

Аналогично доказательству леммы, получаем, что $V_K^{(0)}(x) \equiv 0, x \in D_K$ и $W_j^{(0)}(x) \equiv 0, x \in Q_j$. Так как $\nu_K^{(0)}(y)$ и $\mu_j^{(0)}(y)$ являются предельными значениями $V_K^{(0)}(x)$ и $W_j^{(0)}(x)$ на поверхностях S_K и $\mathcal{G}_j$, то $\nu_K^{(0)}(y) \equiv 0, \mu_j^{(0)}(y) \equiv 0$. Таким образом, однородная система имеет только тривиальное решение, а следовательно, система интегральных уравнений имеет единственное решение.

В заключение отметим, что в работе [2] использованным методом была решена аналогичная задача для эллиптических систем с коэффициентами, обладающими специальными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости/ В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В.Бурчуладзе. — М.: Наука, 1976, 663 с. 2. Марія Д. Мартиненко. Розв'язки ел.птичних систем у многов'язних областях з щілинами. — Вісник Львівського університету. Сер. мех;мат., вип. 12, 1977, с. 32–36.

УДК 539.3

Р.А.РОМАНЧИК (БГУ)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ КОНТАКТА УПРУГИХ ТЕЛ

Понятие "метод граничных элементов" (МГЭ) введено в работе [1] применительно к решению уравнений Лапласа. В настоящей работе МГЭ использовался для решения задачи контакта упругих тел.

Постановка контактных задач плоской теории упругости имеет вид

$$\mu \Delta u_{i\alpha} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0; i = 1, 2; x \in S_\alpha, \alpha = 1, 2;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad (1)$$

где α и μ — постоянные Ламе; S_α — плоские области, ограниченные замкнутыми гладкими кривыми Γ_α (рис. 1). Граничные условия задачи имеют вид

$$u_i|_{\Gamma_\alpha^{(u)}} = \varphi_{i\alpha}(x); x \in \Gamma_\alpha^{(u)}; t_i^{(n)}|_{\Gamma_\alpha^{(G)}} = q_{i\alpha}(x); x \in \Gamma_\alpha^{(G)}, \quad (2)$$

где $\alpha = 1, 2$.

Здесь u_i и $t_i^{(n)} = \sum_{j=1}^2 \mathcal{G}_{ij} u_j$ — компоненты вектора перемещений и напряжений на площадке с нормалью n ; $\Gamma_\alpha^{(u)}, \Gamma_\alpha^{(G)}$ — части границы Γ_α , на которых заданы перемещения и напряжения.

К соотношениям (2) присоединяются условия контакта упругих тел:

$$u_{i2} - u_{i1} = \delta_i; t_{i2}^{(n)} - t_{i1}^{(n)} = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^{(c)}, \quad (3)$$

где $\Gamma_\alpha^{(c)}$ — участок контакта.

Представим решение системы (1) в виде [2, 3]:

$$\begin{aligned} \kappa(x) u_{i\alpha}(x) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\alpha} \sum_{j=1}^2 G_{ij}(x, y) p_{j\alpha}(y) d\Gamma_y - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\alpha} \sum_{j=1}^2 T_{ij}(x, y) u_{j\alpha}(y) d\Gamma_y. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\kappa(x) = 0, \kappa \in \bar{S}_\alpha$; $\kappa(x) = 1, \kappa \in S_\alpha, \kappa(x) = \frac{1}{2}, \kappa \in \Gamma_\alpha$ в случае гладкой границы области,

$$G_{ij} = - \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right];$$

$$T_{ij} = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} ((1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}) + \right.$$

$$\left. + (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) \right];$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} = & \frac{\partial}{\partial y_1} \cos(n, y_1) + \frac{\partial}{\partial y_2} \cos(n, y_2), r(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \\ & + (x_2 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

На основании интегрального представления (4) и граничных условий (2)–(3) получим следующую систему интегральных уравнений, соответствующую задаче (1)–(3):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\alpha^{(u)}} \sum_{j=1}^2 G_{ij}(x, y) p_{j\alpha}(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma_\alpha^{(c)}} \sum_{j=1}^2 T_{ij}(x, y) u_{j\alpha}(y) d\Gamma_y = f_1(x), \\ \kappa \in \Gamma_\alpha^{(u)} \end{aligned}$$

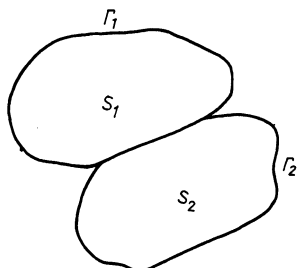


Рис. 1. Контакт плоских областей.

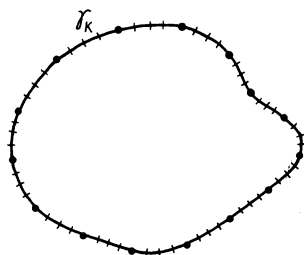


Рис. 2. Разбиение границы области.

$$\begin{aligned}
 u_{i\alpha}(x) - 2 \int_{\Gamma_\alpha(u)} \sum_{j=1}^2 G_{ij}(x,y) p_{j\alpha}(y) + 2 \int_{\Gamma_\alpha(\epsilon)} \sum_{j=1}^2 T_{ij}(x,y) u_{j\alpha}(y) d\Gamma_y = \\
 = f_2(x), x \in \Gamma_\alpha^{(\epsilon)}; \\
 \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Gamma_\alpha^u} \sum_{j=1}^2 G_{ij}^\alpha(x,y) p_{j\alpha}(y) d\Gamma_y + \int_{\Gamma_\alpha^c} \sum_{j=1}^2 (G_{ij}^{(1)}(x,y) - G_{ij}^{(2)}(x,y)) \times \\
 \times p_1^c(y) d\Gamma_y - \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Gamma_\alpha^\epsilon} \sum_{j=1}^2 T_{ij}^\alpha(x,y) u_{j\alpha}(y) d\Gamma_y = f_3(x); x \in \Gamma_\alpha^c.
 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь f_1, f_2, f_3 содержат интегралы от известных функций.

К уравнениям (5) присоединяются уравнения равновесия контактирующих тел:

$$\int_{\Gamma_\alpha} p_{i\alpha}(y) d\Gamma_y = p_i. \quad (6)$$

Для численного решения системы (5)–(6) используем следующий алгоритм. Разобьем границы областей Γ_α на граничные элементы γ_K , $\Gamma = \bigcup_K \gamma_K$ (рис. 2), которые могут быть прямыми или кривыми линиями. На каждом элементе могут быть заданы от двух до n узлов (рис. 2).

На каждом элементе представим перемещения и напряжения в виде

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_1^n \\ u_2^n \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ \vdots \\ p_1^n \\ p_2^n \end{pmatrix} \quad (8)$$

Здесь N_i – функции формы граничных элементов; $u_i^j, p_i^j, i = 1, 2; j = \overline{1, n}$ – значения перемещений и напряжений в узлах граничных элементов. Например [3], для граничных элементов заданных двумя, тремя и четырьмя узлами функции N_i соответственно имеют вид:

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi); \quad N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi);$$

$$N_1 = \frac{1}{2} (\xi - 1); N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi), N_3 = (1 - \xi) (1 + \xi);$$

$$N_1 = \frac{1}{16} (1 - \xi)[-10 + 9(\xi^2 + 1)]; N_2 = \frac{1}{16} (1 + \xi)[-10 + 9(\xi^2 + 1)];$$

$$N_3 = \frac{9}{16} (1 - \xi)^2 (1 - 3\xi); N_4 = \frac{9}{16} (1 - \xi^2)(1 + 3\xi).$$

Подстановка (7) и (8) в (6) с учетом выражений $x = \sum_i N_i x_i$, $y = \sum_i N_i y_i$ и последующее интегрирование приводит формулы (5) – (6) к системе алгебраических уравнений вида

$$[A] \left(\frac{u}{p} \right) = (F). \quad (9)$$

Из системы (9) находятся значения перемещений и напряжений в узлах. В случае неизвестной заранее границы контакта задача сводится к итерационной процедуре, заключающейся в решении системы (9) при заданной границе участка контакта, а затем в уточнении границы участка контакта на основании уравнений равновесия и положительности контактного давления.

Приближение криволинейной границы области граничными элементами определяется с помощью узлов (x_i, y_i) и функции N_i . Для нахождения узлов (x_i, y_i) на ЭВМ используется представление границы области в виде объединения дуг окружностей, парабол или отрезков прямых. В свою очередь для каждой дуги нахождение узлов производится в локальной системе координат, которую программа строит по заданным опорным точкам, а затем локальные координаты преобразовываются в глобальные по формулам:

$$x = \cos \alpha x' - \sin \alpha y' + x_0; \quad y = \sin \alpha x' - \cos \alpha y' + y_0.$$

Здесь x_0, y_0 – координаты начала локальной системы; α – угол между положительным направлением осей x и x' .

Начало локальных координат для окружности выбирается в ее центре, координаты которого x_0, y_0 и радиус R находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2; \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = R^2; \\ (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 = R^2, \end{cases}$$

где $x_i, y_i, i = \overline{1, 3}$ – координаты опорных точек: начала дуги, промежуточной точки и конца дуги соответственно. Локальные координаты граничных элементов дуги находятся по рекуррентным формулам:

$$x'_{n+1} = x'_n \cos \alpha_K - y'_n \sin \alpha_K;$$

$$y'_{n+1} = y'_n \cos \alpha_K + x'_n \sin \alpha_K; n = \overline{1, K},$$

$$\arctg \left(\frac{y_1}{x_1} \right) - \arctg \left(\frac{y_3}{x_3} \right)$$

где $\alpha_K = \frac{\arctg \left(\frac{y_1}{x_1} \right) - \arctg \left(\frac{y_3}{x_3} \right)}{K}$; K – количество элементов в дуге.

Начало локальной системы координат и параметр p для отрезка параболы определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} -(x_1 - x_0) \sin \alpha + (y_1 - y_0) \cos \alpha = p((x_1 - x_0) \cos \alpha + (y_1 - y_0) \sin \alpha)^2; \\ -(x_2 - x_0) \sin \alpha + (y_2 - y_0) \cos \alpha = p((x_2 - x_0) \cos \alpha + (y_2 - y_0) \sin \alpha)^2; \\ -(x_3 - x_0) \sin \alpha + (y_2 - y_0) \cos \alpha = p((x_3 - x_0) \cos \alpha + (y_3 - y_0) \sin \alpha)^2, \end{cases}$$

где $x_i, y_i, i = \overline{1, 3}$ — координаты опорных точек, задаваемые так же, как и для дуги окружности. Эта система уравнений строится исходя из канонического вида уравнения параболы и формул преобразования координат.

Локальные координаты граничных элементов отрезка параболы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= x'_n + h; \\ y'_{n+1} &= p(x'_{n+1})^2; \quad n = \overline{1, k}, \end{aligned}$$

где
$$h = \frac{x'_k - x'_1}{k}.$$

Для отрезка прямой задаются две опорные точки: начало и конец отрезка. Начало локальной системы берется в точке (x_1, y_1) , и тогда формулы преобразования координат имеют вид

$$x_n = x'_n \cos \alpha + x_1; \quad y_n = y'_n \sin \alpha + y_1,$$

где α — угол между положительным направлением осей Ox и Ox' .

ЛИТЕРАТУРА

1. Brebbia C., Dominguez J. Boundary element methods versus finite elements. — Applied Numerical Modelling. Proc. 1 st. Int. Conf. Southampton, 1977. 571–586.
2. Метод граничных интегральных уравнений. Механика. — В кн.: Новое в зарубежной науке. М.: Мир, 1978, вып. 15. — 209 с.
3. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. — М.: Мир, 1982. — 248 с.

УДК 539.3

В.М.РОМАНЧАК (БПИ)

О ПРИМЕНЕНИИ ФОРМУЛЫ БЕТТИ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

В работе [1] предложен вариант применения модифицированной на комплексный случай формулы Бетти к вычислению коэффициентов интенсивности напряжений для контуров с угловыми точками:

$$\operatorname{Im} \left[\int_L \varphi_1(t) d\overline{f_2(t)} + \int_L \overline{\varphi_2(t)} df_1(t) \right] = 0. \quad (1)$$