

Применение тригонометрии и векторной алгебры в расчёте строительных кранов

Бобарико Станислав Владимирович, Антонович Сергей Олегович,
студенты 2 курса кафедры «Робототехнические системы»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
Научный руководитель – Лебедева Г.И. канд. техн. наук, доцент, кафедры
«Высшая математика»

Современное строительство немыслимо без подъемной техники, и стреловой кран является ее ключевым представителем. Его зримая мощь — это лишь верхушка айсберга, под которой скрывается сложный мир инженерных расчетов, обеспечивающих безопасность и эффективность. Надежность этих машин-гигантов полагается не на интуиции, а на строгом математическом и инженерном расчёте их поведения под нагрузкой.

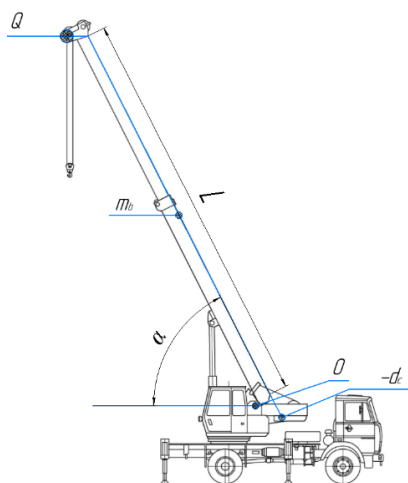


Рисунок 1 – Расчётная схема крана

Рассмотрим векторную алгебру как язык механики. Первым и фундаментальным шагом в построении математической модели является описание всех действующих сил в векторной форме. В расчетной схеме крана (Рис. 1). мы имеем дело с системой таких векторов: вес груза $\vec{G}$, направленный вертикально вниз; собственный вес стрелы $\vec{W}$; реакция в шарнире стрелы $\vec{R}$.

Главным преимуществом векторного подхода является универсальность записи уравнений равновесия. Условие неподвижности крана требует, чтобы сумма всех сил и сумма всех моментов сил равнялись нулю. В векторной форме

эти условия записываются компактно: $\Sigma \vec{F} = 0$, и $\Sigma \vec{M}_O = 0$, где — момент силы относительно точки О.

Момент силы также является вектором и вычисляется через векторное произведение: $\vec{M}_O = \vec{r} \cdot \vec{F}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки О в точку приложения силы. Модуль этого момента равен $|\vec{M}_O| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\theta)$. Именно векторное произведение автоматически учитывает геометрию системы и позволяет корректно вычислить вращательный эффект любой силы относительно любой точки конструкции, будь то шарнир стрелы или точка опоры крана на грунт.

Векторные уравнения являются основой, но для численных расчетов их необходимо спроецировать на оси координат.

Вводим прямоугольную систему координат с началом в шарнире стрелы. Ось ОХ направляем горизонтально вдоль оси поворота крана, ось ОУ — вертикально вверх. Ключевым параметром является угол α наклона стрелы к горизонту. Длина стрелы L является гипотенузой в прямоугольном треугольнике. Тогда координаты точки подвеса груза (конца стрелы) определяются однозначно: $x_B = L \cos(\alpha)$, $y_B = L \sin(\alpha)$.

Далее, тригонометрия позволяет разложить силы на составляющие. Например, вектор веса груза $\vec{G}$ имеет компоненты $(0, -G)$. Однако для расчета момента силы $\vec{G}$ относительно шарнира нам необходимо найти плечо этой силы. Плечо силы — это кратчайшее расстояние от линии действия силы до точки. Для силы $\vec{G}$, линия действия которой вертикальна и проходит через точку В, плечо относительно шарнира О равно как раз горизонтальной проекции радиус-вектора $\vec{r}_{OB}$, то есть $x_B = L \cos(\alpha)$. Таким образом, момент силы тяжести груза равен $M_G = GL \cos(\alpha)$. Этот наглядный пример показывает, как тригонометрическая функция напрямую определяет величину момента, стремящегося опрокинуть кран.

Объединим векторный подход и тригонометрические соотношения для вывода основной рабочей характеристики крана — зависимости максимальной грузоподъемности от угла наклона стрелы. Рассмотрим упрощенную схему, учитывающую только главные силы: вес груза $F_r = m_Q g$, массу стрелы $F_c = m_b g$, и массу контргруза $F_k = m_c g$.

Составим уравнение моментов всех сил относительно шарнира стрелы О. Условие равновесия требует, чтобы момент от груза не превышал стабилизирующих моментов от собственного веса стрелы и контргруза. Сила F_r создает опрокидывающий момент: $M_Q = m_Q g L \cos(\alpha)$. Вес стрелы m_b , приложенный в ее центре тяжести (условно в середине), создает стабилизирующий момент: $M_b = m_b g \frac{L}{2} \cos(\alpha)$. Контргруз $m_c g$ создает

стабилизирующий момент: $M_c = m_c g d_c$, где d_c — расстояние от шарнира до центра масс контргруза (горизонтальное плечо).

Приравнивая опрокидывающий и стабилизирующий моменты (в предельном состоянии устойчивости), получаем:

$$m_Q g L \cos(\alpha) = m_b g \frac{L}{2} \cos(\alpha) + m_c g d_c.$$

Сокращая на g и преобразуя, находим целевую функцию:

$$Q(\alpha) = \left(\frac{m_b}{2}\right) + \frac{m_c d_c}{L \cos(\alpha)}.$$

Данная формула $Q(\alpha)$ наглядно демонстрирует конкурентное влияние геометрии и масс. Первое слагаемое постоянно, а второе обратно пропорционально $\cos(\alpha)$. Это означает, что при уменьшении угла α (отведении стрелы к горизонту) $\cos(\alpha)$ уменьшается, а требуемый для уравнивания контргруз (или, наоборот, максимально допустимый груз Q) — растет. Однако на практике рост $Q(\alpha)$ при $\alpha \sim 0$ ограничивается не устойчивостью, а прочностью самой стрелы и механизмов.

Полученная функция $Q(\alpha)$ является монотонно убывающей на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$, так как ее производная $Q'(\alpha) = \left(\frac{m_c d_c}{L}\right) + \frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$. Это означает, что с ростом угла α грузоподъемность увеличивается, достигая максимума при $\alpha \rightarrow 90^\circ$ (стрела вертикально). Однако реальная рабочая характеристика крана имеет более сложный вид, так как рассмотренная модель была упрощенной.

Выведенная зависимость грузоподъемности от угла наклона стрелы и последующий анализ функции открывают путь к оптимизации рабочих режимов крана. Понимание этой математической основы позволяет не только использовать существующие формулы, но и создавать новые, более точные модели, учитывающие дополнительные факторы: распределенную массу стрелы, ветровые нагрузки, упругие деформации метала и т.д.

Литература:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 2018. — 352 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. — СПб.: Лань, 2019. — 448 с.
3. Александров М.П. Подъемно-транспортные машины: Учебник для вузов. — М.: ИНФРА-М, 2020. — 560 с.
4. Расчет грузовой устойчивости стреловых самоходных кранов: Методические указания. — М.: Издательство АСВ, 2021. — 98 с.