

## ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА И РЕКУРРЕНТНОГО АЛГОРИТМА К МОДЕЛИ ПЛОСКОГО МНОГОЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА СО ЗВЕНЬЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

<sup>1</sup>Борисов А.В., <sup>2</sup>Розенблат Г.М., <sup>3</sup>Чигарев А.В.

<sup>1</sup> *Филиал ГОУ ВО НИУ «Московский энергетический институт (Технический университет)» в г. Смоленске*

<sup>2</sup> *Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва*

<sup>3</sup> *Белорусский национальный технический университет, Минск*

**Введение.** Моделирование движений механизмов без конечностей, колес и гусениц только за счет трения и изменения конфигурации, является важной фундаментальной задачей, имеющей при этом много практических приложений, что определяет актуальность данного исследования. Научная новизна исследования заключается в том, что в отличие от имеющихся моделей змееподобных механизмов с абсолютно твердыми звеньями, модели со звеньями переменной длины позволяют приблизить их движения к способу перемещения гусениц и к волновому перемещению вещества. Значимость исследования заключается в увеличении количества степеней свободы в модели плоского механизма и открываемых этим возможностей для синтеза новых алгоритмов управления движением, исследовании передвижений плоских механизмов не только за счет изменения углов между звеньями, но и за счет изменения длин звеньев, в том числе для синтеза прямолинейного перемещения. Управление осуществляется в шарнирах с помощью управляющих моментов и в стержнях за счет изменения длины под действием управляющей продольной силы. Перемещение реализуется при помощи сил трения о поверхность, по которой движется механизм и изменения конфигурации механизма под действием внутренних управляющих усилий.

Цель исследования – разработка модели плоского многозвенового механизма на основе рекуррентного и матричного алгоритмов записи дифференциальных уравнений движения, обеспечивающей моделирование нелинейных свойств змееподобных устройств стержневыми механическими системами, учитывающими изменение длины звеньев, обеспечивающих перемещение за счет поперечных и продольных волнообразных движений корпуса.

Под звеном переменной длины понимается часть механизма между шарнирами в виде прямолинейной, быть может достаточно сложной механической управляемой конструкции, способной изменять свою длину вдоль направления между шарнирами, т.е. реализовывать растяжение-сжатие, но не подверженное деформациям изгиба и кручения, при этом представляющее единую динамическую систему в механизме.

### Модель с произвольным количеством масс на звене переменной длины

Используем разработанные нами методы синтеза и анализа различных моделей стержневых систем [1-3] применительно к плоскому змееподобному роботу, перемещающемуся на плоскости (рис. 1). Рассмотрим плоское движение свободной модели, что соответствует безопорной фазе движения антропоморфного механизма [4]. Данная модель является перевернутой на угол  $\pi/2$  по отношению к моделям, рассмотренным ранее [1-4]. Движение происходит в горизонтальной плоскости, а не вертикальной, как рассматривалось в [1-4]. В некотором смысле данная модель – проекция рассмотренной

трехмерной модели [5-6] на плоскость  $XOY$ . Как и прежде, угол  $\varphi_i$  – угол между осью  $OX$  и звеном  $AB$  на плоскости  $XOY$ , отсчитываемым от направления оси  $OX$  против хода часовой стрелки. Угол  $\psi_i$  при этом будет равен нулю. Поэтому данная модель является частным случаем рассмотренной выше. Дифференциальные уравнения движения можно получить из других соображений. Горизонтальная плоская модель отличается от плоской вертикальной модели только направлением действия силы тяжести.

Дифференциальные уравнения движения данной модели аналогичны уравнениям движения для антропоморфного механизма в безопорной фазе движения, за исключением слагаемого, содержащего ускорение свободного падения. Для матрицы  $A$  из [4] формула принимает вид:

$$A(q, l) = \begin{pmatrix} \theta & 0 & \eta_1 l_1 \sin \varphi_1 & \eta_2 l_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & \theta & -\eta_1 l_1 \cos \varphi_1 & -\eta_2 l_2 \cos \varphi_2 \\ \eta_1 l_1 \sin \varphi_1 & -\eta_1 l_1 \cos \varphi_1 & \zeta_1 l_1^2 & 0 \\ \eta_2 l_2 \sin \varphi_2 & -\eta_2 l_2 \cos \varphi_2 & 0 & \zeta_2 l_2^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где:  $\zeta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}^2$ ,  $\eta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}$ ,  $(i = 1, 2)$ ,  $\theta = \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta}$ .

Учитывая это, из уравнений работы [4] можно получить дифференциальные уравнения движения.

Рассматриваемая механическая системы имеет шесть степеней свободы. За обобщенные координаты, однозначно характеризующие положение механизма, примем координаты прикрепления звеньев – шарнира  $B$ :  $x(t)$ ,  $y(t)$ , два угла, которые образуют звенья с горизонталью, отсчитываемые против часовой стрелки  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  и две переменных длины звеньев  $l_1(t)$ ,  $l_2(t)$ . В дальнейших записях аргумент  $t$  для краткости будем опускать.

Запишем координаты сосредоточенных масс на звеньях в виде:

$$\begin{aligned} x_{C1\beta} &= x + l_1(1 - n_{1\beta})\cos(\pi + \varphi_1), \quad y_{C1\beta} = y + l_1(1 - n_{1\beta})\sin(\pi + \varphi_1), \\ x_{C2\beta} &= x + l_2 n_{2\beta} \cos \varphi_2, \quad y_{C2\beta} = y + l_2 n_{2\beta} \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Запишем координаты центра масс механизма:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 x_{C i \beta} m_{i \beta}}{\sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 m_{i \beta}}, \quad Y = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 y_{C i \beta} m_{i \beta}}{\sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 m_{i \beta}}. \quad (3)$$

Запишем дифференциальные уравнения движения механической системы в виде уравнений Лагранжа второго рода. В результате процедуры описанной, протестированной и отработанной выше, получаем дифференциальные уравнения движения. Обобщенные силы находим обычным образом из выражения для элементарной работы. Подставляя их в правые части соответствующих уравнений движения, получаем:

$$\begin{aligned} \theta \ddot{x} + \eta_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + \eta_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + \eta_1 l_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \eta_2 l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + \\ + 2\eta_1 \sin \varphi_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + 2\eta_2 \sin \varphi_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - \eta_1 \cos \varphi_1 \ddot{l}_1 - \eta_2 \cos \varphi_2 \ddot{l}_2 = Q_x, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \theta \ddot{y} - \eta_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - \eta_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + \eta_1 l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \eta_2 l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - \\ - 2\eta_1 \cos \varphi_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - 2\eta_2 \cos \varphi_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - \eta_1 \sin \varphi_1 \ddot{l}_1 - \eta_2 \sin \varphi_2 \ddot{l}_2 = Q_y, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\eta_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{x} - \eta_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{y} + \zeta_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + 2\zeta_1 l_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 = Q_{\varphi_1}, \quad (6)$$

$$\eta_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{x} - \eta_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{y} + \zeta_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + 2\zeta_2 l_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 = Q_{\varphi_2}, \quad (7)$$

$$-\eta_1 \cos \varphi_1 \ddot{x} - \eta_1 \sin \varphi_1 \ddot{y} - \zeta_1 l_1 \dot{\varphi}_1^2 + \zeta_1 \ddot{l}_1 = F_1, \quad (8)$$

$$-\eta_2 \cos \varphi_2 \ddot{x} - \eta_2 \sin \varphi_2 \ddot{y} - \zeta_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 + \zeta_2 \ddot{l}_2 = F_2, \quad (9)$$

$$\zeta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}^2, \quad \eta_i = \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta} n_{i\beta}, \quad (i = 1, 2), \quad \theta = \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 m_{i\beta}.$$

Здесь  $Q_x, Q_y, Q_{\varphi_1}, Q_{\varphi_2}, F_1, F_2$  – обобщенные силы, обусловленные силами сухого трения, управляющим моментом в шарнире, управляющими продольными силами обеспечивающими изменение длины звена.

Однако, если в случае с вертикальной плоской моделью, описывающей движения экзоскелета, сила трения играла роль связи с опорной поверхностью в зоне контакта стопы и обеспечивала отсутствие проскальзывания, моделировалась точечным контактом. В горизонтальной плоской модели, описывающей движения змееподобных устройств, сила трения фактически является основной, обеспечивающей целенаправленное движение механизма и требует учета. Подобные модели змееподобных роботов рассмотрены в работах Ф.Л. Черноусько [7-11].

Обозначим проекции на координатные оси силы трения, действующей на точку  $C_{i\beta}$  механизма  $F_{i\beta}^x$  и  $F_{i\beta}^y$  соответственно ( $i = 1, 2, \dots, n; \beta = 0, 1, \dots, \alpha - 1$ , где  $n$  – количество звеньев механизма,  $\alpha$  – количество масс на звене). Для рассматриваемого механизма  $n = 2, \alpha = 3$ . Тогда выражения для обобщенных сил примут вид

$$Q_x = \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 F_{i\beta}^x, \quad Q_y = \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 F_{i\beta}^y,$$

$$Q_{\varphi_1} = M + \sum_{\beta=0}^2 F_{1\beta}^x l_1 (1 - n_{1\beta}) \sin(\pi + \varphi_1) - \sum_{\beta=0}^2 F_{1\beta}^y l_1 (1 - n_{1\beta}) \cos(\pi + \varphi_1), \quad (10)$$

$$Q_{\varphi_2} = -M - \sum_{\beta=0}^2 F_{2\beta}^x l_2 n_{2\beta} \sin \varphi_2 + \sum_{\beta=0}^2 F_{2\beta}^y l_2 n_{2\beta} \cos \varphi_2.$$

При движении силы трения определяются в соответствии с законом Кулона.

$$F_{i\beta}^x = - \frac{g k_{i\beta} m_{i\beta} \dot{x}_{i\beta}}{\sqrt{\dot{x}_{i\beta}^2 + \dot{y}_{i\beta}^2}}, \quad F_{i\beta}^y = - \frac{g k_{i\beta} m_{i\beta} \dot{y}_{i\beta}}{\sqrt{\dot{x}_{i\beta}^2 + \dot{y}_{i\beta}^2}}; \quad i = 1, 2; \quad \beta = 0, 1, 2. \quad (11)$$

Здесь  $k_{i\beta}$  – коэффициент трения в точке  $C_{i\beta}$ .

В неподвижных точках контакта сила трения не превосходит по величине произведения нормальной реакции на коэффициент трения  $F_{тр.пок} < kN$  и может быть направлена произвольным образом. Трудность заключается в том, что при наличии более чем трех точек контакта система является статически неопределимой и нормальные реакции не определяются однозначно.

Таким образом, составлены дифференциальные уравнения движения двузвенника движущегося по горизонтальной плоскости со стержнями переменной длины.

Рассмотрим модель с  $n$  подвижными звеньями переменной длины с сосредоточенными массами  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) на каждом звене (рис. 2).

Такая модель с большим количеством звеньев может приближенно моделировать фактически непрерывный, а не дискретный перенос вещества по шероховатой плоскости, что имеет место в живой природе при перемещении змей, гусениц и т.п.

Уравнения движения плоского механизма состоящего из  $n$  звеньев переменной длины с сосредоточенными массами на стержнях являются системой нелинейных дифференциальных уравнений, которые в матричной форме можно представить в виде:

$$A(q, l) \ddot{q} + B(q, l) \dot{q}^2 + 2D(q, l)(\dot{l} \dot{q}) + E(q, l) \ddot{l} = M(q, l), \quad (12)$$

$$G(q, l) \ddot{q} + H(q, l) \dot{q}^2 + 2L(q, l)(\dot{l} \dot{q}) + P(q, l) \ddot{l} = F(q, l), \quad (13)$$

где:  $q$  – угловые обобщенные координаты  $q = (x, y, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ ;  $l$  – обобщенные координаты, описывающие изменения длины звеньев  $l = (x, y, l_1, \dots, l_n)^T$ ;  $A(q, l), B(q, l), G(q, l), H(q, l)$  – матрицы, учитывающие инерционные свойства;  $D(q, l), E(q, l), L(q, l), P(q, l)$  – матрицы, учитывающие переменную длину звеньев;  $M(q, l), F(q, l)$  – матрицы-столбцы

обобщенных сил;  $\ddot{q}$  – матрица-столбец обобщенных ускорений;  $\dot{q}$  – матрица-столбец обобщенных скоростей;  $(\dot{l}\dot{q})$  – матрица-столбец, составленная из произведений  $\dot{l}\dot{q}$  при равных индексах.

Матричная форма записи уравнений движения (12)-(13) полученная выше является универсальной и сохранилась в приложении не к антропоморфным, а к змееподобным устройствам. Обобщения матриц также сохраняются, поэтому здесь не приводятся. Различия заключаются в том, что нет матриц  $C(q)$  и  $K(q)$ , определяемых моментами силы тяжести. Таким образом, методы получения дифференциальных уравнений движения являются универсальными и описывают широкий класс стержневых механических систем. Разработанные методы могут быть применены не только к описанию движения экзоскелета, антропоморфного робота или эндоскелета с любым количеством звеньев переменной длины, движущимся в вертикальной плоскости, но и к змееподобным роботам, движущимся в горизонтальной плоскости. Структура матриц при этом останется такой же, только изменится их размерность, количество масс, длин звеньев и т.п. в каждом элементе матрицы, зависящими от конкретной конструкции механизма.

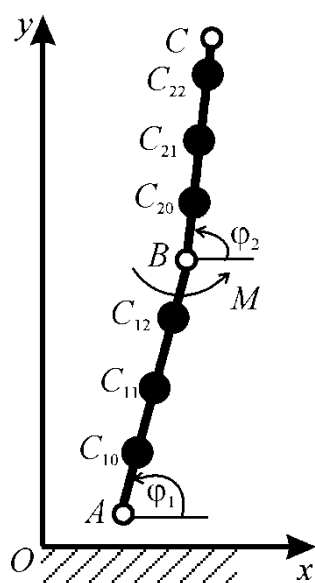


Рис. 1. Движение механизма под действием внутренних усилий и сил трения на плоскости

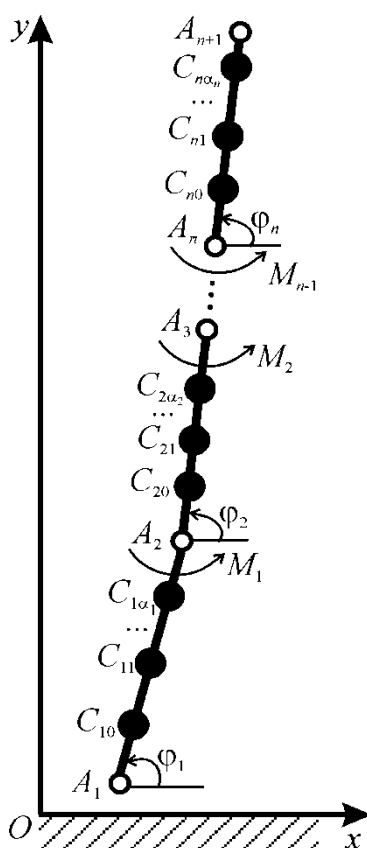


Рис. 2. Движение плоского механизма составленного из  $n$  подвижных звеньев переменной длины с произвольным количеством сосредоточенных масс на каждом звене

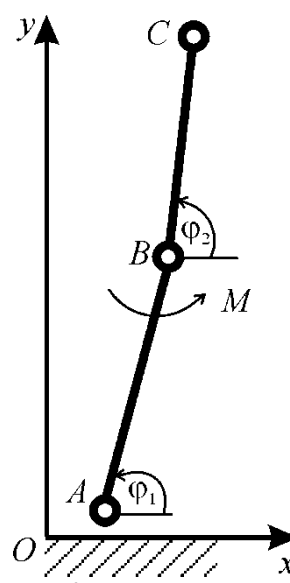


Рис. 3. Движение механизма с тремя сосредоточенными массами под действием внутренних усилий и сил трения на плоскости

Приведем сравнительную таблицу времени составления дифференциальных уравнений движения для плоского змееподобного робота (табл. 1).

Таблица 1 – Сравнение времени составления дифференциальных уравнений движения для модели экзоскелета различными методами с помощью системы компьютерной математики «Mathematica»

| Метод                           | Время, с. |         |
|---------------------------------|-----------|---------|
|                                 | 2 звена   | 3 звена |
| Уравнения Лагранжа второго рода | 5,12      | 23,57   |
| Матричный метод                 | 0,53      | 0,78    |
| Рекуррентный метод              | 0,58      | 0,84    |

Анализируя таблицу, видим, что для составления дифференциальных уравнений движения стержневых механических систем, как и прежде, наиболее эффективными и рациональными являются специально разработанные в диссертации рекуррентный и матричный методы. Различия в скорости составления уравнений нарастают с увеличением количества звеньев, эффективность предложенных методов является очевидной.

### Моделирование управляемого движения механизма на плоскости

Рассмотрим движение механизма с двумя звеньями переменной длины на плоскости. Модель имеет три сосредоточенные массы в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 3).

Обозначим сосредоточенные массы следующим образом. В точке  $A$  расположена масса  $m_1$ , в шарнире  $B$  –  $m_0$ , в точке  $C$  –  $m_2$ .

Система является статически определенной и нормальные реакции имеют вид:

$$N_A = m_1 g, N_B = m_0 g, N_C = m_2 g. \quad (14)$$

Дифференциальные уравнения движения получаются из уравнений движения рассмотренной выше модели, если положить  $n_{10} = 1$ ,  $n_{12} = 0$ ,  $n_{20} = 0$ ,  $n_{22} = 1$ ,  $m_{11} = 0$ ,  $m_{21} = 0$ , то есть  $C_{10}$  совместить с точкой  $A$ ,  $C_{12}$  и  $C_{20}$  с точкой  $B$ ,  $C_{22}$  с точкой  $C$ , а сосредоточенные массы, расположенные на стержнях между шарнирами считать равными нулю. Таким образом, для данной модели дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$\theta \ddot{x} + m_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + 2m_1 \sin \varphi_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - 2m_2 \sin \varphi_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - m_1 \cos \varphi_1 \ddot{l}_1 + m_2 \cos \varphi_2 \ddot{l}_2 = Q_x, \quad (15)$$

$$\theta \ddot{y} - m_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - 2m_1 \cos \varphi_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + 2m_2 \cos \varphi_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - m_1 \sin \varphi_1 \ddot{l}_1 + m_2 \sin \varphi_2 \ddot{l}_2 = Q_y, \quad (16)$$

$$m_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{x} - m_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{y} + m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + 2m_1 l_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 = Q_{\varphi_1}, \quad (17)$$

$$-m_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{x} + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{y} + m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + 2m_2 l_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 = Q_{\varphi_2}, \quad (18)$$

$$-m_1 \cos \varphi_1 \ddot{x} - m_1 \sin \varphi_1 \ddot{y} - m_1 l_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_1 \ddot{l}_1 = F_1, \quad (19)$$

$$m_2 \cos \varphi_2 \ddot{x} + m_2 \sin \varphi_2 \ddot{y} - m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 \ddot{l}_2 = F_2, \quad \theta = \sum_{i=0}^2 m_i. \quad (20)$$

Здесь  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_{\varphi_1}$ ,  $Q_{\varphi_2}$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  – обобщенные силы, обусловленные силами сухого трения, управляющим моментом в шарнире, управляющими продольными силами обеспечивающими изменение длины звена.

Обозначим проекции на координатные оси силы трения, действующей на точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  механизма  $F_A^x$ ,  $F_B^x$ ,  $F_C^x$  и  $F_A^y$ ,  $F_B^y$ ,  $F_C^y$ , соответственно. Тогда выражения для обобщенных сил примут вид

$$Q_x = F_A^x + F_B^x + F_C^x, \quad Q_y = F_A^y + F_B^y + F_C^y, \quad (21)$$

$$Q_{\varphi_1} = M + F_A^x l_1 \sin(\pi + \varphi_1) - F_A^y l_1 \cos(\pi + \varphi_1), \quad Q_{\varphi_2} = -M - F_C^x l_2 \sin \varphi_2 + F_C^y l_2 \cos \varphi_2.$$

При движении силы трения определяются в соответствии с законом Кулона.

$$F_A^x = -\frac{gk_1 m_1 \dot{x}_A}{\sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}}, \quad F_B^x = -\frac{gk_0 m_0 \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad F_C^x = -\frac{gk_2 m_2 \dot{x}_C}{\sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}}, \quad (22)$$

$$F_A^y = -\frac{gk_1m_1\dot{y}_A}{\sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}}, \quad F_C^y = -\frac{gk_0m_0\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad F_C^y = -\frac{gk_2m_2\dot{y}_C}{\sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}}.$$

Здесь  $k_0, k_1, k_2$  – коэффициенты трения в точках  $B, A, C$  соответственно.

В неподвижных точках контакта сила трения не превосходит по величине произведения нормальной реакции на коэффициент трения  $F_{тр.пок} < kN$  и может быть направлена произвольным образом. В модели имеется три точки контакта. Поэтому система является статически определимой и нормальные реакции определяются однозначно.

Рассмотрим модель с абсолютно твердыми невесомыми звеньями и сосредоточенными точечными массами на концах звеньев (рис. 3), аналогичную работе [8], разница заключается только в способе отсчета угла  $\varphi_1$ .

Обозначим сосредоточенные массы следующим образом. В точке  $A$  расположена масса  $m_1 = 1$  кг, в шарнире  $B - m_0 = 4$  кг, в точке  $C - m_2 = 3$  кг. Длины звеньев:  $AB = l_1 = 0,385$  м,  $BC = l_2 = 1,365$  м. Такие значения выбраны в соответствии с критериями, приводимыми в упоминавшийся выше работе.

Для данной модели дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$\theta \ddot{x} + m_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 = Q_x, \quad (23)$$

$$\theta \ddot{y} - m_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 = Q_y, \quad (24)$$

$$m_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{x} - m_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{y} + m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 = Q_{\varphi 1}, \quad (25)$$

$$-m_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{x} + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{y} + m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 = Q_{\varphi 2}, \quad \theta = \sum_{i=0}^2 m_i. \quad (26)$$

Здесь  $Q_x, Q_y, Q_{\varphi 1}, Q_{\varphi 2}, F_1, F_2$  – обобщенные силы, обусловленные силами сухого трения, управляющим моментом в шарнире, управляющими продольными силами обеспечивающими изменение длины звена.

Обозначим проекции на координатные оси силы трения, действующей на точки  $A, B, C$  механизма  $F_A^x, F_B^x, F_C^x$  и  $F_A^y, F_B^y, F_C^y$ , соответственно. Тогда выражения для обобщенных сил примут вид

$$\begin{aligned} Q_x &= F_A^x + F_B^x + F_C^x, \quad Q_y = F_A^y + F_B^y + F_C^y, \\ Q_{\varphi 1} &= F_A^x l_1 \sin(\pi + \varphi_1) - F_A^y l_1 \cos(\pi + \varphi_1) - F_C^x l_2 \sin \varphi_2 + F_C^y l_2 \cos \varphi_2, \\ Q_{\varphi 2} &= M - F_C^x l_2 \sin \varphi_2 + F_C^y l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (27)$$

При движении силы трения определяются в соответствии с законом Кулона.

$$\begin{aligned} F_A^x &= -\frac{gk_1m_1\dot{x}_A}{\sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}}, \quad F_B^x = -\frac{gk_0m_0\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad F_C^x = -\frac{gk_2m_2\dot{x}_C}{\sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}}, \\ F_A^y &= -\frac{gk_1m_1\dot{y}_A}{\sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}}, \quad F_C^y = -\frac{gk_0m_0\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad F_C^y = -\frac{gk_2m_2\dot{y}_C}{\sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $k_0, k_1, k_2$  – коэффициенты трения в точках  $B, A, C$  соответственно. Их считаем одинаковыми и равными 0,4.

В неподвижных точках контакта сила трения не превосходит по величине произведения нормальной реакции на коэффициент трения  $F_{тр.пок} < kN$  и может быть направлена произвольным образом. В этой модели имеется три точки контакта. Поэтому система является статически определимой и нормальные реакции определяются однозначно.

Задача заключается в моделировании управляемого движения данного механизма, считая заданными все массы, коэффициенты трения, управляющие воздействия: управляющие моменты и продольные силы. Для этого необходимо провести численное решение задачи Коши для полученной системы дифференциальных уравнений движения.

Начальные условия:  $x_0 = 0,5$  м,  $y_0 = 0,4$  м,  $\varphi_{10} = 0$  рад,  $\varphi_{20} = 0$  рад,  $\dot{x}_0 = 0,01$  м/с,  $\dot{y}_0 = 0,01$  м/с,  $\dot{\varphi}_{10} = 0$  рад/с,  $\dot{\varphi}_{20} = 0$  рад/с (рис. 4). Время интегрирования  $t_k = 0,5$  с.

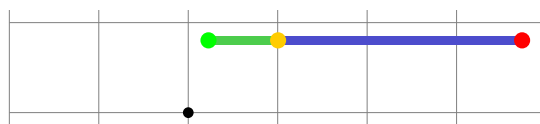


Рис. 4. Начальное положение механизма (черной точкой отмечено начало координат)

Проведем численное решение полученной системы дифференциальных уравнений движения с заданными значениями параметров и управляющими моментами.

Момент задается в виде кусочной функции: при  $t < t_k/2$ ,  $M = -3,5$  Нм; при  $t \geq t_k/2$ ,  $M = 3,0$  Нм. Получаем следующие результаты (рис. 5).

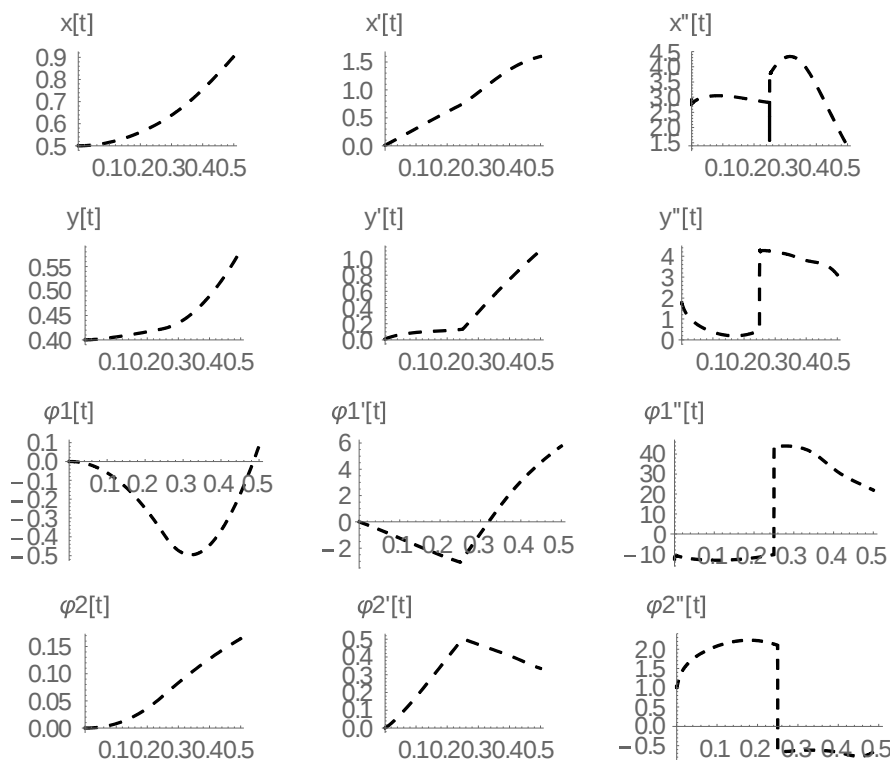


Рис. 5. Результаты численного решения системы дифференциальных уравнений движения плоского механизма

Кадры анимации движения представлены на рис. 6.

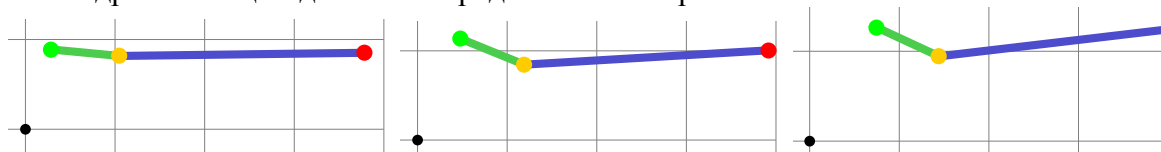


Рис. 6. Кадры анимационной визуализации численного решения системы дифференциальных уравнений движения плоского механизма

Таким образом, проведены численные расчеты движения змееподобного робота и по полученному результату решения синтезирована анимация движения. В данном расчете использовано самое простое управление с помощью постоянных управляющих моментов. Показана адекватность полученного движения реальности. Синтез алгоритмов движения, обеспечивающих более сложные траектории при перемещениях плоского механизма не является целью данного исследования и, кроме того, подробно описано в работах Черноушко Ф.Л. и соавторов [7-11]. Здесь показана применимость разработанных в диссертации методов к модели плоского механизма.

Однако, в отличие от антропоморфных систем, ведущую роль здесь имеют силы трения, подробно исследованные в работах [12-15]. Алгоритмы управления движением

здесь иные и подробное исследование динамики плоского змееподобного робота является темой отдельного исследования.

### Модель с телескопическими звеньями

Рассмотрим следующий способ передвижения. Пусть звено робота имеет телескопическую конструкцию (рис. 7).

Соответственно, поступательное движение звена реализуется за счет изменения длины звена и анизотропного покрытия нижней части робота, непосредственно контактирующей с поверхностью. Перемещение происходит в два этапа. На первом этапе перемещается вперед начальная часть звена, за счет сил сопротивления ниже в данном направлении. На втором этапе первая часть звена, сместившаяся вперед, подтягивает остальную конструкцию. Схематически подобная модель анизотропного трения может быть реализована следующим образом (рис. 8). Если будет возможность регулировать направление анизотропного сцепления с поверхностью, робот сможет не разворачиваясь двигаться в обратном направлении.

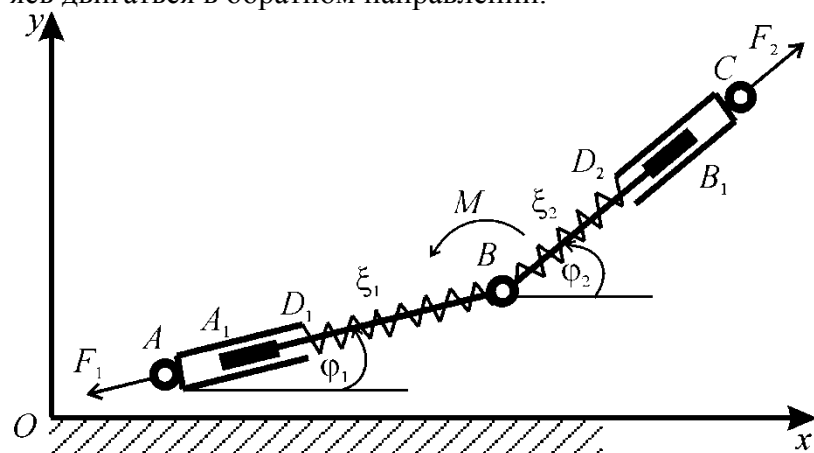


Рис. 7. Модель ползающего робота с двумя звеньями телескопической конструкции



Рис. 8. Схематическая модель зоны контакта, обеспечивающая анизотропное трение

Повороты робота реализуются за счет момента в шарнире. Повтором и комбинацией таких поступательных и вращательных движений робот может реализовывать целенаправленное движение и перемещаться по плоскости в любую заданную точку.

Рассматриваемая механическая системы имеет шесть степеней свободы. За обобщенные координаты, однозначно характеризующих положение механизма, примем координаты прикрепления звеньев – шарнира B:  $x(t)$ ,  $y(t)$ , два угла, которые, как и ранее, образуют звенья с горизонталью, отсчитываемые против часовой стрелки  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  и две переменных длины звеньев  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$ . В дальнейших записях аргумент  $t$  для краткости будем опускать.

Система имеет два весомих звена переменной длины телескопической конструкции AB и BC. Каждое такое звено состоит из двух весомих абсолютно жестких частей:  $AD_1 = l_{12}$ ,  $BA_1 = l_{11}$  и  $BB_1 = l_{21}$ ,  $D_2C = l_{22}$ . На рис. 7 схематично изображена конструкция и введены соответствующие обозначения. Длины звеньев  $AB = l_1$ ,  $CD = l_2$ . Пружинные элементы на участках  $D_1B = \xi_1$  и  $BD_2 = \xi_2$  моделирует восстанавливающую силу. Сама пружина считается невесомой. Также пренебрегаем силой трения штока  $A_1B$  о корпус  $AD_1$  и штока  $BB_1$  о корпус  $D_2C$ .

Для звена AB масса штока  $A_1B$  равна  $m_{11}$  момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения  $I_{11}$ , у корпуса  $AD_1$  масса равна  $m_{12}$ , момент инерции относительно оси проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения  $I_{12}$ .

Для звена BC масса штока  $BB_1$  равна  $m_{21}$  момент инерции относительно оси, про-

ходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения  $I_{21}$ , у корпуса  $D_2C$  масса равна  $m_{22}$ , момент инерции относительно оси проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения  $I_{22}$ .

Тогда кинетическая энергия механизма будет складываться из энергий отдельных звеньев.

$$T = T_{A_1B} + T_{AD_1} + T_{BB_1} + T_{D_2C}.$$

$$\begin{aligned} T_{A_1B} &= [m_{11}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l_{11}n_{11}\dot{\phi}_1(\dot{x}\sin\phi_1 - \dot{y}\cos\phi_1)) + I_{11}n_{11}^2\dot{\phi}_1^2]/2 \\ T_{AD_1} &= [m_{12}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\xi}_1^2 + \xi_1(l_{12} + \xi_1)\dot{\phi}_1^2 + \dot{x}(\dot{\phi}_1(l_{12} + 2\xi_1)\sin\phi_1 - 2\dot{\xi}_1\cos\phi_1) - \\ &\quad - \dot{y}(\dot{\phi}_1(l_{12} + 2\xi_1)\cos\phi_1 + 2\dot{\xi}_1\sin\phi_1) + I_{12}\dot{\phi}_1^2)/2 \\ T_{BB_1} &= [m_{21}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - l_{21}n_{21}\dot{\phi}_2(\dot{x}\sin\phi_2 - \dot{y}\cos\phi_2)) + I_{21}n_{21}^2\dot{\phi}_2^2]/2 \\ T_{D_2C} &= [m_{22}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\xi}_2^2 + \xi_2(l_{22} + \xi_2)\dot{\phi}_2^2 - \dot{x}(\dot{\phi}_2(l_{22} + 2\xi_2)\sin\phi_2 - 2\dot{\xi}_2\cos\phi_2) + \\ &\quad + \dot{y}(\dot{\phi}_2(l_{22} + 2\xi_2)\cos\phi_2 + 2\dot{\xi}_2\sin\phi_2) + I_{22}\dot{\phi}_2^2)/2 \end{aligned} \quad (29)$$

Дифференциальные уравнения движения, составленные с помощью уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид.

$$\theta\ddot{x} + \eta_1\sin\phi_1\ddot{\phi}_1 - \eta_2\sin\phi_2\ddot{\phi}_2 + \eta_1\cos\phi_1\dot{\phi}_1^2 - \eta_2\cos\phi_2\dot{\phi}_2^2 + 2m_{12}\sin\phi_1\dot{\xi}_1\dot{\phi}_1 - 2m_{22}\sin\phi_2\dot{\xi}_2\dot{\phi}_2 - m_{12}\cos\phi_1\ddot{\xi}_1 + m_{22}\cos\phi_2\ddot{\xi}_2 = Q_x, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \theta\ddot{y} - \eta_1\cos\phi_1\ddot{\phi}_1 + \eta_2\cos\phi_2\ddot{\phi}_2 + \eta_1\sin\phi_1\dot{\phi}_1^2 - \eta_2\sin\phi_2\dot{\phi}_2^2 - \\ - 2m_{12}\cos\phi_1\dot{\xi}_1\dot{\phi}_1 + 2m_{22}\cos\phi_2\dot{\xi}_2\dot{\phi}_2 - m_{12}\sin\phi_1\ddot{\xi}_1 + m_{22}\sin\phi_2\ddot{\xi}_2 = Q_y, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\eta_1\sin\phi_1\ddot{x} - \eta_1\cos\phi_1\ddot{y} + (I_{11}n_{11}^2 + I_{12} + m_{12}\xi_1(\xi_1 + l_{12}))\ddot{\phi}_1 + 2m_{12}(\xi_1 + l_{12}/2)\dot{\xi}_1\dot{\phi}_1 = Q_{\phi_1}, \quad (32)$$

$$-\eta_2\sin\phi_2\ddot{x} + \eta_2\cos\phi_2\ddot{y} + (I_{21}n_{21}^2 + I_{22} + m_{22}\xi_2(\xi_2 + l_{22}))\ddot{\phi}_2 + 2m_{22}(\xi_2 + l_{22}/2)\dot{\xi}_2\dot{\phi}_2 = Q_{\phi_2}, \quad (33)$$

$$-m_{12}\cos\phi_1\ddot{x} - m_{12}\sin\phi_1\ddot{y} - m_{12}(\xi_1 + l_{12}/2)\dot{\phi}_1^2 + m_{12}\ddot{\xi}_1 = F_1, \quad (34)$$

$$-m_{22}\cos\phi_2\ddot{x} - m_{22}\sin\phi_2\ddot{y} - m_{22}(\xi_2 + l_{22}/2)\dot{\phi}_2^2 - m_{22}\ddot{\xi}_2 = F_2, \quad (35)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 m_{ij}, \quad \eta_i = m_{i1}l_{i1}n_{i1}/2 + m_{i2}(\xi_i + l_{i2}/2), \quad i = 1, 2.$$

Здесь  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_{\phi_1}$ ,  $Q_{\phi_2}$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  – обобщенные силы, обусловленные силами сухого трения, управляющим моментом в шарнире, управляющими продольными силами обеспечивающими изменение длины звена.

Однако, если в случае с вертикальной плоской моделью, описывающей движения экзоскелета, сила трения играла роль связи с опорной поверхностью в зоне контакта стопы и обеспечивала отсутствие проскальзывания, моделировалась точечным контактом. В горизонтальной плоской модели, описывающей движения змееподобных устройств, сила трения фактически является основной, обеспечивающей целенаправленное движение механизма и требует специального учета. Подобные модели змееподобных роботов рассмотрены в работах [7-11].

Обозначим проекции на координатные оси силы трения, действующей на точку  $C_{i\beta}$  механизма  $F_{i\beta}^x$  и  $F_{i\beta}^y$  соответственно ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $\beta = 0, 1, \dots, \alpha - 1$ , где  $n$  – количество звеньев механизма,  $\alpha$  – количество масс на звене). Для рассматриваемого механизма  $n = 2$ ,  $\alpha = 3$ . Тогда выражения для обобщенных сил примут вид

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 F_{i\beta}^x, \quad Q_y = \sum_{i=1}^2 \sum_{\beta=0}^2 F_{i\beta}^y, \\ Q_{\phi_1} &= M + \sum_{\beta=0}^2 F_{1\beta}^x l_1(1 - n_{1\beta})\sin(\pi + \phi_1) - \sum_{\beta=0}^2 F_{1\beta}^y l_1(1 - n_{1\beta})\cos(\pi + \phi_1), \\ Q_{\phi_2} &= -M - \sum_{\beta=0}^2 F_{2\beta}^x l_2 n_{2\beta}\sin\phi_2 + \sum_{\beta=0}^2 F_{2\beta}^y l_2 n_{2\beta}\cos\phi_2. \end{aligned} \quad (36)$$

При движении силы трения определяются в соответствии с законом Кулона.

$$F_{i\beta}^x = -\frac{gk_{i\beta}m_{i\beta}\dot{x}_{i\beta}}{\sqrt{\dot{x}_{i\beta}^2 + \dot{y}_{i\beta}^2}}, \quad F_{i\beta}^y = -\frac{gk_{i\beta}m_{i\beta}\dot{y}_{i\beta}}{\sqrt{\dot{x}_{i\beta}^2 + \dot{y}_{i\beta}^2}}; \quad i = 1, 2; \quad \beta = 0, 1, 2. \quad (37)$$

Здесь  $k_{i\beta}$  – коэффициент трения в точке  $C_{i\beta}$ .

В неподвижных точках контакта сила трения не превосходит по величине произведения нормальной реакции на коэффициент трения  $F_{тр.пок} < kN$  и может быть направлена произвольным образом. Трудность заключается в том, что при наличии более чем трех точек контакта система является статически неопределимой и нормальные реакции не определяются однозначно.

**Заключение.** Таким образом, составлены дифференциальные уравнения движения плоского двузвенника движущегося по горизонтальной плоскости со стержнями переменной длины. Разработанный метод анализа стержневых механических систем является универсальным и может использоваться для анализа различных стержневых механизмов: манипуляторов, экзоскелетов, антропоморфных роботов, змееподобных роботов и т.д. Класс подобных систем очень широк. Практическое применение разработанных моделей – это перемещения по труднодоступным участкам, что является актуальным и востребованным.

### Литература

1. Борисов А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им / А. В. Борисов, Г. М. Розенблат // ПММ. – 2017. – Т. 81 – № 5. – С. 511-522.
2. Borisov A. V. Twelve-Link Exoskeleton with Biological Endoskeleton Properties / A. V. Borisov, L. V. Konchina, A. V. Chigarev // Journal of Machinery Manufacturing and Automation. – Sept. 2015, Vol. 4 Iss. 3, PP. 23-37. Режим доступа: <http://www.academicpub.org/jmma/paperInfo.aspx?PaperID=16611>
3. Чигарев А. В. Рекурсивный метод получения дифференциальных уравнений движения деформируемых плоских антропоморфных систем в безопорной и двухопорной фазах движения / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник – Минск, БНТУ. – 2015. – Вып. 30. – С. 70-81.
4. Борисов А. В. Дифференциальные уравнения движения плоских стержневых систем со звеньями переменной длины в безопорной и двухопорной фазах движения для моделирования опорно-двигательного аппарата человека, экзоскелета и антропоморфного робота / А. В. Борисов // Международный научный теоретико-практический альманах. Смоленск, 2017. – Вып. 2. – С. 153-165.
5. Чигарев А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения пространственных стержневых антропоморфных систем типа экзоскелета со звеньями переменной длины / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник – Минск, БНТУ. – 2017. – Вып. 32. – С. 52-58.
6. Борисов А. В. Трехмерные модели стержневых систем со звеньями переменной длины с сосредоточенными массами и с абсолютно твердым весомым стержнем и невесомым участком изменяющим длину / А. В. Борисов // Международный научный теоретико-практический альманах. Смоленск, 2017. – Вып. 2. – С. 186-211.
7. Борисенко И. Н. О квазистатических движениях системы трех тел на плоскости / И. Н. Борисенко, Т. Ю. Фигурина, Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т. 78. № 3. – С. 316-327.
8. Черноусько Ф. Л. Влияние сил трения на динамику двузвенного мобильного робота / Ф. Л. Черноусько, М. М. Шундерюк // Прикладная математика и механика. –

2010. – Т. 74, Вып. 1. – С. 22-36.
9. Черноушко Ф. Л. Движение многозвенника по горизонтальной плоскости. / Ф. Л. Черноушко // Доклады Академии Наук. – 2000. – Т. 370, № 2. – С. 186-189.
  10. Черноушко Ф. Л. Локомоция многозвенных систем на плоскости: динамика, управление, оптимизация / Ф. Л. Черноушко, Н. Н. Болотник. – М. : Издательство ИПМех РАН (Препринт № 1128), 2016. – 154 с.
  11. Черноушко Ф. Л. Методы управления нелинейными механическими системами. / Ф. Л. Черноушко, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
  12. Розенблат Г. М. Динамические системы с сухим трением / Г. М. Розенблат. – Москва-Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2006. – 204 с.
  13. Розенблат Г. М. О движении тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками / Г. М. Розенблат // Прикладная математика и механика. – 2011. – № 2, Т. 75. – С. 254-258.
  14. Розенблат Г. М. Об интегрировании уравнений движения тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками / Г. М. Розенблат // Доклады академии наук. – 2010. – № 4, Т. 435. – С. 475-478.
  15. Розенблат Г. М. Равновесие твердого тела на плоскости с анизотропным сухим трением / Г. М. Розенблат // Прикладная математика и механика. – 2009. – № 2, Т. 73. – С. 204-218.