

1979 г.). Таллин: Таллин.политехн.ин-т, 1979, с. 89—90. 2. Т и м о ш у к Л.Т. Механические испытания металлов. — М.: Металлургия, 1971. — 223 с. 3. Методы испытания, контроля и исследования машиностроительных материалов: (Справочное пособие) / Под ред. А.Т.Туманова. — М.: Машиностроение, 1974, т. 2. — 320 с.

УДК 624.04:539.3

Р.И.ФУРУНЖИЕВ, канд.техн.наук
(БИМСХ)

МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ, МАСС И ДЕМПФИРОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОСТНЫХ, ИНЕРЦИОННЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ УЗЛОВЫХ СВЯЗЕЙ

Недостатком многих известных способов формирования матриц жесткости конечных элементов с учетом упругой податливости узловых связей является их неуниверсальность. Единый подход к формированию таких матриц с учетом особенностей узловых связей возможен на основе многоуровневого представления расчетной модели или на основе метода суперэлементов. В работах [1, 2] , например, такой подход применен для формирования матриц жесткости стержневых конечных элементов, имеющих упругоподатливые крепления к узлам. В работах [3, 4] приведены аналитические выражения матриц жесткости стержневых конечных элементов, полученные на основе моделирования узловых связей в виде контактных конечных элементов,

Формирование матрицы жесткости конечных элементов произвольного вида с учетом особенностей узловых связей рекомендуется производить по формуле [2]

$$k^* = k_0 - k_0(k + k_0)^{-1}k_0, \quad (1)$$

где k^*, k_0 — квадратные матрицы жесткости конечных элементов соответственно с учетом и без учета реальных жесткостных свойств узловых связей; k_0 — матрица, составленная из компонент жесткостных свойств узловых связей [4] .

Формирование матрицы жесткости k^* конечных элементов с учетом особенностей узловых связей осуществляется по универсальной подпрограмме для ЭВМ по формуле (1). Исходными данными служит матрица k конечных элементов с жесткими узловыми связями и диагональная матрица k_0 , составленная по значениям жесткостей узловых связей [4] .

Матрица масс (и демпфирования) конечных элементов произвольного типа с учетом податливости узловых связей может быть сформирована по формуле

$$m^* = m_0 + k_0 k_{11}^{-1} m_{11} k_{11}^{-1} k_0 - m_0 k_{11}^{-1} k_0 - k_0 k_{11}^{-1} m_0, \quad (2)$$

$$[k]_{yz} = \frac{1}{a^3} \begin{pmatrix} a^2 E F \beta_{x1} & & & & & & -a^2 E F \beta_{x1} & & & & \\ & 12 E J_z \beta_{z1} & & & & 6 a E J_z \beta_{z2} & & -12 E J_z \beta_{z1} & & & 6 a E J_z \beta_{z3} \\ & & 12 E J_y \beta_{y1} & & -6 a E J_y \beta_{y2} & & & -12 E J_y \beta_{y1} & & -6 a E J_y \beta_{y3} \\ & & & a^2 G J_{kp} \beta_{x4} & & & & & -a^2 G J_{kp} \beta_{x4} & & \\ & & & & 4 a^2 E J_y \beta_{y4} & & & 6 a E J_y \beta_{y2} & & 2 a^2 E J_y \beta_{y6} \\ & & & & & 4 a^2 E J_z \beta_{z4} & & -6 a E J_z \beta_{z2} & & 2 a^2 E J_z \beta_{z6} \\ & & & & & & a^2 E F \beta_{x1} & & & & \\ & & & & & & & 12 E J_z \beta_{z1} & & & -6 a E J_z \beta_{z3} \\ & & & & & & & & 12 E J_y \beta_{y1} & & 6 a E J_y \beta_{y3} \\ & & & & & & & & & a^2 G J_{kp} \beta_{x4} & \\ & & & & & & & & & & 4 a^2 E J_y \beta_{y5} \\ c & и & м & м & е & т & р & и & ч & н & о & 4 a^2 E J_z \beta_{z5} \end{pmatrix}, (3)$$

где $\beta_{x1} = \frac{1}{1 + (p_{i1}^* + p_{j1}^*)}$; $\beta_{z1} = c_z [1 + (p_{i6}^* + p_{j6}^*)]$; $\beta_{z2} = c_z (1 + 2p_{j6}^*)$;
 $\beta_{z3} = c_z (1 + 2p_{i6}^*)$; $\beta_{z4} = c_z [1 + 3p_{j6}^* + 3(p_{i2}^* + p_{j2}^*) + 3\gamma_z]$; $\beta_{z5} = c_z [1 + 3p_{i6}^* + 3(p_{i2}^* + p_{j2}^*) + 3\gamma_z]$; $\beta_{z6} = c_z [1 - 6(p_{i2}^* + p_{j2}^*) - 6\gamma_z]$; $c_z = 1 / \{1 + 4(p_{i6}^* + p_{j6}^*) +$
 $+ 12p_{i6}^* p_{j6}^* + 12(p_{i2}^* + p_{j2}^*) + 12(p_{i2}^* + p_{j2}^*)(p_{i6}^* + p_{j6}^*) + 12\gamma_z [1 + (p_{i6}^* + p_{j6}^*)]\}$;
 $\gamma_z = \frac{\nu_z E J_z}{a^2 G F}$; $\beta_{x4} = \frac{1}{1 + (p_{i4}^* + p_{j4}^*)}$; $\beta_{y1} = c_y [1 + (p_{i5}^* + p_{j5}^*)]$; $\beta_{y2} = c_y (1 +$
 $+ 2p_{j5}^*)$; $\beta_{y3} = c_y (1 + 2p_{i5}^*)$; $\beta_{y4} = c_y [1 + 3p_{j5}^* + 3(p_{i3}^* + p_{j3}^*) + 3\gamma_y]$; $\beta_{y5} =$
 $= c_y [1 + 3p_{i5}^* + 3(p_{i3}^* + p_{j3}^*) + 3\gamma_y]$; $\beta_{y6} = c_y [1 - 6(p_{i3}^* + p_{j3}^*) - 6\gamma_y]$; $c_y =$
 $= 1 / \{1 + 4(p_{i5}^* + p_{j5}^*) + 12p_{i5}^* p_{j5}^* + 12(p_{i3}^* + p_{j3}^*) + 12(p_{i3}^* + p_{j3}^*)(p_{i5}^* + p_{j5}^*) +$
 $+ 12\gamma_y [1 + (p_{i5}^* + p_{j5}^*)]\}$; $\gamma_y = \frac{\nu_y E J_y}{a^2 G F}$; $p_{\mu\nu}^* (\mu = i, j; \nu = 1, 2, \dots, 6)$:
 $p_{\mu 1}^* = \frac{E F}{a} p_{\mu 1}$; $p_{\mu 2}^* = \frac{E J_z}{a^3} p_{\mu 2}$; $p_{\mu 3}^* = \frac{E J_y}{a^3} p_{\mu 3}$; $p_{\mu 4}^* = \frac{G J_{кр}}{a} p_{\mu 4}$; $p_{\mu 5}^* =$
 $= \frac{E J_y}{a^3} p_{\mu 5}$; $p_{\mu 6}^* = \frac{E J_z}{a^3} p_{\mu 6}$; $p_{\mu\nu}$ — фактические значения податли-

востей узловых связей.

где $m_{11} = m + m_0$, $k_{11} = k + k_0$; m^* , m — квадратные матрицы масс конечных элементов с учетом и без учета реальных жесткостных свойств узловых связей; m_0 — диагональная матрица инерционных свойств узловых связей.

Для простых конечных элементов по формуле (1) можно непосредственно получить аналитические выражения матриц жесткости с учетом жесткостных свойств узловых связей (3). Аналитическое выражение для матрицы жесткости плоских стержневых конечных элементов, полученное по формуле (1), приведено в [2].

Учитываются деформации растяжения—сжатия, изгиба, кручения и сдвига. Ориентация осей местной системы координат принимается таким образом, что первая ось ox направлена от первого узла конечного элемента ко второму, третья ось oz направлена ортогонально первой вверх, вторая ось oy образует правую систему координат с двумя предыдущими. Нумерация компонент перемеще-

ний принимается следующей: вначале — линейные перемещения, а затем компоненты поворота относительно осей.

Изложенный способ формирования матриц масс и демпфирования конечных элементов с учетом инерционных и диссипативных свойств узловых связей позволяет более адекватно моделировать колебания конструкций. При этом представляется возможность отдельно учитывать демпфирование, обусловленное свойством материала, и демпфирование, связанное с конструктивным решением узлов. Кроме этого, отпадает потребность в создании матриц жесткости конструкции для учета упругой податливости, шарнирности и других особенностей узловых связей. Полученное аналитическое выражение для матрицы жесткости позволяет практически рассчитывать любые пространственные конструкции с учетом реальных жесткостных свойств узловых связей и граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Строительная механика стержневых систем/А.Ф.Смирнов, А.В.Александров, Б.Я.Лашеников, Н.Н.Шапошников. Под ред. А.Ф.Смирнова. — М.: Стройиздат, 1981. — 512 с.
2. Ф у р у н ж и е в Р.И. Контактные конечные элементы (ККЭ) в расчетах конструкций с учетом податливости узловых связей. — В кн.: Строительные конструкции: Сб. тр. Минск: ИСиА Госстроя БССР, 1978, вып. 20, с. 96—104.
3. Ф у р у н ж и е в Р.И. Дискретный контактный конечный элемент в механике твердых деформируемых тел. — В кн.: Вопросы строительства и архитектуры. Минск: Выш.шк., 1979, вып. IX, с. 66—72.
4. Рекомендации по расчету конструкций методом конечных элементов. — Минск: ИСиА Госстроя БССР, 1981, ч. I — 90 с.; ч. II. — 48 с.

УДК 624.042.8

Р.И.ФУРУНЖИЕВ, канд.техн.наук (БИМСХ),
Н.Н.ГУРСКИЙ (БПИ)

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Кроме силовых динамических нагрузок, сооружения могут испытывать динамические воздействия в форме кинематических перемещений граничных областей. Примерами таких воздействий могут служить сейсмические возмущения, создаваемые за счет перемещений основания, динамические воздействия на поверхность континуальной среды и в ее толще от работы ударных или вибрационных устройств и т.д. Расчет конструкций, колебания которых происходят вследствие их передвижения по неровной поверхности, может быть сведен к анализу тех же конструкций при кинематических динамических воздействиях.

В настоящей работе представлена методика расчета конструкций произвольного вида на динамические воздействия в форме многокомпонентных кинематических перемещений граничных об-