчатые валы автомобильных и тракторных двигателей, которые возникают вследствие действия переменных по величине и направлению крутящих моментов и которые могут привести к поломке как самого вала, так и любых вспомогательных механизмов, приводимых им в движение. Крутильные колебания испытывают подвижные элементы кривошипно-шатунного механизма, валы буровых штанг, элементы двигателей в судостроении – коленчатые и гребные валы с навешенными на них массами (цилиндрами, маховиками, муфтами), соединенные в единую систему валопровода, валы ременных передач при изменении направления вращения. На крутильные колебания рассчитываются целые конструкции – мачты, крылья самолетов и др.

Рассмотрим собственные крутильные колебания стержня круглого сечения с размещенном на его конце массивным диском (рис. 18). Пренебрегая массой стержня, такую крутильную конструкцию можно рассматривать как *одномассовую систему* с одной степенью свободы, положение которой в любой момент колебательного процесса определяется единственной координатой – угловой координатой диска, создающего колебания.

Приложим к диску в его плоскости пару сил, отведем его от положения равновесия на угол φ и отпустим, в результате чего возникнут крутильные колебания стержня вместе с диском. Теория собственных крутильных колебаний не отличается от теории продольных и поперечных колебаний. Здесь также при отклонении системы от положения равновесия возникает восстанавливающее усилие – динамический крутящий момент упругости $M_{кр}$, стремящийся вернуть систему к положению равновесия, пропорциональный



при линейных колебаниях отклонению φ и равный — $M_{кр} = C\varphi$, где C — коэффициент пропорциональности, представляющий собой жесткость элемента при кручении — $C = GI_{\rho}/\ell$. Возвращение элемента к положению равновесия происходит с угловой скоростью, возрастающей от нуля в крайнем отведенном положении до максимального значения на линии равновесия. Возникающее в направлении движения ускорение приводит к появлению инерционного момента $M_{ин}$, препятствующего изменению скорости, направленного в сторону, обратную ускорению (рис. 18), и равного —

$$M_{ин} = -I_0\alpha = -I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

где I_0 — *момент инерции массы* — физическая величина, являющаяся мерой инертности тела по отношению к вращательному движению, подобно тому, как масса тела m является мерой инертности тела при поступательном движении; α — угловое ускорение.

На основании принципа Даламбера рассматриваем *мгновенное (динамическое)* равновесие системы —

$$\sum M_Z = 0: M_{кр} - M_{ин} = 0 \rightarrow C\varphi + I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{C}{I_0}\varphi = 0$$

и получаем *уравнение собственных крутильных гармонических колебаний*:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (19)$$

где $\omega_0^2 = C/I_0$ — *круговая частота собственных крутильных колебаний*; C — *крутильная жесткость стержня*, определяемая его геометрией и механическими свойствами материала. Учитывая, что —

$$C = \frac{GI_{\rho}}{\ell} = \frac{G(\pi d^4/32)}{\ell} = \frac{G\pi d^4}{32\ell}; \quad I_0 = \frac{mR^2}{2} = \frac{Q(D/2)^2}{2g} = \frac{QD^2}{8g},$$

получаем значение ω_0 в виде:

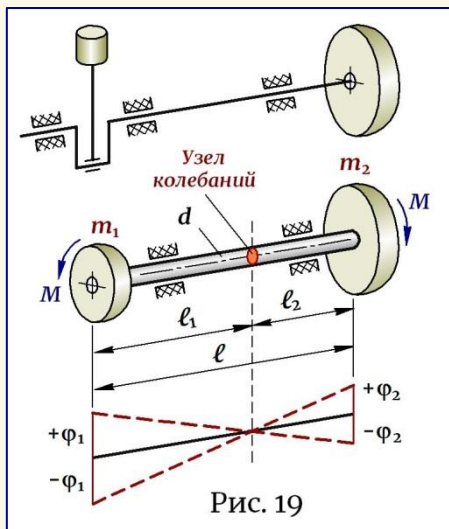
$$\omega_0 = \frac{d^2}{2D} \sqrt{\frac{G\pi g}{Q\ell}}. \quad (20)$$

Решением уравнения (19) является: $\boxed{\varphi = \varphi_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)}$ —

угловое отклонение системы от положения равновесия в момент времени t , откуда основные характеристики процесса — скорость и ускорение, амплитуда $\varphi_{\max}$, начальная фаза и период колебаний могут быть определены по рассмотренным выше формулам (6)-(10), но с адаптацией к вращательному движению.

Реальная конструкция станков, машин и механизмов представляет собой сложную динамическую многокомпонентную систему, включающую различные конструктивные элементы и являющуюся многомассовой системой с большим числом степеней свободы. Расчет таких конструкций является сложной задачей, поэтому при определении динамических характеристик многомассовую систему упрощают и приводят ее к эквивалентной двухмассовой или трехмассовой системе. Примером такой крутильной конструкции является система одноколенного вала с маховиком одноцилиндрового двигателя, которую можно привести к виду *двухмассовой системы*, представляющей собой гладкий цилиндрический вал с двумя дисками на противоположных концах (рис. 19).

Если к массам m_1 и m_2 приложить крутящие моменты, равные по величине, но обратные по знаку, а затем мгновенно их снять, система начнет совершать свободные крутильные колебания, при которых угловые колебания дисков относительно положения равновесия будут происходить в противоположных направлениях, но с одинаковой частотой. При таком колебательном процессе некоторое сечение вала будет оставаться неподвижным, т. е. угол закручивания этого сечения (угловая амплитуда) будет равен нулю. Это сечение называется **узлом колебаний** и, хотя данная крутильная конструкция является системой с двумя степенями свободы, каждый из дисков относительно этого узла будет иметь только одну степень свободы. Поэтому колебания такой системы можно рассматривать как колебания двух одномассовых систем с одной степенью свободы, которые происходят в разные



стороны относительно неподвижного **узловое сечение вала** с одинаковыми частотами —

$$\omega_0 = \sqrt{C_1/I_1} = \sqrt{C_2/I_2}, \quad (21)$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции массы дисков; C_1 и C_2 — крутильные жесткости участков вала, разделенных узловым сечением, соответственно равные $C_{1,2} = GI_\rho/\ell_{1,2}$.

Приняв для крутильной системы данную расчетную схему, решение задачи значительно упрощается. Учитывая равенство частот (21) и значения жесткостей участков вала можно определить на валу положение узла колебаний:

$$\sqrt{GI_\rho/\ell_1 I_1} = \sqrt{GI_\rho/\ell_2 I_2}, \quad (22)$$

откуда $\ell_1/\ell_2 = I_2/I_1$. Но так как $\ell_1 + \ell_2 = \ell$, получаем:

$$\ell_1 = \frac{I_2 \ell}{I_1 + I_2}; \quad \ell_2 = \frac{I_1 \ell}{I_1 + I_2}. \quad (23)$$

Подставляем длины участков (23) в равенство (22) и с учетом значения (21) получаем для двухмассовой системы частоту собственных крутильных колебаний равной:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GI_\rho}{\ell} \cdot \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}. \quad (24)$$

Рассмотренная колебательная система (рис. 19) имеет большое практическое значение, поскольку к такой расчетной схеме приводятся многие упругие конструкции, работающие на кручение.

Однако в действительности реальные конструкции представляет собой сложную многомассовую систему с большим количеством элементов, соединенных в единый механизм, которые в процессе работы приводят к возникновению различных деформаций и их сочетанию и вызывают сложные *продольно-крутильно-изгибные колебания*. Такие системы, как правило, являются системами с большим числом степеней свободы и имеют не одну, а несколько частот собственных колебаний, т.е. являются многочастотными, а значит, могут иметь разные формы колебаний. В таких условиях работают, например, тонкостенные конструкции летательных аппаратов, лопасти турбин, элементы буровых машин и др. Динамическое поведение зубчатой пере-

дачи также характеризуется как колебательная система со многими степенями свободы. Колебания являются серьезной динамической нагрузкой и представляют большую опасность для прочности элементов, особенно, работающих при вынужденных колебаниях в условиях возможного резонанса. Также при колебаниях возникают знакопеременные напряжения, которые при длительной работе механизма приводят к нарушению усталостной прочности и поломке элемента. Изучение колебательных процессов и расчет сложных колебательных систем рассматривается в специальных курсах.

3. Свободные затухающие колебания систем с одной степенью свободы

При механических колебаниях реальных конструкций всегда присутствуют неконсервативные (демпфирующие) силы, которые приводят к уменьшению механической энергии, получаемой системой от первоначального импульса. Эти силы совершают необратимую отрицательную работу, что приводит к диссипации (рассеянию) энергии и ее превращению в тепло, излучение и т.д. И если эта энергия не восполняется за счет внешнего источника, амплитуда колебаний динамической системы постепенно уменьшается, колебания затухают и прекращаются. Потеря энергии при колебаниях происходит за счет различных внешних и внутренних факторов: преодоление сопротивления газовой или жидкостной среды, в которой происходят колебания; преодоление трения скольжения в сопрягающихся элементах и узлах; преодоление внутреннего межчастичного трения в элементах, проявляющегося в неупругом (вязком) поведении материала при упругом нагружении. Также часть энергии затрачивается на возбуждение волновых процессов, которые всегда возникают при колебаниях в сплошной упругой среде и проявляются в передаче энергии от одной частицы к другой (без переноса вещества), вовлекая в колебательный процесс весь объем материала. Некоторые из указанных выше факторов являются незначительными и во внимание не принимаются, как, например, сопротивление воздуха, которое при существующих скоростях колебаний невелико и несущественно для колебательного процесса. Наиболее значимую роль в отношении потери энергии играет трение проскальзывания в соединениях элементов и опор и внутреннее (вязкое) межчастичное трение в самом материале, связанное со строением и неоднородностью структуры. И если трение в сопрягающихся деталях может быть уменьшено за счет конструктивного ре-

шения соединительных узлов и смазки, то вязкое (неупругое) межчастичное трение, определяемое свойствами самого материала, устранить невозможно и при отсутствии специальных устройств, поглощающих энергию, оно рассматривается как основной фактор потери энергии при колебаниях.

Демпфирующие силы различной природы, приводящие к диссипации энергии, имеют сложный и неопределенный характер, зависящий от колеблющейся системы и условий ее движения. Математическое описание этих сил при анализе динамического поведения является сложной задачей и приводит к необходимости использования различных упрощенных моделей. В основе одной из таких моделей лежит гипотеза Фойгта, согласно которой материал рассматривается как упруго-вязкий, и напряжения, возникающие в нем при нагружении, линейно зависят не только от деформации, но и от скорости ее изменения $\rightarrow \sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$. Приведение внутренних сил вязкого трения к внешней силе сопротивления дает пропорциональную зависимость этой диссипативной силы от скорости колебаний —

$$F_{\text{сопр}} = \xi V, \quad (25)$$

где ξ — коэффициент вязкого трения. Сила сопротивления $F_{\text{сопр}}$, препятствующая отклонению системы от равновесного состояния, всегда направлена к положению равновесия. Модель Фойгта (25) получила наибольшее распространение в динамических расчетах, она проста, удобна в использовании, но имеет ограничения: она справедлива только для малых скоростей колебаний и колебаний, далеких от резонанса. Зависимость Фойгта нельзя использовать для сил внешнего трения, возникающих в сочленениях деталей. Эти силы не зависят от скорости колебательного процесса и подчиняются другому закону затухания колебаний.

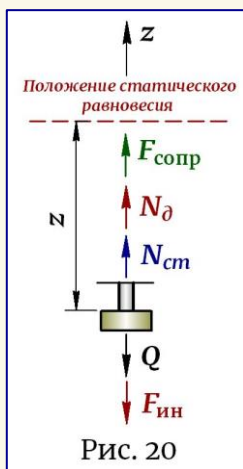


Рис. 20

Рассмотрим вопрос на примере продольных колебаний (рис. 20). И тогда, согласно значениям (1), (2), (25) и с учетом равенства (11), на основании принципа Даламбера составляем уравнение динамического равновесия системы —

$$\sum Z = 0: N_{\text{см}} + N_{\text{д}} + F_{\text{сопр}} = Q + F_{\text{ин}} \rightarrow$$

$$Cz + \xi \frac{dz}{dt} = -m \frac{d^2 z}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\xi}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{C}{m} z = 0$$

и, обозначив $n_{\text{зат}} = \xi/2m$ и $\omega_0^2 = C/m$, получаем **уравнение свободных затухающих гармонических колебаний**:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2n_{\text{зат}} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0, \quad (26)$$

где $n_{\text{зат}}$ – коэффициент затухания или удельный коэффициент сопротивления $[\text{сек}^{-1}]$; ω_0 – круговая частота собственных колебаний системы при отсутствии сил сопротивления, т.е. при $n_{\text{зат}} = 0$.

Примечание.

Коэффициент вязкого трения в функции (25) не является физической константой материала. Он зависит от распределения масс и жесткостей колебательной системы, а значит, зависит и от частоты колебаний. Коэффициент затухания, в отличие от коэффициента вязкого трения, является величиной постоянной для конкретного материала и определяется опытным путем.

Решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (26) выполняем через решение характеристического уравнения $k^2 + 2n_{\text{зат}}k + \omega_0^2 = 0$,

дающего два корня — $k_{1,2} = -n_{\text{зат}} \pm \sqrt{n_{\text{зат}}^2 - \omega_0^2}$, откуда видно, что колебательный процесс зависит от соотношения значений $n_{\text{зат}}$ и ω_0 и предполагает три варианта движения груза:

① Если $n_{\text{зат}} > \omega_0$ — случай **большого сопротивления**. Здесь корни квадратного уравнения вещественны и отрицательны, а решение уравнения (26) имеет вид —

$$z = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}, \quad (27)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий $\rightarrow z_{t=0} = z_0; V_{t=0} = V_0$ и равные —

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = z_0 \\ C_1 k_1 + C_2 k_2 = V_0 \end{cases} \rightarrow \boxed{C_1} = \frac{V_0 - z_0 k_2}{k_1 - k_2}; \quad \boxed{C_2} = \frac{z_0 k_1 - V_0}{k_1 - k_2}.$$

Как видно из выражения (27), при $t \rightarrow \infty$, учитывая, что $k_{1,2} < 0$, отклонение массы от положения равновесия стремится к нулю. В этом случае после начала возбуждения колебания системы не возникают. Ее движение имеют неколебательный характер, называемый *апериодическим движением*, при котором выведенная из положения равновесия масса плавно и постепенно возвращается в исходное положение. Такой случай наблюдается, например, когда колеблющаяся система находится в вязкой жидкости или грунте.

② Если $n_{\text{зат}} = \omega_0$ — случай *критического сопротивления*. Здесь корни квадратного уравнения вещественны, отрицательны и равны — $k_1 = k_2 = -n_{\text{зат}}$, а решение уравнения (26) имеет вид —

$$z = e^{-n_{\text{зат}} t} (C_1 t + C_2), \quad (28)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий $\rightarrow [Z_{t=0} = Z_0; V_{t=0} = V_0]: [C_1] = V_0 + n_{\text{зат}} Z_0; [C_2] = Z_0$.

Как видно из выражения (28), при $t \rightarrow \infty$ отклонение системы от положения равновесия стремится к нулю, а значит, она также не совершает колебаний и ее движение, как и в предыдущем случае, является *апериодическим движением*. При критическом демпфировании отклоненная от положения равновесия масса асимптотически приближается к исходному положению (не переходя это положение).

③ Если $n_{\text{зат}} < \omega_0$ — случай *слабого сопротивления*. Здесь корни уравнения комплексно-сопряженные — $k_{1,2} = -n_{\text{зат}} \pm i\omega_0$, а решение уравнения (26) возможно только при условии, что —

$$\omega_{\text{зат}} = \sqrt{\omega_0^2 - n_{\text{зат}}^2}. \quad (29)$$

Тогда интеграл уравнения (26) принимает вид —

$$z = e^{-n_{\text{зат}} t} (C_1 \cos \omega_{\text{зат}} t + C_2 \sin \omega_{\text{зат}} t), \quad (30)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, вычисляемые из начальных условий $\rightarrow [Z_{t=0} = Z_0; V_{t=0} = V_0]$. Для их определения дифференцируем функцию (30) и после преобразования получаем скорость колебательного процесса в виде:

$$V = \frac{dz}{dt} = -e^{-n_{\text{зат}} t} \cos \omega_{\text{зат}} t (C_1 n_{\text{зат}} - C_2 \omega_{\text{зат}}) - e^{-n_{\text{зат}} t} \sin \omega_{\text{зат}} t (C_1 \omega_{\text{зат}} + C_2 n_{\text{зат}}). \quad (31)$$

Задаем начальные параметры и на основании (30) и (31) получаем:

$$- \text{при } t=0 \rightarrow \boxed{C_1} = z_0; \quad \boxed{C_2} = \frac{V_0 + z_0 n_{\text{зат}}}{\omega_{\text{зат}}}. \quad (32)$$

Решение (30) показывает, что только в этом случае – случае **слабого сопротивления** – движения системы носят колебательный характер, хотя он не является периодическим, о чем будет сказано ниже.

Таким образом, при увеличении сопротивления – при переходе от слабого демпфирования к большому – свободные колебания системы затрудняются или не происходят совсем. А значит, **критическое сопротивление** определяет ту минимальную степень демпфирования, при которой колебания системы уже возникать не могут. Эту степень сопротивления, которую необходимо ввести в систему, вычисляют из условия критического демпфирования $\boxed{n_{\text{зат}} = \omega_0}$. В отдельных конструкциях, если нужно исключить нежелательные колебания, применяют большое демпфирование, которое может быть обеспечено с помощью специальных устройств – демпферов (вязких элементов с большим сопротивлением). Но в сооружениях, машинах и механизмах, работающих в обычных условиях, демпфирование незначительно.

Решение (30) можно представить в амплитудной форме:

$$\boxed{z = A_0 e^{-n_{\text{зат}} t} \sin(\omega_{\text{зат}} t + \varphi_0)}, \quad (33)$$

где A_0 – начальная амплитуда и φ_0 – начальная фаза колебаний, которые также могут быть определены из начальных условий.

Раскрываем выражение (33) для синуса суммы углов –

$$z = e^{-n_{\text{зат}} t} (A_0 \sin \omega_{\text{зат}} t \cos \varphi_0 + A_0 \sin \varphi_0 \cos \omega_{\text{зат}} t),$$

откуда, сравнивая это значение с функцией (30), видно, что:

$$\begin{cases} C_1 = A_0 \sin \varphi_0 \\ C_2 = A_0 \cos \varphi_0. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \rightarrow A_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \text{tg } \varphi_0 = C_1 / C_2. \quad (34)$$

И тогда начальная амплитуда и начальная фаза колебаний (34), выраженные через начальные параметры, на основании значений (32) могут быть определены как:

$$A_0 = \sqrt{Z_0^2 + \left(\frac{V_0 + Z_0 n_{\text{зат}}}{\omega_{\text{зат}}} \right)^2}; \quad \varphi_0 = \arctg \frac{Z_0 \omega_{\text{зат}}}{V_0 + Z_0 n_{\text{зат}}}. \quad (35)$$

Из решения (33) видно, что амплитуда $A_t = A_0 e^{-n_{\text{зат}} t}$ изменяется по экспоненциальному закону, уменьшаясь в геометрической прогрессии. Графическая интерпретация затухающих колебаний представлена на рис. 21: основной характер затуханий имеет синусоидальную форму, а кривые $+A_0 e^{-n_{\text{зат}} t}$ и $-A_0 e^{-n_{\text{зат}} t}$ являются линиями, ограничивающими функцию $\sin(\omega_{\text{зат}} t + \varphi_0)$.

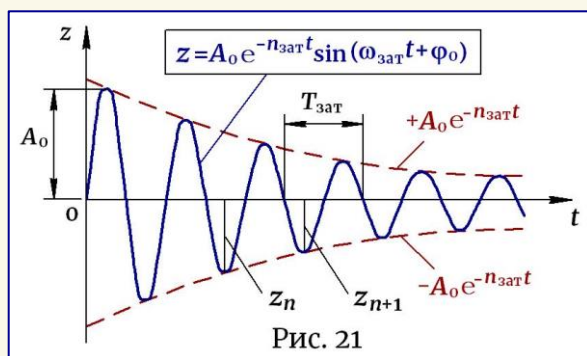


Рис. 21

Согласно значению (29) круговая частота колебаний при наличии сил сопротивления уменьшается, а значит, период колебаний —

$$T_{\text{зат}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{зат}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - n_{\text{зат}}^2}}, \quad (36)$$

увеличивается. Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими, они рассматриваются как *условно гармонические*, при которых колеблющаяся величина просто чередуется через равный промежуток времени $T_{\text{зат}}$, периодически получая максимальные и нулевые значения.

Примечание.

Как было сказано выше, гипотеза Фойгта, устанавливающая пропорциональную зависимость силы сопротивления (вязкого трения) от скорости (25), может быть использована только для малых скоростей колебаний. В этом случае уравнение движения приводится к виду линейного однородного дифференциального уравнения (26) и решению (33), определяющему ко-

лебательный характер процесса. При таком затухании изменение амплитуды происходит по экспоненте, частота колебаний (29) становится меньше, а период колебаний (36) увеличивается. Но если скорость колебаний значительна, затраты кинетической энергии возрастают и теперь она расходуется не только на преодоление вязкого трения, но и на проталкивание среды, в которой происходят колебания, впереди тела. В этом случае сила сопротивления возрастает, ее линейная связь со скоростью нарушается и она зависит от скорости в виде некоторой степенной функции, например, $F_{\text{сопр}} \approx V^2$.

Дифференциальное уравнение движения становится нелинейным, оно имеет другой вид и определяет другой характер колебаний. И если линейное соотношение между силой сопротивления и скоростью обуславливает экспоненциальный характер затухания, то любая другая зависимость силы сопротивления от скорости приводит к затуханию колебаний с иной зависимостью амплитуды от времени. Решение таких уравнений является сложной задачей и выполняется приближенными методами. При работе некоторых механизмов иногда возникает случай колебаний в среде с постоянной внешней силой сопротивления (сухое трение) – $F_{\text{сопр}} = \text{const}$. Такая задача приводится к виду неоднородного дифференциального уравнения, решение которого показывает, что амплитуда убывает в арифметической прогрессии (по прямой), а частота и период колебаний остаются такими же, как и при отсутствии сил сопротивления. Задачи для нелинейной и постоянной сил сопротивления рассматриваются в специальных курсах.

Количественной характеристикой быстроты затухания колебаний в линейной системе является **декремент затухания** – отношение двух соседних амплитуд, разделенных одним периодом (рис. 21):

$$D = \frac{z_n}{z_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-n_{\text{зат}} t}}{A_0 e^{-n_{\text{зат}} (t + T_{\text{зат}})}} = e^{n_{\text{зат}} T_{\text{зат}}} . \quad (37)$$

Декремент затуханий показывает во сколько раз уменьшается амплитуда колебаний за один период, при этом скорость уменьшения амплитуды, убывающей по экспоненте, будет тем больше, чем больше коэффициент $n_{\text{зат}}$. Декремент затуханий в любой момент времени " t " есть величина постоянная, но это выполняется только при условии, когда силы сопротивления пропорциональны скорости.

Быстроту затухания колебаний также описывают с помощью **логарифмического декремента затухания** – это натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд, разделенных интервалом времени, равным периоду колебаний:

$$\ln \frac{z_n}{z_{n+1}} = \ln e^{n_{\text{зат}} T_{\text{зат}}} \rightarrow \Lambda = \ln \frac{z_n}{z_{n+1}} = n_{\text{зат}} T_{\text{зат}} . \quad (38)$$

Физический смысл логарифмического декремента затухания заключается в том, что он показывает, через какое число периодов колебаний отношение амплитуд уменьшится в "е" раз, а это значит, что логарифмический декремент – это величина, обратная числу колебаний, за которые амплитуда уменьшается в "е" раз. Промежуток времени, за который происходит уменьшение амплитуды колебаний в "е" раз, называется *временем релаксации*.

Использование логарифмического декремента затухания позволяет достаточно просто экспериментальным путем определить коэффициент затухания системы: замерив две амплитуды колебаний, взятые через период, и зная величину этого периода, коэффициент $n_{\text{зат}}$ легко вычисляется по формуле (38).

Как было сказано выше, при отсутствии специальных демпфирующих устройств затухание колебаний при работе машин и механизмов незначительно и частота затухающих колебаний близка по значению частоте собственных колебаний (без затухания). Преобразуем значение (29) к виду –

$$\omega_{\text{зат}} = \sqrt{\omega_0^2 - n_{\text{зат}}^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (n_{\text{зат}}/\omega_0)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2} ,$$

где отношение $\eta = n_{\text{зат}}/\omega_0$ называется *коэффициентом демпфирования*. Для существующих механизмов коэффициент демпфирования является величиной очень малого порядка и лежит в пределах 0,025 ... 0,07 (для сталей 0,012), поэтому для многих механических колебательных систем принимают $\omega_{\text{зат}} \approx \omega_0$ и в инженерных расчетах при вычислении частоты и периода свободных колебаний влиянием силы сопротивления пренебрегают.

Однако следует понимать, что при работе машин и механизмов возникающие колебания негативно влияют на их функционирование, снижая качество технологического процесса и создавая опасность усталостных повреждений в элементах узлов и конструкций. И в этом отношении демпфирование системы, способствующее более быстрому затуханию колебательных процессов, которое вызвано естественными и конструкционными причинами (как, например, вязкое трение в материале или трение в кинематических парах), либо созданное целенаправленно с помощью специальных демпфирующих устройств,

предназначенных для увеличения диссипативных свойств системы, является благоприятным фактором и эффективным средством улучшения условий эксплуатации машин, обеспечивая более высокое качество их работы и долговечность.

4. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы

Колебания, которые возникают в системе под действием постоянно действующего периодически изменяющегося внешнего воздействия, называются **вынужденными**. Это воздействие делает колебания незатухающими, постоянно восполняя запас энергии, расходуемой системой на преодоление различного рода сил сопротивления. В механических системах возбуждение колебаний может возникать по разным причинам, а возмущающая сила иметь разный характер – силовой, кинематический, параметрический. *Силовое* возбуждение может быть от действия сил инерции, возникающих вследствие неуравновешенности вращающихся масс (ротора электродвигателя, коленчатых валов с навешенными массами – цилиндрами, маховиками, муфтами), или иметь другую природу, например, при изменении давления в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания, при работе кривошипно-шатунных механизмов; *кинематическое* возбуждение связано с воздействием опор и возникает, например, в рессорах автомобиля на неровностях дороги или вагона на стыков рельсов; *параметрическое* – в результате изменения какого-либо параметра системы, определяющего ее свойства, например, массы или жесткости. В некоторых упругих системах возникают незатухающие самоколебания (автоколебания), поддерживаемые внутренними силами, возбуждаемыми самим колебательным процессом. Возникающие постоянно действующие незатухающие колебания могут быть весьма опасными для конструкции, вызывая поломку оборудования и механизмов. Однако в некоторых технологических системах вынужденные колебания являются важной частью процесса и создаются целенаправленно для его интенсификации и снижения энергозатрат, как например, при погружении свай в грунтовые породы, при виброразделении сыпучих материалов, в виброгасителях и амортизаторах на транспортных средствах для смягчения ударов при движении автомобиля и др. Вынужденные колебания используются в двигателях, генераторах и других механических и электрических системах, где повторяющаяся вибрация обеспечивает вращательное или линейное движение.

4.1. Вынужденные колебания без учета затухания

Возмущающая сила, создающая вынужденные колебания, может иметь различный характер, но наиболее распространенным является случай, когда возмущающая сила является периодической силой, изменяющейся по гармоническому закону:

$$H(t) = H_0 \sin \omega t, \quad (39)$$

где ω – частота возмущающей силы или частота вынужденных колебаний; H_0 – амплитудное значение возмущающей силы.

Рассмотрим систему сил, действующую на отведенный от положения равновесия груз, и с учетом значений (1), (2) и (39), принимая, что сила тяжести груза уравнивается статической силой упругости элемента $N_{cm} = Q$ (11), на основании принципа Даламбера составляем уравнение динамического равновесия системы (рис. 22) –

$$\sum Z = 0: N_{cm} + N_{\partial} - Q + F_{ин} + H(t) \rightarrow$$

$$Cz = -m \frac{d^2 z}{dt^2} + H_0 \sin \omega t \rightarrow$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{C}{m} z = \frac{H_0}{m} \sin \omega t,$$

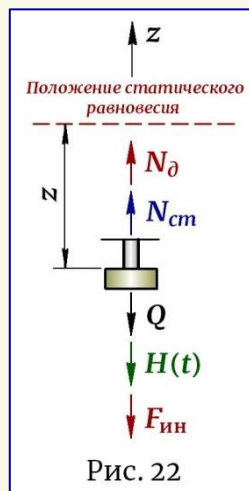


Рис. 22

где, обозначив $\omega_0^2 = C/m$, получаем **уравнение вынужденных гармонических колебаний без учета затухания:**

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = \frac{H_0}{m} \sin \omega t. \quad (40)$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений, решением линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (40) является:

$$Z = Z_{общ} + Z_{част}, \quad (41)$$

где $Z_{общ}$ – общее решение уравнения (40), но с правой частью, равной нулю, представляющее собой уравнение собственных гармонических колебаний (14); $Z_{част}$ – частное решение уравнения (40), описывающее вынужденные колебания системы, которые в установившемся

режиме имеют характер возмущающей силы (39)–

$$\boxed{Z_{\text{част}} = B \sin \omega t}, \quad (42)$$

где B – амплитуда вынужденных колебаний, которую следует подобрать таким образом, чтобы решение $Z_{\text{част}}$ (42) удовлетворяло уравнению (40). Для этого дважды продифференцируем функцию

$$(42) - \boxed{\frac{d^2 Z}{dt^2} = -B \omega^2 \sin \omega t} \text{ и подставим вторую производную вместе}$$

со значением (42) в уравнение (40) –

$$-B \omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 B \sin \omega t = \frac{H_0}{m} \sin \omega t,$$

откуда получаем амплитуду вынужденных колебаний –

$$\boxed{B = \frac{H_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}}, \quad (43)$$

а решение (42) принимает вид:

$$\boxed{Z_{\text{част}} = \frac{H_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t}. \quad (44)$$

Общее решение $Z_{\text{общ}}$ уравнения собственных колебаний (14) рассмотрим в виде суммы двух гармонических колебаний с нулевыми начальными фазами, происходящих по законам синуса и косинуса –

$$\boxed{Z_{\text{общ}} = k_1 \cos \omega_0 t + k_2 \sin \omega_0 t}, \quad (45)$$

которое, как было показано выше, полностью соответствует решению в амплитудной форме (5), где ω_0 – частота собственных колебаний; k_1 и k_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. И тогда с учетом значений (44) и (45) решение (41) принимает вид –

$$Z = k_1 \cos \omega_0 t + k_2 \sin \omega_0 t + \frac{H_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t, \quad (46)$$

а скорость колебательного процесса определяется как:

$$V = \frac{dz}{dt} = -k_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + k_2 \omega_0 \cos \omega_0 t + \frac{(H_0/m)\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (47)$$

Согласно начальным условиям — при $t=0 \rightarrow Z=Z_0$; $V=V_0$. И тогда на основании (46) и (47) постоянные интегрирования равны —

$$\boxed{k_1} = Z_0; \quad \boxed{k_2} = \frac{V_0}{\omega_0} - \frac{(H_0/m)(\omega/\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (48)$$

а полное решение (46) с учетом постоянных (48) после преобразования принимает вид: (49)

$$Z = \left(Z_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) - \frac{(H_0/m)(\omega/\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega_0 t + \frac{H_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t,$$

где первое слагаемое (сумма в скобках) выражает собственные колебания системы, происходящие с частотой ω_0 и зависящие от начальных условий; второе слагаемое также определяет собственные колебания системы с частотой ω_0 и амплитудой

$\frac{(H_0/m)(\omega/\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2}$, кото-

рые зависят от возмущающей силы, но не зависят от начальных условий (такие колебания называют *сопутствующими*); третье слагаемое описывает вынужденные колебания, зависящие от параметров системы, но также не зависящие от начальных условий.

Примечание.

Аналогичный результат будет получен, если общее решение (45) принять в амплитудной форме (5) — $\boxed{Z_{\text{общ}} = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)}$, где A_0 и φ_0 — амплитуда и начальная фаза колебаний соответственно. И тогда решения (46) и (47) принимают вид —

$$Z = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{H_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t,$$

$$V = \frac{dz}{dt} = A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{H_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \omega \cos \omega t.$$

Из начальных условий — $t=0 \rightarrow Z=Z_0$; $V=V_0$ получаем:

$$\begin{cases} Z_0 = A_0 \sin \varphi_0 \\ V_0 = A_0 \omega_0 \cos \varphi_0 + \frac{H_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \omega \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Z_0 = A_0 \sin \varphi_0 \\ \frac{V_0}{\omega_0} - \frac{(H_0/m)(\omega/\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} = A_0 \cos \varphi_0, \end{cases}$$

откуда видно, что левые части выражений соответствуют значениям k_1 и k_2 (48) и что $A_0 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ и $\varphi_0 = \arctg(k_1/k_2)$.

Таким образом, под действием возмущающей силы в системе возбуждаются три вида колебаний – собственные, сопутствующие и вынужденные. Однако учитывая, что в реальной колебательной системе всегда присутствуют силы сопротивления, колебания с собственной частотой ω_0 быстро затухают и основное значение в условиях установившихся стационарных колебаний приобретают вынужденные колебания, выражаемые законом (42, 44).

Сравнительный анализ значений (39) и (44) показывает, что если $\boxed{\omega < \omega_0}$ (вынужденные колебания малой частоты), фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы совпадают и равны ωt , т.е. колебания происходят в одной фазе, *синфазно*, когда всякая точка колеблющейся системы отклонена от положения равновесия в ту же сторону, в которую в данный момент направлена возмущающая сила. Если $\boxed{\omega > \omega_0}$ (вынужденные колебания большой частоты), решение (44) становится отрицательным, и так как амплитуда величина положительная, «минус» перед выражением привязывают к синусу $\rightarrow (-\sin \omega t)$ и решение (44) приводят к виду:

$$\boxed{Z_{\text{част}}} = -\frac{H_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t = \frac{H_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t - \pi). \quad (50)$$

Функция (50) показывает, что если частота вынужденных колебаний ω превышает частоту собственных колебаний ω_0 , между возмущающей силой (39) и вынужденными колебаниями (50) возникает сдвиг фаз, равный " π ". Это значит, что в любой момент колебательного процесса всякая точка колеблющейся системы отклоняется от положения равновесия в направлении, противоположном возмущающей силе, т.е. колебания происходят в противофазе.

При этом в обоих случаях (колебаниях и *малой*, и *большой* частоты) максимальное отклонение точки от положения равновесия происходит в тот момент времени, когда возмущающая сила (по модулю) достигает своего максимума.

Анализ выражения (43) показывает, что амплитуда вынужденных колебаний также зависит от соотношения частот. Приведем значение

$$(43) \text{ к виду } -\boxed{B} = \frac{H_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{H_0}{m\omega_0^2 \left(1 - \omega^2/\omega_0^2\right)} = \left\| \begin{array}{l} m\omega_0^2 = C \\ H_0/C = \Delta_{cm}^{H_0} \end{array} \right\| \rightarrow$$

$$B = \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{1 - \omega^2 / \omega_0^2}, \quad (51)$$

где C – жесткость колеблющейся системы; $\Delta_{cm}^{H_0}$ – статическая деформация от наибольшего значения возмущающей силы, как если бы сила H_0 прикладывалась статически.

При $\omega < \omega_0$, амплитуда вынужденных колебаний конечна и определяется значением (51). С увеличением частоты " ω " амплитуда растет и при $\omega \approx \omega_0$ ее возрастание становится неограниченным. Это явление называется **резонансом** и оно будет рассмотрено ниже. При $\omega > \omega_0$, чтобы амплитуда оставалась $B > 0$, значение (51) приво-

дится к виду – $B = \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\omega^2 / \omega_0^2 - 1}$, откуда видно, с увеличением " ω "

амплитуда опять принимает конечное значение, которое все больше уменьшается с увеличением частоты возмущающей силы.

4.2. Вынужденные колебания с учетом затухания

Рассмотрим вынужденные колебания системы под действием возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону (39), и систему сил, действующую на отведенный от положения равновесия груз (рис. 23). Тогда с учетом значений (1), (2), (25) и (39), принимая, что сила тяжести груза уравнивается статической силой упругости элемента $N_{cm} = Q$ (11), на основании принципа Даламбера составляем уравнение динамического равновесия системы –

$$\begin{aligned} \sum Z = 0: N_{cm} + N_{\partial} + F_{сопр} &= Q + F_{ин} + H(t) \rightarrow \\ Cz + \xi \frac{dz}{dt} &= -m \frac{d^2 z}{dt^2} + H_0 \sin \omega t \rightarrow \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\xi}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{C}{m} z &= \frac{H_0}{m} \sin \omega t, \end{aligned}$$

где, обозначив $n_{\text{зат}} = \xi/2m$ и $\omega_0^2 = C/m$, получаем **уравнение вынужденных гармонических колебаний с учетом затухания**:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2n_{\text{зат}} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{H_0}{m} \sin \omega t. \quad (52)$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (52) может быть представлено в виде:

$$Z = Z_{\text{общ}} + Z_{\text{част}}, \quad (53)$$

где $Z_{\text{общ}}$ – общее решение уравнения (52), но с правой частью, равной нулю, что соответствует уравнению свободных затухающих колебаний (33)

$$Z = A_0 e^{-n_{\text{зат}} t} \sin(\omega_{\text{зат}} t + \varphi_0);$$

$Z_{\text{част}}$ – это некоторое частное решение уравнения (52), описывающее вынужденные колебания, которые в установившемся режиме происходят по закону возмущающей силы, и имеющее вид –

$$Z_{\text{част}} = B \sin(\omega t - \varphi), \quad (54)$$

где B – амплитуда вынужденных колебаний; φ – сдвиг фаз между вынужденными колебаниями и возмущающей силой, который является следствием наличия сил сопротивления и выражает их влияние на колебательный процесс. Значения B и φ – это некоторые постоянные параметры колебательного процесса, которые подбираются таким образом, чтобы решение $Z_{\text{част}}$ (54) удовлетворяло уравнению (52).

Для определения этих величин дважды продифференцируем функ-

цию (54) – $\frac{dz}{dt} = B\omega \cos(\omega t - \varphi); \frac{d^2 z}{dt^2} = -B\omega^2 \sin(\omega t - \varphi)$ и вместе

с этими значениями подставим (54) в уравнение (52), представив синус в правой части как синус суммы углов –

$$-B\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + 2n_{\text{зат}} B\omega \cos(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 B \sin(\omega t - \varphi) = (H_0/m) \sin[(\omega t - \varphi) + \varphi].$$

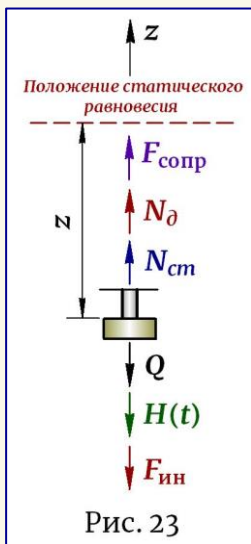


Рис. 23

Сгруппировав первое и третье слагаемые в левой части уравнения и расписав тригонометрически правую часть как синус суммы углов, получаем равенство —

$$B(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t - \varphi) + 2n_{\text{зат}} B \omega \cos(\omega t - \varphi) = \\ = (H_0/m) \sin(\omega t - \varphi) \cos \varphi + (H_0/m) \sin \varphi \cos(\omega t - \varphi),$$

которое должно удовлетворяться тождественно при любом значении угла $(\omega t - \varphi)$, а значит, коэффициенты при неизвестных должны быть равны. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} B(\omega_0^2 - \omega^2) = (H_0/m) \cos \varphi \\ 2n_{\text{зат}} B \omega = (H_0/m) \sin \varphi, \end{cases}$$

откуда после несложного решения определяем сдвиг фаз —

$$\varphi = \arctg \frac{2n_{\text{зат}} \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (55)$$

и амплитуду вынужденных колебаний:

$$B = \frac{H_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n_{\text{зат}}^2 \omega^2}}. \quad (56)$$

Примечание.

В функции (54) фазу колебаний можно задавать как $(\omega t \pm \varphi)$, но при любом знаке результат решения показывает, что вынужденные колебания всегда происходят с отставанием по фазе от возмущающей силы, поэтому угол " φ " называют «углом отставания». Если принять $(\omega t - \varphi)$, получаем $\varphi > 0$, как в решении (55); если принять $(\omega t + \varphi)$, получаем $\varphi < 0$, а значит, колебания системы всегда будут отставать от возмущающей силы, что является следствием влияния сил сопротивления.

И тогда полное решение дифференциального уравнения (52) на основании функций (33) и (54) имеет вид:

$$z = A_0 e^{-n_{\text{зат}} t} \sin(\omega_{\text{зат}} t + \varphi_0) + B \sin(\omega t - \varphi), \quad (57)$$

где первое слагаемое представляет собой свободные затухающие колебания, амплитуда A_0 и начальная фаза φ_0 которых определяется начальными условиями (9), а второе слагаемое выражает закон вынужденных колебаний системы. При таком колебательном процессе свободные колебания с течением времени затухают и прекращаются,

а вынужденные колебания продолжаются и входят в режим **установившихся** колебаний (рис. 2). Это гармонические колебания, происходящие с частотой возмущающей силы, но с некоторым отставанием по фазе (55), зависящем от частоты возмущающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде возмущающей силы и также зависит от ее частоты (56). Время установления колебаний в системе равно времени затухания в ней свободных колебаний. Свободные колебания вносят некоторый вклад и играют заметную роль только на начальной стадии процесса, в течение времени, называемом *переходным режимом*. Но при длительном времени колебаний первое слагаемое в решение (57) обращается в ноль, поэтому при расчете системы, работающей в условиях установившихся вынужденных колебаний, свободными затухающими колебаниями пренебрегают и рассматривают только решение (54), которое с учетом значений (55) и (56) принимает вид:

$$z = \frac{H_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n_{\text{зат}}^2 \omega^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{2n_{\text{зат}} \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (58)$$

При любом колебательном процессе происходит деформирование упругой системы, определяемое амплитудой колебаний, поэтому ее вычисление имеет важное значение при выполнении динамических расчетов. Рассмотрим амплитуду вынужденных колебаний и, учитывая, что $\omega_0^2 = C/m$ (4), преобразуем выражение (56) —

$$\begin{aligned} B &= \frac{H_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n_{\text{зат}}^2 \omega^2}} = \frac{H_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \frac{\omega_0^4}{\omega_0^4} + 4n_{\text{зат}}^2 \omega^2 \frac{\omega_0^4}{\omega_0^4}}} = \\ &= \frac{H_0/m}{\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4n_{\text{зат}}^2 \omega^2}{\omega_0^4}}} = \frac{H_0/\cancel{m}}{C/\cancel{m} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4n_{\text{зат}}^2 \omega^2}{\omega_0^4}}} = \\ &= \frac{H_0/C}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4n_{\text{зат}}^2 \omega^2}{\omega_0^4}}} = \left\| \frac{H_0}{C} = \Delta_{cm}^{H_0} \right\| \rightarrow \end{aligned}$$

и в результате амплитуду вынужденных колебаний получаем в виде:

$$B = \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2 + 4n_{зат}^2 \omega^2 / \omega_0^4}}, \quad (59)$$

где $\Delta_{cm}^{H_0}$ – статическая деформация от наибольшего значения возмущающей силы, как если бы сила H_0 прикладывалась статически.

Введем обозначение:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2 + 4n_{зат}^2 \omega^2 / \omega_0^4}}, \quad (60)$$

где β – называется **коэффициент нарастания колебаний**.

И тогда амплитуда (59) с учетом значения (60) равна:

$$B = \beta \Delta_{cm}^{H_0}, \quad (61)$$

откуда следует, что коэффициент нарастания колебаний показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статической деформации от действия наибольшего значения возмущающей силы, как если бы эта сила прикладывалась статически.

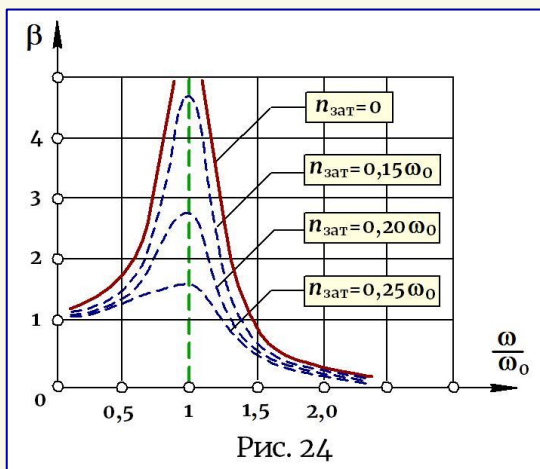
4.3. Резонанс. Меры борьбы с резонансом

Анализ значения (60) показывает, что коэффициент нарастания колебаний β , определяющий величину амплитуды вынужденных колебаний " B " (59, 61), зависит от двух величин: от отношения частот ω / ω_0 и от коэффициента затухания $n_{зат}$. Зависимость $\beta(\omega)$, также как и $B(\omega)$, называется *амплитудно-частотной характеристикой* и представлена на рис. 24 в виде ряда резонансных кривых для различных значений коэффициентов затухания $n_{зат}$.

Как видно из графика и подтверждается формулами (59, 60), при стремлении частоты возмущающей силы к нулю — $\omega \rightarrow 0$ все кривые сходятся в одной точке, соответствующей значению $\beta = 1$, а ам-

плитуда колебаний принимает значение $B_0 = \Delta_{cm}^{H_0} = H_0 / \omega_0^2 m$. Эта амплитуда называется *статическим отклонением* и означает отклонение системы от положения равновесия под действием постоянной силы H_0 , как если бы эта сила была приложена статически. Когда частота воздействующей нагрузки стремится к бесконечности — $\omega \rightarrow \infty$, все кривые асимптотически приближаются к нулю, так как при большой частоте возмущающая сила настолько быстро изменяет свое направление, что система не успевает получать заметные отклонения от положения равновесия. Для рабочего диапазона частот кривые показывают, что при любом коэффициенте затухания в случае совпадения частоты собственных колебаний и частоты возмущающей силы, когда $\omega / \omega_0 = 1$, коэффициент β , а значит, и амплитуда "B" имеют наибольшее значение, хотя коэффициент затухания, обусловленный наличием сил сопротивления, и ограничивает их рост. Но чем меньше степень затухания, тем бóльшую величину принимают β и B , и при полном отсутствии сопротивления, когда $n_{\text{зат}} = 0$, коэффициент нарастания колебаний и амплитуда вынужденных колебаний неограниченно идут вверх.

Явление повышения амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты собственных колебаний и частоты возмущающей силы называется РЕЗОНАНСОМ, а совпадение частот – УСЛОВИЕМ РЕЗОНАНСА — $\omega_0 \approx \omega$.



Однако в любой колеблющейся системе даже в установившемся режиме вынужденных колебаний силы сопротивления и явление затухания всегда присутствуют, поэтому амплитуда колебаний даже при совпадении частот достигает некоторого конечного значения. Исходя из этого, можно определить такую частоту возмущающей силы, при которой амплитуда колебаний достигает максимального значения. Эта частота называется **резонансной частотой** $\omega_{\text{рез}}$. Из выражения для амплитуды (59), представленной в виде $B = (\Delta_{\text{ст}}^H \omega_0^2) / \sqrt{f}$, где

$$f = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n_{\text{зат}}^2 \omega^2, \quad (62)$$

видно, что она достигает наибольшей величины при наименьшем знаменателе f , являющимся функцией частоты ω . Исследуем функцию (62) на экстремум и определим, при каком значении аргумента функция принимает минимальное значение —

$$\boxed{\frac{df}{d\omega} = 0} \rightarrow \frac{d \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n_{\text{зат}}^2 \omega^2 \right]}{d\omega} = 0 \rightarrow$$

$$2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8n_{\text{зат}}^2 \omega = 0, \quad (63)$$

откуда находим величину резонансной частоты возмущающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний принимает максимальное значение:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2n_{\text{зат}}^2}. \quad (64)$$

Примечание.

Решение квадратного уравнения (63) дает два корня — два значения резонансной частоты — $\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2n_{\text{зат}}^2}$, называемых критическими точками. Если на числовой оси частот отметить эти точки и рассмотреть любые два значения по разные стороны от каждой точки, то согласно исследованию функций на экстремум, если при переходе через критическую точку слева направо производная изменяет знак с «+» на «-», точка является точкой максимума, если с «-» на «+» — точкой минимума. Несложно показать, что оба значения $\omega_{1,2}$ для функции (62) являются точками минимума.

При резонансной частоте скорость колебательного процесса также резко возрастает. Это явление называется **резонансом скорости**.

Решение (64) подтверждает сказанное выше: с уменьшением сопротивления резонансная частота $\omega_{\text{рез}}$ приближается к частоте собственных колебаний ω_0 , в результате чего максимум амплитуды резко возрастает и на основании значений (59) и (64) становится равным:

$$B_{\text{max}} = \frac{\Delta_{\text{cm}}^{H_0} \cdot \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2)^2 + 4n_{\text{зат}}^2 \omega_{\text{рез}}^2}} = \frac{\Delta_{\text{cm}}^{H_0} \cdot \omega_0^2}{\sqrt{2n_{\text{зат}}^4 + 4n_{\text{зат}}^2 \omega_0^2 - 8n_{\text{зат}}^4}} \rightarrow$$

$$B_{\text{max}} = \frac{\Delta_{\text{cm}}^{H_0} \cdot \omega_0^2}{2n_{\text{зат}} \sqrt{\omega_0^2 - n_{\text{зат}}^2}}.$$

(65)

При отсутствии сопротивления среды амплитуда при резонансе обращается в бесконечность (рис. 24).

Таким образом, если сопротивление системы мало, а частоты ω и ω_0 близки по значению, даже при малой возмущающей силе можно получить интенсивные вынужденные колебания, в то же время, если силы сопротивления значительны, при большой возмущающей силе вынужденные колебания можно сделать сколь угодно малыми.

В практике инженерных расчетов на динамическую прочность явление возрастания амплитуды при вынужденных колебаниях и, особенно, вопросы резонанса по своей значимости занимают одно из первых мест – колебания от неуравновешенности вращающихся масс и раскачка системы, например, работающим двигателем вследствие несбалансированности его частей, колебания от соударения деталей, толчки, получаемые автомобилем на неровностях дороги или поездом на стыках рельсов, колебания деталей приборов, установленных на вибрирующем основании (в автомобилях, самолетах), крутильные колебания валов в двигателях внутреннего сгорания, колебания поршней в автомобильном двигателе и т.д. Механический резонанс в элементах технологических машин и строительных сооружениях может привести к разрушениям огромного масштаба, техногенным катастрофам, травматизму и гибели людей.

Возникающая в механике и строительстве резонансная катастрофа является очень серьезным и опасным явлением, поэтому главной задачей динамических расчетов при проектировании машин и механизмов, работающих в условиях вынужденных колебаний, является оценка опасности, которую создает возмущающая сила для упругой системы, и прогнозирование возникновения резонанса.

Эта задача решается, прежде всего, сопоставлением частоты собственных колебаний системы с частотой возмущающей силы:

★ Если частоты сильно отличаются, то можно быть уверенным, что явление резонанса не возникнет и условия работы упругой системы являются благоприятными. В этом случае на основании формулы (59) можно без труда вычислить амплитуду вынужденных колебаний, даже не рассматривая влияние сил сопротивления и принимая $n_{\text{зат}} = 0$. Как видно из графика (рис. 24), при отношении частот

$\omega/\omega_0 \approx 1,5 \dots 2,0$ и более кривые практически сливаются, а это

значит, что коэффициент затухания $n_{\text{зат}}$ вдали от резонанса не влияет на динамическое поведение системы и при таком соотношении частот в колебательной системе им можно пренебречь. И тогда при

отношении частот $\omega/\omega_0 \geq 1,5 \dots 2,0$ коэффициент нарастания коле-

баний (60), определяющий величину амплитуды вынужденный колебаний (59), может быть вычислен по формуле —

$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_0^2}. \quad (66)$$

Согласно (66) при $\omega/\omega_0 > 1$ β и B отрицательны. Знак «минус» означает, что колебания происходят в противофазе с возмущающей силой, однако в расчетах и при построении резонансных кривых их принимают по модулю.

★ Если частоты близки по значению и возникает опасность резонанса, то путем конструктивных и технологических решений следует обеспечить «отстройку» частот, добиваясь изменения той или иной частоты. При этом нужно учитывать, что механические объекты могут иметь две и более резонансных частот и легко вибрировать на этих частотах. Собственная круговая частота ω_0 определяются внутренними параметрами самой колебательной системы — ее массой, геометрией, жесткостью, как это показано выше для продольных, изгибных и крутильных колебаний, поэтому изменение ω_0 возможно путем изменения этих параметров. Для возмущающей силы наилучшим решением является полная ликвидация источника внешнего воздействия. Если это не представляется возможным, применяют различные технические приемы, позволяющие вредное воздействие возмущающей силы снизить, например, путем введения другого внешнего воздействия, работающего с ней в противофазе, или созданием взаимной

нейтрализации двух и более вредных действий, а также нейтрализацией вредного воздействия путем введения в конструкцию дополнительных грузов со смещающимся центром масс и т.д.

★ Если варьировать частотами не представляется возможным, то практикуется демпфирование системы, т.е. установка специальных устройств, которые повышают рассеяние энергии при колебаниях.

Однако следует иметь ввиду, что при вхождении системы в состояние резонанса на «раскачку» системы требуется время и амплитуда вынужденных колебаний не сразу достигает своего максимального значения. Поэтому кратковременное состояние резонанса для конструкций не представляет опасности, поскольку амплитуда в течение короткого времени не успевает достичь больших значений, опасных для прочности системы.

В завершении вопроса следует сказать, что резонанс, как и любое физическое явление, может иметь не только отрицательные, но и положительные стороны. Его используют во многих технологических процессах (резонансное разрушение при дроблении и измельчении горных пород, раскачивание машины для утрамбовки бетона), в акустических резонаторах музыкальных инструментов и различных устройствах, использующих радиоволны (радиоприемники, телевизоры, мобильные телефоны), в электроизмерительных приборах, в медицине (магнито-резонансная томография) и т.д. Полезное действие резонанса часто используется в жизненных ситуациях, как например, раскачка застрявшего автомобиля для выталкивания его из ямы, раскачивание человека на качелях путем подталкивания качелей в соответствующей резонансной частотой и др.

4.4. Напряжения и деформации при вынужденных колебаниях. Расчеты на прочность

Определение напряжений и деформаций при вынужденных колебаниях, как и во многих динамических задачах – на удар, на учет сил инерции и др., производится по методике –

$$\begin{matrix} \Delta_{\partial} = k_{\partial} \Delta_{cm} \\ \sigma_{\partial} = k_{\partial} \sigma_{cm} \\ \tau_{\partial} = k_{\partial} \tau_{cm} \end{matrix}, \quad (67)$$

в соответствии с которой первоначально выполняется *статический*

расчет, при котором динамическая нагрузка заменяется соответствующей статической нагрузкой, прикладываемой в той же точке и в том же направлении, и вычисляются статические значения искомых величин. А затем для получения их динамических значений в расчет вводится динамический коэффициент k_{∂} и по формулам (67) выполняется *динамический расчет*. Динамический коэффициент показывает, во сколько раз динамические напряжения и деформации больше статических, как если бы такая же нагрузка прикладывалась статически. В зависимости от вида динамической нагрузки коэффициент k_{∂} имеет различные выражения, соответствующие конкретному случаю нагружения. Проверка прочности и жесткости конструкции производится по условиям:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\partial}^{\max} &= k_{\partial} \Delta_{cm} \leq [\Delta] \\ \sigma_{\partial}^{\max} &= k_{\partial} \sigma_{cm} \leq [\sigma] \\ \tau_{\partial}^{\max} &= k_{\partial} \tau_{cm} \leq [\tau] \end{aligned} \right\} . \quad (68)$$

Вопрос напряжений и деформаций при *свободных колебаниях* не рассматривается, так как эти колебания не представляют опасности для прочности системы. Потенциально опасность может возникнуть только в начальный момент, когда система имеет наибольшее отклонение от положения равновесия, равное амплитуде A_0 (35). В этом крайнем положении динамическая деформация элемента, определяемая как сумма статической деформации от веса груза Δ_{cm}^Q и деформации при наибольшем отклонении, равна —

$$\Delta_{\partial}^{\max} = \Delta_{cm}^Q + A_0 = \Delta_{cm}^Q \left(1 + A_0 / \Delta_{cm}^Q \right),$$

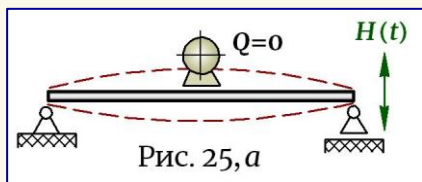
и тогда за динамический коэффициент принимается значение:

$$k_{\partial} = 1 + A_0 / \Delta_{cm}^Q . \quad (69)$$

Прочность и жесткость элемента проверяется по условиям (68), а далее свободные колебания экспоненциально затухают (33), амплитуда уменьшается и колебательный процесс прекращается.

Рассмотрим вопрос для *вынужденных колебаний* и установим значение динамического коэффициента:

Вынужденные колебания без учета веса груза



Пренебрегая весом груза и принимая $Q=0$, считаем, что элемент деформируется только под действием возмущающей силы $H(t)$, создающей вынужденные колебания (рис. 25,а),

а наибольшей динамической деформацией является амплитуда колебаний, т.е. $\Delta_{\partial} = B$. При выполнении *статического расчета* в случае отсутствия других нагрузок наибольшую статическую деформацию создает возмущающая сила H_0 , условно приложенная статически. И тогда, согласно (67), получаем — $\Delta_{\partial} = k_{\partial} \Delta_{cm}^{H_0}$ или $B = k_{\partial} \Delta_{cm}^{H_0}$.

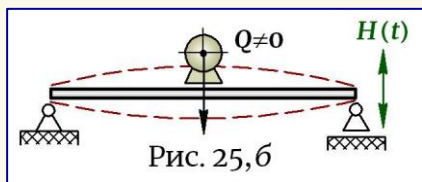
Но так как амплитуда вынужденных колебаний и статическая деформация от силы H_0 связаны соотношением (61), динамическим коэффициентом является коэффициент нарастания колебаний:

$$k_{\partial} = \beta, \quad (70)$$

который в зависимости от условий колебаний может быть вычислен по формулам (60) или (66). И тогда для колебаний без учета веса груза динамические напряжения и деформации с учетом значения (70) определяются как:

$$\Delta_{\partial} = \beta \Delta_{cm}^{H_0}; \quad \sigma_{\partial} = \beta \sigma_{cm}^{H_0}.$$

Вынужденные колебания с учетом веса груза



В этом случае полная динамическая деформация складывается из деформации от груза Q и деформации от действия возмущающей силы, т.е. амплитуды вынужденных колебаний (рис. 25б):

$$\Delta_{\partial} = \Delta_{cm}^Q + B = \Delta_{cm}^Q + \beta \Delta_{cm}^{H_0} = \Delta_{cm}^Q \left(1 + \beta \Delta_{cm}^{H_0} / \Delta_{cm}^Q \right),$$

где, учитывая методику (67), за динамический коэффициент принимается значение:

$$k_{\partial} = 1 + \beta \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}^Q} . \quad (71)$$

И тогда динамические напряжения и деформации при вынужденных колебаниях с учетом веса груза и значения (71) определяются по

формулам: $\Delta_{\partial} = k_{\partial} \Delta_{cm}^Q; \sigma_{\partial} = k_{\partial} \sigma_{cm}^Q$.

4.5. Критическая скорость вращения вала

Среди машиностроительных конструкций широкое распространение имеют быстро вращающиеся системы – турбины, валы компрессоров, шпиндели станков, сушильные барабаны, центрифуги и др., динамическое поведение которых отличается важной особенностью, заключающейся в том, что при определенных скоростях вращения валы теряют устойчивость, деформируясь и изменяя свою форму. Как известно из практики эксплуатации машин и механизмов, быстро вращающиеся детали в силу того, что они никогда не бывают идеально сбалансированы, всегда подвержены действию возникающих инерционных сил дисбаланса, уводящих вращающуюся деталь от оси вращения.

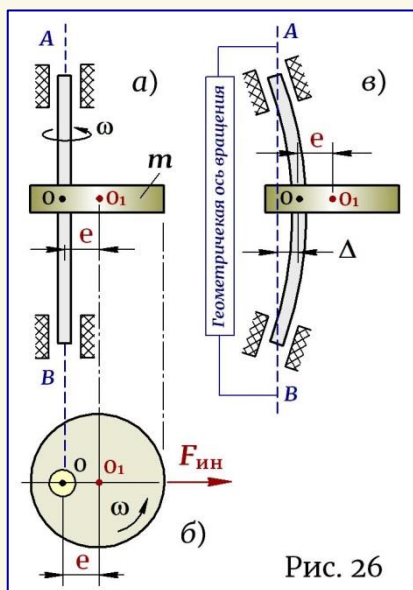


Рис. 26

Вал, несущий несбалансированную массу – массу, неравномерно распределенную вокруг оси вращения, при вращении начинает колебаться и при некоторой скорости вращения, попадая в резонанс, становится динамически неустойчивым – теряет свою первоначально прямолинейную форму и изгибается. Поперечные колебания валов могут быть столь значительными, что способны нарушить работу механизма и вывести из строя целую конструкцию.

Для определения физической сущности этого явления рассмотрим упругий невесомый вал, опирающийся на жесткие опоры (подшипники), на котором посередине длины наса-

жен диск массой " m ", установленный с эксцентриситетом " e " — смещением центра тяжести O_1 от точки крепления " O " на оси AB неподвижного вала (рис. 26, а). Такие валы называются неуравновешенными, а произведение " me " — *величиной дисбаланса* или просто *дисбалансом*. При изготовлении роторов и их сборке всегда стремятся к максимально более точной балансировке деталей, однако полностью устранить механический дисбаланс не удастся и идеальное центрирование дисков с геометрической осью вращения практически никогда не достигается.

При вращении вала относительно *геометрической оси* (линии соединения опор AB) с постоянной угловой скоростью $\boxed{\omega = \pi n / 30}$, где n — число об/мин, смещение центра тяжести диска от оси вращения, какой бы малой ни была величина дисбаланса " e ", обуславливает возникновение центробежной силы инерции, равной (рис. 26, б):

$$\boxed{F_{ин} = m\omega^2 (\Delta + e)}, \quad (72)$$

где Δ — прогиб вала в месте посадки диска от действия силы инерции; $(\Delta + e)$ — полный радиус вращения центра тяжести диска O_1 относительно геометрической оси AB (рис. 26, в).

Возникающая сила инерции является периодической силой. Она вращается вместе с валом, изменяя направление своего вектора и вызывая изгибные гармонические колебания вала.

Для получения решения в чистом виде, чтобы исключить прогиб вала от веса диска, вал располагается в *вертикальном* положении и его изгиб рассматривается только от действия центробежной силы. В случае *горизонтального* положения вала, учитывая его статический прогиб от веса диска, вращение будет происходить относительно нового статического положения равновесия. Если система уравновешена ($e = 0$), вал будет вращаться относительно собственной искривленной оси, но в случае дисбаланса ($e \neq 0$) произойдет дополнительный изгиб вала от действия появившейся центробежной силы и колебания будут происходить относительно новой (искривленной) линии равновесия. Однако решение задачи и при *вертикальном*, и при *горизонтальном* расположении вала будет одинаковым.

Примечание.

При постоянной скорости вращения инерционная сила вращается вместе с валом, изгибая его, в результате чего динамически изогнутый вал будет

вращаться не только относительно своей деформированной оси, но и совершать круговое движение относительно линии опор АВ, называемое ПРЕЦЕССИОННЫМ ДВИЖЕНИЕМ. Прецессия зависит от величины дисбаланса, упругости опор, демпфирования системы и других факторов и может быть прямой (если собственное вращение вала и прецессионное вращение совпадают по направлению), обратной (если вращение вала и прецессионное движение происходят в разные стороны), синхронной (если частота прецессии равна частоте собственного вращения вала, что наиболее часто встречается на практике) и несинхронной.

При изгибе вала возникает сила упругого сопротивления – восстанавливающая сила, стремящаяся вернуть вал в состояние статического равновесия и пропорциональная прогибу:

$$F_{\text{упр}} = C\Delta, \quad (73)$$

где C – жесткость вала, равная $C = m\omega_0^2$ (4); ω_0 – круговая частота собственных изгибных колебаний невращающегося вала, зависящая от его геометрии, механических свойств и схемы нагружения.

Стационарному состоянию системы, согласно принципу Даламбера, соответствуют уравновешенность сил (72) и (73), и тогда с учетом значения (4) получаем равенство –

$$F_{\text{ин}} = F_{\text{упр}} \rightarrow m\omega^2(\Delta + e) = m\omega_0^2\Delta,$$

откуда определяем прогиб вала от действия центробежной силы:

$$\Delta = \frac{e}{\omega_0^2/\omega^2 - 1}. \quad (74)$$

Примечание.

Различают РАВНОВЕСНОЕ, СТАЦИОНАРНОЕ и ПЕРЕХОДНОЕ состояние системы. При равновесном и стационарном состояниях система характеризуется постоянством свойств и параметров во времени, но при равновесном состоянии это постоянство сохраняется при отсутствии потоков вещества и энергии в системе, а при стационарном – оно поддерживается за счет непрерывного обмена веществом и энергией между системой и окружающей средой. В переходном состоянии происходит изменение свойств во времени. Вращающийся с постоянной скоростью вал находится в стационарном состоянии, так как его геометрические и механические параметры, поддерживаемые режимом вращения, постоянны: на протяжении всего времени динамически изогнутая форма вала не изменяется, а значит, он не испытывает знакопеременных деформаций и напряжений. Следует заметить, что вращение неуравновешенного вала в стационарном со-

стоянии не является, строго говоря, колебательным, однако ротационное движение в виде синхронной прецессии, вызванной центробежной силой, возбуждает вынужденные колебания вала с частотой его вращения. При работе в стационарном состоянии внутреннее трение в материале вала, установленном на жестких опорах, отсутствует и, в отличие от поперечных колебаний балки, не может демпфировать колебания вала.

Анализ значения (74) показывает, что при совпадении скорости вращения вала Ω с круговой частотой его собственных поперечных колебаний Ω_0 наступит резонанс, при котором поперечный прогиб вала неограниченно возрастает. Такая скорость вращения называется **критической скоростью** $\Omega_{кр}$ и в общем случае, если не учитывать потери энергии, она равна частоте собственных изгибных колебаний системы на невращающемся валу: $\Omega_{кр} = \Omega_0$. И тогда выражение (74)

можно представить в виде:

$$\Delta = \frac{e}{\omega_{кр}^2 / \omega^2 - 1}. \quad (75)$$

При скорости вращения вала, равной критической, наступает резонанс и прогиб вала (75) теоретически обращается в бесконечность, что может привести к поломке конструкции. Однако в действительности при возникновении резонансных колебаний одномоментного разрушения вала не происходит, так как всегда имеют место потери энергии на преодоление различного рода сил сопротивления – внутренние силы трение в материале вала, трение поверхности об окружающую среду, трение в подшипниках и т.д. Эти силы в расчете не учитываются, но их присутствие уменьшает амплитуду колебаний и прогибы вала не сразу достигают значений, опасных для прочности. Нарастание амплитуды происходит постепенно при длительной работе в условиях резонанса и продолжается до тех пор, пока вся энергия колебаний не будет израсходована на преодоление сил сопротивления или пока значительные вибрации вала не приведут к аварии и разрушению конструкции. Поэтому при проектировании быстровращающихся систем потенциальную опасность наступления резонанса следует учитывать и для обеспечения виброустойчивости валов принимать определенные меры. В первую очередь с помощью балансировки системы необходимо обеспечить более точное центрирование пары «вал-диск», чтобы остаточный дисбаланс, который в роторных системах полностью устранить невозможно, не превышал значение, установленное техническими нормами. А для предупреждения входа

в резонансное состояния проектировать вращающиеся системы с соответствующими кинематическими параметрами вращения, чтобы эксплуатируемые угловые скорости не совпадали с критической.

Быстровращающиеся валы в соответствии с характеристиками роторной машины разделяют на *жесткие* и *гибкие*. И эти качества определяются не только изгибной жесткостью самого вала, но и скоростью его вращения относительно резонансной частоты.

Если диапазон рабочих скоростей вращения вала меньше критической частоты и составляет — $\boxed{\omega \leq (0,7 \dots 0,8) \omega_{кр}}$, деформации вала незначительны, не превышают допускаемых норм и, согласно выражению (75), находятся в пределах — $\boxed{\Delta \leq e}$. Такие валы называются *жесткими*, а записанное выше значение скорости является условием виброустойчивости жесткого вала. Большинство валов проектируют как *жесткие*, и чтобы обеспечить их работу в дорезонансной области, помимо варьирования эксплуатационной скоростью, увеличивают их жесткость, повышая тем самым значение $\omega_0 = \omega_{кр}$.

При приближении частоты вращения к критической — $\boxed{\omega \approx \omega_{кр}}$ наступает резонансное состояние — динамический прогиб вала неограниченно возрастает, и хотя это возрастание технически ограничено, прогиб становится настолько большим, что возникает опасность разрушения не только вала, но также опор и всего механизма в целом. Резонансное состояние проявляется в сильной вибрации и тряске конструкции, возникают биения на опорах и колебания подшипников, причем не только в радиальном, но и осевом направлениях, нарушается их работоспособность. Поэтому при запуске системы и наращивании скорости вращения переход через критическую частоту следует осуществлять максимально быстро, используя двигатели большой мощности. Медленный переход или «застывание» на критической частоте не только не обеспечит возрастание скорости, но и приведет к еще большему увеличению амплитуды колебаний.

Если диапазон рабочих скоростей вращения вала превышает критическую частоту — $\boxed{\omega \geq (1,3 \dots 1,4) \omega_{кр}}$, динамический прогиб вала, согласно (75), становится отрицательным, т.е. изменяет направление. А это означает, что если на докритических частотах прогиб вала и эксцентриситет имели одинаковое направление и вращение ротора происходило «тяжелой стороной наружу» (рис. 27, а), то при скоростях в закритической области прогиб вала и эксцентриситет направлены в

противоположные стороны, т.е. центр тяжести диска O_1 оказывается ближе к оси вращения AB , чем центр вала O (рис. 27, б). С увеличением скорости точка O_1 все больше приближается к оси вращения, стремясь занять положение на линии соединения опор. В результате при $\omega \rightarrow \infty$ прогиб вала теоретически становится равным — $\Delta = -e$, вследствие чего вращение динамически изогнутого вала теперь происходит не вокруг своей геометрической оси, а вокруг оси, проходящей через центр тяжести диска O_1 , и ротор вращается «легкой стороной наружу».

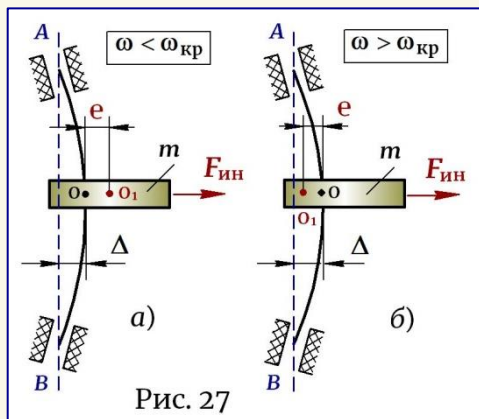


Рис. 27

Вынужденные колебания, как было показано выше, происходят с отставанием от возмущающей силы и сдвиг фаз между ними лежит в пределах — $0 \leq \varphi \leq \pi$. При вращении на докритических частотах ($\omega < \omega_{кр}$) колебания вала и возмущающей силы, вызванной наличием эксцентриситета, происходят почти синфазно или с небольшим сдвигом. С возрастанием скорости вращения сдвиг фаз увеличивается, сначала медленно и незначительно (особенно для систем с низкими демпфирующими свойствами), а затем при достижении $\omega \approx \omega_{кр}$ резко возрастает и, согласно решению (55), становится равным " $\pi/2$ ", а значит, при резонансе вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на " $\pi/2$ ". При таком колебательном режиме максимальному значению возмущающей силы соответствует нулевое отклонения системы от положения равновесия, и наоборот. С дальнейшим возрастанием скорости происходит постепенное увеличение сдвига фаз от " $\pi/2$ " до " π " и при $\omega \rightarrow \infty$ центр тяжести диска O_1 занимает положение на линии опор, а вынужденные колебания происходят в противофазе с центробежной силой, т.е. со сдвигом на " π ". Но как известно из теории колебаний, колебания в противофазе максимально ослабляют друг друга, поэтому амплитуда вибраций вала и центробежная сила уменьшаются и колебания постепенно прекращаются. Такие валы называются *гибкими*, а явление динамического центрирования вала называется *самоцентрированием*. При самоцентрирова-

нии в результате уменьшения прогиба снижаются напряжения изгиба, динамическая устойчивость вала возрастает, а значит, превышение критической скорости вращения и работа на удаленных от резонанса частотах способствует работоспособности вала. Большие скорости вращения вместо разрушения системы приводят к ее уравниванию, поэтому, проектируя валы высокой податливости, можно получить хорошую балансировку системы. Это используется при проектировании турбин, центрифуг и других быстро вращающихся конструкций, где гибкие валы являются более рациональными, чем жесткие. Записанное выше значение скорости является условием виброустойчивости гибкого вала.

На основании вышесказанного следует, что частотный диапазон скоростей — $0,7\omega_{кр} < \omega < 1,4\omega_{кр}$ — для вращающихся систем является недопустимым для эксплуатации.

Необходимо также учитывать, что вибрации быстро вращающихся валов могут быть не только следствием неправильной балансировки деталей, но и несносностью их установки, износом подшипников или механических повреждений на валу – трещин, деформаций и т.д., поэтому диагностика и устранение причин вращающихся частей динамического промышленного оборудования является важной и всегда актуальной задачей. Более подробно вопрос колебаний быстро вращающихся роторных систем рассматривается в специальных курсах.

5. Параметрические колебания

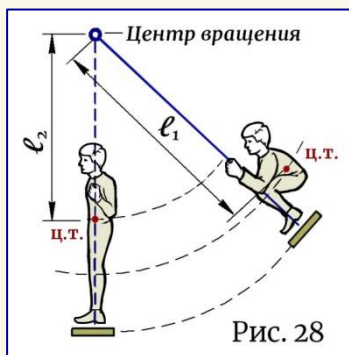
ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ называются колебания, которые возникают при периодическом изменении (модуляции) какого-либо параметра системы в результате внешнего воздействия.

Всякая колебательная система характеризуется величинами, которые называются *параметрами* и которые определяют геометрические и механические свойства системы – ее размеры, конфигурацию, жесткость, распределение масс и т.д. Эти параметры являются, как правило, величинами постоянными, однако под воздействием внешних или внутренних сил они могут изменяться по времени, в результате чего в системе возбуждаются колебания, но причиной этих колебаний является не действующая сила как таковая, а вызванные ею периодические изменения (модуляция) параметров системы, создающие колебательный процесс. Параметрические колебания, как и вынуж-

денные, являются незатухающими, но в отличие от последних, вызываемых постоянно действующей возмущающей силой, здесь силовое воздействие сводится к искусственно вызываемому изменению параметров системы и именно эти изменения и создают ее колебания. Так, в математическом маятнике основным параметром является длина, изменяя которую в такт качания маятника, его колебания можно сделать незатухающими. В физическом маятнике таким параметром является момент инерции массы, определяемый расстоянием от точки подвеса до центра тяжести тела, и если это расстояние изменять, можно производить раскачивание системы, как, например, это происходит при раскачивании человека на качелях. В пружинном маятнике, как и в любых упругих системах, такими параметрами являются жесткость, масса и распределение масс, периодическое изменение которых под внешним воздействием создают колебания системы. Параметрические колебания не являются самовозбуждающимися и их невозможно получить из положения равновесия. Для возбуждения параметрических колебаний необходимо, чтобы система имела некоторое начальное отклонение и уже совершала малые колебания.

Параметрические колебания в зависимости от свойств системы и характера изменения параметров могут происходить с фиксированной (установившейся) амплитудой, либо с амплитудой, возрастающей во времени. Последнее явление называется *параметрическим резонансом*, и хотя здесь, как и при вынужденных колебаниях, происходит возрастание амплитуды, что опасно для любых технических систем, параметрический резонанс принципиально отличается от резонанса при вынужденных колебаниях и условий его возникновения.

Рассмотрим возникновение параметрических колебаний при раскачивании человека на качелях (рис. 28). Внутренней силой в данной системе является давление ног человека на качели, однако само по себе это давление к движению центра масс и раскачиванию качелей

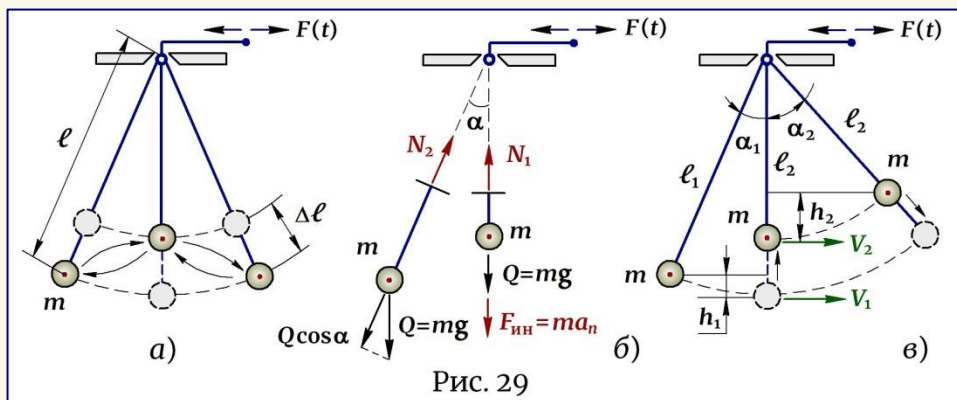


не приведет. Первоначально системе следует задать некоторые малые колебания, а затем для увеличения амплитуды и поддержания колебаний необходимо, чтобы человек при наибольшем отклонении качелей *приседал*, а при прохождении через положение равновесия резко *выпрямлялся*, тем самым то опуская, то поднимая свой центр тяжести. Качание качелей можно рассматривать как колебания физического маятника, а поэтому, периодическое изме-

нение позы человека «сидя-стоя-сидя» будет приводить, по сути, к изменению приведенной длины физического маятника ($\ell_1 > \ell_2$). В результате момент инерции массы $I_0 \sim \ell^2$, являющийся параметром системы, будет периодически изменяться от максимального значения при наибольшем отклонении системы до минимального в положении равновесия. При этом в вертикальном положении уменьшение момента инерции будет происходить скачкообразно, что вызовет такое же скачкообразное возрастание скорости (угловой $\omega^2 \sim 1/I_0$ и линейной $V \sim \omega$), приводящее при каждом последующем отклонении к приращению угла и увеличению амплитуды колебаний. Потеря энергии в такой колебательной системе компенсируется за счет работы, осуществляемой при приседании и выпрямлении, при этом, выпрямляясь, человек совершает положительную работу, а приседая – отрицательную, но меньшую по величине, а поэтому, энергия колебаний с каждым периодом возрастает и происходит раскачивание системы.

Моделью раскачивания качелей является колебание математического маятника с подвижной точкой подвеса (рис. 29, а), позволяющей периодическое изменение длины его нити ℓ , являющейся параметром маятника как колебательной системы. Изменяя эту длину, втягивая или отпуская нить при прохождении маятником определенных положений в плоскости колебаний, в системе можно возбудить незатухающие параметрические колебания: при нахождении маятника в нижнем положении его нить следует укорачивать на $\Delta\ell \ll \ell$, натягивая ее и приближая маятник к оси вращения, а при нахождении в крайнем отклоненном положении – нить надо отпускать, удлиняя ее на величину укорочения. Эти действия подобны приближению и удалению центра масс при раскачивании качелей и при их периодическом выполнении будет наблюдаться увеличение амплитуды и раскачивание маятника. При этом, возбуждение параметрического резонанса происходит только при определенном соотношении между частотой собственных колебаний системы ω_0 и частотой изменения параметра ω_{Π} . В математическом маятнике, как и в случае с качелями, за полный период колебаний *параметр дважды изменяет свое значение* – дважды достигает наименьшей и дважды наибольшей величины, т.е. полупериоду колебаний соответствует полный период изменения параметра, а значит, частота изменения параметра системы в два раза больше частоты ее колебаний – $\boxed{\omega_{\Pi} = 2\omega_0}$, что, по сути, является условием параметрического резонанса. Это отличает па-

раметрические колебания от вынужденных, которые в установившемся режиме происходят с частотой возмущающей силы Ω_B и резонанс возникает при условии равенства частот — $\Omega_0 = \Omega_B$. Отличием также является сдвиг фаз, который при вынужденных колебаниях, согласно (55), зависит от свойств колебательной системы и частоты возмущающей силы, а при параметрических — фазовый сдвиг является постоянным и примерно равен половине периода колебаний параметра, что соответствует четверти периода колебаний маятника.



Как было сказано в примере с качелями, при параметрических колебаниях происходит накопление энергии, которое не только обеспечивает колебательному процессу незатухающий режим, но и делает колебания нарастающими. Такое накопление возникает за счет разности работ, производимых при укорочении и удлинении маятника (что соответствует приближению и удалению центра масс качелей относительно оси качания): при вытягивании нити (ее натяжении) совершается положительная работа, производящая закачивание энергии, а при отпуске нити энергия теряется, т.е. совершается отрицательная работа, но меньшей величины. В результате энергетический баланс системы остается положительным и возникающий в ней избыток энергии увеличивается с каждым периодом колебаний:

★ При нахождении маятника в нижнем положении (рис. 29, б), где скорость $V(\omega)$ и, соответственно, нормальное ускорение $a_n = \omega^2 \ell$ имеют наибольшее значение, при вытягивании нити сила ее натяжения N_1 уравнивается силой тяжести маятника $Q = mg$ и силой инерции $F_{ин} = ma_n = m\omega^2 \ell$ и равна $N_1 = mg + m\omega^2 \ell$.

Работа силы N_1 на укорочении нити $\Delta\ell$ является положительной и определяется как —

$$\boxed{A_1} = N_1 \Delta\ell = (mg + m\omega^2 \ell) \Delta\ell. \quad (76)$$

★ При нахождении маятника в крайнем отклоненном положении (рис. 29, б), где скорость $V(\omega)$ и, соответственно, нормальное ускорение a_n равны нулю, натяжение нити маятника N_2 определяется только действующей вдоль нее силой $\boxed{N_2 = mg \cos \alpha}$, которая при отпускании нити маятника до прежней длины (при сбрасывании деформации) совершает работу в обратном направлении, т.е. отрицательную работу —

$$\boxed{A_2} = -N_2 \Delta\ell = -mg \cos \alpha \Delta\ell. \quad (77)$$

На основании значений (76) и (77) несложно доказать, что полная работа за четверть периода положительна —

$$\begin{aligned} \boxed{A} &= A_1 + A_2 = (mg + m\omega^2 \ell) \Delta\ell - mg \cos \alpha \Delta\ell = \\ &= mg \Delta\ell (1 - \cos \alpha) + m\omega^2 \ell \Delta\ell = mg \Delta\ell \left[(1 - \cos \alpha) + \omega^2 \ell / g \right] > 0, \end{aligned}$$

а значит, за каждый период колебаний энергия системы увеличивается, и если нет потерь на преодоление сил сопротивления, энергия возрастает неограниченно — колебательный процесс принимает нарастающий характер с прогрессивно растущей амплитудой.

Определим увеличение угла отклонения маятника за каждый полупериод параметрических колебаний (рис. 29, в).

Полная энергия гармонических колебаний состоит из кинетической $\boxed{K = mV^2/2}$ и потенциальной $\boxed{W = mgh}$ энергий, которые при колебательном процессе превращаются друг в друга и суммарная величина которых в каждый момент колебаний, если рассеянием энергии пренебречь, остается постоянной — $\boxed{K + W = \text{const}}$. При наибольшем отклонении системы от положения равновесия, где скорость равна нулю, кинетическая энергия также равна нулю, а потенциальная энергия максимальна; при нахождении системы в положении равновесия, где скорость максимальна, соответственно кинетическая энергия максимальна, а потенциальная равна нулю. Тогда на основании закона сохранения энергии потенциальная энергия при нахождении маятника в крайнем отклоненном положении и кинетическая энергия при его нахождении в положении равновесия равны и, принимая

значение $\boxed{h_1 = \ell_1 - \ell_1 \cos \alpha_1 = \ell_1 (1 - \cos \alpha_1)}$ (рис. 29, в), получаем —

$$\boxed{K_{\max} = W_{\max}} \rightarrow \frac{mV_1^2}{2} = mg\ell_1(1 - \cos \alpha_1),$$

откуда определяем максимальную скорость V_1 , которую приобретает масса при прохождении нижней точки в первую четверть периода:

$$\boxed{V_1} = \sqrt{2g\ell_1(1 - \cos \alpha_1)}, \quad (78)$$

где α_1 — начальное отклонения маятника.

В момент прохождения маятником положения равновесия длина нити резко укорачивается на $\Delta\ell$, скорость скачкообразно возрастает до значения V_2 и момент количества движения сохраняется —

$$mV_1\ell_1 = mV_2\ell_2,$$

откуда получаем:

$$\boxed{V_2} = V_1(\ell_1/\ell_2), \quad (79)$$

где $\ell_2 = (\ell_1 - \Delta\ell)$ — укороченная длина маятника.

Увеличение скорости приводит к увеличению угла отклонения, который на основании закона сохранения энергии и с учетом значений (78), (79) и $\boxed{h_2 = \ell_2(1 - \cos \alpha_2)}$ становится равным —

$$\begin{aligned} \frac{mV_2^2}{2} &= mg\ell_2(1 - \cos \alpha_2) \rightarrow \frac{V_1^2(\ell_1/\ell_2)^2}{2} = g\ell_2(1 - \cos \alpha_2) \rightarrow \\ g\ell_1(1 - \cos \alpha_1) \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 &= g\ell_2(1 - \cos \alpha_2) \rightarrow \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^3 = \frac{1 - \cos \alpha_2}{1 - \cos \alpha_1}, \end{aligned}$$

где используя тригонометрические формулы преобразования и для малых углов принимая — $\sin(\alpha_0/2) \approx \alpha_0/2$ и $\sin(\alpha_1/2) \approx \alpha_1/2$, т.е.

$$\boxed{\begin{aligned} 1 - \cos \alpha_1 &= 2\sin^2(\alpha_1/2) = 2(\alpha_1/2)^2 \\ 1 - \cos \alpha_2 &= 2\sin^2(\alpha_2/2) = 2(\alpha_2/2)^2 \end{aligned}},$$

получаем — $\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^3 = \frac{1 - \cos \alpha_2}{1 - \cos \alpha_1} = \frac{2(\alpha_2/2)^2}{2(\alpha_1/2)^2} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2,$

откуда определяем максимальный угол отклонения маятника в первый полупериод колебаний:

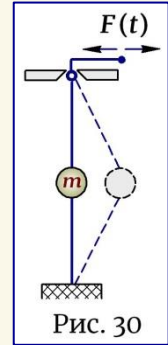
$$\boxed{\alpha_2} = \alpha_1 (\ell_1 / \ell_2)^{3/2}. \quad (80)$$

Аналогичным образом можно записать соотношения для максимальных отклонений маятника любого последующего полупериода:

$$\boxed{\alpha_{n+1}} = \alpha_n (\ell_1 / \ell_2)^{3/2},$$

откуда следует, что при параметрических колебаниях происходит последовательное увеличение угла отклонения и приращение амплитуды, приводящее к неограниченной раскачке системы.

Подобно математическому маятнику работает струна, несущая массу "m" посередине длины, где параметрические колебания возникают, если при движении массы к центру натяжение струны попеременно увеличивать, а при движении от центра ослаблять (рис. 30).



Примечание.

При любом колебательном процессе независимо от причин возникновения колебаний происходит частичное рассеяние энергии и ее потеря на преодоление различного рода сил сопротивления. При вынужденных колебаниях эта энергия восполняется за счет внешнего воздействия возмущающей силы. При параметрических колебаниях приращение энергии происходит за счет разности работ (см. выше), но если это приращение равно диссипативным потерям за тот же временной интервал, параметрические колебания принимают стационарный характер с установившейся (фиксированной) амплитудой. В случае если приращение энергии превышает ее потери, накопление энергии будет увеличиваться и колебания будут нарастающими, вплоть до разрушения системы. Поэтому именно нарастающие параметрические колебания представляют наибольший интерес.

В динамических системах упругие колебания всегда сопутствуют работе машин и механизмов и могут иметь силовой, кинематический и параметрический характер возбуждения. В механических устройствах параметрические колебания встречаются реже, чем силовые, и часто рассматриваются как некое побочное и маловероятное явление. Однако практика эксплуатации технических систем показывает, что параметрический резонанс представляет серьезную опасность и именно параметрические колебания приводят к нарушению работоспособности конструкций и являются причиной возникновения аварий. Амплитуда параметрических колебаний возрастает по экспоненциальному закону, быстро достигая аварийных значений, и это возрастание происходит даже при демпфировании системы: если при вынужденных колебаниях введение линейной силы сопротивления способно

ограничивать рост амплитуды и устранять резонансные явления, то параметрический резонанс может развиваться даже при наличии сил сопротивления, что делает его более опасным, чем силовой резонанс. Параметрический резонанс можно предотвратить, только обеспечив определенный уровень диссипации.

Параметрическим колебаниям подвержены конструкции, находящиеся в неустойчивом равновесном состоянии, при котором любое незначительное случайное возмущение приводит к колебаниям и раскачке системы. Так, например, параметрические изгибные колебания возникают в прямом стержне постоянного сечения, нагруженном продольной периодической силой, воздействие которой на определенной частоте делает стержень неустойчивым; в круговом кольце, нагруженном равномерной периодически изменяющейся во времени распределенной нагрузкой, которое при определенных соотношениях частот может испытывать интенсивные параметрические изгибные колебания; при вращении вала, имеющего различную изгибную жесткость в главных плоскостях инерции, даже если вал уравновешен и вращается с постоянной скоростью; в балках с подвижной опорой, т.е. с изменяющейся жесткостью, подверженных действию периодической силы; в роторах турбин и кривошипно-шатунных механизмах, имеющих изменяющийся при обороте момент инерции массы; в инструментах при обработке металлов резанием; в системах, где движение передается через упруго деформируемые звенья, например, в спарниках локомотивов; в трубопроводах под действием внутреннего переменного давления; в гибких шлангах с пульсирующей скоростью движущейся жидкости и др. Параметрические колебания возникают не только в механических, но также в электротехнических системах и даже рассматриваются в биофизических процессах и экономике.

Следует заметить, что возбуждение параметрических колебаний может происходить не только на удвоенной частоте собственных колебаний системы. Существует бесконечное число параметрических резонансов, условием возникновения которых является кратность частоты модуляции параметров частоте собственных колебаний, т.е. когда

выполняется соотношение — $\Omega_{\Pi} = \frac{2\omega_0}{n}$, где число $n=1,2,3...$ назы-

вается *порядком резонанса*. Однако наиболее эффективное поступление энергии в систему происходит при $\Omega_{\Pi} = 2\omega_0$ и именно на такой частоте изменения параметров возбуждаются и развиваются наиболее интенсивные параметрические колебания, поэтому резонанс при значении $n=1$ называют *основным*.

6. Автоколебания

АВТОКОЛЕБАНИЯ – это самовозбуждающиеся незатухающие колебания в системе, которые поддерживаются внутренним источником энергии, не обладающим колебательными свойствами.

Большинство динамических систем являются неизолированными и неконсервативными, вследствие чего они подвержены различным внешним воздействиям и энергетическим потерям. Но именно диссипативные системы обладают уникальной способностью восполнения энергии собственными усилиями без использования внешних возмущающих источников, в результате чего в них генерируются самовозбуждающиеся незатухающие колебания, которые не зависят от начального состояния системы, происходят с постоянной амплитудой и являются устойчивыми к любым внешним возмущениям. Такой способностью обладают системы, называемые *автоколебательными*, а сами колебания называются *автоколебаниями*.

Автоколебания могут иметь различную физическую природу – механическую, тепловую, химическую, электромагнитную, различный механизм возникновения и поддержания, различные динамические характеристики, но все они объединены общими свойствами, характеризующими автоколебательный процесс.

Автоколебания на практике встречаются очень часто, они лежат в основе многих явлений природы и на принципе их поддержания основано действие различных технических устройств и приспособлений. Это колебания листьев в потоке воздуха, турбулентные потоки на перекатах рек, действие гейзеров; колебания в струнно-смычковых и духовых инструментах; в электрических звонках и механических часах; в поршневых паровых машинах, двигателях внутреннего сгорания, отбойных молотках; колебания гибких трубопроводов и вибрации водопроводного крана; изгибно-крутильные колебания крыла самолета в аэродинамическом потоке (флаттер), колебания шасси при посадке самолета на посадочную полосу, колебания хвостового оперения (бафтинг); в радио- и электротехнических системах – колебания в электрических цепях и генераторах и т.д. В биологических объектах практически все колебания имеют автоколебательный характер – дыхательные и сердечные ритмы, генерация нервных импульсов, клеточные циклы, голосовые связки и т.д.

Автоколебания в отличие от вынужденных существуют в системе без периодического внешнего воздействия, они поддерживаются входящим в систему внутренним источником энергии, дозированное поступление которой регулируется самой колебательной системой, осу-

ществляющей в нужные моменты времени порционную самоподпитку. Частота и амплитуда автоколебаний определяются только свойствами самой системы, при этом амплитуда не зависит от времени и начальных условий, как это имеет место при свободных колебаниях, а частоту автоколебаний задает сама колебательная система.

В качестве колебательной системы может рассматриваться любая механическая система (осциллятор), способная совершать собственные затухающие колебания. Энергетические потери в этой системе за период колебаний, затрачиваемые на преодоление сил сопротивления, компенсируются подводом энергии от источника постоянного (непериодического) действия через специальное устройство (ключ), которое регулирует поступление энергии, преобразуя постоянное воздействие в переменное или прерывистое (рис. 31). Это устройство является механизмом обратной связи, характеризующим любую автоколебательную систему, который в такт с собственными колебаниями поставляет в систему небольшие порции энергии, обеспечивая тем самым колебательный процесс без затухания. Колебания будут продолжаться до тех пор, пока запас энергии не закончится. При малых силах сопротивления, когда в течение периода поступление энергии в систему уравнивает ее диссипацию, автоколебания практически являются гармоническими и происходят на частоте, близкой к частоте собственных колебаний осциллятора, т.е. автоколебательная система, по сути, будет находиться в резонансном состоянии. При больших диссипативных потерях, соответственно требующих значительного пополнения энергии, колебания перестают быть гармоническими.

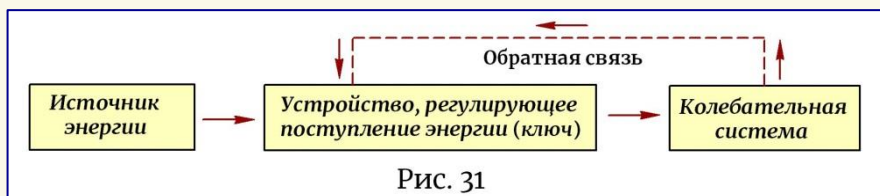
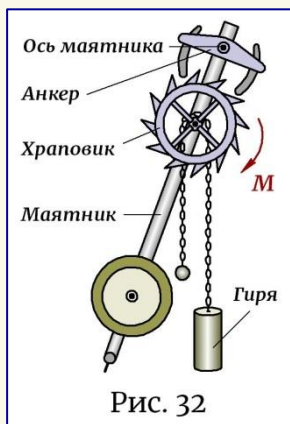


Рис. 31

Классическим примером автоколебательной системы являются механические часы, в которых в качестве источника постоянной энергии непериодического действия могут использоваться различные приспособления и устройства, как например, аккумуляторные батарейки в кварцевых часах, в часах с механическим заводом – закрученная винтовая пружина с запасенной в ней энергией деформации, в маятниковых часах – гири, подвешенные на высоте и обладающие запасом потенциальной энергии.

Рассмотрим автоколебания маятниковых часов с гирями, основными составляющими конструкции которых являются сам маятник, хра-

повик – зубчатое колесо с несимметричными зубьями, позволяющий вращение только в одном направлении, и анкерный спусковой механизм (анкер – от немец. «якорь»), представляющий собой рычаг в виде коромысла, оснащенный на концах специальными выступами и укрепленный на одной оси с маятником (рис. 32). Запуск часов начинается с поднятия гири в верхнее положение и одного толчка маятника, после чего возбуждается автоколебательный процесс, амплитуда которого не зависит от начального отклонения (первого толчка), а устанавливается самой колебательной системой. По мере опускания гири маятник, качаясь с постоянной амплитудой, преобразует вращение храпового колеса в движение часовых (секундных) стрелок, и когда гиря полностью опускается, колебания маятника прекращаются и часы останавливаются. При опускании гири, приводящей во вращение основную ось механизма, на храповик действует постоянный момент, заставляя его крутиться, а

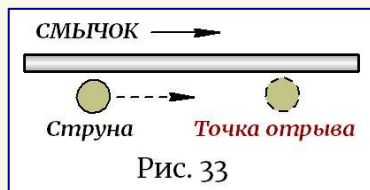


освобождающаяся потенциальная энергия гири переходит в кинетическую энергию вращающегося храповика. Но чтобы раскручивание не происходило быстро, вращение храпового колеса регулируется анкерным механизмом, который ограничивает его движение, цепляясь выступами за зубчики колеса: блокирует храповик, когда маятник находится в крайних положениях, и освобождает – в промежутках, позволяя храповому колесу за каждый полупериод колебаний провернуться на строго определенный угол, соответствующий одному зубцу. Таким образом, гиря, опускаясь, приводит во вращение храповик, а колебания маятника поворачивают соединенный с ним анкер, в результате взаимодействия которых маятник дважды за период получает кратковременный силовой импульс и происходит его подталкивание, сообщаящее маятнику дополнительную энергию, обеспечивающую его колебания без затухания. В синхронизации вращения храпового колеса с колебаниями маятника и заключается механизм обратной связи, создающий автоколебательный процесс.

Аналогичным образом работают часы с заводной пружиной, где в качестве колебательной системы вместо маятника используется *балансир* – колесико с пружиной, совершающий крутильные колебания вокруг своей оси.

Примером автоколебаний являются также колебания скрипичной струны, возбуждаемой равномерным движением смычка (рис. 33).

При движении смычка между ним и струной возникает сила трения, благодаря которой смычок захватывает струну и тянет ее по направлению своего движения. Известно, что трение скольжения зависит от скорости: наибольшее значение коэффициент трения имеет при скорости, равной нулю, т.е. в состоянии покоя, а с увеличением скорости трение уменьшается. Сила трения увлекает струну за смычком и происходит это до тех пор, пока сила упругого натяжения струны не превышает силу трения. Как только сила натяжения струны становится равной силе трения и не допускает ее дальнейшего движения за смычком, происходит отрыв струны от смычка (эта точка называется *точкой отрыва*) и возбуждаются ее колебания. Освобожденная от смычка струна начинает двигаться к положению равновесия, т.е. в сторону, противоположную движению смычка и между струной и смычком возникает взаимообратное движение, в результате которого их относительная скорость увеличивается, а сила трения, соответственно, уменьшается. Двигаясь в сторону, обратную направлению смычка, струна по инерции проходит через положение равновесия, достигает наибольшего отклонения, где ее скорость падает до нуля, и на этом промежутке вследствие уменьшения ее скорости относительно смычка начинает увеличиваться сила трения, которая снова увлекает струну за смычком до следующей точки отрыва. Далее все повторяется и возникает автоколебательный процесс. Если бы сила трения не зависела от скорости и была постоянной, в струне не возникали бы автоколебания. Именно зависимость силы трения от скорости и является причиной колебаний струны, которые возникают при уменьшении силы трения с увеличением скорости. Таким образом, система является «внутренне колебательной», в которой источником постоянной энергии неперiodического действия является движение смычка, задаваемое скрипачом.



В завершении вопроса следует заметить, что несмотря на то, что автоколебания лежат в основе действия большого количества технических устройств и приспособлений, в некоторых технических системах автоколебания могут быть нежелательными и даже опасными, являясь причиной серьезных аварий и разрушений, как, например, флаттер элементов летательных аппаратов, автоколебания в реактивных авиационных и ракетных двигателях, в магистральных жидкостей и газов высокого давления, в турбинах электростанций, автоколебания высотных сооружений (ветровой резонанс) и др.

7. Учет массы упругой системы при колебаниях.

Энергетические методы расчета

В представленных выше вопросах рассматривались колебания упругих систем без учета их собственной массы, что является допустимым и не вносит большую погрешность в расчет, если масса упругого элемента бесконечно мала по сравнению с массой установленных в системе грузов. В этом случае число степеней свободы системы определялось количеством сосредоточенных масс и числом независимых координат их колебаний. Но если система обладает значительной распределенной массой, сравнимой с массой грузов, ее необходимо учитывать, что значительно усложняет задачу и приводит к решению системы с бесчисленным числом степеней свободы. В таких механических системах положение всех точек в каждый момент колебательного процесса определяется бесконечным множеством координат, что создает такое же множество форм колебаний и соответствующих им частот.

Колебания таких систем, подобно рассмотренным выше, также описываются дифференциальными уравнениями движения, составленными из условий динамического равновесия, но уже с учетом массы системы. Однако решение таких задач является сложным и громоздким, поэтому его удобнее выполнять не путем интегрирования дифференциальных уравнений, как это было сделано выше, а на основании закона сохранения энергии, согласно которому в консервативной системе при колебаниях происходит непрерывное преобразование кинетической энергии колебательного движения в потенциальную энергию системы, и наоборот, и сумма этих энергий в любой момент колебательного процесса, если потерями энергии и затуханием пренебречь, остается постоянной — $K + U = \text{const}$.

Следует заметить, что такой баланс энергий справедлив только для систем с одной степенью свободы, так как при большем числе степеней свободы обмен энергий в системе имеет более сложный характер. Однако именно энергетический подход, основанный на законе сохранения энергии, дает возможность выполнять расчеты сложных упругих механических систем и приводить задачу к простому решению. Этот метод называется **методом Рэля** и позволяет при любом числе степеней свободы определять частоту колебаний сложных многомассовых систем с учетом их собственного веса. По методу Рэля производят вычисление первой (низшей) частоты, соответствующей первой простейшей динамической форме, называемой **главным колебанием** или **основным тоном**. Метод Рэля является приближенным, однако отличается простотой и дает вполне удовлетворительный результат.

Одним из вариантов метода Рэлея является **метод приведения масс**, заключающийся в том, что система с распределенной массой и бесчисленным множеством степеней свободы приводится к системе, *подобной себе* по очертанию и упругим свойствам, но с *одной* или *конечным числом степеней свободы*, т.е. заменяется эквивалентной системой с одной или дискретно расположенными массами, сосредоточенными в характерных точках, а все остальные ее участки рассматриваются как невесомые, но сохраняющие упругие свойства. Таким образом, подобная система представляет собой некую одномассовую или многомассовую систему сосредоточенных масс, состоящих из массы установленного груза (если такой имеется) и условной сосредоточенной массы упругого элемента, приведенной к точкам приложения грузов или другим характерным узлам и частями присоединенной к ним. Эта масса называется **приведенной массой** $m_{пр}$ и ее определение основано на том, что система с приведенной массой должна быть энергетически эквивалентна заданной системе и иметь частоту колебаний, близкую к первой (наименьшей) частоте этой заданной системы. Важно заметить, что присоединенная масса является постоянной величиной и не зависит ни от скорости, ни от характера движения. Очевидно, что замена действительной системы на приведенную не обеспечит полного физического подобия, но при решении многих динамических задач такая схематизация является удобной и позволяет описать колебательный процесс с достаточной степенью точности. Рассмотрим этот вопрос на примере продольных, поперечных и крутильных колебаний.

Продольные колебания

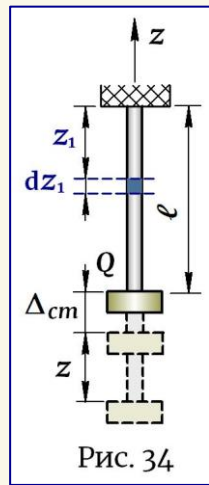
Призматический стержень постоянного сечения несет на конце груз Q массой m , под действием которого растягивается на $\Delta_{ст}$, принимая новое положение статического равновесия (рис. 34). Отведем груз на расстояние Z от линии равновесия и предоставим ему возможность совершать свободные колебания около этого положения. Рассмотрим энергетическую сторону процесса и для любого момента времени определим кинетическую и потенциальную энергии системы.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ системы при колебаниях с учетом массы системы складывается из кинетической энергии груза и кинетической энергии стержня:

★ Кинетическая энергия груза m , колеблющегося со скоростью V ,

определяется как — $\boxed{K_Q} = \frac{mV^2}{2} = \left\| V = \frac{dz}{dt} \right\| = \frac{m}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$;

★ Для вычисления кинетической энергии стержня определим первоначально энергию бесконечно малого элемента длиной dz_1 и массой $dm = \tilde{m}dz_1$, где $\tilde{m}$ – распределенная (удельная) масса или масса единицы длины стержня, вырезанного на расстоянии z_1 от места крепления. Так как при колебаниях, подобно как и при растяжении (сжатии), продольные перемещения всех сечений стержня пропорциональны их расстоянию от закрепленного сечения, перемещение Δ_z вырезанного элемента может быть определено из условия пропорциональности как – $\Delta_z = \frac{z_1}{\ell} z$. Тогда



кинетическая энергия колебаний элемента dm с учетом его скорости V_z и значения Δ_z определяется как –

$$dK_z = \frac{dm V_z^2}{2} = \left\| V_z = \frac{d\Delta_z}{dt} \right\| = \frac{\tilde{m}dz_1}{2} \left(\frac{d\Delta_z}{dt} \right)^2 = \frac{\tilde{m}dz_1}{2} \cdot \frac{z_1^2}{\ell^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2,$$

а кинетическая энергия всего стержня равна:

$$\begin{aligned} K_{\text{стерж}} &= \int_0^{\ell} \frac{\tilde{m}dz_1}{2} \cdot \frac{z_1^2}{\ell^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{\tilde{m}}{2\ell^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \int_0^{\ell} z_1^2 dz_1 = \\ &= \frac{\tilde{m}}{2\ell^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \cdot \frac{z_1^3}{3} \Big|_0^{\ell} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tilde{m}\ell}{3} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2, \end{aligned}$$

где $m_{\text{стерж}} = \tilde{m}\ell$ – масса стержня;

★ Обозначим величину – $m_{\text{пр}} = \frac{\tilde{m}\ell}{3} = k_{\text{пр}} m_{\text{стерж}}$, (81)

которая представляет собой **приведенную массу** призматического стержня, равную 1/3 от полной массы стержня, а значение – $k_{\text{пр}} = 1/3$

называется **коэффициентом приведения**. Тогда полная кинетическая энергия колеблющейся системы на основании выполненных расчетов с учетом приведенной массы (81) равна:

$$K = \frac{m}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m_{\text{пр}}}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{(m + m_{\text{пр}})}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2. \quad (82)$$

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ системы при колебаниях также складывается из потенциальной энергии груза U_Q , зависящей от его положения, и потенциальной энергии деформации стержня $U_{\text{стер}}$. В процессе колебаний эти составляющие изменяются и разница между их суммарной величиной в момент времени t и значением до начала колебательного процесса определяет накопление энергии в системе:

★ В начальный момент времени $t = 0$ при нахождении системы в положении равновесия ее потенциальная энергия U_0 складывается из энергии груза U_Q , поднятого над землей, и энергии деформации растянутого стержня, равной $C(\Delta_{cm})^2/2$ —

$$\boxed{U_0} = U_Q + \frac{C(\Delta_{cm})^2}{2},$$

где Δ_{cm} — деформация стержня при статическом действии груза Q ; $C = EA/\ell$ — продольная жесткость стержня;

★ При отклонении системы от положения равновесия на расстояние Z потенциальная энергия груза уменьшается на QZ и становится равной $(U_Q - QZ)$, а энергия деформации стержня возрастает и принимает значение $C(\Delta_{cm} + Z)^2/2$.

Примечание.

Следует напомнить, что жесткость элемента зависит от механических свойств материала, его размеров и формы, а также схемы нагружения, но НЕ зависит от нагрузки, способа ее приложения и возникающей деформации. Определяемая указанными значениями, жесткость заданного элемента является величиной постоянной и может выступать в качестве коэффициента пропорциональности как при статическом, так и динамическом нагружении. Поэтому значение энергии деформации при колебаниях имеет такой же вид, как и при статическом нагружении, но с учетом динамической деформации, равной $\Delta_\partial = (\Delta_{cm} + Z)$.

В результате в момент времени t потенциальная энергия U_t системы, принимая значение $Q = C\Delta_{cm}$, равна —

$$\begin{aligned} \boxed{U_t} &= (U_Q - QZ) + \frac{C(\Delta_{cm} + Z)^2}{2} = (U_Q - C\Delta_{cm}Z) + \frac{C(\Delta_{cm} + Z)^2}{2} = \\ &= U_Q - \cancel{C\Delta_{cm}Z} + \frac{C(\Delta_{cm})^2}{2} + \cancel{C\Delta_{cm}Z} + \frac{CZ^2}{2} = U_Q + \frac{C(\Delta_{cm})^2}{2} + \frac{CZ^2}{2}; \end{aligned}$$

★ Тогда изменение потенциальной энергии (ее накопление в системе) определяется как —

$$\boxed{U} = U_t - U_0 = \cancel{U_Q} + \frac{C(\Delta_{cm})^2}{2} + \frac{Cz^2}{2} - \cancel{U_Q} - \frac{C(\Delta_{cm})^2}{2} = \frac{Cz^2}{2}. \quad (83)$$

Примечание.

Следует обратить внимание, что потенциальная энергия при колебаниях связана только с энергией деформации упругого элемента (83) и ее накопление происходит за счет работы силы упругости N на отклонении z , равной $A_N = Nz/2 \parallel N = Cz \parallel = Cz^2/2$. Эта энергия не зависит от груза Q , сила тяжести которого при вертикальном расположении элемента определяет только новое положение статического равновесия, относительно которого происходят колебания. Потенциальная энергия при колебаниях также не зависит от массы упругого элемента и при равных условиях колебаний будет иметь одинаковое значение как для условно безмассовых элементов, но сохраняющих упругие свойства, так и для элементов с учетом массы. Влияние массы упругой системы на колебательный процесс будет проявляться только в изменении кинетической энергии.

Определив кинетическую (82) и потенциальную (83) энергии системы и не учитывая энергетические потери и ее затухание, на основании закона сохранения энергии получаем уравнение —

$$\boxed{K + U = \text{const}} \rightarrow \frac{(m + m_{\text{пр}})}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{Cz^2}{2} = \text{const},$$

которое дифференцируем по времени и приводим к дифференциальному уравнению вида:

$$(m + m_{\text{пр}}) \cdot \cancel{\frac{dz}{dt}} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + Cz \cancel{\frac{dz}{dt}} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{C}{m + m_{\text{пр}}} z = 0}, \quad (84)$$

где $m = Q/g$ — масса груза; $m_{\text{пр}}$ — приведенная масса стержня, равная трети его полной массы (81).

И тогда частоту собственных продольных колебаний системы с учетом массы упругого элемента можно определить как:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m + m_{\text{пр}}}}, \quad (85)$$

которую, принимая $\sqrt{C/m + m_{\text{пр}}} = \sqrt{g/[(Q + Q_{\text{пр}})/C]}$, можно привести к виду —

$$\omega_0 = \sqrt{g/\Delta_{\text{пр}}} , \quad (86)$$

где $\Delta_{\text{пр}}$ – приведенная деформация стержня от силы $(Q + \rho A \ell g/3)$.

Анализ уравнения (84) и значений (85, 86) показывает, что если массу упругого элемента не учитывать, приняв $m_{\text{пр}} = 0$, они полностью будут соответствовать уравнению собственных продольных гармонических колебаний (14) и значениям круговой частоты (15, 16).

Таким образом, чтобы учесть инерционность упругого элемента при продольных колебаниях, к массе груза необходимо добавить треть массы элемента, приведя эту массу в точку расположения груза. Аналогичный результат будет получен, если продольные колебания груза совершаются на пружине, для которой приведенная масса также принимается равной трети массы пружины. Если в системе груза нет, то в решении следует задать $m = 0$, а массу упругого элемента рассматривать как сосредоточенную массу $m_{\text{пр}}$ (81), приведенную к заданной точке, принимая систему как одномассовую с одной степенью свободы.

Поперечные колебания

Решение задачи по определению частоты ω_0 поперечных колебаний с учетом массы упругого элемента выполняется по такому же алгоритму, как и для продольных колебаний, и сводится к вычислению приведенного коэффициента $k_{\text{пр}}$ и приведенной массы $m_{\text{пр}}$, которая зависит от геометрии конструкции и расчетной схемы нагружения. Рассмотрим этот вопрос на примере трех балок.

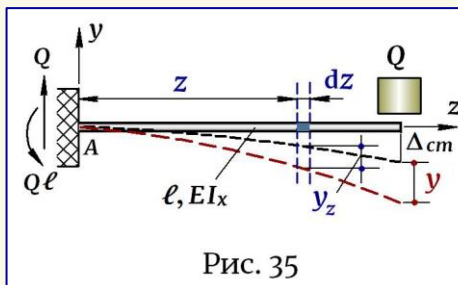


Рис. 35

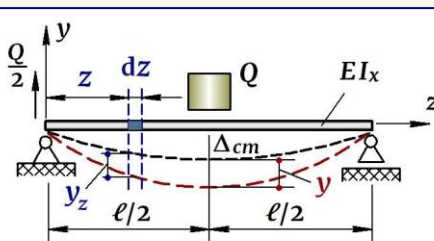


Рис. 36

① Консольная балка с заделкой и грузом Q на конце консоли (рис. 35).

Первоначально рассмотрим деформацию балки от действия груза Q и по методу начальных параметров запишем уравнение ее изогнутой оси при статическом нагружении —

$$EI_x y_z = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + \frac{Qz^3}{6} - \frac{Q\ell z^2}{2},$$

которое, учитывая, что в заделке $y_0 = 0$ и $\theta_0 = 0$, а наибольший прогиб, возникающий на конце консоли, в выбранной системе координат

равен $\Delta_{cm} = -\frac{Q\ell^3}{3EI_x}$, приведем к виду: $y_z = \Delta_{cm} \frac{3\ell z^2 - z^3}{2\ell^3}$.

Теперь создадим колебания балки: отведем груз Q от статического положения равновесия и дадим ему возможность совершать около этого положения свободные колебания. При колебаниях каждое сечение балки будет получать добавочный прогиб, придавая балке новую искривленную форму. Для выполнения решения необходимо знать уравнение этой кривой, отвечающее граничным условиям, но это уравнение не известно и его следует задать в виде, наиболее приближенном к действительному, так как от правильной аппроксимации функции будет зависеть точность расчета частоты колебаний системы. В принципе, для описания динамической формы изгиба может быть использовано любое уравнение, хотя бы приближенно представляющее линию прогибов балки, но чаще всего для первой простейшей формы колебаний, полагая, что все точки балки колеблются синфазно и с одинаковой частотой, считают, что форма изогнутой оси нагруженной балки при колебаниях совпадает с формой статического изгиба от действия такой же нагрузки. Именно это допущение делает решение приближенным, и тогда для данной балки уравнение динамической изогнутой оси в принятой системе координат может быть описана функцией —

$$y_z = y \frac{3\ell z^2 - z^3}{2\ell^3}, \quad (87)$$

где y_z — смещение бесконечно малого элемента длиной dz и массой $dm = \tilde{m}dz$, выделенного на расстоянии z от заделки; $\tilde{m}$ — масса единицы длины балки; y — смещение концевое сечения или смещение установленного здесь груза Q от положения равновесия.

Примечание.

Здесь следует понимать, что форма статического изгиба балки является криволинейной и колебания происходят относительно искривленной оси. Но при выполнении расчетов балка в статическом равновесии условно рассматривается как прямолинейная, а ее изгиб при колебаниях является динамической искривленной формой, описываемой функцией (87).

Тогда скорость колебаний массы dm на основании (87) равна:

$$V_z = \frac{dy_z}{dt} = \frac{3\ell z^2 - z^3}{2\ell^3} \cdot \frac{dy}{dt}, \quad (88)$$

где $V = dy/dt$ – скорость колебаний груза Q на конце консоли.

Выбор функции изогнутой оси колеблющейся балки должен отвечать краевым и кинематическим условиям изгиба, что для значений (87) и (88) выполняется автоматически:

$$\boxed{z=0} \rightarrow y_z = 0, V_z = 0; \quad \boxed{z=\ell} \rightarrow y_z = y, V_z = V = \frac{dy}{dt}.$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ системы здесь также определяется суммой кинетической энергии груза и кинетической энергии балки:

★ Кинетическая энергия колеблющегося груза массой m –

$$\boxed{K_Q} = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2;$$

★ Кинетическая энергия балки с учетом (88)–

$$dK_z = \frac{dmV_z^2}{2} = \frac{\tilde{m}dz}{2} \cdot \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \left(\frac{3\ell z^2 - z^3}{2\ell^3} \right)^2 \rightarrow$$

$$\boxed{K_{\text{бал}}} = \frac{\tilde{m}}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \int_0^\ell \left(\frac{3\ell z^2 - z^3}{2\ell^3} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{33}{140} \tilde{m} \ell \left(\frac{dy}{dt} \right)^2,$$

где $m_{\text{бал}} = \tilde{m}\ell$ – полная масса балки, а значение –

$$\boxed{m_{\text{пр}} = \frac{33}{140} \tilde{m} \ell = k_{\text{пр}} m_{\text{бал}}} \quad (89)$$

приведенная масса балки с коэффициентом – $\boxed{k_{\text{пр}} = 33/140}$.

★ Полная КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ колеблющейся системы с учетом значения (89) –

$$\boxed{K} = \frac{m}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{m_{\text{пр}}}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{(m + m_{\text{пр}})}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2. \quad (90)$$

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ системы при колебаниях, как было сказано выше, не зависит от груза и массы упругого элемента и ее накопление определяется только энергией деформации балки и соответ-

ственно равно $\boxed{U = Cy^2/2}$. Докажем достоверность этого значения для изгиба, выполнив следующий расчет:

★ Потенциальная энергия при поперечном изгибе, если поперечной силой пренебречь, определяется через изгибающий момент как —

$U = \int_0^{\ell} \frac{M^2 dz}{2EI_x}$, который, согласно дифференциальному уравнению изогнутой оси балки, связан с функцией прогибов как — $M = EI_x \frac{d^2 y_z}{dz^2}$.

Подставляя это значение под знак интеграла, после преобразования потенциальную энергию получаем в виде $U = \int_0^{\ell} \frac{EI_x}{2} \left(\frac{d^2 y_z}{dz^2} \right)^2 dz$;

★ Продифференцируем дважды уравнение изогнутой оси (87) —

$$\frac{d^2 y_z}{dz^2} = \frac{y}{2\ell^3} (6\ell - 6z) = \frac{3y}{\ell^3} (\ell - z) \rightarrow \left(\frac{d^2 y_z}{dz^2} \right)^2 = \frac{9y^2}{\ell^6} (\ell - z)^2$$

и потенциальную энергию получаем равной —

$$\begin{aligned} \boxed{U} &= \int_0^{\ell} \frac{EI_x}{2} \left[\frac{9y^2}{\ell^6} (\ell - z)^2 \right] dz = \frac{EI_x}{2} \cdot \frac{9y^2}{\ell^6} \int_0^{\ell} (\ell^2 - 2\ell z + z^2) dz = \\ &= \frac{EI_x}{2} \cdot \frac{9y^2}{\ell^6} \cdot \frac{\ell^3}{3} = \frac{3EI_x}{2\ell^3} y^2 = \left\| \frac{3EI_x}{\ell^3} = C \right\| = \boxed{\frac{Cy^2}{2}}, \end{aligned} \quad (91)$$

что и требовалось доказать.

Далее на основании энергетического баланса и полученных значений кинетической (90) и потенциальной (91) энергий задача приводится к дифференциальному уравнению —

$$\boxed{K + U = \text{const}} \rightarrow \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{C}{m + m_{\text{пр}}} y = 0}, \quad (92)$$

где m — масса груза, а $m_{\text{пр}}$ — приведенная масса балки, из которого частота собственных поперечных колебаний системы ω_0 с учетом приведенной массы $\boxed{m_{\text{пр}} = (33/140)m_{\text{бал}}}$ (89) и изгибной жесткости балки

ки $\boxed{C = 3EI_x/\ell^3}$, соответствующей данной расчетной схеме, определе-

ляется аналогично (85) как — $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m + m_{\text{пр}}}}$.

② Двухопорная балка с грузом Q посередине пролета (рис. 36).

Решение выполняем аналогичным образом и первоначально по методу начальных параметров записываем уравнение изогнутой оси для *левой половины балки* при статическом нагружении —

$$EI_{\chi} y_z = EI_{\chi} y_0 + EI_{\chi} \theta_0 z + \frac{(Q/2)z^3}{6},$$

которое с учетом $y_0 = 0$; $\theta_0 = -\frac{Q\ell^2}{16EI_{\chi}}$; $\Delta_{cm} = -\frac{Q\ell^3}{48EI_{\chi}}$ приводим к

виду:
$$y_z = \Delta_{cm} \frac{3\ell^2 z - 4z^3}{\ell^3}.$$

Создаем на балке колебания и, рассуждая относительно изменения ее формы, как это было сделано выше, описываем ее такой же функцией, как и при статическом изгибе —

$$y_z = y \frac{3\ell^2 z - 4z^3}{\ell^3}, \quad (93)$$

где y_z — смещение бесконечно малого элемента длиной dz и массой $dm = \tilde{m}dz$, выделенного на расстоянии z от левой опоры; $\tilde{m}$ — масса единицы длины балки; y — смещение точки в середине пролета или установленного здесь груза Q от положения статического равновесия. Принятое уравнение формы колеблющейся балки (93) также удовлетворяет граничным условиям:

$$z=0 \rightarrow y_z=0; \quad z=\ell/2 \rightarrow y_z=y.$$

Дальнейшее решение выполняем по аналогии с предыдущей балкой и определяем:

★ Скорость колебаний массы dm —

$$V_z = \frac{dy_z}{dt} = \frac{3\ell^2 z - 4z^3}{\ell^3} \cdot \frac{dy}{dt}; \quad (94)$$

где $V = dy/dt$ — скорость колебаний груза Q в середине пролета;

- ★ Кинетическую энергию колеблющегося груза массой m —

$$\boxed{K_Q} = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2;$$

- ★ Кинетическую энергию балки с учетом (94) —

$$dK_{\text{бал}} = \frac{dmV_z^2}{2} = \frac{\tilde{m}dz}{2} \cdot \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \left(\frac{3\ell^2 z - 4z^3}{\ell^3} \right)^2 \rightarrow$$

$$\boxed{K_{\text{бал}}} = \frac{\tilde{m}}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \int_0^\ell \left(\frac{3\ell^2 z - 4z^3}{\ell^3} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{35} \tilde{m}\ell \left(\frac{dy}{dt} \right)^2;$$

- ★ Приведенную массу балки и коэффициент приведения —

$$\boxed{m_{\text{пр}}} = \frac{17}{35} \tilde{m}\ell = k_{\text{пр}} m_{\text{бал}}; \quad \boxed{k_{\text{пр}}} = 17/35. \quad (95)$$

- ★ Полную КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ колеблющейся системы —

$$\boxed{K} = \frac{m}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{m_{\text{пр}}}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{(m + m_{\text{пр}})}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2. \quad (96)$$

- ★ ПОТЕНЦИАЛЬНУЮ ЭНЕРГИЮ системы (91) — $\boxed{U} = Cy^2/2$.

Далее задача решается таким же образом, как и для консольной балки, и с учетом приведенной массы $\boxed{m_{\text{пр}}} = (17/35)m_{\text{бал}}$ (95) и изгибной жесткости балки $\boxed{C = 48EI_x/\ell^3}$ для данной расчетной схемы определяется частота собственных колебаний системы ω_0 (85).

③ Консольная балка с равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 37).

Рассмотрим нагружение балки внешней равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , которая может включать в себя

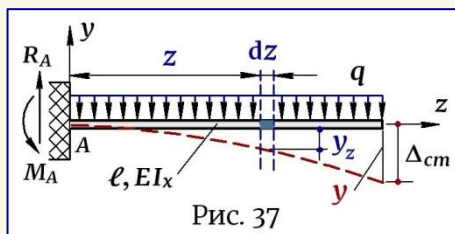


Рис. 37

и собственный вес балки, представляющий собой для элементов стержневого типа сплошную равномерно-распределенную линейную нагрузку. Если масса балки значительна и ее вес соизмерим или даже превышает силу внеш-

него воздействия, его необходимо учитывать при определении частоты колебаний ω_0 системы. Принимая $q = \tilde{m}g$, где $\tilde{m}$ – равномерно распределенная масса, определим для данного случая нагружения коэффициент приведения $k_{пр}$ и приведенную массу $m_{пр}$, сконцентрировав эту массу на конце консоли. Таким образом, балка будет приведена к одномассовой балке с одной степенью свободы и будет представлять собой условно невесомый упругий элемент, нагруженный на конце сосредоточенным грузом массой $m_{пр}$.

Выполним решение задачи по методике предыдущих балок:

★ По методу начальных параметров записываем уравнение изогнутой оси балки при статическом нагружении –

$$EI_X y_Z = EI_X y_0 + EI_X \theta_0 Z + \frac{R_A Z^3}{6} - \frac{M_A Z^2}{2} - \frac{q Z^4}{24},$$

которое, учитывая, что $y_0 = 0$; $\theta_0 = 0$; $R_A = q\ell$; $M_A = q\ell^2/2$, а прогиб на конце консоли равен $-\Delta_{cm} = -q\ell^4/8EI_X$, приведем к виду

$$y_Z = \Delta_{cm} \frac{Z^4 - 4\ell Z^3 + 6\ell^2 Z^2}{3\ell^4};$$

★ Создаем на балке колебания и считаем, что динамическая форма изогнутой оси совпадает с формой статического изгиба и может быть описана функцией вида –

$$y_Z = y \frac{Z^4 - 4\ell Z^3 + 6\ell^2 Z^2}{3\ell^4}, \quad (97)$$

где y_Z – смещение бесконечно малого элемента длиной dz и массой $dm = \tilde{m}dz$, выделенного на расстоянии Z от заделки; y – смещение конца консоли от положения равновесия;

★ Определяем скорость колебаний массы dm на основании (97) –

$$V_Z = \frac{dy_Z}{dt} = \frac{Z^4 - 4\ell Z^3 + 6\ell^2 Z^2}{3\ell^4} \cdot \frac{dy}{dt}, \quad (98)$$

где $V = dy/dt$ – скорость колебаний конца консоли;

★ Определяем КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ системы –

$$dK = \frac{dm V_Z^2}{2} = \frac{\tilde{m} dz}{2} \cdot \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \left(\frac{Z^4 - 4\ell Z^3 + 6\ell^2 Z^2}{3\ell^4} \right)^2 \rightarrow$$

$$\boxed{K} = \frac{\tilde{m}}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \int_0^{\ell} \left(\frac{z^4 - 4\ell z^3 + 6\ell^2 z^2}{3\ell^4} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{728}{2835} \tilde{m} \ell \left(\frac{dy}{dt} \right)^2, \quad (99)$$

где значение — $m_{\text{пр}} = \frac{728}{2835} \tilde{m} \ell \approx 0,257 \tilde{m} \ell$ — **приведенная масса** системы с коэффициентом приведения, равным — $k_{\text{пр}} \approx 0,257$;

★ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ системы равна (91) — $\boxed{U} = Cy^2/2$.

Далее на основании закона сохранения энергии и полученных значений кинетической и потенциальной энергий задача приводится к дифференциальному уравнению —

$$\boxed{K + U = \text{const}} \rightarrow \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{C}{m_{\text{пр}}} y = 0}, \quad (100)$$

где $m_{\text{пр}}$ — приведенная масса системы; $\boxed{C = 8EI_X/\ell^4}$ — изгибная жесткости балки, соответствующая данной расчетной схеме.

Тогда частота собственных поперечных колебаний системы ω_0 с учетом приведенной массы определяется как —

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m_{\text{пр}}}}}. \quad (101)$$

Крутильные колебания

На конце призматического стержня с равномерно распределенной массой укреплен массивный диск весом Q (рис. 38). Повернем диск относительно положения равновесия на угол φ , отпустим его и дадим возможность совершать свободные крутильные колебания около равновесного положения. Используя метод Рэлея, определим частоту собственных крутильных колебаний системы ω_0 с учетом массы стержня. Следует напомнить, что при вращательном движении мерой инертности тела является не масса, а *момент инерции массы*, равный — для диска $\boxed{I = mR^2/2}$ и стержня $\boxed{I_1 = m_1 r^2/2}$, а крутильная жесткость стержня определяется как — $\boxed{C = GI_\rho/\ell}$, где $I_\rho = \pi d^4/32$ — полярный момент инерции; d и ℓ — диаметр и длина стержня; G — модуль сдвига;

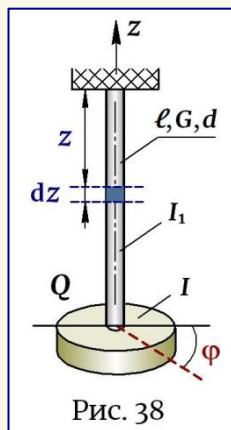
m, m_1, R, r – масса и радиус диска и стержня соответственно.

Для определения **приведенного момента инерции массы** $I_{\text{пр}}$ (по аналогии с **приведенной массой** $m_{\text{пр}}$) выделим на стержне на расстоянии z от закрепления бесконечно малый элемент длиной dz с моментом инерции массы dI , из условия пропорциональности равным: $dI = (I_1/\ell)dz$.

Угол поворота φ_1 элемента dz линейно связан с углом поворота φ диска — $\varphi_1 = (z/\ell) \varphi$, а его угловая скорость вращения равна:

$$w_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{z}{\ell} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad (102)$$

где $d\varphi/dt = w$ – угловая скорость вращения диска.



Определим КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ системы при крутильных колебаниях с учетом массы упругого элемента, которая складывается из кинетической энергии диска и кинетической энергии стержня:

★ Кинетическая энергия диска — $\boxed{K_Q} = \frac{Iw^2}{2} = \frac{I}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$;

★ Кинетическая энергия стержня с учетом значения (102) —

$$dK_z = \frac{dIw_1^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_1 dz}{\ell} \cdot \left(\frac{z}{\ell} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_1}{\ell^3} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 z^2 dz \rightarrow$$

$$\boxed{K_{\text{стерж}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_1}{\ell^3} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \int_0^\ell z^2 dz = \frac{I_1/3}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2};$$

★ Полная КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ системы —

$$\boxed{K} = \frac{I}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{I_1/3}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{(I + I_1/3)}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \quad (103)$$

где

$$\boxed{I_{\text{пр}} = I_1/3} \quad (104)$$

приведенный момент инерции массы с коэффициентом $\boxed{k_{\text{пр}} = 1/3}$;

★ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ системы (83, 91) — $\boxed{U} = C\varphi^2/2$.

Далее на основании закона сохранения энергии задача приводится к дифференциальному уравнению –

$$\boxed{K + U = \text{const}} \rightarrow \boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{C}{I + I_{\text{пр}}/3} \varphi = 0}, \quad (105)$$

где I – момент инерции массы диска; $I_{\text{пр}} = I_1/3$ – приведенный момент инерции массы стержня; C – крутильная жесткости стержня.

Тогда частота собственных крутильных колебаний системы с учетом инертности упругого элемента определяется как:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I + I_{\text{пр}}}}. \quad (106)$$

Рассмотренный выше **метод приведения масс** был продемонстрирован для систем с одной сосредоточенной массой, которая и являлась точкой приведения. Но **метод Рэлея** может быть использован и для более сложных конструкций, нагруженных множеством дискретных масс, расположенных в разных узлах, а также собственной распределенной массой, где звеном приведения может быть любая произвольная точка системы, не совпадающая ни с одной из дискретных масс.

Рассмотрим такую систему и определим частоту ее колебаний ω_0 , также используя энергетический метод, но основанный на том, что любая приведенная система должна обладать такой же энергией, что и весь механизм. Выполним решение на примере колебаний однопролетной балки, нагруженной массами $m_1, m_2 \dots m_i$, и, учитывая массу балки, приведем полную массу системы к единой обобщенной массе, сосредоточив ее посередине пролета и преобразовав балку, имеющую множество степеней свободы, в систему с одной степенью свободы (рис. 39).

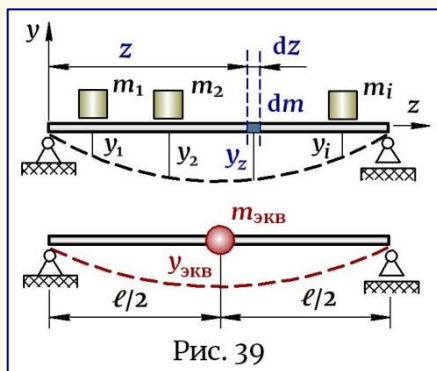


Рис. 39

Так как заданная и заменяющая балки должны быть динамически эквивалентны, обобщенная приведенная масса (назовем ее эквивалентной массой $m_{\text{экв}}$) должна создавать частоту колебаний, близкую к первой частоте колебаний исходной системы, а кинетическая энергия эквивалентной приведенной балки $K_{\text{экв}}$ в каждый момент

колебаний должна быть равна кинетической энергии исходной системы K_0 , т.е. $\boxed{K_0 = K_{\text{ЭКВ}}}$.

При колебаниях систем перемещения точек являются функцией двух переменных — координаты положения и времени — $\boxed{y = y(z, t)}$, которую можно представить в виде произведения — $\boxed{y(z, t) = y_z \cdot y_t}$, где y_z — функция координат упругого элемента, описывающая форму динамической изогнутой оси балки; y_t — функция времени, выступающая в качестве переменного коэффициента. Тогда скорость колебаний, определяемая как $V = dy/dt$, для выделенного элемента балки $dm = \tilde{m}dz$, а также сосредоточенных m_i и эквивалентной $m_{\text{ЭКВ}}$ масс будет равна —

$$V_z = y_z \left(\frac{dy_t}{dt} \right); \quad V_i = y_i \left(\frac{dy_t}{dt} \right); \quad V_{\text{ЭКВ}} = y_{\text{ЭКВ}} \left(\frac{dy_t}{dt} \right), \quad (107)$$

где $y_z, y_i, y_{\text{ЭКВ}}$ — соответственно перемещения указанных масс в месте их расположения.

На основании (107) определяем КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ заданной K_0 и эквивалентной $K_{\text{ЭКВ}}$ систем как $\boxed{K = mV^2/2}$ —

$$\begin{aligned} \boxed{K_0} &= \int_0^{\ell} \frac{1}{2} \tilde{m} y_z^2 \left(\frac{dy_t}{dt} \right)^2 dz + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i y_i^2 \left(\frac{dy_t}{dt} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{dy_t}{dt} \right)^2 \left(\int_0^{\ell} \tilde{m} y_z^2 dz + \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \right); \end{aligned} \quad (108)$$

$$\boxed{K_{\text{ЭКВ}}} = \frac{m_{\text{ЭКВ}} V_{\text{ЭКВ}}^2}{2} = \frac{1}{2} m_{\text{ЭКВ}} y_{\text{ЭКВ}}^2 \left(\frac{dy_t}{dt} \right)^2, \quad (109)$$

приравниваем значения (108) и (109) и после преобразования получаем величину эквивалентной массы $m_{\text{ЭКВ}}$, сконцентрированной в середине пролета и включающей в себя массы всех сосредоточенных грузов m_i и приведенную массу $m_{\text{пр}}$ балки:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy_t}{dt} \right)^2 \left(\int_0^{\ell} \tilde{m} y_z^2 dz + \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \right) = \frac{1}{2} m_{\text{ЭКВ}} y_{\text{ЭКВ}}^2 \left(\frac{dy_t}{dt} \right)^2,$$

откуда

$$m_{\text{ЭКВ}} = \frac{\int_0^{\ell} \tilde{m} y_z^2 dz + \sum_{i=1}^n m_i y_i^2}{y_{\text{ЭКВ}}^2}, \quad (110)$$

где n – число дискретных масс, установленных в системе.

Примечание.

Следует обратить внимание, что при вычислении эквивалентной приведенной массы (110) все сосредоточенные массы системы суммируются, а по всем распределенным массам выполняется интегрирование.

Тогда частота собственных колебаний приведенной одномассовой балки на основании (110) определяется как –

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m_{\text{ЭКВ}}}}, \quad (111)$$

и так как приведенная и заданная балки динамически эквивалентны, частота (111) будет равна первой частоте колебаний исходной балки.

Как показывает выражение (110), при выполнении расчета необходимо знать уравнение изогнутой оси балки y_z , которое является неизвестным и его следует задать в максимально достоверном виде. Неопределенностью решения задач такого типа также является выбор точки размещения приведенной массы, что определяет величину $y_{\text{ЭКВ}}$ и жесткость приведенной системы. Но если рассматривается простая однопролетная балка на двух опорах, приведенную массу обычно размещают посередине пролета и тогда – $y_{\text{ЭКВ}} = (m_{\text{ЭКВ}} g) \ell^3 / 48EI_x$, а жесткость системы принимается равной $C = 48EI_x / \ell^3$.

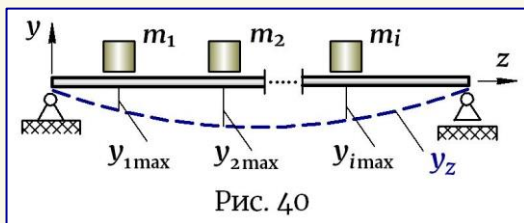
Представленное решение является общим решением и оно полностью удовлетворяет любому частному случаю, как например, рассмотренному выше для балки на рис. 36. Если на заданной балке установлена одна сосредоточенная масса m и сюда же приведена распределенная масса балки, то принимая для этих масс – $y_i = y_{\text{пр}} = y$, а уравнение изогнутой оси y_z в виде (93), значение эквивалентной массы, согласно формуле (110), получается равным – $m_{\text{ЭКВ}} = m + m_{\text{пр}}$, где m – масса установленного груза; $m_{\text{пр}} = (17/35)m_{\text{бал}}$ – приведенная масса балки, что соответствует полученному выше значению (95).

Определение частоты колебаний сложной многомассовой системы можно выполнить еще одним *энергетическим методом*. Так как при колебаниях, находясь в положении равновесия, потенциальная энергия системы равна нулю, а кинетическая энергия максимальна, и наоборот, при наибольшем отклонении от положения равновесия кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия максимальна, закон сохранения энергии — $K + U = \text{const}$ можно применить в ви-

де — $K_{\max} = U_{\max}$. Найдем эти значения для балки, нагруженной системой отдельных дискретных масс m_i (рис. 40), и с учетом ее массы $\tilde{m}$ определим собственную частоту колебаний балки ω_0 .

Как и в предыдущем случае, функцию перемещений точек системы представим в виде произведения — $y(z, t) = y_z \cdot y_t$, где, учитывая гармонический характер колебаний, примем — $y_t = \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, а

функцию y_z как переменную по длине амплитуду колебаний, являющуюся, по сути, уравнением динамически изогнутой оси балки и устанавливающую характер изменения максимальных отклонений (амплитуд) точек балки от положения равновесия. И тогда закон колебаний балки с грузами имеет вид —



И тогда закон колебаний балки с грузами имеет вид — $y(z, t) = y_z \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, что соответствует уравнению (5), в котором амплитудой для каждой точки балки, включая места расположения дискретных масс, является значение наибольшего отклонения точки от положения равновесия, равное для точек распределенной массы значению y_z , соответствующему координате точки, а для дискретных масс $y_{i\max}$ — значению амплитудной функции y_z в точке с координатой z_i , где расположена сосредоточенная масса m_i .

Тогда скорость колебаний точек будет определена как —

$$V = \frac{dy(z, t)}{dt} = y_z \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

а при нахождении балки в положении равновесия она принимает максимальное значение, соответствующее $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 1$ и равное —

$V_{\max} = y_z \omega_0$. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ балки в этом положении также максимальна и на основании формулы $K = mV^2/2$ и выполненных выше расчетов с учетом массы балки равна:

$$\begin{aligned} K_{\max} &= \int_0^{\ell} \frac{1}{2} \tilde{m} \omega_0^2 y_z^2 dz + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \omega_0^2 m_i y_{i\max}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \omega_0^2 \left(\int_0^{\ell} \tilde{m} y_z^2 dz + \sum_{i=1}^n m_i y_{i\max}^2 \right). \end{aligned} \quad (112)$$

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ системы при колебаниях принимает максимальное значение при наибольшем ее отклонении от положения равновесия и определяется энергией деформации упругого элемента, которая может быть выражена либо через работу внутренних сил, при изгибе определяемую как —

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI_x \left(\frac{d^2 y_z}{dz^2} \right)^2 dz, \quad (113)$$

либо через работу внешних сил, которую при колебаниях совершают силы инерции дискретных масс F_i и сила инерции q_i распределенной массы балки —

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i g y_{i\max} + \frac{1}{2} g \int_0^{\ell} \tilde{m} y_z dz, \quad (114)$$

где $y_{i\max}$ — амплитудное отклонение массы m_i от положения равновесия; y_z — функция динамических прогибов.

Приравниваем кинетическую энергию (112) к значениям потенциальной энергии (113) и (114) и получаем формулы для определения первой (низшей) частоты колебаний системы, называемые **основной формулой Рэля** (115):

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^{\ell} EI_x \left(\frac{d^2 y_z}{dz^2} \right)^2 dz}{\int_0^{\ell} \tilde{m} y_z^2 dz + \sum_{i=1}^n m_i y_{i\max}^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g y_{i\max} + g \int_0^{\ell} \tilde{m} y_z dz}{\int_0^{\ell} \tilde{m} y_z^2 dz + \sum_{i=1}^n m_i y_{i\max}^2}.$$

Рассмотренные *энергетические методы* определения частоты колебаний являются приближенными, но простыми, удобными и вполне приемлемыми для многих динамических задач. Точность энергетических методов определяется точностью заданной конфигурации изогнутой упругой линии элемента и, если форма этой кривой близка к истинной форме колебаний, метод, основанный на законе сохранения энергии, дает достаточно точное значение первой (наименьшей) частоты Ω_0 главного колебания. При неточной аппроксимации вычисленная методом Рэлея частота имеет несколько завышенное значение по сравнению с истинной. Поскольку связи, накладываемые на систему, уменьшают число степеней свободы, приведение сложной системы к системе с одной степенью свободы равносильно наложению на нее дополнительных связей, увеличивающих ее жесткость, а значит, и частота колебаний, согласно полученным выше расчетным формулам, будет иметь большее значение по сравнению с истинным значением.

Одним из способов определения частоты колебаний сложных систем является *метод переноса масс* или *метод Донкерлея*. Этот метод основан на динамической эквивалентности и равенстве частот заданной и приведенной систем и доказывает, что если любую дискретную массу системы, включая бесконечно малую массу ее веса, перенести в другую точку системы с *поправочным коэффициентом*, частота колебаний системы не изменится. Это позволяет путем переноса масс систему со множеством степеней свободы привести к системе с одной степенью свободы. Метод также является приближенным и формула Донкерлея для низшей частоты колебаний дает заниженное значение.

Более точное решение систем с бесчисленным множеством степеней свободы и таким же количеством форм и частот колебаний может быть получено на основании уравнений динамического равновесия, включающих силы инерции всех входящих в систему масс. Для систем с распределенными массами задача приводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных: к уравнениям второго порядка при продольных и крутильных колебаниях и к уравнению четвертого порядка при поперечных колебаниях. При решении этих уравнений получают спектр частот и множество форм колебаний, соответствующих своим частотам. Однако практическое значение имеет только низшая (основная) частота – частота главного колебания. Колебания на этой частоте представляют наибольшую опасность, так как они происходят с наибольшими амплитудами и высокой вероятностью резонанса при вибрационной нагрузке. Вопросы колебаний таких систем и методы их расчета рассматриваются в специальных курсах динамики машин и строительной механики.

8. Колебания упругих систем с конечным числом степеней свободы

Любая техническая конструкция представляет собой сложную механическую систему с большим количеством сосредоточенных массивных узлов и распределенных элементарных масс, а значит, является динамической системой с бесчисленным числом степеней свободы. Решение таких систем представляется сложной задачей, даже если эта система, допуская погрешность расчета, будет приведена к упрощенной модели с дискретно расположенными массами и конечным числом степеней свободы. Точность расчета многомассовых систем зависит от правильного выбора расчетной модели, позволяющей получить результат, максимально близкий к истинному. Для некоторых инженерных задач вполне удовлетворительными и рациональными для определения первой низшей частоты колебаний являются энергетические методы, основанные на законе сохранения энергии и энергетической эквивалентности заданной и расчетной систем. Энергетические методы универсальны и лежат в основе решения многих динамических задач, в том числе, задач на колебания упругих систем, при этом могут быть использованы для любой колеблющейся системы с любым числом степеней свободы и часто являются единственно возможным способом решения. Но если требуется более высокая точность, решение выполняют на основании уравнений Даламбера, составление которых является первым и важным шагом любого динамического расчета. Дифференциальные уравнения движения являются математической моделью динамической задачи и для колебательного процесса (в отличие от не колебательного) зависят от числа степеней свободы, определяющих количество форм и частот колебаний. Собственные колебания системы с одной степенью свободы описываются однородным дифференциальным уравнением второго порядка, системы с конечным числом степеней свободы – системой с таким же числом однородных дифференциальных уравнений, системы с распределенной массой и, соответственно, бесчисленным числом степеней свободы – дифференциальными уравнениями в частных производных, о чем было сказано выше.

Дифференциальные уравнения динамического равновесия колебательной системы (уравнения движения) можно получить тремя основными способами: в форме уравнений Лагранжа, методом перемещений (прямой способ) и методом сил (обратный способ). Наиболее общим является метод Лагранжа, однако более удобными при выполнении решения оказываются метод перемещений и метод сил.

Рассмотрим вопрос на примере колебаний балки жесткостью EI_x , несущей на пролете три точечных массы m_1, m_2, m_3 (рис. 41). Собственной массой балки пренебрегаем или считаем, что ее распределенная масса приведена к точкам расположения сосредоточенных масс и входит в их величину. Также полагаем, что колебания масс происходят только в вертикальном направлении, а значит, рассматриваемая балка является системой с тремя степенями свободы. Если балку вывести из состояния равновесия, она будет совершать свободные колебания и при отсутствии возмущающей силы и сил сопротивления колеблющиеся массы будут находиться под действием только сил инерции и противодействующих им сил упругости, находящихся в динамическом равновесии и определяющих динамическую форму изгиба балки.

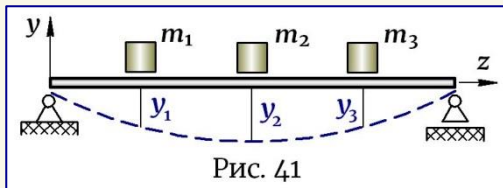


Рис. 41

Используем для расчета *метод сил* (обратный способ) и первоначально рассмотрим применение этого метода для изгибных колебаний систем с одной степенью свободы (рис. 16). Уравнение равновесия для такой системы, составленное по принципу Даламбера, приводим к виду $-F_{\text{ин}} + F_{\text{упр}} = 0 \rightarrow \boxed{m\ddot{y} + Cy = 0} \rightarrow \boxed{m\ddot{y} + (1/\delta_{11})y = 0}$, откуда вертикальное перемещение массы m при колебаниях может быть определено как $\boxed{y = -\delta_{11}m\ddot{y}}$, где δ_{11} – перемещение массы m от единичного значения силы инерции $\bar{F}_{\text{ин}} = 1$, приложенной в точке ее расположения; $\ddot{y}$ – ускорение колебаний массы. Принимая для гармонических колебаний решение в виде (5) $\boxed{y} = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, а ускорение колебаний равным (7) $\boxed{\ddot{y}} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$, где A и φ_0 – амплитуда и начальная фаза колебаний соответственно, подставляем эти значения в выражение для перемещения " y " и после преобразования определяем частоту собственных колебаний, которая для системы с одной степенью свободы имеет единственное значение и создает только одну форму динамического изгиба балки:

$$\boxed{y = -\delta_{11}m\ddot{y}} \rightarrow A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\delta_{11}m \left[-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \right] \rightarrow$$

$$A(1 - \delta_{11}m\omega^2) = 0 \rightarrow 1 - \delta_{11}m\omega^2 = 0 \rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{1/\delta_{11}m}},$$

что соответствует значению (17), представленному выше для продольных колебаний, но справедливому и для изгибных колебаний.

Вернемся к балке на рис. 41. Так как балка имеет три степени свободы, она характеризуется тремя формами изгиба и тремя частотами собственных колебаний — $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. При наличии нескольких масс перемещение "у" каждой массы будет определяться суммарным действием сил инерции всех установленных на балке дискретных масс:

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2\ddot{y}_2) + \delta_{13}(-m_3\ddot{y}_3) \\ y_2 &= \delta_{21}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2\ddot{y}_2) + \delta_{23}(-m_3\ddot{y}_3) \\ y_3 &= \delta_{31}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{32}(-m_2\ddot{y}_2) + \delta_{33}(-m_3\ddot{y}_3), \end{aligned} \quad (116)$$

где δ — перемещение каждой массы от действия единичной силы инерции, согласно двойному индексу, означающему: первая цифра указывает массу, которая получает перемещение, а вторая — массу, сила инерции которой вызывает это перемещение. Так, например, δ_{23} — это перемещение массы m_2 под действием единичной силы инерции, создаваемой массой m_3 в точке ее размещения. Определение перемещений "δ" может быть выполнено путем поочередного приложения единичных сил инерции в точках расположения точечных масс и вычислено с помощью интеграла Мора, либо методом перемножения эпюр, учитывая на основании теоремы о взаимности перемещений равенство значений — $\delta_{12} = \delta_{21}$; $\delta_{13} = \delta_{31}$; $\delta_{23} = \delta_{32}$.

Решением дифференциальных уравнений динамических прогибов (116) при гармонических колебаниях являются функции:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_0) \\ y_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_0) \\ y_3 &= A_3 \sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (117)$$

где A_1, A_2, A_3 — амплитуды колебаний соответствующих масс; φ_0 — начальная фаза колебаний.

Продифференцировав дважды значения (117) —

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -A_1\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{y}_2 &= -A_2\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{y}_3 &= -A_3\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (118)$$

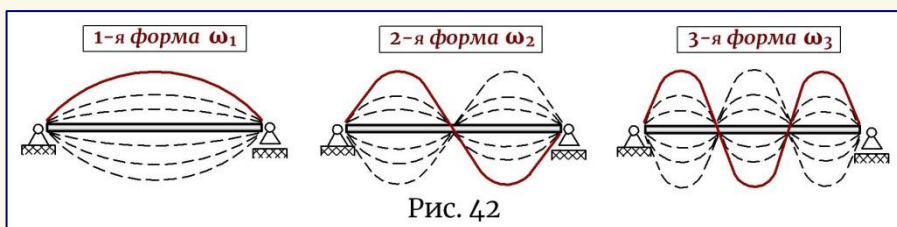
и подставив производные (118), а также значения (117), в выражения (116), после преобразования получаем систему трех однородных линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных – трех амплитуд A_1, A_2, A_3 и частоты ω –

$$\begin{cases} A_1 (\delta_{11} m_1 \omega^2 - 1) + \delta_{12} m_2 A_2 \omega^2 + \delta_{13} m_3 A_3 \omega^2 = 0 \\ \delta_{21} m_1 A_1 \omega^2 + A_2 (\delta_{22} m_2 \omega^2 - 1) + \delta_{23} m_3 A_3 \omega^2 = 0 \\ \delta_{31} m_1 A_1 \omega^2 + \delta_{32} m_2 A_2 \omega^2 + A_3 (\delta_{33} m_3 \omega^2 - 1) = 0. \end{cases} \quad (119)$$

Тривиальным решением этой системы является равенство нулю всех трех корней уравнений, т.е. $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Но нулевое решение не имеет смысла и физически означает отсутствие колебаний и нахождение рассчитываемой конструкции в состоянии покоя, так как в любой момент времени прогибы $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ (117). В условиях же колебательного процесса амплитуды не могут одновременно равняться нулю, а ненулевое решение математически возможно только в случае, когда определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных A_1, A_2, A_3 , равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\delta_{11} m_1 \omega^2 - 1) & \delta_{12} m_2 \omega^2 & \delta_{13} m_3 \omega^2 \\ \delta_{21} m_1 \omega^2 & (\delta_{22} m_2 \omega^2 - 1) & \delta_{23} m_3 \omega^2 \\ \delta_{31} m_1 \omega^2 & \delta_{32} m_2 \omega^2 & (\delta_{33} m_3 \omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (120)$$

Раскрывая определитель по правилу Саррюса, получают уравнение третьей степени относительно значения ω^2 , которое является *частотным уравнением* свободных колебаний системы с конечным числом степеней свободы и называется *характеристическим* или *вековым уравнением*. Решение этого уравнения дает три действительных положительных корня и три значения частот, каждому из которых соответствует определенное очертание формы динамического изгиба (рис. 42), созданное амплитудным смещением колеблющихся масс.



Каждая из частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ обращает определитель (120) в ноль и каждому значению соответствует одна система уравнений (119), решив которую можно получить набор соотношений амплитуд, характеризующих форму изгиба, соответствующую данной частоте колебаний. Найденные частоты, расположенные в порядке возрастания, образуют спектр частот колебаний, а соответствующие им формы – спектр форм, являющихся важной динамической характеристикой системы. Наименьшая частота называется основной частотой или основным тоном колебаний, а другие частоты — высшими частотами или обертонами. Для практических целей, как было сказано выше, наиболее важной является наименьшая или несколько низших частот.

Для конструкций с " n " числом установленных дискретных масс и таким же числом степеней свободы система (118) будет включать такое же число уравнений —

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(\delta_{11}m_1\omega^2 - 1) + \delta_{12}m_2A_2\omega^2 + ... + \delta_{1n}m_nA_n\omega^2 = 0 \\ \delta_{21}m_1A_1\omega^2 + A_2(\delta_{22}m_2\omega^2 - 1) + ... + \delta_{2n}m_nA_n\omega^2 = 0 \\ \\ \delta_{n1}m_1A_1\omega^2 + \delta_{n2}m_2A_2\omega^2 + ... + A_n(\delta_{nn}m_n\omega^2 - 1) = 0, \end{array} \right.$$

а определитель (119) принимает вид:

$$\Delta = \frac{\begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1\omega^2 - 1) & \delta_{12}m_2\omega^2 & \delta_{13}m_3\omega^2 \\ \delta_{21}m_1\omega^2 & (\delta_{22}m_2\omega^2 - 1) & \delta_{23}m_3\omega^2 \\ \delta_{31}m_1\omega^2 & \delta_{32}m_2\omega^2 & (\delta_{33}m_3\omega^2 - 1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{n1}m_1\omega^2 & \delta_{n2}m_2\omega^2 & (\delta_{nn}m_n\omega^2 - 1) \end{vmatrix}} = 0,$$

при раскрытии которого получают частотное уравнение n -го порядка относительно значений ω^2 , образующих спектр частот, упорядоченных по мере возрастания $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$. Однако строгое решение такого уравнения возможно только при числе степеней свободы $n=2$ и $n=3$. Для систем с числом степеней свободы больше трех решение является затруднительным и его можно получить только численными методами.

ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Уравнение собственных колебаний без учета затухания →

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0 \quad - \text{ продольных колебаний;}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \quad - \text{ поперечных (изгибных) колебаний;}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad - \text{ крутильных колебаний.}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} \quad - \quad \text{круговая частота собственных колебаний (продольных или поперечных) без учета затухания;}$$

$$\omega_0 = \frac{d^2}{2D} \sqrt{\frac{G\pi g}{Q\ell}} \quad - \quad \text{круговая частота собственных крутильных колебаний без учета затухания.}$$

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 \quad - \quad \text{период собственных колебаний.}$$

Уравнение собственных колебаний с учетом затухания →

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2n_{\text{зат}} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0, \quad \text{где } n_{\text{зат}} \text{ — коэффициент затухания.}$$

Уравнение вынужденных колебаний с учетом затухания →

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2n_{\text{зат}} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{H_0}{m} \sin \omega t, \quad \text{где}$$

H_0 — наибольшее значение возмущающей силы;

ω — круговая частота возмущающей силы (частота вынужденных колебаний).

$$\boxed{\omega = \omega_0} \quad - \quad \text{условие резонанса;}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4n_{\text{зат}}^2 \omega^2}{\omega_0^4}}} \quad - \quad \text{коэффициент нарастания колебаний с учетом затухания;}$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \quad - \quad \text{коэффициент нарастания колебаний при отношении частот } \omega/\omega_0 = 1,5 \div 2,0 \text{ и более, когда нет опасности наступления резонанса;}$$

$B = \beta \Delta_{cm}^{H_0}$ – амплитуда вынужденных колебаний.

Расчеты на прочность при колебаниях упругих систем $\rightarrow$

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max}; \tau_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \tau_{cm}^{\max}; \Delta_{\partial} = k_{\partial} \Delta_{cm}, \text{ где}$$

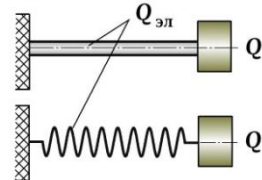
$k_{\partial} = \beta$ – динамический коэффициент без учета веса груза Q ;

$k_{\partial} = 1 + \beta \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}}$ – динамический коэффициент с учетом веса груза Q .

Учет массы упругого элемента при колебаниях $\rightarrow$

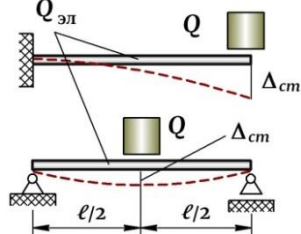
Q – вес груза; $Q_{эл} = \gamma \ell A$ – вес элемента; $Q_{пр}$ – приведенная нагрузка – это вес упругого элемента, приведенный к точке приложения груза Q .

Продольные колебания



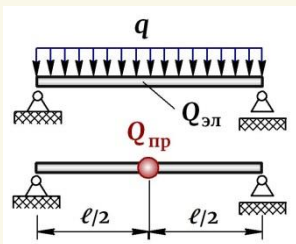
$$\left. \begin{aligned} \Delta_{cm} &= \frac{(Q + Q_{пр})\ell}{EA} \\ \lambda_{cm} &= \frac{8(Q + Q_{пр})D^3n}{Gd^4} \end{aligned} \right\}, \text{ где } Q_{пр} = \frac{Q_{эл}}{3}.$$

Поперечные колебания



$$\Delta_{cm} = \frac{(Q + Q_{пр})\ell^3}{3EI_x}, \text{ где } Q_{пр} = \frac{33Q_{эл}}{140}.$$

$$\Delta_{cm} = \frac{(Q + Q_{пр})\ell^3}{48EI_x}, \text{ где } Q_{пр} = \frac{17Q_{эл}}{35}.$$



Здесь q – это внешняя нагрузка плюс собственный вес балки. Приведенная нагрузка приложена посередине пролета и равна: $Q_{пр} = 0,5q\ell$. Статическое перемещение Δ_{cm} следует вычислять с учетом обеих нагрузок – q и $Q_{пр}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Собственные колебания систем с одной степенью свободы

Задача 1

Определить частоту ω_0 и период T_0 собственных продольных колебаний элементов, нагруженных грузом Q :

а) Деревянной стойки ($E = 0,9 \times 10^4$ МПа) длиной $\ell = 120$ см и диаметром $d = 15$ см, нагруженной $Q = 100$ кН;

б) Стальной стойки ($E = 2 \times 10^5$ МПа) с сечением двутавр №20 длиной $\ell = 1,5$ м и площадью поперечного сечения $A = 26,8$ см², нагруженной $Q = 150$ кН;

в) Кирпичного столба ($E = 3 \times 10^3$ МПа) длиной $\ell = 1,8$ м и квадратного сечения 80×80 см, нагруженного $Q = 300$ кН.

Массой элементов пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

Прикладываем силу Q статически, вычисляем статическую деформацию $\Delta_{ст}$ каждого элемента, а затем определяем для него частоту и период собственных колебаний:

Деревянная стойка $\rightarrow$

$$\Delta_{ст} = \frac{Q\ell}{EA} = \frac{Q\ell}{E\left(\pi d^2/4\right)} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1200}{0,9 \cdot 10^4 \left(3,14 \cdot 150^2/4\right)} = 0,75 \text{ мм};$$

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{9800}{0,75}} = 114,3 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{114,3} = 0,05 \text{ сек}.$$

Двутавровая стойка $\rightarrow$

$$\Delta_{ст} = \frac{Q\ell}{EA} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 26,8 \cdot 10^2} = 0,42 \text{ мм};$$

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{9800}{0,42}} = 152,7 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{152,7} = 0,04 \text{ сек}.$$

Кирпичный столб

→

$$\Delta_{cm} = \frac{Q\ell}{EA} = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3 \cdot (80 \times 80) \cdot 10^2} = 0,28 \text{ мм};$$

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{0,28}} = 187,1 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{187,1} = 0,03 \text{ сек}.$$

Задача 2

Стальная цилиндрическая винтовая пружина с параметрами — $D=12$ см, $d=1$ см, $n=30$ витков, $G=8 \times 10^4$ МПа — растянута грузом $Q=180$ Н. Определить частоту и период собственных продольных колебаний груза Q на пружине без учета и с учетом ее собственного веса. Принять для стали: $\gamma = 7,85 \times 10^{-5}$ Н/мм³.

РЕШЕНИЕ:**Без учета веса пружины**

$$\Delta_{cm} = \lambda_{cm} = \frac{8QD^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 180 \cdot 120^3 \cdot 30}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^4} = 93,3 \text{ мм};$$

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{93,3}} = 10,2 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{10,2} = 0,62 \text{ сек}.$$

С учетом веса пружины

$$\ell = \pi dn = 3,14 \cdot 120 \cdot 30 = 11304 \text{ мм} - \text{длина пружины};$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10^2}{4} = 78,5 \text{ мм}^2 - \text{площадь сечения прутка};$$

$$Q_{эл} = \gamma A \ell = 7,85 \cdot 10^{-5} \cdot 11304 \cdot 78,5 = 69,6 \text{ Н} - \text{вес пружины};$$

$$Q_{пр} = \frac{Q_{эл}}{3} = \frac{69,6}{3} = 23,2 \text{ Н} - \text{приведенная нагрузка};$$

$$\Delta_{cm} = \lambda_{cm} = \frac{8(Q + Q_{пр})D^3n}{Gd^4} = \frac{8(180 + 23,2) \cdot 120^3 \cdot 30}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^4} = 105,3 \text{ мм};$$

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{105,3}} = 9,65 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{9,65} = 0,65 \text{ сек}.$$

Задача 3

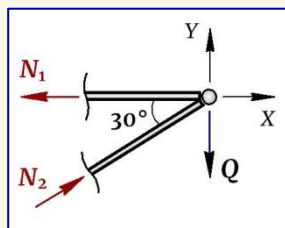
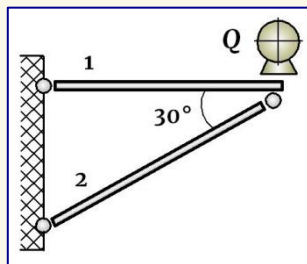
Электродвигатель весом $Q = 8 \text{ кН}$ укреплен на кронштейне, состоящем из двух стальных стержней длиной и одинаковой площади сечения $A_1 = A_2 = 18 \text{ см}^2$. Определить частоту и период собственных колебаний двигателя на кронштейне. Собственным весом стержней пренебречь. Принять для стержней конструкции: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Прикладываем силу Q статически и определяем продольные силы в стержнях:

$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0: N_2 \cos 30^\circ - N_1 &= 0 \\ \sum Y = 0: N_2 \sin 30^\circ - Q &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} N_1 = 13,8 \text{ кН} \\ N_2 = 16 \text{ кН} \end{cases}.$$



② Определяем в стержнях потенциальную энергию деформации, накопленную при статическом нагружении:

$$\begin{aligned} \boxed{U_{cm}} &= \frac{N_1^2 \ell_1}{2EA_1} + \frac{N_2^2 \ell_2}{2EA_2} = \\ &= \frac{(13,8 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^2} + \frac{(16 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,38 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^2} = 808 \text{ Нмм}. \end{aligned}$$

③ Определяем перемещение узла кронштейна по направлению силы Q . По теореме Клапейрона при упругом деформировании работа силы равна $\boxed{A_Q = (Q \Delta_{cm}) / 2}$.

Тогда на основании закона сохранения энергии получаем:

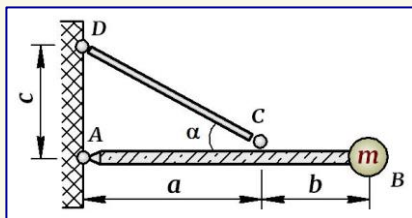
$$\boxed{A_Q = U_{cm}} \rightarrow \frac{Q \Delta_{cm}}{2} = U_{cm}, \text{ откуда } \boxed{\Delta_{cm}} = \frac{2U_{cm}}{Q} = \frac{2 \cdot 808}{8 \cdot 10^3} = 0,2 \text{ мм}.$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{0,2}} = 221,4 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{221,4} = 0,03 \text{ сек.}$$

Задача 4

На конце жесткого бруса AB , шарнирно укрепленного в стене и поддерживаемого стержнем CD , установлен груз массой $m=250 \text{ кг}$. Определить частоту и период собственных колебаний груза на брус.



Принять для стержня жесткость сечения $EA=42 \text{ МН}$, а для конструкции $a=4 \text{ м}$; $b=2 \text{ м}$; $c=3 \text{ м}$. Массой стержня пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

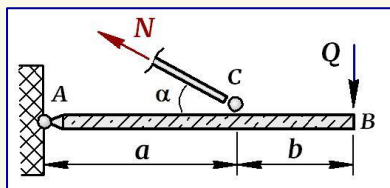
① Согласно заданной конструкции вычисляем длину стержня и угол его расположения, а также вес установленного груза:

$$\boxed{\ell} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ м}; \quad \sin \alpha = 3/5 \rightarrow \boxed{\alpha} = 36,87^\circ; \quad \boxed{Q} = mg = 250 \cdot 9,8 = 2450 \text{ Н} = 2,45 \text{ кН}. \quad (1)$$

② Прикладываем груз Q статически и с учетом значений (1) определяем продольную силу в стержне CD и его удлинение:

$$\sum M_A = 0: Q(a+b) - N \sin \alpha \cdot a = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{N} = \frac{Q(a+b)}{a \cdot \sin \alpha} = \frac{2,45 \cdot 6}{4 \cdot \sin 36,87^\circ} = 6,125 \text{ кН};$$

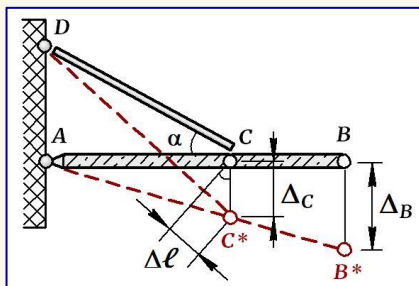


$$\boxed{\Delta \ell} = \frac{N \ell}{EA} = \frac{6,125 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3}{42 \cdot 10^6} = 0,729 \text{ мм}. \quad (2)$$

③ Строим деформационную схему и на основании заданной конструкции и значения (2) определяем вертикальное перемещение точки приложения груза Q . Принимая $\Delta_c = \Delta \ell / \sin \alpha$, рассматриваем

подобие треугольников — $\Delta ABB^* \propto \Delta ACC^* \rightarrow \Delta_B / (a+b) = \Delta_C / a$ и в результате получаем:

$$\Delta_B = \boxed{\Delta_{cm}} = \frac{(a+b)\Delta\ell}{a \sin \alpha} = \frac{6 \cdot 0,729}{4 \cdot \sin 36,87^\circ} = \frac{6 \cdot 0,729}{4 \cdot \sin 36,87^\circ} = 1,823 \text{ мм.}$$

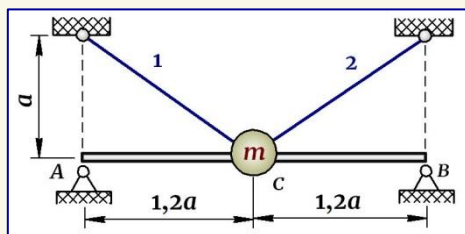


II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{1,823}} = 73,3 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{73,3} = 0,09 \text{ сек.}$$

Задача 5

Балка AB, установленная на шарнирных опорах и поддерживаемая двумя одинаковыми стержнями, прикрепленными посередине пролета, нагружена в точке соединения грузом массой $m=100\text{ кг}$. Принимая для балки



и стержней жесткость, соответственно равную $EI_x = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ и $EA = 160 \text{ кН}$, определить частоту и период собственных колебаний системы с сосредоточенным грузом. Принять $a = 0,8 \text{ м}$. Массой балки и стержней пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Груз, приложенный на конструкции в точке "C" равен —

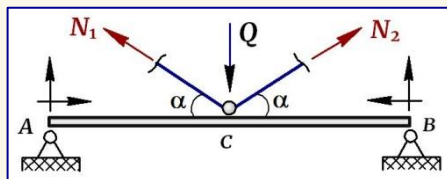
$$\boxed{Q} = mg = 100 \cdot 9,8 = \left\| \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} = \text{Н} \right\| = 980 \text{ Н} = 0,98 \text{ кН} \quad (1)$$

и при статическом его приложении вызывает растяжение стержней и прогиб балки, совокупность деформаций которых определяет статическое перемещение груза Δ_{cm} в вертикальном направлении.

② Для определения этого перемещения необходимо определить величину продольных сил N_1 и N_2 , растягивающих стержни, а также силу F , изгибающую балку. Из силовой схемы для данной конструкции, полученной методом сечений, видно, что продольные силы в стержнях в силу симметрии одинаковы — $N_1 = N_2$, а сила, изгибающая балку, соответственно равна:

$$F = (Q - 2N_1 \sin \alpha), \quad (2)$$

где $\alpha = \arctg(a/1,2a) = 39,8^\circ$.



Принимая для конструкции длину стержней и длину балки соответственно равными $a/\sin \alpha = 1,56a$ и $2,4a$, удлинение стержней и прогиб балки для заданной расчетной схемы, когда сила действует посередине пролета, согласно закону Гука и с учетом значения (2) определяются по формулам —

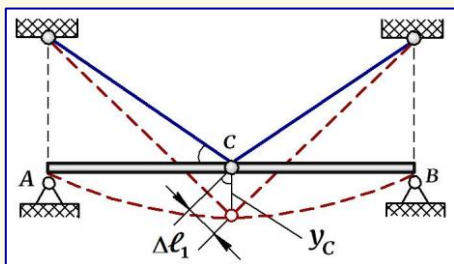
$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \cdot 1,56a}{EA}; \quad (3)$$

$$y_C = \frac{F(2,4a)^3}{48EI_x} = \frac{(Q - 2N_1 \sin \alpha)(2,4a)^3}{48EI_x}, \quad (4)$$

при этом, согласно деформационной схеме, деформации элементов (3) и (4) в точке соединения "C" связаны соотношением:

$$y_C = \frac{\Delta \ell_1}{\sin \alpha}. \quad (5)$$

③ Подставляем (3) и (4) в (5) и после преобразования с учетом числовых значений определяем продольные силы в стержнях —



$$\frac{(Q - 2N_1 \sin \alpha)(2,4a)^3}{48EI_x} = \frac{N_1 \cdot 1,56a}{EA \sin \alpha} \rightarrow$$

$$Q = N_1 \left[2 \sin \alpha + \frac{48EI_x \cdot 1,56a}{EA \sin \alpha (2,4a)^3} \right] =$$

$$= N_1 \left[2 \sin 39,8^\circ + \frac{48 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 1,56}{160 \cdot 10^3 \sin 39,8^\circ \cdot 2,4^3 (0,8 \cdot 10^3)^2} \right] = 2,1 N_1 ,$$

откуда
$$\boxed{N_1} = \frac{Q}{2,1} = \frac{0,98}{2,1} = 0,47 \text{ кН}, \quad (6)$$

а также на основании формулы (2) и полученного значения (6) вычисляем силу, изгибающую балку:

$$Q - 2N_1 \sin \alpha = 0,98 - 2 \cdot 0,47 \sin 39,8^\circ = 0,38 \text{ кН}. \quad (7)$$

④ Тогда статическое перемещение Δ_{cm} в месте крепления груза, определяемое прогибом y_C , на основании (4) и (7) будет равно:

$$\boxed{\Delta_{cm}} = \frac{(Q - 2N_1 \sin \alpha) (2,4a)^3}{48 EI_x} = \frac{0,38 \cdot 10^3 (2,4 \cdot 0,8 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 10 \cdot 10^9} = 5,6 \text{ мм}.$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{5,6}} = 41,8 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{41,8} = 0,15 \text{ сек}.$$

Задача 6

Два одинаковых груза, подвешенных к цилиндрической винтовой пружине, растягивают пружину на 30 мм. Определить частоту и период продольных колебаний, возникающих в тот момент, когда один из грузов внезапно снят. Определить также наибольшую скорость и ускорение колебаний груза.

РЕШЕНИЕ:

① Когда один из грузов снимают, статическое растяжение пружины составляет $\Delta_{cm} = \lambda_{cm} = 15 \text{ мм}$. При внезапном снятии груза возникают колебания, частота и период которых равны:

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{15}} = 25,6 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{25,6} = 0,25 \text{ сек}.$$

② Определяем скорость и ускорение колебаний груза:

а) Отклонение Z_0 системы от положения равновесия, ее скорость V_0 и амплитуда A в момент времени $t = 0$ равны:

$$Z_0 = 30 \text{ мм}; \quad V_0 = 0; \quad A = \sqrt{Z_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}} = 30 \text{ мм}.$$

б) Отклонение системы от положения равновесия, ее скорость и ускорение в любой момент времени определяется функциями:

$$\begin{aligned} Z &= A \sin(\omega_0 t + \varphi_0); \quad V = \frac{dz}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \\ a &= \frac{d^2 Z}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned},$$

где φ_0 – начальная фаза колебаний, соответствующая $t = 0$.

в) Тогда наибольшая скорость и наибольшее ускорение будут возникать при значениях $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 1$ и $\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = 1$:

$$V_{\max} = A\omega_0 = 30 \cdot 25,6 = 768 \text{ мм/сек};$$

$$a_{\max} = -A\omega_0^2 = -30(25,6)^2 = -19,7 \text{ м/сек}^2.$$

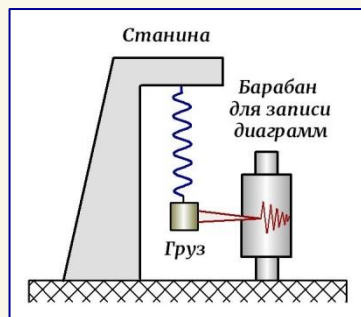
Задача 7

Для записи колебаний элементов конструкций применяют **вибро-граф** (см. рис.). При отсутствии колебаний груз относительно детали должен оставаться неподвижным, но при наличии колебательного процесса частота собственных колебаний груза на пружине не должна быть больше $\omega_0 = 10 \text{ сек}^{-1}$.

Пружина имеет параметры: $D = 25 \text{ мм}$;

$d = 2 \text{ мм}$; $n = 20$ витков; $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$.

Определить величину груза Q , обеспечивающего заданную частоту колебаний.



РЕШЕНИЕ:

① По величине заданной частоты колебаний определяем статическое удлинение пружины грузом Q :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}}, \text{ откуда } \boxed{\lambda_{cm}} = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{9800}{10^2} = 98 \text{ мм.}$$

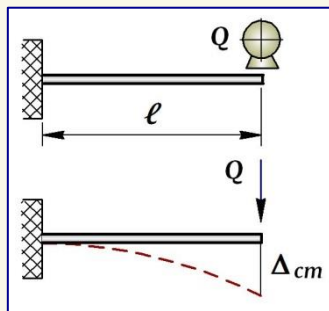
② Но с другой стороны, деформация пружины равна:

$$\boxed{\lambda_{cm} = \frac{8QD^3n}{Gd^4}},$$

откуда $\boxed{Q} = \frac{\lambda_{cm}Gd^4}{8D^3n} = \frac{98 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 2^4}{8 \cdot 25^3 \cdot 20} = 50,2 \text{ Н.}$

Задача 8

На конце консольной балки длиной $\ell = 1,6 \text{ м}$, выполненной из двутавра №18, установлен двигатель весом $Q = 16 \text{ кН}$. Определить частоту и период собственных колебаний двигателя на балке. Определить, насколько изменится частота колебаний балки, если ее концы закрепить на шарнирных опорах, а двигатель установить посередине пролета. Массой балки пренебречь. Принять для двутавра: $I_x = 1290 \text{ см}^4$; $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Рассматриваем вариант установки двигателя на конце консоли:

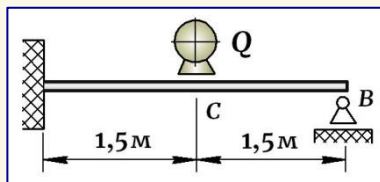
$$\boxed{\Delta_{cm}} = \frac{Q\ell^3}{3EI_x} = \frac{16 \cdot 10^3 (1,6 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = 8,5 \text{ мм;}$$

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{8,5}} = 34 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{34} = 0,18 \text{ сек.}$$

② Для балки, опирающейся на шарнирные опоры, при установке двигателя посередине пролета прогиб в этом месте определяется по формуле — $\boxed{\Delta_{cm} = Q\ell^3/48EI_x}$, следовательно, он в 16 раз меньше прогиба по сравнению с консольной балкой, а частота собственных колебаний, определяемая как $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/\Delta_{cm}}}$, соответственно, будет в 4 раза больше.

Задача 9

На двутавровой балке (двутавр №30) установлен двигатель весом $Q = 40 \text{ кН}$. Определить частоту и период собственных колебаний двигателя на балке. Массой балки пренебречь. Принять данные для двутавра №30: $I_x = 7080 \text{ см}^4$; $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Балка *статически неопределима*. Поэтому для определения необходимых статических параметров прикладываем силу Q статически и МЕТОДОМ СИЛ, раскрываем статическую неопределимость:

а) Убираем подвижную опору "B", в направлении отброшенной связи прикладываем неизвестную силу X_1 и задаем условие, что перемещение в направлении этой силы равно нулю. Получаем каноническое уравнение метода сил $\rightarrow$

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1Q} = 0.$$

б) Определяем коэффициенты канонического уравнения $\rightarrow$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{9}{EI_x};$$

$$\Delta_{1Q} = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 60 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) \right] = \frac{112,5}{EI_x}.$$

в) Решаем каноническое уравнение $\rightarrow$

$$\frac{9}{EI_x} X_1 + \frac{112,5}{EI_x} = 0, \text{ откуда } \boxed{X_1} = R_B = -12,5 \text{ кН}.$$

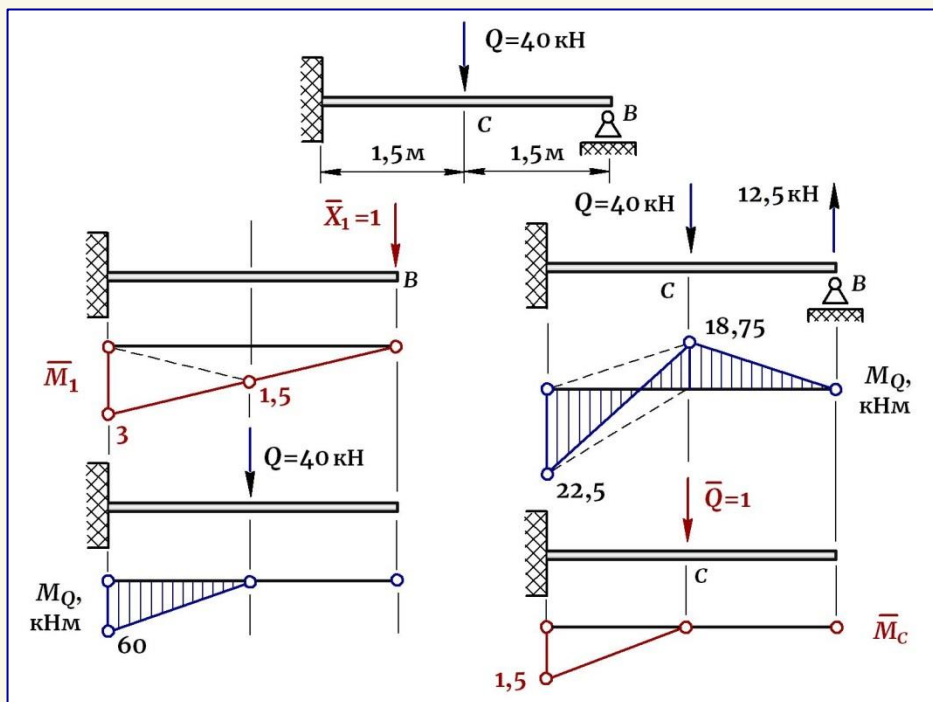
Знак «минус» указывает, что реакция на опоре "B" будет направлена в сторону, обратную заданному направлению силы X_1 .

г) Строим окончательную грузовую эпюру изгибающих моментов и делаем проверку, согласно которой необходимо доказать, что прогиб на опоре "B" равен нулю. Для этого прикладываем в точке "B" единичную силу $\bar{F} = 1$ и получаем единичную эпюру вида $\bar{M}_B = \bar{M}_1$. Перемножаем эпюру $\bar{M}_B$ с грузовой и получаем $\rightarrow$

$$\boxed{y_B} = \frac{1}{EI_X} (M_Q \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_X} \left[\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 22,5 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 18,75 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 18,75 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \right] = \frac{1}{EI_X} (-14,06 - 28,13 + 42,19) = 0.$$

② Определяем статический прогиб Δ_{cm}^C в точке приложения груза:

$$\Delta_{cm}^C = \frac{1}{EI_X} (M_Q \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 22,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 18,75 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) = \\ = \frac{9,84 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 7080 \cdot 10^4} = 0,7 \text{ мм}.$$



II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^C}} = \sqrt{\frac{9800}{0,7}} = 118,3 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{118,3} = 0,05 \text{ сек}.$$

Задача 10

На конце консоли плоской конструкции ABC в точке "C" установлен груз массой $m=30\text{ кг}$. Определить длину " a " участка BC , если период собственных *вертикальных* колебаний груза равен $T_0=0,34\text{ сек}$. Считать участок BC абсолютно жестким, а жесткость гибкого вертикального участка принять равной $EI_x=1,2\text{ кН}\cdot\text{м}^2$. Собственной массой конструкции пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

① По заданному значению T_0 определяем круговую частоту собственных колебаний груза:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{0,34} = 18,5 \text{ сек}^{-1}.$$

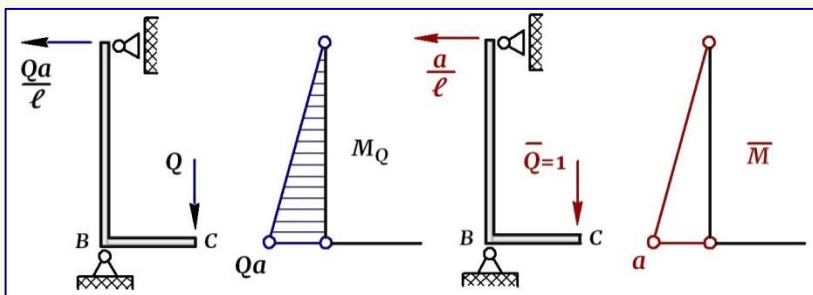
Но частота колебаний определяется по формуле:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^C}}, \text{ откуда } \Delta_{cm}^C = \frac{g}{\omega_0^2}. \quad (1)$$

② С другой стороны, статическое перемещение точки "C" в вертикальном направлении от действия веса груза, равного —

$$Q = mg = 30 \cdot 9,8 = 0,294 \text{ кН}, \quad (2)$$

можно определить методом перемножения эпюр, учитывая, что участок BC является абсолютно жестким:



$$\Delta_{cm}^C = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} Qa \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} a \right) = \frac{Qa^2 \ell}{3EI_x}. \quad (3)$$

Приравниваем выражения (1) и (3) и с учетом заданных для конструкции значений и значения (2) получаем:

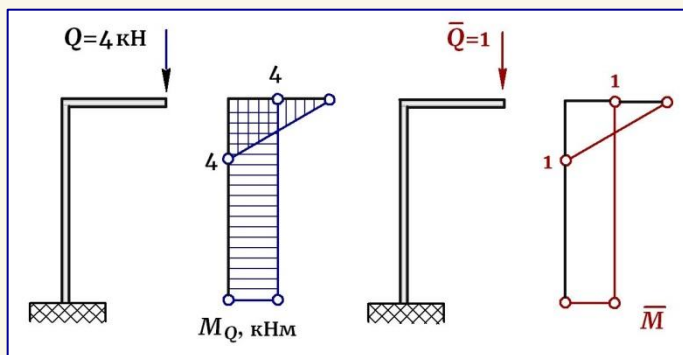
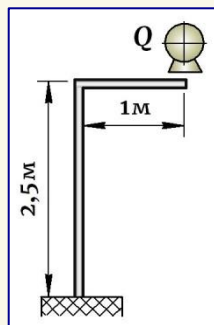
$$\frac{g}{\omega_0^2} = \frac{Qa^2\ell}{3EI_X} \rightarrow a = \sqrt{\frac{3gEI_X}{Q\ell\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9800 \cdot 1,2 \cdot 10^9}{0,294 \cdot 10^3 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \cdot 18,5^2}} = 50 \text{ см.}$$

Задача 11

На раме установлен двигатель весом $Q = 4 \text{ кН}$. Определить частоту и период собственных колебаний двигателя на раме. Массой рамы пренебречь. Принять для рамы: $I_X = 146,8 \text{ см}^4$; $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ



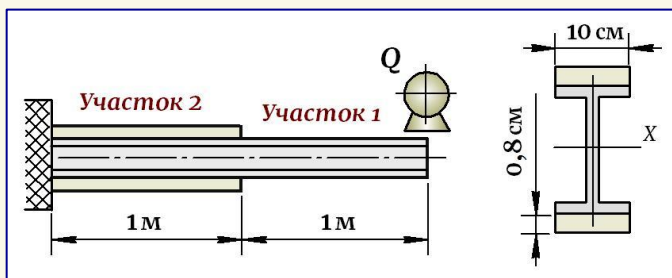
$$\Delta_{cm} = \frac{1}{EI_X} (M_Q \bar{M}) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 4 \cdot 2,5 \cdot 1 \right) = \frac{11,33 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 146,8 \cdot 10^4} = 38,6 \text{ мм.}$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{38,6}} = 16 \text{ сек}^{-1}; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{16} = 0,4 \text{ сек.}$$

Задача 12

На конце консоли балки, выполненной из двутавра №20, укрепленного с двух сторон двумя металлическими накладками (см. рис.), установлен двигатель весом $Q=15\text{ кН}$. Определить частоту и период собственных колебаний двигателя на балке. Массой балки и накладок пренебречь. Принять для двутавра – $I_x = 1840\text{ см}^4$, а для материала элементов – $E = 2 \times 10^5\text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

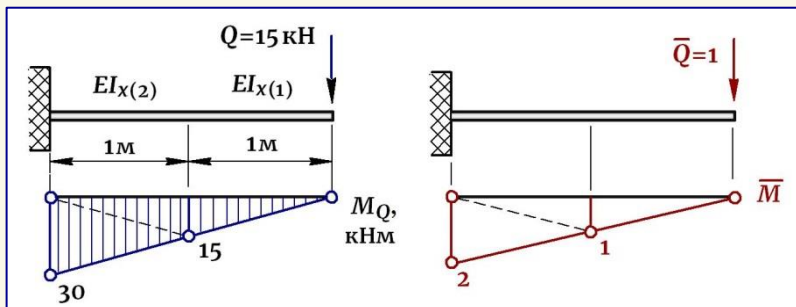
I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Балка имеет два участка с различной формой сечений. Для этих участков моменты инерции $I_{x(1)}$ и $I_{x(2)}$ относительно нейтральной оси соответственно равны:

Участок 1: $I_{x(1)} = 1840\text{ см}^4$;

Участок 2: $I_{x(2)} = 1840 + 2 \left(\frac{10 \cdot 0,8^3}{12} + 10 \cdot 0,8 \cdot 10,4^2 \right) = 3571,4\text{ см}^4$.

② Определяем статический прогиб балки от веса двигателя в точке его установки:



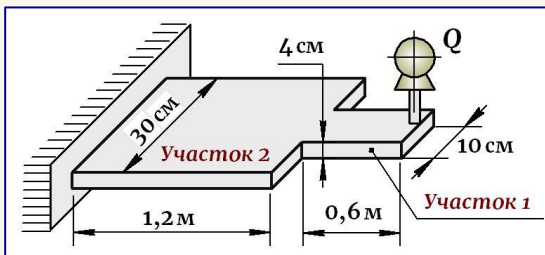
$$\Delta_{cm} = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}) = \frac{1}{EI_{x(1)}} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{EI_{x(2)}} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 30 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{5 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} + \frac{35 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3751,4 \cdot 10^4} = 6,3 \text{ мм.}$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{6,3}} = 39,4 \text{ сек}^{-1}; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{39,4} = 0,16 \text{ сек.}$$

Задача 13

На конце консольной балки заданной конфигурации (см. рис.) установлен двигатель весом $Q = 2 \text{ кН}$. Определить частоту и период собственных колебаний двигателя на балке. Массой балки пренебречь. Принять для балки: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Балка имеет два участка различной жесткости. Определяем моменты инерции сечений относительно нейтральной оси $I_{x(1)}$ и $I_{x(2)}$ для этих участков:

Участок 1:

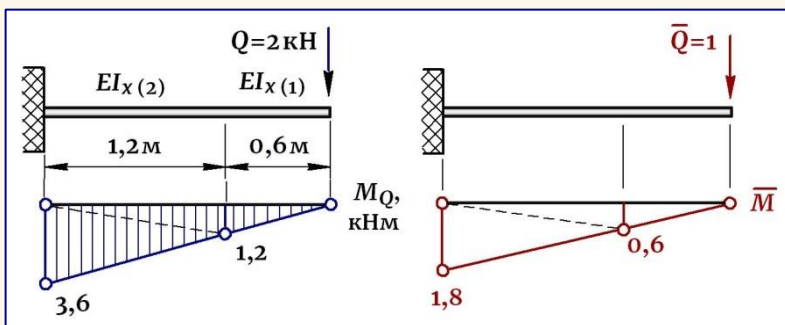
$$I_{x(1)} = \frac{10 \cdot 4^3}{12} = 53,33 \text{ см}^4.$$

Участок 2:

$$I_{x(2)} = \frac{30 \cdot 4^3}{12} = 160 \text{ см}^4.$$

② Определяем статический прогиб балки от веса двигателя Q в точке его установки:

$$\Delta_{cm} = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}) = \frac{1}{EI_{x(1)}} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 1,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 \right) + \frac{1}{EI_{x(2)}} \left[\frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 1,2 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 1,8 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 3,6 \left(\frac{2}{3} \cdot 1,8 + \frac{1}{3} \cdot 0,6 \right) \right] = 13 \text{ мм.}$$



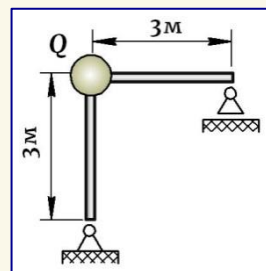
II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{13}} = 27,5 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{27,5} = 0,23 \text{ сек.}$$

Задача 14

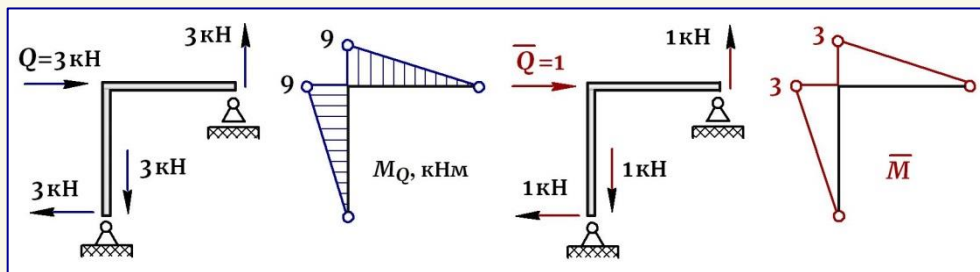
К плоской раме, выполненной из двутавра №27, прикреплен груз весом $Q = 3 \text{ кН}$. Определить частоту и период собственных колебаний груза на раме в *горизонтальном* направлении. Массой рамы пренебречь. Принять для рамы:

$$I_X = 5500 \text{ см}^4; E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ



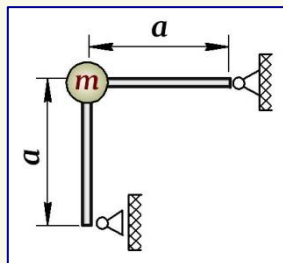
$$\boxed{\Delta_{cm}} = \frac{1}{EI_X} (M_Q \bar{M}) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) \times 2 = \frac{54 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 4,9 \text{ мм.}$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{4,9}} = 44,7 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{44,7} = 0,14 \text{ сек.}$$

Задача 15

Сосредоточенный груз массой " m ", помещенный в узле рамы, совершает *вертикальные* колебания с частотой $\omega_0 = 50 \text{ сек}^{-1}$. Определить массу груза, если жесткость участков рамы равна $EI_x = 9 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$. Принять $a = 3 \text{ м}$.



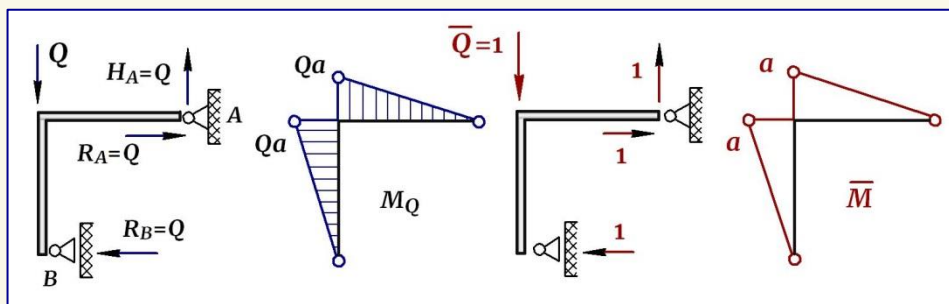
РЕШЕНИЕ:

① Частота колебаний определяется по формуле:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}}, \text{ откуда } \boxed{\Delta_{cm}} = \frac{g}{\omega_0^2}. \quad (1)$$

② С другой стороны, статическое перемещение узла в вертикальном направлении от действия веса груза можно определить методом перемножения эпюр:

$$\boxed{\Delta_{cm}} = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} Qa \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right) \times 2 = \frac{2Qa^3}{3EI_x}. \quad (2)$$



Приравниваем значения (1) и (2) и получаем:

$$\boxed{\frac{g}{\omega_0^2} = \frac{2Qa^3}{3EI_x}} \rightarrow \boxed{Q} = \frac{3gEI_x}{2a^3\omega_0^2} = \frac{3 \cdot 9800 \cdot 9 \cdot 10^{12}}{2(3 \cdot 10^3)^3 50^2} = 1960 \text{ Н.}$$

③ Определяем массу груза, закрепленного в узле рамы. Так как —

$$Q = mg \rightarrow m = \frac{Q}{g} = \frac{1960}{9,8} = 200 \text{ кг}.$$

Задача 16

Груз весом $Q = 5 \text{ Н}$ укреплен на стальной консольной балке длиной $\ell = 0,4 \text{ м}$ с прямоугольным сечением $b \times h = 20 \times 1,5 \text{ мм}$, опирающейся свободным концом на винтовую цилиндрическую пружину: $D = 20 \text{ мм}$; $d = 1 \text{ мм}$; $n = 8$ витков; $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$. Определить частоту и период собственных колебаний груза на балке. Принять для балки: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$. Массой пружины и балки пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Балка *статически неопределима*. Поэтому прикладываем силу Q статически и первоначально, используя МЕТОД СИЛ, раскрываем статическую неопределимость:

а) Убираем опору-пружину, в направлении отброшенной связи прикладываем неизвестную силу X_1 и задаем условие, что перемещение по направлению этой силы равно осадке пружины. Получаем каноническое уравнение метода сил:

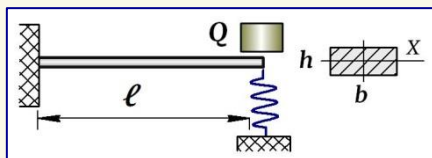
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1Q} = -\lambda_{cm},$$

где знак «минус» в правой части уравнения означает, что сжатие пружины происходит в направлении, противоположном направлению приложенной силы X_1 .

б) Определяем λ_{cm} и коэффициенты канонического уравнения:

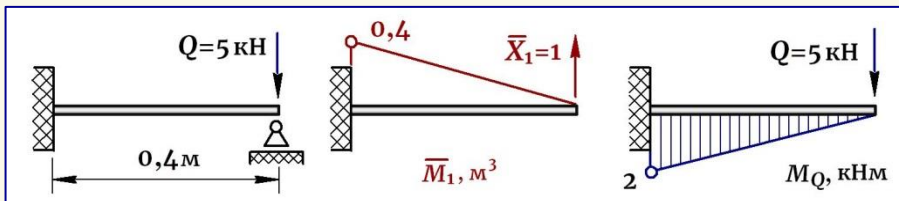
$$\lambda_{cm} = \frac{8X_1 D^3 n}{G d^4} = \frac{8X_1 \cdot 20^3 \cdot 8}{8 \cdot 10^4 \cdot 1^4} = 6,4 X_1 \text{ мм};$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 \right) = \\ &= \frac{0,021 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 5,625} = 18,96 \text{ мм/Н}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\boxed{\Delta_{1Q}} &= \frac{1}{EI_X} (M_Q \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_X} \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \\ &= -\frac{0,11 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 5,625} = -94,81 \text{ мм},\end{aligned}$$

где $I_X = bh^3/12 = 20 \cdot 1,5^3/12 = 5,625 \text{ мм}^4$.



Примечание.

Следует понимать, что пружина сжимается не силой Q , а силой X_1 — силой взаимодействия между балкой и пружиной.

в) Решаем каноническое уравнение:

$$18,96X_1 - 94,81 = -6,4X_1, \text{ откуда } \boxed{X_1} = 3,74 \text{ Н}.$$

② Определяем статическое перемещение точки приложения груза, которое равно осадке пружины:

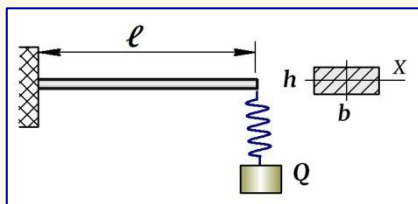
$$\boxed{\Delta_{cm}} = \lambda_{cm} = 6,4X_1 = 6,4 \cdot 3,74 = 23,9 \text{ мм}.$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{23,9}} = 20,2 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{20,2} = 0,31 \text{ сек}.$$

Задача 17

На конце консоли балке длиной $\ell = 0,5 \text{ м}$ и прямоугольного сечения $b \times h = 5 \times 1 \text{ мм}$ на винтовой пружине с параметрами: $D = 10 \text{ см}$, $d = 0,5 \text{ см}$,



$n = 12$ витков, $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$ — подвешен груз весом $Q = 10 \text{ Н}$. Определить частоту и период собственных колебаний груза на балке. Принять для балки: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$. Массой балки и пружины пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем деформации элементов от действия груза Q :

$$\lambda_{\text{пруж}} = \frac{8QD^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 100^3 \cdot 12}{8 \times 10^4 \cdot 5^4} = 19,2 \text{ мм};$$

$$\Delta_{\text{бал}} = \frac{Q\ell^3}{3EI_X} = \left\| I_X = \frac{bh^3}{12} = 0,42 \text{ см}^4 \right\| = \frac{10 \cdot (0,5 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \times 10^5 \cdot 0,42 \cdot 10^4} = 0,5 \text{ мм}.$$

② Определяем статическое перемещение точки приложения груза как суммарный результат деформаций балки и пружины:

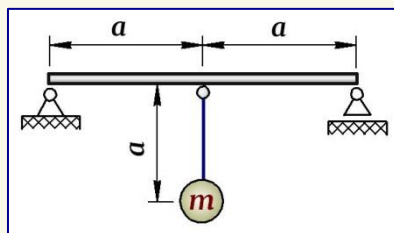
$$\boxed{\Delta_{cm}} = \lambda_{\text{пруж}} + \Delta_{\text{бал}} = 19,2 + 0,5 = 19,7 \text{ мм}.$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{19,7}} = 22,3 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{22,3} = 0,28 \text{ сек}.$$

Задача 18

Пренебрегая массой системы, определить частоту и период колебаний груза массой $m = 140 \text{ кг}$, если жесткость балки равна $EI_X = 250 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$, а жесткость стержня — $EA = 21 \text{ МН}$. Принять для конструкции $a = 1 \text{ м}$.



РЕШЕНИЕ:

Задача решается по аналогии с **Задачей 17**. Груз, укрепленный на конструкции, равен:

$$\boxed{Q} = mg = 140 \cdot 9,8 = 1372 \text{ Н} = 1,372 \text{ кН}.$$

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем деформации элементов — удлинение стержня и прогиб балки от действия груза Q , укрепленного на конструкции:

$$\Delta \ell_{\text{стерж}} = \frac{Qa}{EA} = \frac{1,372 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{21 \cdot 10^6} = 0,065 \text{ мм};$$

$$\Delta_{\text{бал}} = \frac{Q(2a)^3}{48EI_x} = \frac{1,372 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 250 \cdot 10^9} = 0,915 \text{ мм.}$$

② Определяем статическое перемещение точки приложения груза как суммарный результат деформаций балки и стержня:

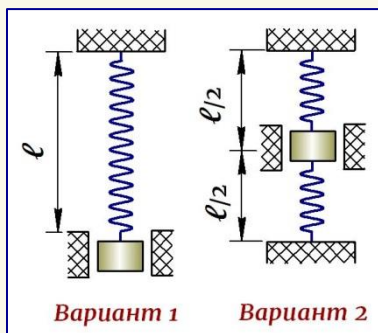
$$\boxed{\Delta_{\text{ст}}} = \Delta \ell_{\text{стерж}} + \Delta_{\text{бал}} = 0,065 + 0,915 = 0,98 \text{ мм.}$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{9800}{0,98}} = 100 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{100} = 0,06 \text{ сек.}$$

Задача 19

Определить, как изменится частота собственных колебаний груза Q на пружине, если от первого варианта крепления перейти ко второму, разрезав пружину на две равные части и закрепив груз посередине. Массой пружины пренебречь.



РЕШЕНИЕ:

Вариант 1 — $\boxed{\lambda_{\text{ст}}} = \frac{8QD^3n}{Gd^4}; \quad \boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{gGd^4}{8QD^3n}}. \quad (1)$

Вариант 2 —

① Данная система *статически неопределима*. Убираем верхнюю и нижнюю опоры и заменяем их действие силами X_1 и X_2 :

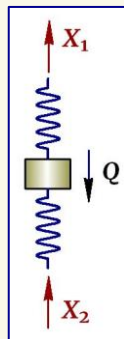
Статическая сторона →

$$\sum Z = 0: \quad X_1 + X_2 - Q = 0. \quad (a)$$

Геометрическая сторона →

Геометрическим условием является равенство деформаций пружин:

$$\lambda_{\text{верх}} = \lambda_{\text{нижн}}. \quad (б)$$



Физическая сторона →

$$\lambda_{\text{верх}} = \frac{8X_1 D^3 (n/2)}{Gd^4}; \quad \lambda_{\text{нижн}} = \frac{8X_2 D^3 (n/2)}{Gd^4}. \quad (6)$$

Подставляем (6) в (6) и получаем: $\boxed{X_1 = X_2}$. Объединяем это равенство с уравнением статики (а) и определяем силы X_1 и X_2 :

$$X_1 = X_2 = Q/2. \quad (2)$$

② На основании значения (2) определяем статическое перемещение точки приложения груза и частоту его колебаний на пружине:

$$\boxed{\Delta_{cm}} = \frac{8(Q/2)D^3 (n/2)}{Gd^4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8QD^3 n}{Gd^4};$$

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = 2 \times \sqrt{\frac{gGd^4}{8QD^3 n}}. \quad (2)$$

ВЫВОД. Сравнение значений (1) и (2) показывает, что при втором варианте крепления частота собственных колебаний груза на пружине увеличится в два раза.

Задача 20

К жесткому рычагу длиной $\ell = 25\text{ см}$, опирающемуся одним концом на шарнирную опору и удерживаемому на расстоянии $a = 10\text{ см}$ цилиндрической винтовой пружиной с параметрами – $D = 3\text{ см}$; $d = 0,3\text{ см}$;

$n = 10$ витков; $G = 8 \times 10^4$ МПа – подвешен

груз $Q = 30\text{ Н}$. Определить частоту и период собственных колебаний груза на рычаге. Массой элементов пренебречь.

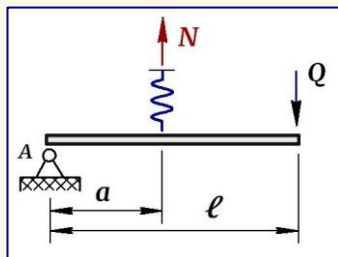
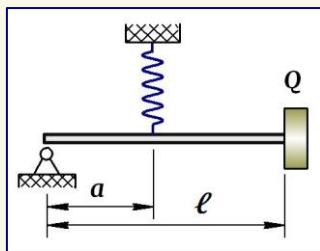
РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем силу N , растягивающую пружину:

$$\sum M_A = 0: Na - Q\ell = 0, \text{ откуда}$$

$$\boxed{N} = \frac{Q\ell}{a} = \frac{30 \cdot 25}{10} = 75\text{ Н}.$$



② Определяем удлинение пружины:

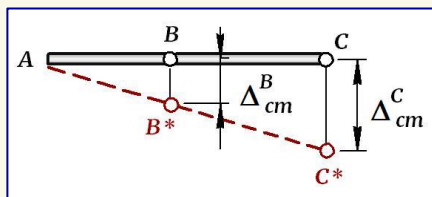
$$\boxed{\lambda_{cm}} = \frac{8ND^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 75 \cdot 30^3 \cdot 10}{8 \cdot 10^4 \cdot 3^4} = 25 \text{ мм.}$$

③ Определяем перемещение точки приложения груза:

$$\Delta ABV^* \propto \Delta ACC^* \rightarrow \frac{\Delta_{cm}^B}{a} = \frac{\Delta_{cm}^C}{\ell}, \text{ где } \Delta_{cm}^B = \lambda_{cm} = 25 \text{ мм.}$$

Тогда:

$$\boxed{\Delta_{cm}^C} = \frac{\Delta_{cm}^B \cdot \ell}{a} = \frac{25 \cdot 25}{10} = 62,5 \text{ мм.}$$



II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^C}} = \sqrt{\frac{9800}{62,5}} = 12,5 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{12,5} = 0,5 \text{ сек.}$$

Задача 21

Определить частоту и период собственных колебаний груза массой $m=10 \text{ кГ}$, установленного на свободном конце стального стержня круглого сечения диаметром $d=2 \text{ см}$. Принять: $a=20 \text{ см}$, $E=2 \times 10^5 \text{ МПа}$, $G=8 \times 10^4 \text{ МПа}$. Массу стержня в расчете не учитывать.

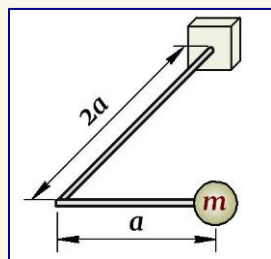
РЕШЕНИЕ:

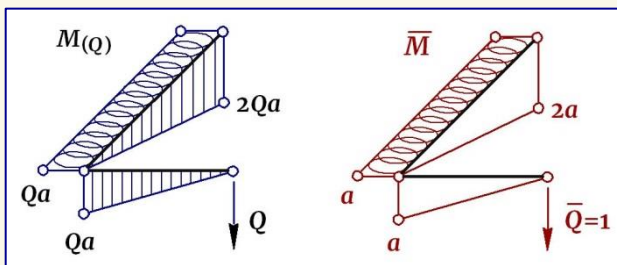
I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Вычисляем для стержня осевой и полярный моменты инерции:

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{64} = 0,785 \text{ см}^4; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{32} = 1,57 \text{ см}^4.$$

② Принимая силу, действующую на ломаный стержень, равной — $\boxed{Q=mg=10 \cdot 9,8=98 \text{ Н}}$ и прикладывая ее *статически*, определяем вертикальное перемещение конца консоли:





$$\Delta_{cm}^{\text{верт}} = \frac{1}{EI_x} \left(M_{\text{изг}(Q)} \bar{M}_{\text{изг}} \right) + \frac{1}{GI_\rho} \left(M_{\text{кр}(Q)} \bar{M}_{\text{кр}} \right) =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} Qa \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} 2Qa \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} 2a \right) + \frac{1}{GI_\rho} (Qa \cdot 2a \cdot a) =$$

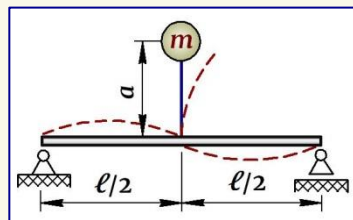
$$= \frac{3Qa^3}{EI_x} + \frac{2Qa^3}{GI_\rho} = \frac{3 \cdot 98 \cdot 200^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,785 \cdot 10^4} + \frac{2 \cdot 98 \cdot 200^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 1,57 \cdot 10^4} = 2,75 \text{ мм.}$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9800}{2,75}} = 59,7 \text{ сек}^{-1}; \quad \boxed{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{59,7} = 0,11 \text{ сек.}$$

Задача 22

На каком расстоянии "a" нужно укрепить массу "m", чтобы частоты собственных *вертикальных* и *горизонтальных* колебаний массы совпадали? Считать жесткость на изгиб EI_x горизонтального и вертикального участков стержня одинаковыми. Массой стержней пренебречь.



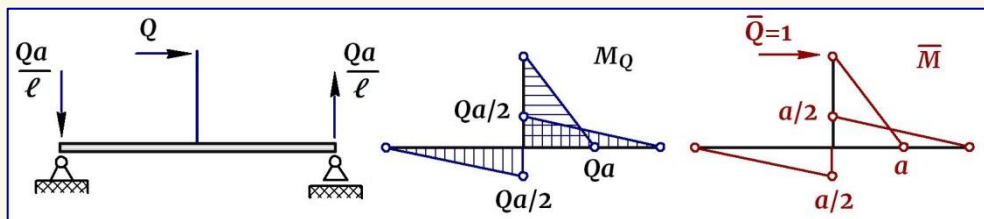
РЕШЕНИЕ:

① Частота собственных колебаний равна — $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/\Delta_{cm}}}$ и так как, согласно условию задачи, частоты в вертикальном и горизонтальном направлениях одинаковы, значит, одинаковыми должны быть значения — $\boxed{\Delta_{cm}^{\text{верт}} = \Delta_{cm}^{\text{гориз}}}$.

② Статическое перемещение массы в вертикальном направлении, как если бы груз $Q = mg$ был приложен *статически*, определяется прогибом горизонтального стержня посередине пролета и равен:

$$\Delta_{\text{верт}}^{\text{ст}} = \frac{Q\ell^3}{48EI_x}. \quad (1)$$

③ Статическое перемещение массы в горизонтальном направлении при таком же *статическом нагружении* может быть определено методом перемножения эпюр:



$$\begin{aligned} \Delta_{\text{гориз}}^{\text{ст}} &= \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} Qa \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + 2 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{Qa}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left(\frac{Qa^3}{3} + \frac{Qa^2\ell}{12} \right) = \frac{Qa^2(a + \ell)}{12EI_x}. \end{aligned} \quad (2)$$

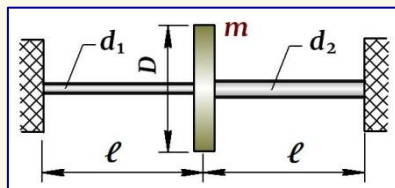
④ Приравниваем значения (1) и (2) и приводим равенство к виду кубического уравнения –

$$\frac{Q\ell^3}{48EI_x} = \frac{Qa^2(a + \ell)}{12EI_x} \rightarrow 16a^3 + 4a^2\ell - \ell^3 = 0,$$

решение которого дает три корня, из которых два являются мнимыми. Принимаем действительный корень и получаем: $a = 0,33\ell$.

Задача 23

Определить частоту и период собственных крутильных колебаний диска массой $m = 80 \text{ кг}$ и $D = 60 \text{ см}$, укрепленного на двух валах круглого сечения диаметрами $d_1 = 6 \text{ см}$; $d_2 = 8 \text{ см}$ и



длиной $\ell = 1 \text{ м}$. Принять: $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$. Массой валов пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

① Вычисляем момент инерции массы диска:

$$I_0 = \frac{mR^2}{2} = \frac{mD^2}{8} = \frac{80 \cdot 06^2}{8} = 3,6 \text{ кгМ}^2 = 3600 \text{ Нммсек}^2, \quad (1)$$

учитывая, что $1 \text{ кгМ}^2 = 1 \text{ Н} / (\text{м} / \text{сек}^2) \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ Нммсек}^2 = 10^3 \text{ Нммсек}^2$.

② Определяем жесткость валов:

$$C = \frac{GI_p}{\ell} = \frac{G\pi d^4}{32\ell} \rightarrow [C_1] = \frac{G\pi d_1^4}{32\ell}; [C_2] = \frac{G\pi d_2^4}{32\ell}. \quad (2)$$

③ Для систем с несколькими упругими связями, имеющими различную жесткость, соединение валов в заданной конструкции является **параллельным соединением**, при котором оба вала приложены к одной и той же нагрузке Q , деформация валов (угол закручивания в месте расположения диска) одинакова и равна общей деформации системы, а результирующая жесткость системы при **параллельном** соединении определяется как сумма жесткостей упругих элементов и на основании (2) равна:

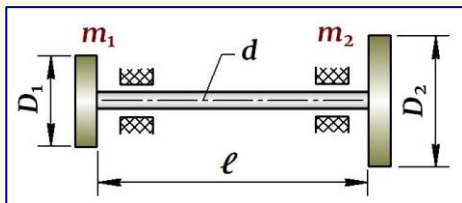
$$\begin{aligned} C = C_1 + C_2 &= \frac{G\pi d_1^4}{32\ell} + \frac{G\pi d_2^4}{32\ell} = \frac{G\pi}{32\ell} (d_1^4 + d_2^4) = \\ &= \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14}{32 \cdot 1 \cdot 10^3} (60^4 + 80^4) = 4232,72 \cdot 10^5 \text{ Нмм}. \end{aligned} \quad (3)$$

④ С учетом значений (1) и (3) определяем частоту и период собственных крутильных колебаний груза:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{C}{I_0}} = \sqrt{\frac{4232,72 \cdot 10^5}{3600}} = 343 \text{ сек}^{-1}; \\ T_0 &= \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{343} = 0,018 \text{ сек}. \end{aligned}$$

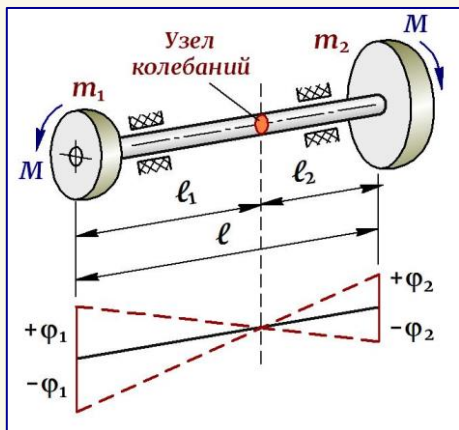
Задача 24

К концам вала круглого поперечного сечения диаметром $d=5$ см и длиной $\ell=1,7$ м прикреплены два диска массой и диаметрами равными $m_1=50$ кг; $m_2=80$ кг; $D_1=20$ см; $D_2=30$ см. Определить частоту собственных угловых колебаний системы. Принять для вала: $G=8 \times 10^4$ МПа. Массой вала пренебречь.



РЕШЕНИЕ:

① Крутильная система, представленная на схеме, имеет две массы, сосредоточенные на концах, и является **двухмассовой системой**. Если к массам m_1 и m_2 приложить крутящие моменты противоположных



знаков, а затем мгновенно их снять, то при упругом колебании системы некоторое сечение вала будет оставаться неподвижным, т. е. угол закручивания этого сечения (угловая амплитуда) будет равен нулю. Это сечение называется **узлом колебаний** и каждый из дисков относительно этого узла будет иметь одну степень свободы. Поэтому свободные колебания такой системы можно представить как колебания двух одномассовых систем с одной степенью свободы,

которые происходит в разные стороны относительно неподвижного **узлового сечения вала** с одинаковыми частотами —

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_{1,2}}{I_{0(1,2)}}} = \sqrt{\frac{GI_\rho}{\ell_{1,2} I_{0(1,2)}}}. \quad (1)$$

Учитывая равенство частот, можно определить на валу положение **узла колебаний**:

$$\sqrt{\frac{GI_\rho}{\ell_1 I_{0(1)}}} = \sqrt{\frac{GI_\rho}{\ell_2 I_{0(2)}}} \rightarrow \boxed{\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{I_{0(2)}}{I_{0(1)}}}, \text{ но так как}$$

$$\boxed{\ell_1 + \ell_2 = \ell} \rightarrow \boxed{\ell_1} = \frac{I_{0(2)}\ell}{I_{0(1)} + I_{0(2)}}; \quad \boxed{\ell_2} = \frac{I_{0(1)}\ell}{I_{0(1)} + I_{0(2)}}. \quad (2)$$

Подставляя значения (2) под знак корня в выражения (1) для ω_0 , частоту собственных крутильных колебаний можно определить как:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{GI_{\rho}}{\ell} \cdot \frac{I_{0(1)} + I_{0(2)}}{I_{0(1)}I_{0(2)}}}}. \quad (3)$$

② Вычисляем значения величин, входящих в расчетную формулу (3), и определяем ω_0 :

$$\boxed{Q = mg} \rightarrow Q_1 = m_1 g = 50 \cdot 9,8 = 490 \text{ Н}; \quad Q_2 = m_2 g = 80 \cdot 9,8 = 784 \text{ Н}.$$

$$\boxed{I_0 = \frac{mR^2}{2} = \frac{QD^2}{8g}} \rightarrow \begin{cases} I_{0(1)} = \frac{Q_1 D_1^2}{8g} = \frac{490 \cdot 200^2}{8 \cdot 9800} = 250 \text{ Нммсек}^2; \\ I_{0(2)} = \frac{Q_2 D_2^2}{8g} = \frac{784 \cdot 300^2}{8 \cdot 9800} = 900 \text{ Нммсек}^2. \end{cases}$$

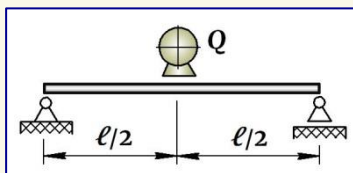
$$\boxed{I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,33 \text{ см}^4 \rightarrow$$

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{GI_{\rho}}{\ell} \cdot \frac{I_{0(1)} + I_{0(2)}}{I_{0(1)}I_{0(2)}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^4 \cdot 61,33 \cdot 10^4}{1700} \cdot \frac{250 + 900}{250 \cdot 900}} = 384 \text{ сек}^{-1}.$$

2. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы. Расчеты на резонанс

Задача 25

Посередине пролета двутавровой балки №12 длиной $\ell = 1,5 \text{ м}$ установлен двигатель весом $Q = 1,8 \text{ кН}$, делающий $n = 2230 \text{ об/мин}$.



Вследствие неуравновешенности вращающихся деталей в двигателе возникает центробежная сила $H_0 = 4 \text{ кН}$. Сделать проверку на резонанс. В случае резонанса найти выход из резонансного состояния

путем изменения жесткости балки. Определить в балке максимальные динамические напряжения $\sigma_{\partial}^{\max}$, максимальный динамический прогиб $\Delta_{\partial}^{\max}$ и амплитуду B вынужденных колебаний. Затуханием и массой балки пренебречь. Принять для двутавра №12: $I_x = 350 \text{ см}^4$; $W_x = 58,4 \text{ см}^3$; $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Выполняем проверку на РЕЗОНАНС:

а) Определяем частоту вынужденных колебаний —

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 2230}{30} = 233,4 \text{ сек}^{-1}. \quad (1)$$

б) Определяем статический прогиб балки от веса двигателя —

$$\Delta_{cm}^Q = \frac{Q \ell^3}{48 E I_x} = \frac{1,8 \cdot 10^3 (1,5 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 350 \cdot 10^4} = 0,18 \text{ мм}. \quad (2)$$

в) На основании (2) определяем частоту собственных колебаний —

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^Q}} = \sqrt{\frac{9800}{0,18}} = 233,3 \text{ сек}^{-1}. \quad (3)$$

Расчеты (1) и (3) показывают, что частоты совпадают, т.е. $\omega = \omega_0$, и значит, балка работает в состоянии РЕЗОНАНСА.

② Рассматриваем варианты выхода из РЕЗОНАНСА:

а) «Раздвигаем» частоты, т.е. задаем частоту собственных колебаний на 20% больше частоты возмущающей силы. И тогда на основании значения (1) получаем —

$$\omega_0 = 1,2 \omega = 1,2 \cdot 233,4 = 280 \text{ сек}^{-1}. \quad (4)$$

б) Определяем статический прогиб балки, соответствующий заданной частоте собственных колебаний (4) —

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^Q}}, \text{ откуда } \Delta_{cm}^Q = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{9800}{280^2} = 0,125 \text{ мм}. \quad (5)$$

в) На основании формулы (2) для статического прогиба —

$$\Delta_{cm}^Q = Q\ell^3 / 48EI_x$$

и его нового значения (5) рассматриваем два варианта решения проблемы устранения РЕЗОНАНСА:

Вариант 1

Сохраняем двутавр №12, но изменяем длину балки —

$$\boxed{\ell_1} = \sqrt[3]{\frac{48EI_x \cdot \Delta_{cm}^Q}{Q}} = \sqrt[3]{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 350 \cdot 10^4 \cdot 0,125}{1,8 \cdot 10^3}} = 1,33 \text{ м.}$$

Вариант 2

Сохраняем длину балки, но подбираем другой двутавр —

$$\boxed{I_x} = \frac{Q\ell^3}{48E\Delta_{cm}^Q} = \frac{1,8 \cdot 10^3 (1,5 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,125} = 506,3 \text{ см}^4,$$

что согласно таблицам сортамента соответствует профилю двутавра №14 ($I_x = 572 \text{ см}^4$; $W_x = 81,7 \text{ см}^3$).

Принимаем **Вариант 1**. Балка по этому варианту является более рациональной, т.к. имеет примерно на 30% меньший вес.

③ Выполняем расчет для двутавра №12 длиной $\ell_1 = 1,33 \text{ м}$.

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Максимальные статические напряжения $\sigma_{cm}^{\max}$ в балке от веса двигателя равны:

$$\boxed{\sigma_{cm}^{\max}} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Q\ell_1}{4W_x} = \frac{1,8 \cdot 10^3 \cdot 1,33 \cdot 10^3}{4 \cdot 58,4 \cdot 10^3} = 10,3 \text{ МПа.} \quad (6)$$

б) Максимальный статический прогиб балки от веса двигателя рассчитан выше и согласно (5) равен: $\boxed{\Delta_{cm}^Q = 0,125 \text{ мм}}$.

в) Максимальный статический прогиб от центробежной силы H_0 , как если бы она была приложена статически, равен:

$$\boxed{\Delta_{cm}^{H_0}} = \frac{H_0\ell_1^3}{48EI_x} = \frac{4 \cdot 10^3 (1,33 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 350 \cdot 10^4} = 0,28 \text{ мм.} \quad (7)$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Для заданного соотношения частот на основании (1) и (4) определяем коэффициент нарастания колебаний β :

$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = \frac{1}{1 - 233,4^2 / 280^2} = 3,3. \quad (8)$$

б) На основании значений (5), (7) и (8) вычисляем динамический коэффициент k_∂ :

$$k_\partial = 1 + \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}^Q} \beta = 1 + \frac{0,28}{0,125} \cdot 3,3 = 8,4. \quad (9)$$

в) На основании (5), (6) и (9) определяем максимальные динамические напряжения и динамический прогиб балки:

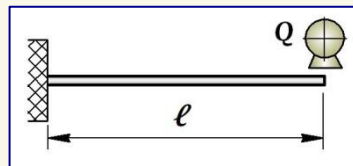
$$\begin{aligned} \sigma_\partial^{\max} &= k_\partial \sigma_{cm}^{\max} = 8,4 \cdot 10,3 = 86,5 \text{ МПа}; \\ \Delta_\partial^{\max} &= k_\partial \Delta_{cm}^{\max} = 8,4 \cdot 0,125 = 1,1 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (10)$$

г) На основании значений (7) и (8) определяем амплитуду вынужденных колебаний B :

$$B = \beta \Delta_{cm}^{H_0} = 3,3 \cdot 0,28 = 0,9 \text{ мм}. \quad (11)$$

Задача 26

На конце консольной балки длиной $\ell = 1 \text{ м}$ укреплен двигатель весом $Q = 9 \text{ кН}$, делающий $n = 800 \text{ об/мин}$. При работе двигателя из-за неуравновешенности вращающихся деталей возникает центробежная сила, равная $H_0 = 10^{-6} n^2 \text{ (кН)}$. Определить $\sigma_\partial^{\max}$ в балке. Установить критическое число оборотов двигателя $n_{\text{кр}}$, при котором возникнет РЕЗОНАНС, и определить при резонансе $\sigma_\partial^{\max}$ в балке и амплитуду B вынужденных колебаний. Коэффициент затухания равен $n_{\text{зат}} = 5 \text{ сек}^{-1}$. Принять для



балки: $I_x = 1204 \text{ см}^4$; $W_x = 119,2 \text{ см}^3$; $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$. Массой балки пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем в балке динамические напряжения $\sigma_{\partial}^{\max}$.

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Максимальные статические напряжения $\sigma_{cm}^{\max}$ в балке от веса двигателя для данной расчетной схемы равны:

$$\sigma_{cm}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Q\ell}{W_x} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{119,2 \cdot 10^3} = 75,5 \text{ МПа}. \quad (1)$$

б) Для заданной скорости вращения двигателя определяем центробежную силу H_0 :

$$H_0 = 10^{-6} n^2 = 10^{-6} \cdot 800^2 = 0,64 \text{ кН}. \quad (2)$$

в) Определяем статический прогиб балки от веса двигателя Q и центробежной силы H_0 (2), как если бы центробежная сила прикладывалась статически:

$$\Delta_{cm}^Q = \frac{Q\ell^3}{3EI_x} = \frac{9 \cdot 10^3 (1 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1204 \cdot 10^4} = 1,25 \text{ мм}; \quad (3)$$

$$\Delta_{cm}^{H_0} = \frac{H_0 \ell^3}{3EI_x} = \frac{0,64 \cdot 10^3 (1 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1204 \cdot 10^4} = 0,09 \text{ мм}. \quad (4)$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) На основании заданных величин и рассчитанного значения (3) определяем частоту вынужденных и собственных колебаний:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 800}{30} = 83,7 \text{ сек}^{-1}; \quad (5)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^Q}} = \sqrt{\frac{9800}{1,25}} = 88,7 \text{ сек}^{-1}. \quad (6)$$

б) На основании значений (5) и (6) определяем коэффициент нарастания колебаний β с учетом затухания (7):

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4n_{\text{зат}}^2 \omega^2}{\omega_0^4}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{83,7^2}{88,7^2}\right)^2 + \frac{4 \cdot 5^2 \cdot 83,7^2}{88,7^4}}} = 6,54.$$

в) Используя значения (3), (4) и (7), вычисляем динамический коэффициент k_{∂} :

$$k_{\partial} = 1 + \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}^Q} \beta = 1 + \frac{0,09}{1,25} \cdot 6,54 = 1,47. \quad (8)$$

г) На основании значений (1) и (8) определяем максимальные динамические напряжения в балке:

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} = 1,47 \cdot 75,5 = 111 \text{ МПа}. \quad (9)$$

② Определяем критическую скорость вращения двигателя $n_{\text{кр}}$, при которой наступит РЕЗОНАНС:

★ ω_0 – частота собственных колебаний, равная значению (6);

★ $\omega = \frac{\pi n_{\text{кр}}}{30}$ – частота вынужденных колебаний при РЕЗОНАНСЕ.

Тогда из условия РЕЗОНАНСА $\omega = \omega_0$ получаем:

$$\omega = \frac{\pi n_{\text{кр}}}{30}, \text{ откуда } n_{\text{кр}} = \frac{30 \omega_0}{\pi} = \frac{30 \cdot 88,7}{3,14} = 850 \text{ об/мин}. \quad (10)$$

③ Определяем при РЕЗОНАНСЕ максимальные динамические напряжения $\sigma_{\partial}^{\max}$ и амплитуду вынужденных колебаний B .

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Для критической скорости вращения двигателя на основании значения (10) определяем центробежную силу H_0 :

$$H_0 = 10^{-6} n_{\text{кр}}^2 = 10^{-6} \cdot 850^2 = 0,72 \text{ кН}. \quad (11)$$

б) Статический прогиб балки от веса двигателя рассчитан выше и согласно значению (3) равен: $\Delta_{cm}^Q = 1,25 \text{ мм}$.

в) Определяем статический прогиб балки от центробежной силы H_0 (11), как если бы она была приложена статически:

$$\Delta_{cm}^{H_0} = \frac{H_0 \ell_1^3}{3EI_x} = \frac{0,72 \cdot 10^3 (1 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1204 \cdot 10^4} = 0,11 \text{ мм.} \quad (12)$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Коэффициент нарастания колебаний в условиях РЕЗОНАНСА согласно формуле (7), принимая здесь $\boxed{\omega = \omega_0}$, равен:

$$\beta = \frac{\omega_0}{2n_{\text{зат}}} = \frac{88,7}{2 \cdot 5} = 8,87. \quad (13)$$

б) На основании (3), (12) и (13), вычисляем динамический коэффициент k_d :

$$k_d = 1 + \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}^Q} \beta = 1 + \frac{0,11}{1,25} \cdot 8,87 = 1,78. \quad (14)$$

в) На основании значений (1) и (14) определяем максимальные динамические напряжения в балке:

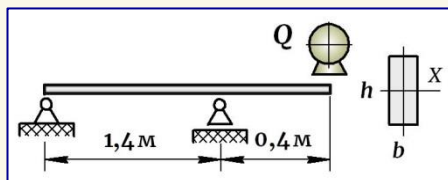
$$\sigma_d^{\max} = k_d \sigma_{cm}^{\max} = 1,78 \cdot 75,5 = 134,4 \text{ МПа.} \quad (15)$$

г) На основании значений (12) и (13) определяем амплитуду вынужденных колебаний B :

$$B = \beta \Delta_{cm}^{H_0} = 8,87 \cdot 0,11 = 0,97 \text{ мм} \approx 1 \text{ мм.} \quad (16)$$

Задача 27

На деревянной балке прямоугольного сечения с отношением сторон $h = 1,5b$ укреплен двигатель весом $Q = 0,8 \text{ кН}$, делающий $n = 1400 \text{ об/мин}$. Наибольшее значение возмущающей силы, возникающей вследствие неуравновешенности вращающихся деталей, равно $H_0 = 0,2 \text{ кН}$. Подобрать для балки размеры сечения таким образом, чтобы частота собственных колеба-



ний ω_0 была больше частоты возмущающей силы ω на 30%. Определить в балке $\sigma_{\partial}^{\max}$. Массой балки и затуханием пренебречь. Принять для балки: $E = 1 \times 10^4$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Подбираем размер сечения балки:

а) Определяем частоту вынужденных колебаний —

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 1400}{30} = 146,5 \text{ сек}^{-1}. \quad (1)$$

б) Исходя из заданных условий и на основании значения (1) определяем частоту собственных колебаний —

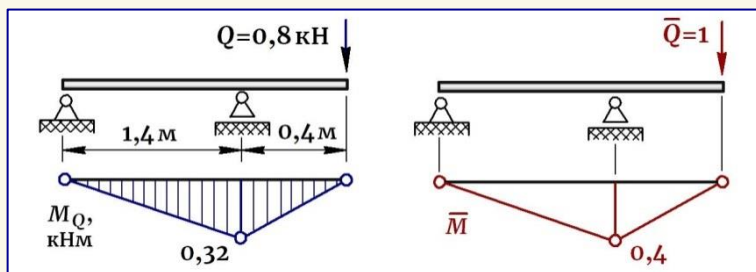
$$\omega_0 = 1,3 \omega = 1,3 \cdot 146,5 = 190,5 \text{ сек}^{-1}. \quad (2)$$

в) Согласно формуле для частоты ω_0 определяем статический прогиб балки от веса двигателя —

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^Q}}, \text{ откуда } \Delta_{cm}^Q = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{9800}{190,5^2} = 0,27 \text{ мм}. \quad (3)$$

г) Но с другой стороны, прогиб балки от веса двигателя может быть вычислен методом перемножения эпюр:

$$\begin{aligned} \Delta_{cm}^Q &= \frac{1}{EI_X} (M_Q \bar{M}) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 0,32 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 0,32 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 \right) = \\ &= \frac{0,0768 \cdot 10^{12}}{1 \cdot 10^4 \cdot I_X} = \left\| I_X = \frac{bh^3}{12} = \frac{b(1,5b)^3}{12} = 0,28b^4 \right\| = \frac{0,0768 \cdot 10^{12}}{1 \cdot 10^4 \cdot 0,28b^4}. \quad (4) \end{aligned}$$



д) Приравниваем значения (3) и (4) и определяем "b" и "h" —

$$\frac{0,0768 \cdot 10^{12}}{1 \cdot 10^4 \cdot 0,28 b^4} = 0,27 \rightarrow \begin{cases} \boxed{b} = 4 \sqrt{\frac{0,0768 \cdot 10^{12}}{1 \cdot 10^4 \cdot 0,28 \cdot 0,27}} = 10 \text{ см;} \\ \boxed{h} = 1,5 b = 15 \text{ см.} \end{cases}$$

Соответствующие геометрические характеристики сечения, необходимые для дальнейших расчетов, равны:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 15^2}{6} = 375 \text{ см}^3; I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 15^3}{12} = 2812,5 \text{ см}^4. \quad (5)$$

② Определяем максимальные динамические напряжения $\sigma_{\partial}^{\max}$.

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

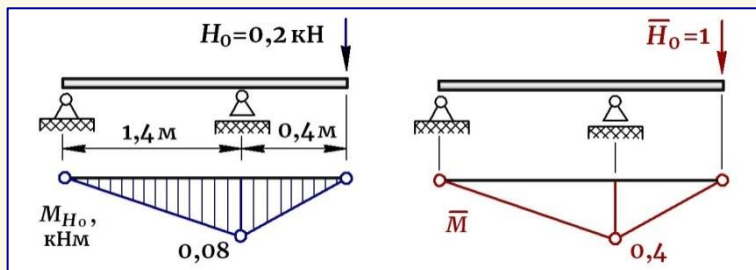
а) Максимальные статические напряжения с учетом W_x (5) равны:

$$\boxed{\sigma_{cm}^{\max}} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{0,32 \cdot 10^6}{375 \cdot 10^3} = 0,85 \text{ МПа.} \quad (6)$$

б) Статический прогиб от веса двигателя, вычисленный выше, согласно значению (3), равен: $\boxed{\Delta_{cm}^Q = 0,27 \text{ мм}}$.

в) Определяем статический прогиб от центробежной силы H_0 . Тогда согласно схеме (рис. 1, б) получаем:

$$\begin{aligned} \boxed{\Delta_{cm}^{H_0}} &= \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 0,08 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 0,08 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 \right) = \\ &= \frac{0,0192 \cdot 10^{12}}{1 \cdot 10^4 \cdot 2812,5 \cdot 10^4} = 0,068 \text{ мм.} \end{aligned} \quad (7)$$



II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Для заданного соотношения частот согласно (1) и (2) определяем коэффициент нарастания колебаний β :

$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = \frac{1}{1 - 146,5^2 / 190,5^2} = 2,45. \quad (8)$$

б) С учетом (3), (7) и (8) динамический коэффициент равен:

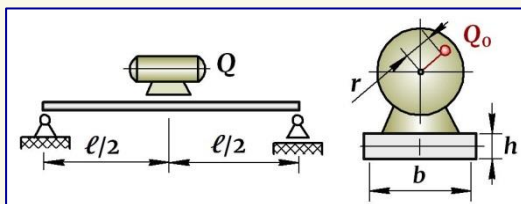
$$k_\partial = 1 + \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}^Q} \beta = 1 + \frac{0,068}{0,27} \cdot 2,45 = 1,62. \quad (9)$$

в) На основании значений (6) и (9) определяем максимальные динамические напряжения в балке:

$$\sigma_\partial^{\max} = k_\partial \sigma_{cm}^{\max} = 1,62 \cdot 0,85 = 1,4 \text{ МПа}. \quad (10)$$

Задача 28

На стальной балке прямоугольного сечения $b \times h = 6 \times 0,8$ см и длиной $\ell = 1,4$ м установлен двигатель весом $Q = 100$ Н. На оси двигателя укреплен стержень длиной $r = 8$ см, несущий на конце груз $Q_0 = 4$ Н (см. рис.). Определить, при каком числе оборотов наступит резонанс. Определить в балке при РЕЗОНАНСЕ $\sigma_\partial^{\max}$, $\Delta_\partial^{\max}$ и амплитуду вынужденных колебаний B . Принять коэффициент затухания колебаний равным $n_{\text{зат}} = 3 \text{ сек}^{-1}$, а также для балки: $E = 2 \times 10^5$ МПа. Задачу решить с учетом собственного веса балки.



РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Исходные данные для решения задачи:

$$Q_{\text{бал}} = \gamma A \ell = 7,8 \cdot 10^{-5} (6 \times 0,8) \cdot 10^2 \cdot 1,4 \cdot 10^3 = 52,4 \text{ Н} - \text{вес балки};$$

$$q = \frac{Q_{\text{бал}}}{\ell} = \frac{52,4}{1,4} = 37,4 \text{ Н/м} - \text{вес погонного метра балки};$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 0,8^3}{12} = 0,256 \text{ см}^4; \quad W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 0,8^2}{6} = 0,64 \text{ см}^3.$$

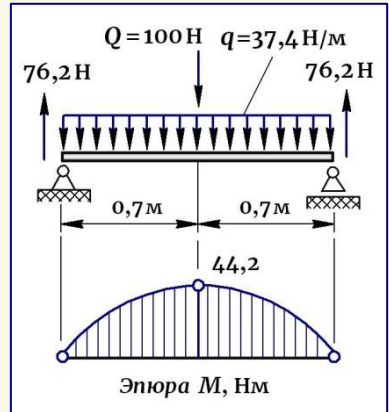
б) С учетом собственного веса балки создаем расчетную схему и определяем максимальные статические напряжения:

$$\sigma_{\text{см}}^{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{44,2 \cdot 10^3}{0,64 \cdot 10^3} = 69 \text{ МПа.} \quad (1)$$

в) Определяем наибольший статический прогиб в балке, возникающий от веса двигателя и собственного веса:

$$\Delta_{\text{см}}^{\text{max}} = \frac{Q\ell^3}{48EI_x} + \frac{5}{384} \cdot \frac{q\ell^4}{EI_x} =$$

$$= \frac{100 (1,4 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,256 \cdot 10^4} + \frac{5}{384} \cdot \frac{37,4 \cdot 10^{-3} (1,4 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,256 \cdot 10^4} = 14,8 \text{ мм.} \quad (2)$$



г) Вычисляем приведенную нагрузку $Q_{\text{пр}}$ и статический прогиб $\Delta_{\text{см}}^{\text{пр}}$ с учетом этой нагрузки:

$$Q_{\text{пр}} = \frac{17}{35} Q_{\text{бал}} = \frac{17}{35} \cdot 52,4 = 25,45 \text{ Н;} \quad (3)$$

$$\Delta_{\text{см}}^{\text{пр}} = \frac{(Q + Q_{\text{пр}})\ell^3}{48EI_x} = \frac{(100 + 25,45)(1,4 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,256 \cdot 10^4} = 14 \text{ мм.} \quad (4)$$

Примечание.

Если по условию задачи необходимо учитывать массу (вес) упругого тела, то мы получаем систему с бесчисленным числом степеней свободы. Это представляется достаточно сложным при решении задачи. В этом случае используют приближенный метод – МЕТОД ПРИВЕДЕНИЯ МАСС, в соответствии с которым система, имеющая "n" степеней свободы, приводится к подобной себе по очертанию и упругим свойствам системе, но с одной степенью свободы. В этой подобной системе вычисляется приведенная масса $m_{\text{пр}}$ или приведенный вес $Q_{\text{пр}}$, т.е. сосредоточенная нагрузка, взятая в определенной точке приведения, при введении которой система получает ту же частоту колебаний, что и действительная.

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) С учетом приведенной нагрузки на основании значения (4) определяем частоту собственных колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^{пр}}} = \sqrt{\frac{9800}{14}} = 26,5 \text{ сек}^{-1}. \quad (5)$$

б) Из условия РЕЗОНАНСА $\boxed{\omega_0 = \omega}$ с учетом значения (5) определяем критическую скорость вращения двигателя:

$$\boxed{\omega = \frac{\pi n_{кр}}{30} = \omega_0}, \text{ откуда } \boxed{n_{кр}} = \frac{30\omega_0}{\pi} = \frac{30 \cdot 26,5}{3,14} = 253 \text{ об/мин.} \quad (6)$$

в) Определяем амплитудное значение возмущающей силы H_0 :

$$H_0 = \boxed{F_{ин} = ma} = \frac{Q_0}{g} \omega^2 r,$$

где ω — угловая скорость вращения груза Q_0 , она же — частота возмущающей силы (частота вынужденных колебаний), равная в условиях резонанса на основании (5) $\boxed{\omega = \omega_0 = 26,5 \text{ сек}^{-1}}$.

В результате получаем:

$$H_0 = \frac{Q_0}{g} \omega^2 r = \frac{4}{9800} \cdot 26,5^2 \cdot 80 = 22,9 \text{ Н.} \quad (7)$$

г) Определяем статический прогиб от силы H_0 как если бы эта сила была приложена статически:

$$\boxed{\Delta_{cm}^{H_0}} = \frac{H_0 \ell^3}{48EI_x} = \frac{22,9 (1,4 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,256 \cdot 10^4} = 2,6 \text{ мм.} \quad (8)$$

д) Определяем коэффициент нарастания колебаний —

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 / \omega_0^2\right)^2 + 4 n_{зат}^2 \omega^2 / \omega_0^4}}},$$

который в условиях РЕЗОНАНСА имеет вид и с учетом (5) равен:

$$\boxed{\beta = \frac{\omega_0}{2 n_{зат}}} = \frac{26,5}{2 \cdot 3} = 4,42. \quad (9)$$

е) С учетом значений (2), (8) и (9) определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial} = 1 + \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}^Q} \beta = 1 + \frac{2,6}{14,8} \cdot 4,42 = 1,78. \quad (10)$$

ж) С учетом (1), (2) и (10) определяем в балке максимальные динамические напряжения и максимальный динамический прогиб:

$$\begin{aligned} \sigma_{\partial}^{\max} &= k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} = 1,78 \cdot 69 = 122,8 \text{ МПа}; \\ \Delta_{\partial}^{\max} &= k_{\partial} \Delta_{cm}^{\max} = 1,78 \cdot 14,8 = 26,3 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (11)$$

з) На основании значений (8) и (9) определяем амплитуду вынужденных колебаний B :

$$B = \beta \Delta_{cm}^{H_0} = 4,42 \cdot 2,6 = 11,5 \text{ мм}. \quad (12)$$

Задача 29

Решить предыдущую задачу со всеми заданными условиями в предположении о том, что двигатель установлен на четырех симметрично расположенных пружинах одинаковой жесткости, имеющих параметры: $D = 9 \text{ см}$, $d = 0,6 \text{ см}$, $n = 6$ витков, $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$. Определить критическое число оборотов двигателя, при котором наступит резонанс. Определить максимальные динамические напряжения и максимальную динамическую деформацию в пружинах. Принять коэффициент затухания $n_{\text{зат}} = 4 \text{ сек}^{-1}$. Весом пружин пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

При симметричном расположении пружин одинаковой жесткости на каждую из них приходится нагрузка $Q/4$. Тогда статические напряжения τ_{cm} в пружинах и статическая деформация λ_{cm} равны:

$$\tau_{cm} = \frac{8(Q/4)D}{\pi d^3} = \frac{8(100/4)90}{3,14 \cdot 6^3} = 26,5 \text{ МПа}; \quad (1)$$

$$\lambda_{cm} = \Delta_{cm}^Q = \frac{8(Q/4)D^3n}{Gd^4} = \frac{8(100/4)90^3 \cdot 6}{8 \cdot 10^4 \cdot 6^4} = 8,4 \text{ мм.} \quad (2)$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Частота собственных колебаний на основании (2) равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^Q}} = \sqrt{\frac{9800}{8,4}} = 34,2 \text{ сек}^{-1}. \quad (3)$$

б) Из условия РЕЗОНАНСА $\omega_0 = \omega$ с учетом значения (3) определяем критическую скорость вращения двигателя:

$$\omega = \frac{\pi n_{кр}}{30} = \omega_0 \rightarrow n_{кр} = \frac{30\omega_0}{\pi} = \frac{30 \cdot 34,2}{3,14} = 327 \text{ об/мин.} \quad (4)$$

в) Определяем наибольшее значение возмущающей силы H_0 :

$$H_0 = F_{ин} = ma = \frac{Q_0}{g} \omega^2 r,$$

где ω – угловая скорость вращения груза Q_0 , она же – частота возмущающей силы (частота вынужденных колебаний), равная в условиях РЕЗОНАНСА на основании (3) – $\omega = \omega_0 = 34,2 \text{ сек}^{-1}$.

В результате получаем:

$$H_0 = \frac{Q_0}{g} \omega^2 r = \frac{4}{9800} \cdot 34,2^2 \cdot 80 = 38,2 \text{ Н.} \quad (5)$$

г) Определяем статическое сжатие пружин от силы H_0 :

$$\Delta_{cm}^{H_0} = \frac{8(H_0/4)D^3n}{Gd^4} = \frac{8(38,2/4)90^3 \cdot 6}{8 \cdot 10^4 \cdot 6^4} = 3,2 \text{ мм.} \quad (6)$$

д) Вычисляем коэффициент нарастания колебаний, который в условиях РЕЗОНАНСА принимает вид и с учетом (3) равен:

$$\beta = \frac{\omega_0}{2n_{зат}} = \frac{34,2}{2 \cdot 4} = 4,3. \quad (7)$$

е) С учетом значений (2), (6) и (7) определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial} = 1 + \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}} \beta = 1 + \frac{3,2}{8,4} \cdot 4,3 = 2,64. \quad (8)$$

ж) С учетом значений (1), (2) и (8) определяем в пружинах динамические напряжения и динамическую деформацию:

$$\begin{aligned} \tau_{\partial} &= k_{\partial} \tau_{cm} = 2,64 \cdot 26,5 = 70 \text{ МПа}; \\ \lambda_{\partial} &= k_{\partial} \lambda_{cm} = 2,64 \cdot 8,4 = 22,2 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (9)$$

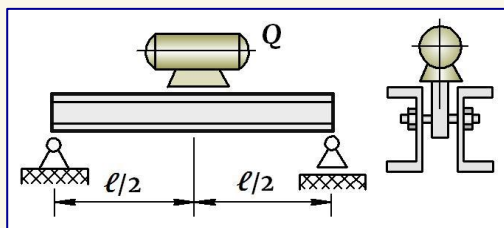
Задача 30

Электродвигатель весом $Q = 8 \text{ кН}$, вращающийся со скоростью $n = 1250 \text{ об/мин}$, установлен посередине пролета между двумя шарнирно опертыми балками швеллерового профиля (швеллер №18) длиной $\ell = 2,6 \text{ м}$. Из-за неуравновешенности вращающихся частей двигателя возникает центробежная сила, равная $H_0 = 2,2 \text{ кН}$. Определить $\sigma_{\partial}^{\max}$ и $\Delta_{\partial}^{\max}$ в балках, а также амплитуду вынужденных колебаний B . Задачу решить с учетом собственного веса балки. Затуханием колебаний пренебречь. Принять для швеллера №18 :

$$\begin{aligned} I_x &= 1090 \text{ см}^4; W_x = 121 \text{ см}^3; \\ A &= 20,7 \text{ см}^2; E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}; \\ \gamma &= 7,8 \times 10^{-5} \text{ Н/мм}^3. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ



а) Исходные данные для решения задачи:

$$Q_{\text{бал}} = \gamma A \ell = 7,8 \cdot 10^{-5} \cdot 20,7 \cdot 10^2 \cdot 2,6 \cdot 10^3 = 0,42 \text{ кН} - \text{вес балки};$$

$$q = \frac{Q_{\text{бал}}}{\ell} = \frac{0,42}{2,6} = 0,16 \text{ кН/м} - \text{вес погонного метра балки};$$

$$Q_{\text{пр}} = \frac{17}{35} Q_{\text{бал}} = \frac{17}{35} \cdot 0,42 = 0,204 \text{ кН} - \text{приведенная нагрузка}.$$

б) Расчет ведем для одного швеллера. С учетом собственного веса определяем максимальные статические напряжения:

$$\boxed{\sigma_{cm}^{max}} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{2,74 \cdot 10^6}{121 \cdot 10^3} = 22,6 \text{ МПа.} \quad (1)$$

в) Определяем наибольший статический прогиб балки от веса двигателя и собственного веса:

$$\begin{aligned} \boxed{\Delta_{cm}^{max}} &= \frac{(Q/2)\ell^3}{48EI_x} + \frac{5}{384} \cdot \frac{q\ell^4}{EI_x} = \\ &= \frac{4 \cdot 10^3 (2,6 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1090 \cdot 10^4} + \frac{5}{384} \cdot \frac{0,16 (2,6 \cdot 10^3)^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1090 \cdot 10^4} = 0,71 \text{ мм.} \end{aligned} \quad (2)$$

г) Вычисляем прогиб $\Delta_{cm}^{пр}$ с учетом приведенной нагрузки $Q_{пр}$:

$$\boxed{\Delta_{cm}^{пр}} = \frac{(Q/2 + Q_{пр})\ell^3}{48EI_x} = \frac{(4 + 0,204) \cdot 10^3 (2,6 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1090 \cdot 10^4} = 0,7 \text{ мм.} \quad (3)$$

д) Определяем статический прогиб от силы H_0 :

$$\boxed{\Delta_{cm}^{H_0}} = \frac{(H_0/2)\ell^3}{48EI_x} = \frac{(2,2/2) \cdot 10^3 (2,6 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1090 \cdot 10^4} = 0,18 \text{ мм.} \quad (4)$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

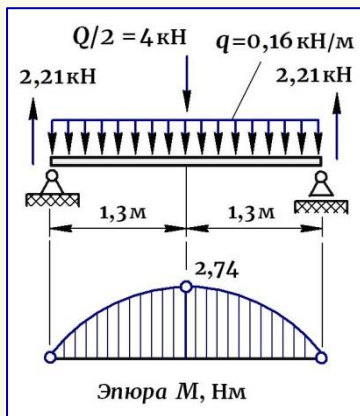
а) Определяем частоту вынужденных колебаний:

$$\boxed{\omega} = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 1250}{30} = 130,8 \text{ сек}^{-1}. \quad (5)$$

б) С учетом приведенной нагрузки на основании значения (3) определяем частоту собственных колебаний:

$$\boxed{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^{пр}}} = \sqrt{\frac{9800}{0,7}} = 118,3 \text{ сек}^{-1}. \quad (6)$$

в) Используя значения (5) и (6), вычисляем коэффициент нарастания колебаний, который без учета затухания равен:



$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = \frac{1}{1 - 130,8^2 / 118,3^2} = -4,5 = |4,5|. \quad (7)$$

Примечание.

В случае получения коэффициента нарастания колебаний со знаком «минус» в последующих расчетах его следует брать по модулю.

г) На основании (2), (4) и (7) определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial} = 1 + \left(\Delta_{cm}^{H_0} / \Delta_{cm}^Q \right) \beta = 1 + (0,18 / 0,71) 4,5 = 2,14. \quad (8)$$

д) С учетом значений (1), (2) и (8) определяем в балке максимальные динамические напряжения и максимальный динамический прогиб:

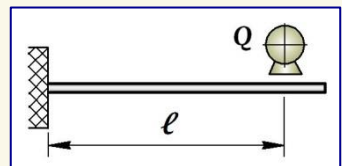
$$\begin{aligned} \sigma_{\partial}^{\max} &= k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} = 2,14 \cdot 22,6 = 48,4 \text{ МПа}; \\ \Delta_{\partial}^{\max} &= k_{\partial} \Delta_{cm}^{\max} = 2,14 \cdot 0,71 = 1,52 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (9)$$

е) На основании значений (4) и (7) определяем амплитуду вынужденных колебаний B :

$$B = \beta \Delta_{cm}^{H_0} = 4,5 \cdot 0,18 = 0,81 \text{ мм}. \quad (10)$$

Задача 31

Электродвигатель весом $Q = 1 \text{ кН}$, вращающийся со скоростью $n = 900 \text{ об/мин}$, установлен на консольной балке. Вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя возникает центробежная сила $H_0 = 0,2 \text{ кН}$. Определить, при установке двигателя на какой длине консоли ℓ возникнет резонанс. Определить, на какой длине консоли ℓ^* следует установить двигатель, чтобы частота собственных колебаний была больше частоты вынужденных колебаний на 30%. Вычислить в балке максимальные динамические напряжения $\sigma_{\partial}^{\max}$ и амплитуду вынужденных колебаний B . Весом балки и затуханием пренебречь. Принять: $I_x = 260 \text{ см}^4$; $W_x = 41 \text{ см}^3$; $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Определяем, при установке двигателя на какой длине консоли ℓ возникнет РЕЗОНАНС:

а) Вычисляем частоту вынужденных колебаний —

$$\boxed{\omega = \frac{\pi n}{30}} = \frac{3,14 \cdot 900}{30} = 94,2 \text{ сек}^{-1}. \quad (1)$$

б) Из условия РЕЗОНАНСА — $\boxed{\omega = \omega_0}$ по формуле для частоты собственных колебаний, принимая для нее значение (1), находим статический прогиб балки Δ_{cm}^Q , соответствующий этой частоте —

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^Q}}}, \text{ откуда } \boxed{\Delta_{cm}^Q} = \frac{g}{\omega_0^2} = \parallel \omega_0 = \omega \parallel = \frac{9800}{94,2^2} = 1,1 \text{ мм}. \quad (2)$$

в) Но учитывая, что $\boxed{\Delta_{cm}^Q = Q\ell^3/3EI_x}$, на основании значения (2) получаем —

$$\boxed{\ell} = \sqrt[3]{\frac{3EI_x \cdot \Delta_{cm}^Q}{Q}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 260 \cdot 10^4 \cdot 1,1}{1 \cdot 10^3}} = 1,2 \text{ м}, \quad (3)$$

т.е. при установке двигателя на длине $\ell = 1,2$ м возникает РЕЗОНАНС.

② Определяем, на какой длине консоли ℓ^* следует установить двигатель, чтобы частота собственных и частота вынужденных колебаний находились в заданном соотношении:

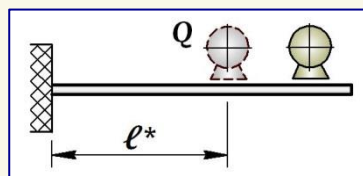
а) «Раздвигаем» частоты и на основании (1) вычисляем требуемую частоту собственных колебаний —

$$\omega_0 = 1,3 \omega = 1,3 \cdot 94,2 = 122,5 \text{ сек}^{-1}. \quad (4)$$

б) Определяем статический прогиб Δ_{cm}^Q , соответствующий частоте колебаний (4) —

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^Q}}}, \text{ откуда } \boxed{\Delta_{cm}^Q} = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{9800}{122,5^2} = 0,65 \text{ мм}. \quad (5)$$

в) Используя формулу для статического прогиба — $\Delta_{cm}^Q = Q\ell^3/3EI_x$, на основании (5) получаем —



$$\ell^* = \sqrt[3]{\frac{3EI_x \cdot \Delta_{cm}^Q}{Q}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 260 \cdot 10^4 \cdot 0,65}{1 \cdot 10^3}} = 1 \text{ м.} \quad (6)$$

③ Определяем в балке динамические напряжения и амплитуду вынужденных колебаний.

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Максимальные статические напряжения равны:

$$\sigma_{cm}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Q\ell^*}{W_x} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{41 \cdot 10^3} = 24,4 \text{ МПа.} \quad (7)$$

б) Статический прогиб от веса двигателя, установленного на длине ℓ^* , согласно значению (5) равен — $\Delta_{cm}^Q = 0,65 \text{ мм}$.

в) Определяем статический прогиб от силы H_0 как если бы эта сила была приложена статически:

$$\Delta_{cm}^{H_0} = \frac{H_0 \ell_1^3}{3EI_x} = \frac{0,2 \cdot 10^3 (1 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 260 \cdot 10^4} = 0,13 \text{ мм.} \quad (8)$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Используя значения (1) и (4), вычисляем коэффициент нарастания колебаний (без учета затухания):

$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_0^2} = \frac{1}{1 - 94,2^2/122,5^2} = 2,45. \quad (9)$$

б) По значениям (5), (8) и (9) определяем динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \left(\Delta_{cm}^{H_0} / \Delta_{cm}^Q \right) \beta = 1 + 0,13/0,65 \cdot 2,45 = 1,5. \quad (10)$$

в) На основании (7) и (10) определяем в балке максимальные динамические напряжения:

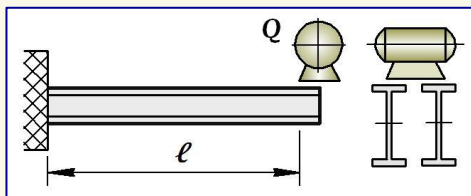
$$\boxed{\sigma_{\partial}^{\max}} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} = 1,5 \cdot 24,4 = 36,6 \text{ МПа.} \quad (11)$$

2) На основании значений (8) и (9) определяем амплитуду вынужденных колебаний B :

$$\boxed{B = \beta \Delta_{cm}^{H_0}} = 2,45 \cdot 0,13 = 0,3 \text{ мм.} \quad (12)$$

Задача 32

На консольной балке длиной $\ell = 1,5 \text{ м}$, составленной из двух двутавровых профилей №24а, установлен двигатель весом $Q = 30 \text{ кН}$, делающий $n = 600 \text{ об/мин}$. Вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя возникает центробежная сила инерции, равная $H_0 = 8 \text{ кН}$. Определить в балке максимальные динамические напряжения $\sigma_{\partial}^{\max}$. Принять для двутаврового профиля №24а: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$; $I_x = 4570 \text{ см}^4$; $W_x = 381 \text{ см}^3$. Весом балки и затуханием колебаний пренебречь.



РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Расчет выполняем для одного двутавра:

$$\boxed{\sigma_{cm}^{\max}} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{(Q/2)\ell}{W_x} = \frac{(30/2) \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{381 \cdot 10^3} = 59 \text{ МПа;} \quad (1)$$

$$\boxed{\Delta_{cm}^Q} = \frac{(Q/2)\ell^3}{3EI_x} = \frac{(30/2) \cdot 10^3 (1,5 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4570 \cdot 10^4} = 1,85 \text{ мм.} \quad (2)$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Определяем частоту вынужденных колебаний:

$$\boxed{\omega = \frac{\pi n}{30}} = \frac{3,14 \cdot 600}{30} = 62,8 \text{ сек}^{-1}. \quad (3)$$

б) С учетом (2) вычисляем частоту собственных колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^Q}} = \sqrt{\frac{9800}{1,85}} = 72,8 \text{ сек}^{-1}. \quad (4)$$

в) Определяем статический прогиб от силы H_0 :

$$\Delta_{cm}^{H_0} = \frac{(H_0/2)\ell^3}{3EI_x} = \frac{(8/2) \cdot 10^3 (1,5 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4570 \cdot 10^4} = 0,49 \text{ мм}. \quad (5)$$

г) Используя значения (3) и (4), вычисляем коэффициент нарастания колебаний (без учета затухания):

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{1 - \frac{62,8^2}{72,8^2}} = 3,9. \quad (6)$$

д) По значениям (2), (5) и (6) определяем динамический коэффициент:

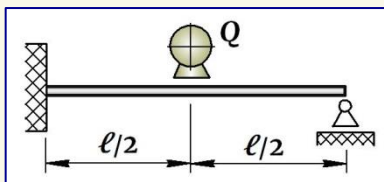
$$k_{\partial} = 1 + \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}^Q} \beta = 1 + \frac{0,49}{1,85} \cdot 3,9 = 2. \quad (7)$$

е) С учетом значений (1) и (7) определяем максимальные динамические напряжения в балке:

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} = 2 \cdot 59 = 118 \text{ МПа}. \quad (8)$$

Задача 33

На двутавровой балке длиной $\ell = 4,8 \text{ м}$ установлен двигатель весом $Q = 10 \text{ кН}$ с угловой скоростью вращения $\omega = 62,8 \text{ сек}^{-1}$ (частота вынужденных колебаний). Из-за неуравновешенности вращающихся частей двигателя при его работе возникает центробежная сила инерции $H_0 = 2 \text{ кН}$. Подобрать для балки номер двутавра при условии, что частота собственных колебаний должна быть равна $\omega_0 = 81 \text{ сек}^{-1}$, а максимальные динамические напряжения $\sigma_{\partial}^{\max}$ в



ные динамические напряжения $\sigma_{\partial}^{\max}$ в

балке не должны превышать $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Массой балки и затуханием пренебречь. Принять для балки: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Балка *статически неопределима*. Поэтому для определения необходимых статических параметров, используя МЕТОД СИЛ, раскрываем статическую неопределимость:

① Решаем задачу для нагрузки Q (рис. 1):

а) Убираем подвижную опору "В", в направлении отброшенной связи прикладываем неизвестную силу X_1 и задаем условие, что перемещение по направлению этой силы равно нулю. Получаем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1Q} = 0.$$

б) Определяем коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_X} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 4,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,8 \right) = \frac{36,864}{EI_X};$$

$$\Delta_{1Q} = \frac{1}{EI_X} (M_Q \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_X} \left[-\frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 24 \left(\frac{2}{3} \cdot 4,8 + \frac{1}{3} \cdot 2,4 \right) \right] = -\frac{115,2}{EI_X}.$$

в) Решаем каноническое уравнение:

$$\frac{36,864}{EI_X} X_1 - \frac{115,2}{EI_X} = 0, \text{ откуда } \boxed{X_1} = 3,125 \text{ кН}.$$

г) Строим окончательную грузовую эпюру изгибающих моментов и делаем проверку, согласно которой необходимо доказать, что прогиб на опоре "В" равен нулю. Принимая для этого направления идентичность единичных эпюр $\bar{M}_B$ и $\bar{M}_1$, получаем:

$$\boxed{y_B} = \frac{1}{EI_X} (M_Q \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_X} \left[\frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 7,5 \left(\frac{2}{3} \cdot 2,4 + \frac{1}{3} \cdot 4,8 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 9 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot 4,8 + \frac{1}{3} \cdot 2,4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 7,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 \right] = \frac{1}{EI_X} (28,8 - 43,2 + 14,4) = 0.$$

д) Определяем максимальные статические напряжения в балке и статический прогиб в точке приложения силы Q :

$$\boxed{\sigma_{cm}^{\max}} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{9 \cdot 10^6}{W_x} \text{ (МПа)}. \quad (1)$$

$$\boxed{\Delta_{cm}^Q} = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 - \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 7,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,4 \right) = 10,08 \cdot 10^{12} / EI_x. \quad (2)$$

② Решаем задачу для нагрузки H_0 (рис. 2):

а) Убираем подвижную опору "В", в направлении отброшенной связи прикладываем неизвестную силу X_1 и задаем условие, что перемещение в направлении этой силы равно нулю. Получаем каноническое уравнение метода сил:

$$\boxed{\delta_{11} X_1 + \Delta_{1H_0} = 0}.$$

б) Определяем коэффициенты канонического уравнения:

$$\boxed{\delta_{11}} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 4,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,8 \right) = \frac{36,864}{EI_x};$$

$$\boxed{\Delta_{1H_0}} = \frac{1}{EI_x} (M_{H_0} \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4,8 \left(\frac{2}{3} \cdot 4,8 + \frac{1}{3} \cdot 2,4 \right) \right] = -\frac{23,04}{EI_x}.$$

в) Решаем каноническое уравнение:

$$\frac{36,864}{EI_x} X_1 - \frac{23,04}{EI_x} = 0, \text{ откуда } \boxed{X_1} = 0,625 \text{ кН}.$$

г) Строим окончательную эпюру моментов и делаем проверку:

$$\boxed{y_B} = \frac{1}{EI_x} (M_{H_0} \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1,5 \left(\frac{2}{3} \cdot 2,4 + \frac{1}{3} \cdot 4,8 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1,8 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot 4,8 + \frac{1}{3} \cdot 2,4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 \right] = \frac{1}{EI_x} (5,76 - 8,64 + 2,88) = 0.$$

д) Определяем статический прогиб в точке приложения H_0 :

$$\boxed{\Delta_{cm}^{H_0}} = \frac{1}{EI_x} (M_{H_0} \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 - \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,4 \right) = 2,016 \cdot 10^{12} / EI_x. \quad (3)$$

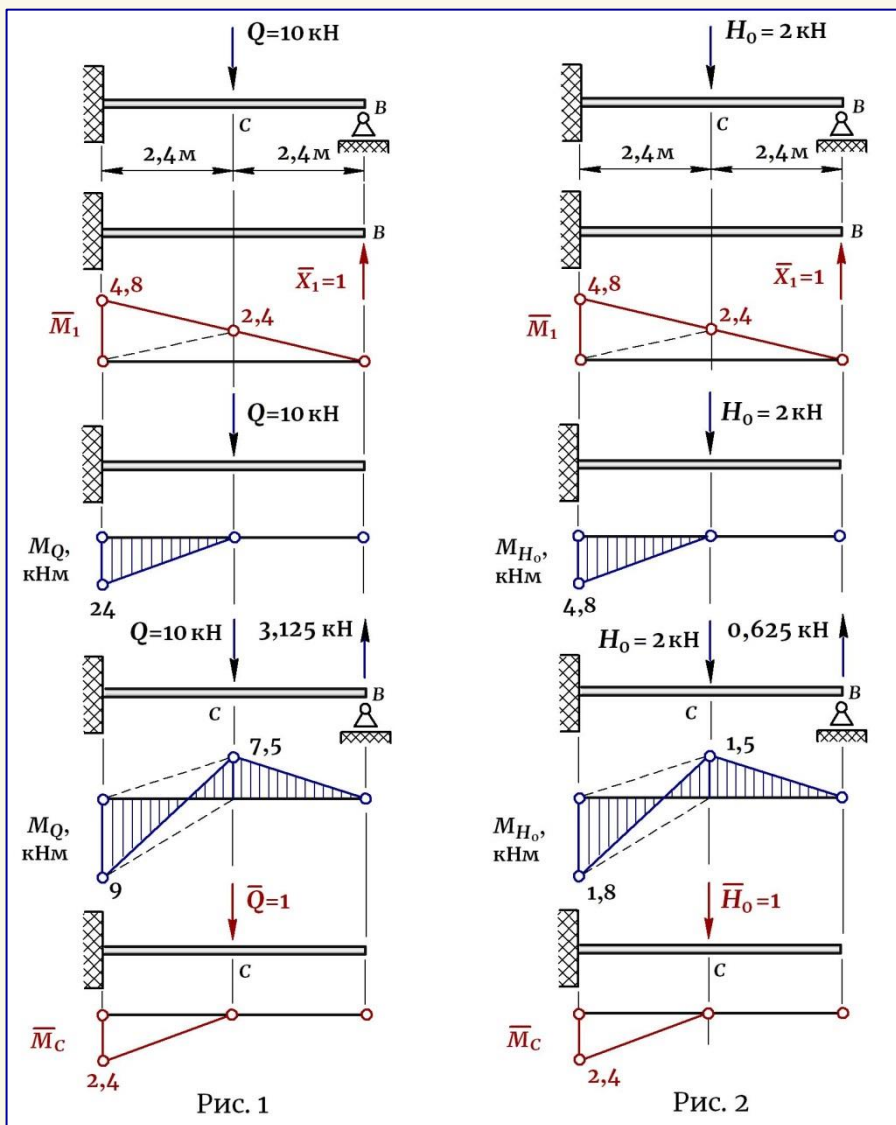


Рис. 1

Рис. 2

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Подбираем номер двутавра по заданной частоте собственных колебаний $\omega_0 = 81 \text{ сек}^{-1}$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^Q}}, \text{ откуда с учетом (2) } \boxed{\Delta_{cm}^Q} = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{10,08 \cdot 10^{12}}{EI_x}.$$

Отсюда определяем I_X и по таблицам сортамента подбираем двутавр:

$$\frac{9800}{81^2} = \frac{10,08 \cdot 10^{12}}{EI_X} \rightarrow \boxed{I_X} = \frac{10,08 \cdot 10^{12} \cdot 81^2}{9800 \cdot 2 \cdot 10^5} = 3374 \text{ см}^4,$$
 что соответствует профилю №24: $I_X = 3460 \text{ см}^4$, $W_X = 289 \text{ см}^3$.

б) На основании заданных частот определяем коэффициент нарастания колебаний (без учета затухания):

$$\boxed{\beta = \frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2}} = \frac{1}{1 - 62,8^2 / 81^2} = 2,5. \quad (4)$$

в) По вычисленным выше значениям (2), (3) и (4) определяем динамический коэффициент:

$$\boxed{k_\partial = 1 + \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}^Q} \beta} = 1 + \frac{(2,016 \cdot 10^{12}) / EI_X}{(10,08 \cdot 10^{12}) / EI_X} \beta = 1 + \frac{2,016}{10,08} \cdot 2,5 = 1,5. \quad (5)$$

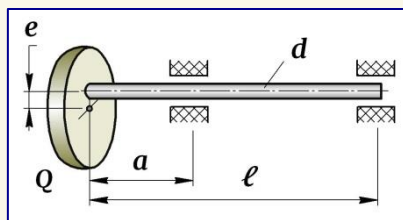
г) Для выбранного двутавра №24 на основании значений (1) и (5) определяем максимальные динамические напряжения:

$$\boxed{\sigma_\partial^{\max}} = k_\partial \sigma_{cm}^{\max} = k_\partial \frac{9 \cdot 10^6}{W_X} = 1,5 \frac{9 \cdot 10^6}{289 \cdot 10^3} = 46,7 \text{ МПа},$$

что удовлетворяет заданному условию — $\sigma_\partial^{\max} \leq [\sigma]$. Окончательно принимаем двутавр №24.

Задача 34

Шкив весом $Q = 0,25 \text{ кН}$ прикреплен к концу вала диаметром $d = 2 \text{ см}$ и длиной $\ell = 0,75 \text{ м}$ на выступающем от подшипника расстоянии $a = 0,15 \text{ м}$ и



вращается со скоростью $n = 300 \text{ об/мин}$. При этом, вследствие смещения центра шкива от оси вращения на $e = 6 \text{ мм}$, возникает центробежная сила инерции, приводящая к поперечным (изгибным) колебаниям вала. Определить максимальные динамические напряжения $\sigma_\partial^{\max}$ в вале. Массой вала и затуханием колебаний пренебречь.

Принять для вала: $E = 2 \times 10^5$ МПа.

Примечание.

Из практики эксплуатации машин и механизмов известно, что быстро-вращающиеся детали в силу того, что они никогда не бывают идеально сбалансированы, всегда подвержены действию возникающих инерционных сил дисбаланса, уводящих вращающуюся деталь (вал, например) от оси вращения. В результате возникают вынужденные колебания и при некоторой скорости вращения деталь, попадая в резонанс, становится динамически неустойчивой, т.е. теряет свою прямолинейную форму (изгибается).

РЕШЕНИЕ:

① Вычисляем геометрические характеристики сечения вала, необходимые для выполнения дальнейших расчетов:

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{64} = 0,785 \text{ см}^4; \quad (1)$$
$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 2^3}{32} = 0,785 \text{ см}^3.$$

② Определяем угловую скорость вращения шкива на валу (она же — частота возмущающей силы или частота вынужденных колебаний):

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ сек}^{-1}. \quad (2)$$

③ По значению (2) определяем величину центробежной силы инерции H_0 (возмущающую силу):

$$H_0 = \boxed{F_{\text{ин}} = ma} = \frac{Q}{g} \omega^2 e = \frac{0,25}{9800} \cdot 31,4^2 \cdot 6 = 0,15 \text{ кН}. \quad (3)$$

④ Определяем в вале динамические напряжения σ_0^{max} .

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Прикладываем вес шкива Q и силу инерции H_0 статически и определяем необходимые для расчета статические параметры:

а) Статические напряжения в вале от веса шкива —

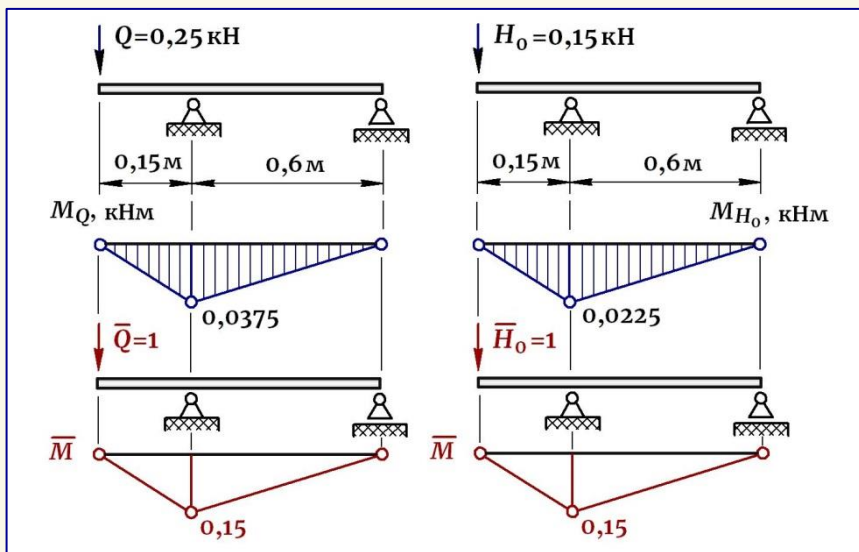
$$\boxed{\sigma_{\text{ст}}^{\text{max}}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{0,0375 \cdot 10^6}{0,785 \cdot 10^3} = 47,8 \text{ МПа}. \quad (4)$$

б) Статический прогиб от силы Q —

$$\Delta_{cm}^Q = \frac{1}{EI_X} (M_Q \bar{M}) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,15 \cdot 0,0375 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,15 + \frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 0,0375 \times \right. \\ \left. \times \frac{2}{3} \cdot 0,15 \right) = \frac{0,0014 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,785 \cdot 10^4} = 0,89 \text{ мм.} \quad (5)$$

в) Статический прогиб от силы H_0 —

$$\Delta_{cm}^{H_0} = \frac{1}{EI_X} (M_{H_0} \bar{M}) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,15 \cdot 0,0225 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,15 + \frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 0,0225 \times \right. \\ \left. \times \frac{2}{3} \cdot 0,15 \right) = \frac{0,00084 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,785 \cdot 10^4} = 0,54 \text{ мм.} \quad (6)$$



II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) Используя (5), определяем частоту собственных колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^Q}} = \sqrt{\frac{9800}{0,89}} = 105 \text{ сек}^{-1}. \quad (7)$$

б) На основании значений (2) и (7) определяем коэффициент нарастания колебаний (без учета затуханий):

$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = \frac{1}{1 - 31,4^2 / 105^2} = 1,1. \quad (8)$$

в) По значениям (5), (6) и (8) определяем динамический коэффициент:

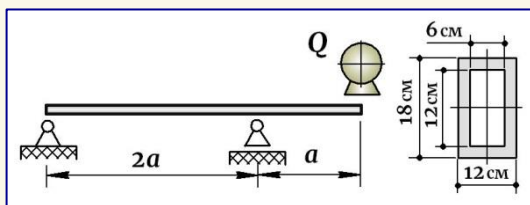
$$k_{\partial} = 1 + \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}^Q} \beta = 1 + \frac{0,54}{0,89} \cdot 1,1 = 1,67. \quad (9)$$

г) С учетом значений (4) и (9) определяем максимальные динамические напряжения в вале:

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} = 1,67 \cdot 47,8 = 79,8 \text{ МПа}. \quad (10)$$

Задача 35

В заданной стальной балке определить наибольшее значение возмущающей силы $H_t = H_0 \sin 102t$, если в режиме установившихся вынужденных колебаний, создаваемых двигателем весом $Q = 9 \text{ кН}$, размещенным на конце консоли, наибольшие напряжения в балке равны $\sigma_{\partial}^{\max} = 140 \text{ МПа}$. Принять для балки: $a = 1 \text{ м}$; $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$. Массой балки в расчетах пренебречь.



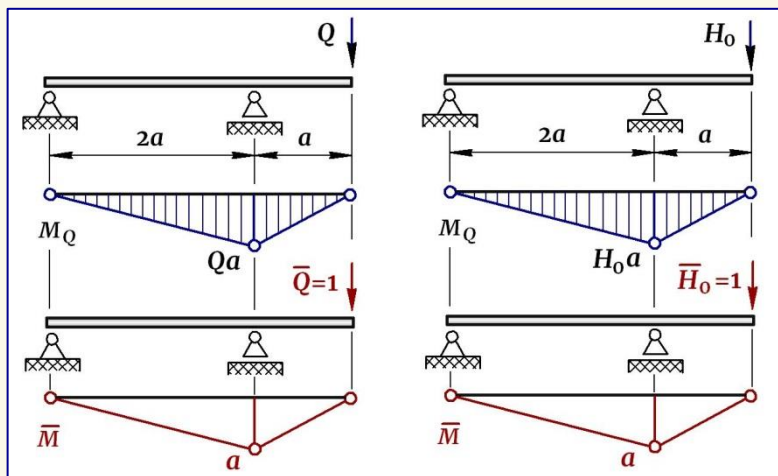
РЕШЕНИЕ:

Для заданной балки:

$$I_x = \frac{12 \cdot 18^3}{12} - \frac{6 \cdot 12^3}{12} = 4968 \text{ см}^4; \quad W_x = \frac{4968}{9} = 552 \text{ см}^3. \quad (1)$$

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Для заданного случая нагружения, прикладывая вес двигателя Q статически, определяем в балке максимальные статические напряжения $\sigma_{cm}^{\max}$ и статические прогибы от веса двигателя, а также прогиб от наибольшего значения возмущающей силы H_0 :



$$\sigma_{cm}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Qa}{W_x} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{552 \cdot 10^3} = 16,3 \text{ МПа}; \quad (2)$$

$$\Delta_{cm}^Q = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} Qa \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} Qa \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} a \right) = \frac{Qa^3}{EI_x}; \quad (3)$$

$$\Delta_{cm}^{H_0} = \frac{1}{EI_x} (M_{H_0} \bar{M}) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} H_0 a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} H_0 a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} a \right) = \frac{H_0 a^3}{EI_x}; \quad (4)$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

а) По значениям наибольших напряжений — статических (2) и динамических — определяем динамический коэффициент:

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} \rightarrow k_{\partial} = \frac{\sigma_{\partial}^{\max}}{\sigma_{cm}^{\max}} = \frac{140}{16,3} = 8,6, \quad (5)$$

который на основании (3) и (4) также может быть определен как —

$$k_{\partial} = 1 + \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}^Q} \beta = 1 + \frac{\Delta_{cm}^{H_0}}{\Delta_{cm}^Q} \beta = 1 + \frac{H_0 a^3 / EI_x}{Q a^3 / EI_x} \beta = \left[1 + \frac{H_0}{Q} \beta \right]. \quad (6)$$

б) С учетом значения (3) вычисляем частоту собственных колебаний двигателя на балке:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta Q_{cm}}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{Qa^3}{EI_x}}} = \sqrt{\frac{9800 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4968 \cdot 10^4}{9 \cdot 10^3 (1 \cdot 10^3)^3}} = 104 \text{ сек}^{-1}. \quad (7)$$

в) Согласно заданному по условию задачи закону изменения возмущающей силы — $H_t = H_0 \sin 102t$ частота вынужденных колебаний равна $\omega = 102 \text{ сек}^{-1}$. Тогда на основании этого значения и значения (7), учитывая, что двигатель работает в режиме установившихся вынужденных колебаний, определяем коэффициент нарастания колебаний по формуле:

$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = \frac{1}{1 - 102^2 / 104^2} = 26,3. \quad (8)$$

Примечание.

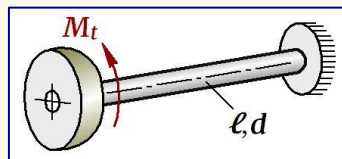
Под действием периодической силы тело совершает два вида колебаний - свободные затухающие с собственной частотой ω_0 и вынужденные - с частотой возмущающей силы ω . Затухающие колебания с течением времени прекращаются и остаются только вынужденные колебания, которые называют **установившимися** и при которых в механической системе устанавливается режим колебаний с частотой, равной частоте возмущающей силы.

г) Тогда на основании формулы (6) с учетом значений (5) и (8) определяем наибольшее значение возмущающей силы H_0 :

$$H_0 = \frac{Q(k_d - 1)}{\beta} = \frac{9(8,6 - 1)}{26,3} = 2,6 \text{ кН}.$$

Задача 36

Шкив, размещенный на свободном конце стального вала длиной $\ell = 1,2 \text{ м}$ и диаметром $d = 18 \text{ мм}$, имеющий момент инерции массы $I_0 = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, под действием крутящего момента, изменяющегося по закону $M_t = 78 \sin 11t$, создает вынужденные крутильные колебания системы. Определить наибольший



угол закручивания вала. Принять для вала: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Массой вала пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

① Вычисляем жесткость вала и частоту собственных крутильных колебаний шкива на валу:

$$C = \frac{GI_\rho}{\ell} = \frac{G(\pi d^4/32)}{\ell} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 18^4}{32 \cdot 1,2 \cdot 10^3} = 686,7 \cdot 10^3 \text{ Нмм}; \quad (1)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I_0}} = \sqrt{\frac{686,7 \cdot 10^3 \text{ (Нмм)}}{5 \cdot 10^3 \text{ (Нмм сек}^2\text{)}}} = 11,7 \text{ сек}^{-1}. \quad (2)$$

② Согласно закону изменения крутящего момента наибольшее значение возмущающего момента равно $M_0 = 78 \text{ Нм}$, а частота вынужденных колебаний составляет $\omega = 11 \text{ сек}^{-1}$. С учетом значений (1) и (2) вычисляем статический угол закручивания φ_{cm} вала от действия момента M_0 и коэффициент нарастания колебаний:

$$\varphi_{cm} = \frac{M_0}{C} = \frac{78 \cdot 10^3}{686,7 \cdot 10^3} = 0,11 \text{ рад}; \quad (3)$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = \frac{1}{1 - 11^2 / 11,7^2} = 8,6. \quad (4)$$

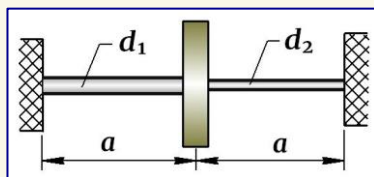
② Динамический угол закручивания φ_∂ (амплитуда вынужденных крутильных колебаний), учитывая, что в качестве динамического коэффициента k_∂ здесь выступает коэффициент нарастания колебаний, на основании значений (3) и (4) равен:

$$\varphi_\partial = k_\partial \varphi_{cm} = \beta \varphi_{cm} = 8,6 \cdot 0,11 = 0,98 \text{ рад} \approx 1 \text{ рад}.$$

Задача 37

К валу переменного сечения с заземленными концами прикреплен маховик, на который действует переменный крутящий момент $M_t = M_0 \sin \omega t$, где $M_0 = 300 \text{ Нм}$ и $\omega = 20 \text{ сек}^{-1}$. Определить максимальные касательные напряжения в левой и правой частях вала.

Принять для вала $d_1 = 15 \text{ мм}$; $d_2 = 12 \text{ мм}$;
 $a = 1,8 \text{ м}$; $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$ и для маховика
 $I_0 = 4,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Затуханием пренебречь.



РЕШЕНИЕ:

① Соединение валов в заданной конструкции является **параллельным соединением**, при котором оба вала приложены к одной и той же нагрузке (маховику), деформация валов одинакова и равна общей деформации системы. Определяем жесткость системы:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{GI_{\rho(1)}}{a} = \frac{G\pi d_1^4}{32a} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 15^4}{32 \cdot 1,8 \cdot 10^3} = 220781,3 \text{ Нмм} \\ C_2 &= \frac{GI_{\rho(2)}}{a} = \frac{G\pi d_2^4}{32a} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 12^4}{32 \cdot 1,8 \cdot 10^3} = 90432 \text{ Нмм} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

откуда для параллельного соединения —

$$C = C_1 + C_2 = 220781,3 + 90432 = 311213,3 \text{ Нмм}. \quad (2)$$

② На основании значения (2) определяем частоту собственных крутильных колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I_0}} = \sqrt{\frac{311213,3}{4 \cdot 10^3}} = 8,82 \text{ сек}^{-1}. \quad (3)$$

③ С учетом (3) вычисляем коэффициент нарастания колебаний:

$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = \frac{1}{1 - 20^2 / 8,82^2} = -0,241 = |0,241|. \quad (4)$$

④ С учетом значений (2) и (4) определяем статический угол закручивания φ_{cm} системы от действия момента M_0 , а также динамический угол закручивания φ_{∂} (амплитуду вынужденных колебаний):

$$\varphi_{cm} = \frac{M_0}{C} = \frac{300 \cdot 10^3}{311213,3} = 0,964 \text{ рад}; \quad (5)$$

$$\varphi_{\partial} = k_{\partial} \varphi_{cm} = \beta \varphi_{cm} = 0,241 \cdot 0,964 = 0,232 \text{ рад}.$$

⑤ Устанавливаем связь между динамическим углом закручивания φ_{∂} , который для обоих участков является одинаковым, и возникающими на участках динамическими напряжениями τ_{∂} . Напряжения и деформации при кручении определяются по формулам —

$$\tau_{\partial} = \frac{M}{W_{\rho}} = \frac{M}{\pi d^3/16}; \quad \varphi_{\partial} = \frac{Ma}{GI_{\rho}} = \frac{Ma}{G(\pi d^4/32)}, \text{ выражая из которых}$$

момент — $[M] = \tau_{\partial} \pi d^3/16$ и $[M] = \varphi_{\partial} G \pi d^4/32a$ и приравняв правые части, получаем —

$$\frac{\tau_{\partial} \pi d^3}{16} = \frac{\varphi_{\partial} G \pi d^4}{32a} \rightarrow \tau_{\partial} = \frac{Gd}{2a} \varphi_{\partial},$$

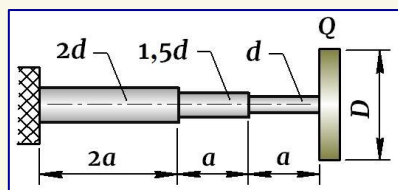
откуда вычисляем максимальные (динамические) касательные напряжения в левой и правой частях вала:

$$\tau_{\partial(1)} = \frac{Gd_1}{2a} \varphi_{\partial} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 15}{2 \cdot 1,8 \cdot 10^3} \cdot 0,232 = 77,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\partial(2)} = \frac{Gd_2}{2a} \varphi_{\partial} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 12}{2 \cdot 1,8 \cdot 10^3} \cdot 0,232 = 61,8 \text{ МПа}.$$

Задача 38

Стальной ступенчатый стержень круглого поперечного сечения работает в условиях установившихся вынужденных крутильных колебаний, создаваемых диском весом $Q = 392 \text{ Н}$, укрепленным на его конце. Частота



вынужденных колебаний равна $\omega = 290 \text{ сек}^{-1}$. Определить наибольшее значение возмущающего момента M_0 , при котором динамические напряжения в стержне достигают значения $\tau_{\partial} = 105 \text{ МПа}$. Принять для элементов: $d = 4 \text{ см}$; $a = 0,2 \text{ м}$; $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$; $D = 40 \text{ см}$. Массой стержня пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

① Стержень данной конструкции следует рассматривать как систему с **последовательным соединением** упругих элементов (участков), общая податливость которого определяется как —

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}, \quad \text{где} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{GI_{\rho(1)}}{a} = \frac{G\pi d^4/32}{a} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 40^4}{32 \cdot 0,2 \cdot 10^3} = 100,48 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ C_2 &= \frac{GI_{\rho(2)}}{a} = \frac{G\pi(1,5d)^4/32}{a} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 60^4}{32 \cdot 0,2 \cdot 10^3} = 508,68 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ C_3 &= \frac{GI_{\rho(3)}}{2a} = \frac{G\pi(2d)^4/32}{2a} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 80^4}{32 \cdot 0,4 \cdot 10^3} = 803,84 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Подставляем значения (2) в выражение (1) и определяем общую жесткость ступенчатого стержня —

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{100,48} + \frac{1}{508,68} + \frac{1}{803,84} \rightarrow \boxed{C} = 76,34 \text{ кН} \cdot \text{м}. \quad (3)$$

② Определяем момент инерции массы диска —

$$\boxed{I_0 = \frac{mR^2}{2}} = \frac{QD^2}{8g} = \frac{392 \cdot 400^2}{8 \cdot 9800} = 800 \text{ Н} \cdot \text{мм} \cdot \text{сек}^2. \quad (4)$$

③ На основании значений (3) и (4) вычисляем частоту собственных крутильных колебаний —

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I_0}}} = \sqrt{\frac{76,34 \cdot 10^6}{800}} = 309 \text{ сек}^{-1}. \quad (5)$$

④ С учетом (5) вычисляем коэффициент нарастания колебаний:

$$\boxed{\beta = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_0^2}} = \frac{1}{1 - 290^2/309^2} = 8,4. \quad (6)$$

⑤ Наибольшие динамические напряжения в стержне возникают на наиболее тонком участке и определяются как —

$$\boxed{\tau_{\partial} = k_{\partial} \tau_{cm}}, \quad (7)$$

где статические напряжения τ_{cm} от действия наибольшего значения крутящего момента M_0 вычисляются по формуле —

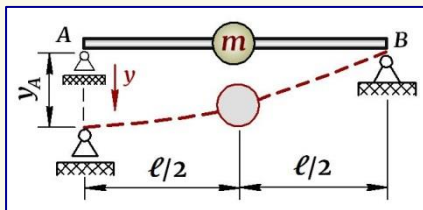
$$\boxed{\tau_{cm} = \frac{M_0}{W_{\rho}} = \frac{M_0}{\pi d^3/16}}. \quad (8)$$

Учитывая, что $k_{\partial} = \beta$, на основании выражений (7), (8) и значения (6) определяем значение момента M_0 :

$$\tau_{\partial} = \beta \frac{M_0}{\pi d^3 / 16} \rightarrow M_0 = \frac{\tau_{\partial} \pi d^3}{16 \beta} = \frac{105 \cdot 3,14 \cdot 40^3}{16 \cdot 8,4} = 157 \text{ Нм}.$$

Задача 39

На двутавровой балке, установленной на опорах и несущей посередине груз массой $m = 510 \text{ кГ}$, определить амплитуду вынужденных колебаний и наибольшие напряжения, если опора "А" испытывает колебания в вертикальном направлении по гармоническому закону $y_A = a \sin \omega t$, где $a = 12 \text{ мм}$ и $\omega = 38 \text{ сек}^{-1}$. Принять для балки: $\ell = 4 \text{ м}$; $I_X = 1970 \text{ см}^4$; $W_X = 197 \text{ см}^3$. Массой балки и влиянием затухания пренебречь.



РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

От действия веса груза Q , равного $Q = mg = 510 \cdot 9,8 = 5 \text{ кН}$, определяем прогиб балки посередине пролета и наибольшие статические напряжения:

$$\Delta_{cm}^Q = \frac{Q \ell^3}{48 E I_X} = \frac{5 \cdot 10^3 (4 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1970 \cdot 10^4} = 1,7 \text{ мм}; \quad (1)$$

$$\sigma_{cm}^{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_X} = \frac{Q \ell}{4 W_X} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{4 \cdot 197 \cdot 10^3} = 25,4 \text{ МПа}. \quad (2)$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Вычисляем частоту собственных колебаний груза на балке и с учетом значения (1) получаем:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}^Q}} = \sqrt{\frac{9800}{1,7}} = 76 \text{ сек}^{-1}. \quad (3)$$

② На опоре "А" заданной балки действует возмущающая сила, вызывающая вертикальные колебания системы и изменяющаяся по гармоническому закону $y_A = a \sin \omega t$, где a – наибольшее отклонение опоры "А" от начального положения (амплитуда колебаний) и ω – частота вынужденных колебаний. В заданной конструкции точка приложения возмущающей силы не совпадает с положением сосредоточенной массы, установленной посередине пролета, но если на систему с одной степенью свободы действует возмущающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону, то возникающая при движении груза сила инерции тоже будет изменяться по гармоническому закону – $y_C = (a/2) \sin \omega t$, но с амплитудой, соответствующей расположению груза на балке.

③ Динамический прогиб балки посередине пролета может быть определен по формуле ниже и с учетом значения (3) равен:

$$y_{\partial} = \frac{(a/2)(\omega^2/\omega_0)}{1 - \omega^2/\omega_0} = \frac{(12/2)(38^2/76^2)}{1 - 38^2/76^2} = 2 \text{ мм.} \quad (4)$$

④ На основании значения (4) вычисляем изгибающий момент $M_{\text{изг}}$, соответствующий прогибу (2), и наибольшие динамические напряжения в балке:

$$y_{\partial} = \frac{Q_{\partial} \ell^3}{48 EI_X} = \frac{Q_{\partial} \ell}{4} \cdot \frac{\ell^2}{12 EI_X} = \frac{M_{\text{изг}} \ell^2}{12 EI_X}, \text{ откуда}$$

$$M_{\text{изг}} = \frac{12 EI_X y_{\partial}}{\ell^2} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1970 \cdot 10^4 \cdot 2}{(4 \cdot 10^3)^2} = 5,91 \text{ кНм}; \quad (5)$$

$$\sigma_{\partial}^{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_X} = \frac{5,91 \cdot 10^6}{197 \cdot 10^3} = 30 \text{ МПа.} \quad (6)$$

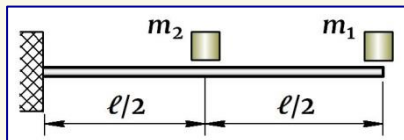
⑤ Суммарные напряжения посередине пролета на основании значений (2) и (6) равны:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{см}}^{\max} + \sigma_{\partial}^{\max} = 25,4 + 30 = 55,4 \text{ МПа.}$$

3. Собственные колебания систем с двумя степенями свободы

Задача 40

На консольной балке с защемлением длиной $\ell = 2\text{ м}$ установлены два одинаковых груза массой $m_1 = m_2 = m = 10\text{ кГ}$. Определить частоту собственных колебаний грузов на балке. Балку считать невесомой. Принять: $I_X = 1800\text{ см}^4$; $E = 2 \times 10^5\text{ МПа}$.

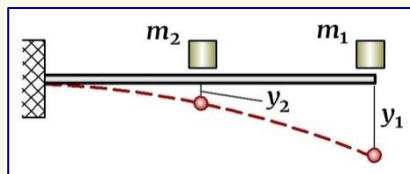


РЕШЕНИЕ:

① Предполагая, что колебания грузов происходят только в вертикальной плоскости, данная балка будет представлять собой систему с двумя степенями свободы. На основании значений (116)-(120), рассмотренных в ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ (стр. 93-94), для системы с двумя степенями свободы соответственно получаем:

★ В результате суммарного действия сил инерции установленных на балке масс перемещения y_1 и y_2 под каждым грузом на основании принципа суперпозиции будет определяться как —

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2 \ddot{y}_2) \\ y_2 &= \delta_{21}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2 \ddot{y}_2). \end{aligned} \quad (1)$$



★ Принимая решения дифференциальных уравнений динамических прогибов в виде —

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_0); \quad y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

где A_1, A_2 — амплитуды колебаний масс; φ_0 — начальная фаза колебаний, а ускорения колебаний соответственно равными —

$$\ddot{y}_1 = -A_1 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0); \quad \ddot{y}_2 = -A_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

подставляем эти значения в уравнения (1) и получаем систему двух однородных линейных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных — двух амплитуд A_1, A_2 и частоты ω :

$$\begin{cases} A_1(\delta_{11}m_1\omega^2 - 1) + \delta_{12}m_2A_2\omega^2 = 0 \\ \delta_{21}m_1A_1\omega^2 + A_2(\delta_{22}m_2\omega^2 - 1) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решить систему двух уравнений с тремя неизвестными нельзя, но можно определить неизвестную частоту из того условия, что система уравнений (4) имеет нетривиальное (отличное от нуля) решение только в случае, если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных A_1, A_2 , равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1\omega^2 - 1) & \delta_{12}m_2\omega^2 \\ \delta_{21}m_1\omega^2 & (\delta_{22}m_2\omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Перемножая определитель (5) по правилу Саррюса, получаем биквадратное уравнение —

$$\omega^4 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) - \omega^2 (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) + 1 = 0, \quad (6)$$

решением которого является —

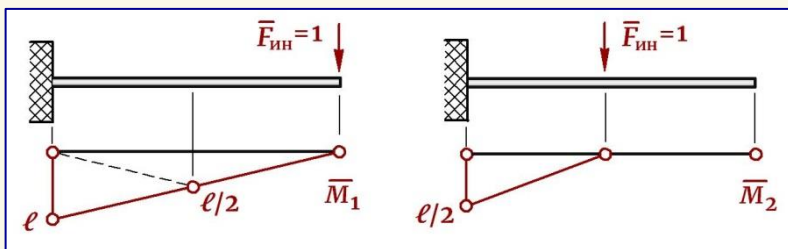
$$\boxed{\omega_{1,2}^2} = \frac{(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) \pm \sqrt{(\delta_{11}m_1 - \delta_{22}m_2)^2 + 4m_1m_2\delta_{12}^2}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)} \quad (7)$$

и которое, учитывая, что $m_1 = m_2 = m$, преобразуем к виду:

$$\boxed{\omega_{1,2}^2} = \frac{(\delta_{11} + \delta_{22}) \pm \sqrt{(\delta_{11} - \delta_{22})^2 + 4\delta_{12}^2}}{2m(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \quad (8)$$

где δ_{11}, δ_{22} — перемещения грузов m_1 и m_2 от действия силы инерции $\bar{F}_{\text{ин}} = 1$, приложенной соответственно в точках их расположения; $\delta_{12} = \delta_{21}$ — перемещение груза m_1 от действия единичной силы инерции, приложенной в точке расположения груза m_2 , и наоборот.

② Определяем «единичные» прогибы балки от единичной нагрузки, используя метод перемножения эпюр:



$$\left. \begin{aligned} \boxed{\delta_{11}} &= \frac{1}{EI_X} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \ell \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \ell \right) = \frac{\ell^3}{3EI_X}; \\ \boxed{\delta_{22}} &= \frac{1}{EI_X} (\bar{M}_2 \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{2} \right) = \frac{\ell^3}{24EI_X}; \\ \boxed{\delta_{12} = \delta_{21}} &= \frac{1}{EI_X} (\bar{M}_1 \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_X} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \left(\frac{2}{3} \ell + \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell}{2} \right) \right] = \frac{5\ell^3}{48EI_X}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Подставляем полученные значения в выражение (8) и после преобразования получаем:

$$\begin{aligned} \boxed{\omega_1 = \omega_{\min}} &= \sqrt{2,8 \frac{EI_X}{m\ell^3}} = \sqrt{2,8 \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1800 \cdot 10^4}{10(2 \cdot 10^3)^3}} = 11,2 \text{ сек}^{-1}; \\ \boxed{\omega_2} &= \sqrt{122,2 \frac{EI_X}{m\ell^3}} = \sqrt{122,2 \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1800 \cdot 10^4}{10(2 \cdot 10^3)^3}} = 74,2 \text{ сек}^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

③ Так как определитель (5) системы уравнений равен нулю, значит, уравнения (4) линейно зависимы, т.е. любое из уравнений является комбинацией остальных и может рассматриваться как следствие другого. Поэтому для каждого значения частоты ω_1 и ω_2 можно определить только отношение частот A_1 и A_2 . Для этого достаточно использовать только одно уравнение системы (4), подставив в него поочередно значения частот (10). Рассматриваем первое уравнение и, учитывая равенство масс $m_1 = m_2 = m$, приводим его к виду —

$$A_1 (\delta_{11} m_1 \omega^2 - 1) + \delta_{12} m_2 A_2 \omega^2 = 0 \rightarrow \frac{A_2}{A_1} = - \frac{\delta_{11} m \omega^2 - 1}{\delta_{12} m \omega^2},$$

откуда для соответствующих значений частот ω_1 и ω_2 (10) с учетом расчетных данных (9) получаем соотношения амплитуд:

$$\begin{aligned} \boxed{\omega = \omega_1} &\rightarrow \\ \frac{A_2}{A_1} &= - \frac{\delta_{11} m \omega_1^2 - 1}{\delta_{12} m \omega_1^2} = - \frac{16\ell^3 m \omega_1^2 - 48EI_X}{5\ell^3 m \omega_1^2} = \\ &= - \frac{16(2 \cdot 10^3)^3 \cdot 10 \cdot 11,2^2 - 48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1800 \cdot 10^4}{5(2 \cdot 10^3)^3 \cdot 10 \cdot 11,2^2} = 0,24; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\boxed{\omega = \omega_2} \rightarrow$$

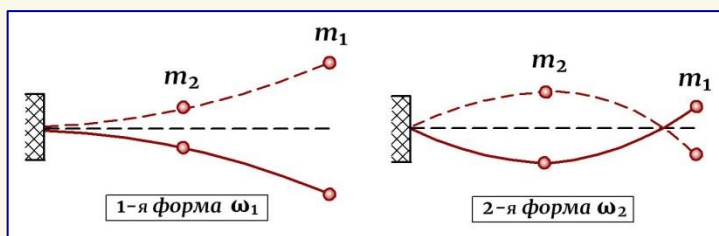
$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= -\frac{\delta_{11}m\omega_2^2 - 1}{\delta_{12}m\omega_2^2} = -\frac{16\ell^3m\omega_2^2 - 48EI_X}{5\ell^3m\omega_2^2} = \\ &= -\frac{16(2 \cdot 10^3)^3 \cdot 10 \cdot 74,2^2 - 48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1800 \cdot 10^4}{5(2 \cdot 10^3)^3 \cdot 10 \cdot 74,2^2} = -3,12, \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда функции динамических прогибов (2) с учетом значений (11) принимают для значений ω_1 и ω_2 соответствующий вид:

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0); \\ y_2 = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) = 0,24 A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0). \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_0); \\ y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0) = -3,12 A_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_0). \end{cases} \quad (14)$$

Для системы с двумя степенями свободы существуют две формы колебаний. Как показывает решение (11)–(14), при колебаниях с низшей частотой обе массы движутся в одну сторону, т.е. колебания масс происходят в одной фазе, поскольку прогибы балки в точках размещения масс имеют один знак (13). Такое движение соответствует первой форме колебаний (колебания основного тона). При большей частоте движение масс происходит в разные стороны, так как прогибы в точках размещения масс имеют разные знаки (14). Колебания происходят в противофазе, что соответствует второй форме колебаний.



ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: Учебник./В.И. Феодосьев – М.: Наука, 1986. – 512 с.
2. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов: Учебник./ Г.С. Писаренко [и др.]; под ред. Писаренко Г.С. – Киев: Вища школа, 1979. – 696 с.
3. Вульфсон, И.И. Краткий курс теории механических колебаний / И.И. Вульфсон – М.: ВНТР, 2017. – 241 с.
4. Гусев, А.Ф. Прикладная теория колебаний: Учебное пособие / А.Ф. Гусев, М.В. Новоселова – Тверь, 2017. – 161 с.
5. Шакирзянов, Р.А. Динамика и устойчивость сооружений: Учебное пособие / Р.А. Шакирзянов, Ф.Р. Шакирзянов – Казань, 2015. – 120 с.
6. Паршаков, А.Н. Физика колебаний: Учебное пособие / А.Н. Паршаков – Пермь: 2010. – 302 с.
7. Никишин, В.Н. Прикладная теория колебаний в автомобиле- и двигателестроении: Учебное пособие / В.Н. Никишин, Р.Р. Басуров, А.П. Павленко – Набережные Челны, 2019. – 223 с.
8. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.С. Вольмир [и др.]; под ред. Вольмира А.С. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
9. Сборник задач по сопротивлению материалов / В.К. Качурин [и др.]; под ред. Качурина В.К. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
10. Жернаков, В.С. Сопротивление материалов–механика материалов и конструкций: Учебник / В.С. Жернаков.–Уфа, 2012. – 495 с.
11. Зозуля, В.В. Механика материалов / В.В. Зозуля, А.В. Мартыненко, А.Н. Лукин – Харьков, 2001. – 404 с.