

3.3. РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Нередко встречаются случаи, когда масса тел меняется с течением времени. Примером такого движения может служить движение метеорита при его полете в атмосфере, полет ракеты (рис. 3.4) на активном участке ее траектории и т.п. Уравнение движения тела переменной массы является следствием законов Ньютона.

Вывод уравнения движения тела переменной массы рассмотрим на примере движения простейшей ракеты (рис. 3.5). Будем рассматривать ракету как малое тело, положение центра масс которого не меняется при сгорании топлива. В этом случае ракету можно считать материальной точкой переменной массы. Обозначим через dm массу газа, выброшенную ракетой за время dt .

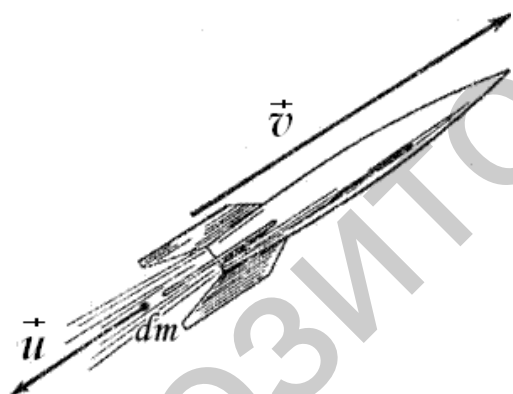


Рис. 3.5. К выводу уравнения движения тела переменной массы

а импульс



Рис. 3.4. Реактивное движение

Пусть в момент времени t ракета с топливом имеет массу m и скорость $\vec{v}$ относительно неподвижной системы отсчета, связанной с Землей. Импульс ракеты в момент времени t будет равен $\vec{p} = m\vec{v}$. За время dt ракету покинет масса газа dm , скорость которой относительно ракеты равна $\vec{u}$.

Следовательно, относительно выбранной нами неподвижной системы отсчета скорость этой массы будет

$$\vec{u} + \vec{v},$$

$$\vec{p}_r = dm(\vec{u} + \vec{v}).$$

Масса ракеты станет равной $(m - dm)$, скорость получит приращение $d\vec{v}$ и будет равна $(\vec{v} + d\vec{v})$. Импульс ракеты в момент времени $(t + dt)$ будет равен

$$\vec{p}_p = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}).$$

На ракету будут действовать внешние силы, например силы гравитационного притяжения Земли, Солнца, силы сопротивления.

Согласно второму закону Ньютона, изменение импульса системы ракета-сгоревшее топливо равно импульсу результирующей внешней силы $\vec{F}dt$.

$$(m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{u} + \vec{v}) - m\vec{v} = \vec{F}dt.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая слагаемым $dm d\vec{v}$, являющимся малым по сравнению с остальными слагаемыми, получим

$$m d\vec{v} + dm\vec{u} = \vec{F}dt.$$

Разделив последнее выражение на dt , получим

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u} \frac{dm}{dt} \quad (3.10)$$

Это уравнение впервые было получено профессором Петербургского университета **Мещерским** и носит его имя.

В правой части (3.10) стоит сумма сил, действующих на ракету. Следовательно, второе слагаемое в правой части (3.10) тоже представляет силу.

Для выяснения природы этой силы рассмотрим случай, когда внешние силы отсутствуют, т.е. система ракета – вытекающий газ замкнута. Применяем закон сохранения импульса. Т.к. импульс системы остается постоянным, то из формулы (3.10) получаем

$$m d\vec{v} = -\vec{u} dm.$$

На основании этого соотношения можно сделать вывод о том, что ракета получает такое же приращение импульса, как и вытекающий горящий газ, только в противоположном направлении.

Причиной изменения импульса могут быть только внутренние силы. Таким образом, со стороны вытекающих газов на ракету действует сила

$$\vec{F}_p = -\vec{u} \frac{dm}{dt},$$

которая называется **реактивной**. Величина $\frac{dm}{dt}$ называется **расходом газа**.

Использование реактивной силы лежит в основе работы реактивных двигателей.

Если на ракету не действуют внешние силы, то из (3.10) следует

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt}. \quad (3.11)$$

Из соотношения (3.11) находим

$$dv = -u \frac{dm}{m}. \quad (3.12)$$

Для нахождения скорости ракеты спустя время t после начала движения проинтегрируем (3.12), учитывая, что за время t скорость ракеты увеличивается от 0 до v , а масса уменьшается от m_0 до m :

$$\int_0^v dv = -u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m}.$$

Откуда

$$v = u \ln(m_0 / m). \quad (3.13)$$

Формула (3.13) была получена Циалковским и носит его имя, а скорость v называется характеристической скоростью ракеты.

В действительности скорость v , выраженная формулой (3.13), значительно меньше, что обусловлено влиянием тяготения Земли, сопротивлением атмосферы в момент выгорания топлива.