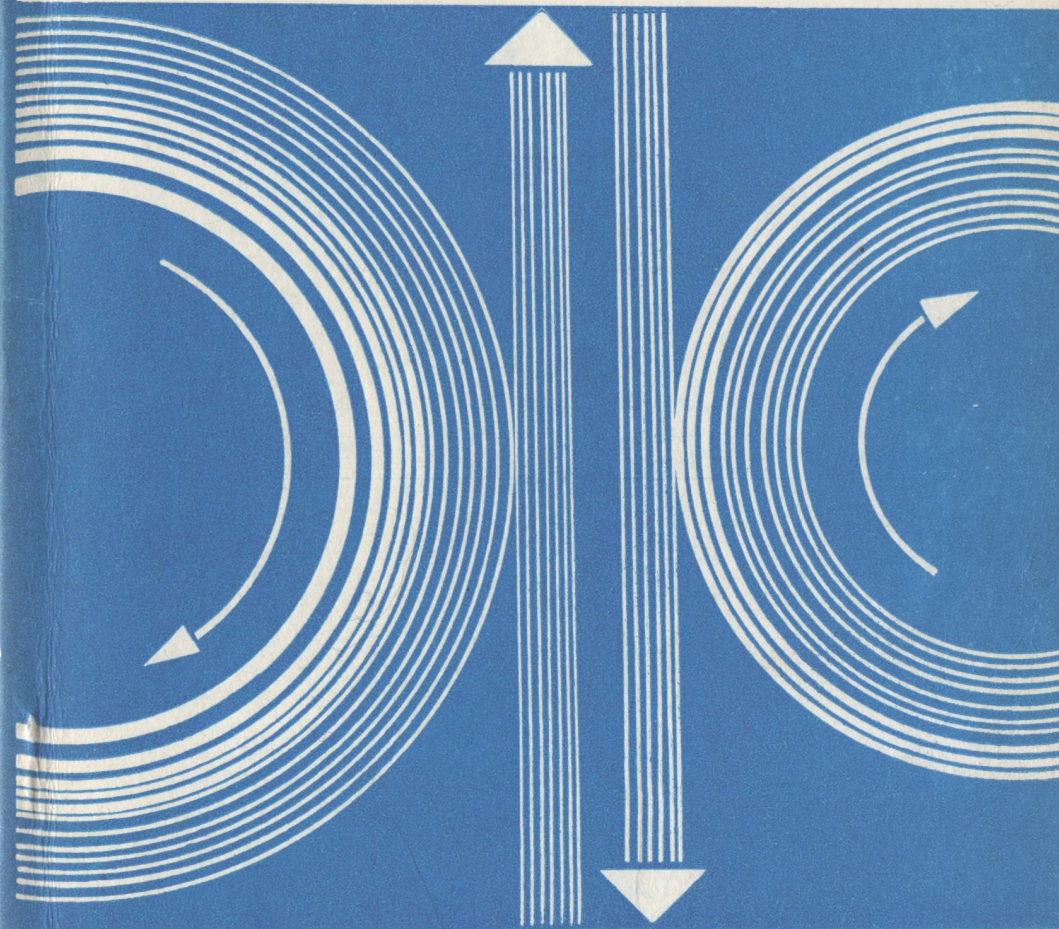


53/
Т 33

ISSN 0134-9635

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»

Министерство высшего и среднего специального
образования БССР
Белорусский ордена Трудового Красного Знамени
политехнический институт

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 8

Г л а в н ы й р е д а к т о р

А.Х.Ким, доктор технических наук, профессор

Р е д а к ц и о н н ы й с о в е т:

А.Е.Крушевский, Е.Н.Ламбина, М.А.Левин, С.А.Пахуто,
И.А.Прусов, Л.А.Ротт, Г.К.Татур

Ответственный за выпуск

И.Ф.Шидловский

А.Е. Крушевский, А.З. Севенюк

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРА ЧАСТОТ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В расчетах на прочность стержней при динамической нагрузке необходимо знать собственные функции, зависящие от собственных чисел (частот). На практике при определении спектра собственных частот стержней пользуются приближенной технической теорией. Задача точного определения спектра собственных частот стержней является сложной ввиду больших математических трудностей. В статье [1] дано построение структуры решения данной задачи для упругого параллелепипеда с учетом полиномов третьей степени. Естественно возникает вопрос: можно ли построить структуру решения при учете полиномов любой степени? Это, во-первых, позволит строить решение задачи в более уточненной постановке, а, во-вторых, появится возможность рассмотреть более сложные формы поперечного сечения по сравнению с прямоугольником. Вследствие того, что в поставленной задаче стержень закреплен одним своим концом, при построении решения исключим из рассмотрения упругие перемещения, не зависящие от продольной координаты z стержня. Структуру решения задачи для упругого параллелепипеда при отсутствии нагрузки на его четырех гранях получим, обобщая результаты статьи [1] с учетом вышесказанного

$$u = x \sum_{m=1} \left[\frac{1}{2m+1} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - x^{2m} \right) - \frac{2m}{4^{m-1} d_z^2} \right] d_z w_{2m,0};$$

$$v = y \sum_{n=1} \left[\frac{1}{2n+1} \left(\frac{b^{2n}}{4^n} - y^{2n} \right) - \frac{2n}{4^{n-1} d_z^2} \right] d_z w_{0,2n};$$

$$w = w_{00} + \sum_{m=1} x^{2m} w_{2m,0} + \sum_{n=1} y^{2n} w_{0,2n} + \left(\frac{d^2}{4} - x^2 \right)^2 x$$

$$x \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right)^2 \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m} y^{2n} w_{2m+4, 2n+4}.$$

Уравнения связей, полученных из условия отсутствия напряжений на гранях $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$, имеют вид:

$$\begin{aligned} & \gamma_2 d_z W_{00} + \sum_{m=1} \left[\left(\frac{\gamma}{2m+1} - 2 \right) \frac{a^{2m}}{4^m} - \frac{2\gamma m}{4^{m-1}} \frac{a^{2m-2}}{d_z^2} \right] d_z W_{2m,0} + \\ & + \gamma_2 \sum_{n=1} \left(\frac{1}{2n+1} \frac{b^{2n}}{4^n} - \frac{2nb^{2n-2}}{4^{n-1} d_z^2} \right) d_z W_{0,2n} = 0; \\ & \gamma_2 d_z W_{00} + \gamma_2 \sum_{m=1} \left(\frac{1}{2m+1} \frac{a^{2m}}{4^m} - \frac{2ma^{2m-2}}{4^{m-1} d_z^2} \right) d_z W_{2m,0} + \\ & + \sum_{n=1} \left[\left(\frac{\gamma}{2n+1} - 2 \right) \frac{b^{2n}}{4^n} - \frac{2\gamma nb^{2n-2}}{4^{n-1} d_z^2} \right] d_z W_{0,2n} = 0. \end{aligned}$$

Для выполнения условий отсутствия напряжений на поверхности цилиндрического отверстия запишем выражения для поверхностных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{R^2} (x^2 \sigma_x + 2xy \tau_{xy} + y^2 \sigma_y); \\ \tau_{n\theta} &= \frac{1}{R^2} [xy (\sigma_y - \sigma_x) + (x^2 - y^2) \tau_{xy}]; \\ \tau_{nz} &= \frac{1}{R^2} (x \tau_{xz} + y \tau_{yz}). \end{aligned}$$

Результаты проделанных выкладок показали, что для выполнения поставленных условий потребовались степенные ряды до 22-й степени включительно.

Уравнения связей, полученных из условий отсутствия напряжений σ_n , $\tau_{n\theta}$, τ_{nz} на цилиндрической поверхности, записываются в виде:

$$\sigma_n = 0 \quad \text{при } r = R$$

1. $\sum_{m=1}^{11} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - R^2 \right) W_{2m,0}^1 = 0;$
2. $\frac{2}{R^2} \sum_{m=1}^{11} m R^{2m} W_{2m,0}' + \gamma_2 \sum_{m=1}^{11} \left\{ R^{2m} \frac{a^4}{16} \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right)^2 + R^{2m+2} \left[\frac{a^4}{8} x \right. \right.$

$$\times \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right) - \frac{a^2}{2} \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right)^2 + R^{2m+4} \left[\frac{a^4}{16} - a^2 \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right) + \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right)^2 \right] + R^{2m+6} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} - 2R^2 \right) + R^{2m+8} \} W_{2(m+2),6}^1 = 0;$$

$$3. \quad 2 \sum_{m=1}^{11} (-1)^{K+1} C_{m+1}^{m-K} R^{2(m-K-1)} W_{2m,0}^1 + \frac{2}{R^2} W_{0,2K}^1 +$$

$$+ \delta \sum_{m=1}^{m+n=7} \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \times$$

$$\times \left\{ C_m^{K-n+1} \frac{a^4}{16} \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right)^2 + C_{m+1}^{K-n+1} R^2 \left[\frac{a^4}{8} \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right) - \frac{a^2}{2} \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right)^2 \right] + C_{m+2}^{K-n+1} R^4 \left[\frac{a^4}{16} - a^2 \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right) + \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right)^2 \right] + C_{m+3}^{K-n+1} R^6 \left(\frac{b^2 - a^2}{2} - 2R^2 \right) + C_{m+4}^{K-n+1} R^8 \right\} R^{2(m+n-K-1)} W_{2(m+2),2(n+2)}^1 = 0;$$

$$\tau_{n\theta} = 0 \quad \text{при } r = R.$$

$$4. \quad \sum_{m=1}^{11} \left[\left(\frac{a^{2m}}{4^m} - R^{2m} \right) W_{2m,0}^1 - \sum_{n=1}^{11} \frac{b^{2n}}{4^n} W_{0,2n}^1 \right] = 0;$$

$$5. \quad (-1)^{K-1} \sum_{m=1}^{11} R^{2(m-K)} C_m^{m-K} W_{2m,0}^1 + W_{0,2K}^1 = 0;$$

$$\tau_{nz} = 0 \quad \text{при } r = R;$$

$$6. \quad \sum_{m=1}^{11} \left[\frac{1}{2m+1} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - R^{2m} \right) W_{2m,0}^{11} - 2m \left(\frac{a^{2m-2}}{4^{m-1}} - R^{2m-2} \right) W_{2m,0} \right] = 0;$$

$$7. \quad \sum_{m=1}^{11} \left[\frac{m}{2m+1} R^{2m-2} W_{2m,0}^{11} - 2m(m-1) R^{2m-4} W_{2m,0} \right] + \sum_{n=1}^{11} \left[\frac{1}{(2n+1)R^2} \frac{b^{2n}}{4^n} W_{0,2n}^{11} - \frac{2(n+1)}{R^2} \frac{b^{2n}}{4^n} W_{0,2n+2} \right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^6 \frac{b^4}{8} R^{2m-2} \left[(m+1) \frac{a^4}{16} - (m+2) \frac{a^2 R^2}{2} + (m+3) R^4 \right] W_{2m+4,6} = 0;$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & (-1)^{K-1} \sum_{m=1}^{11} [C_{m+1}^{m-K} R^{2(m-K)} \frac{W_{2m,0}^{11}}{2m+1} - 2m C_m^{m-K-1} R^{2(m-K-1)} \times \\
& \times W_{2m,0}^{11}] + \frac{1}{2K+1} W_{0,2K}^{11} - 2(K+1) W_{0,2K+2}^{11} + \\
& + \sum_{m=1}^{m+n=7} \sum_{n=1}^{n+1} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{a^4}{8} \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right) [(m+n) \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right) - 2R^2] C_m^{K-n+1} + \right. \\
& + R^2 [(m+n+1) \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right) (a^2 - b^2 + 4R^2) - a^2 R^2 + 8R^2 \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right)] \frac{a^2}{4} C_{m+1}^{K-n+1} + \\
& + R^4 [(m+n+2) \left(\frac{a^4 + b^4}{8} + 2R^4 - b^2 R^2 + 2a^2 R^2 - \frac{a^2 b^2}{2} \right) - 4R^2 \left(\frac{b^2}{4} - R^2 \right) + \\
& + 2a^2 R^2] C_{m+2}^{K-n+1} + R^6 [(m+n+3) (b^2 - a^2 - 4R^2) - 4R^2] C_{m+3}^{K-n+1} + \\
& \left. + 2R^8 (m+n+4) C_{m+4}^{K-n+1} \right\} R^{2(m+n-K-1)} W_{2m+4, 2n+4}^{11} = 0; \\
& K = 1, 2, \dots, 11.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е., Севенюк А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 5.

УДК 539.3

А.Е.Крушевский, О.Н.Скляр

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ОТСУТСТВИИ НАГРУЗКИ НА ЧЕТЫРЕХ ГРАНЯХ

Построение структуры решения задачи изгиба для рядов аппроксимирующих функций любой степени имеет важное теоретическое и практическое значение, так как построенные ряды позволяют получать уточнение задачи с любой степенью точности [1].

Решение задачи строится следующим образом. Записываем ряды аппроксимирующих функций:

$$U = \sum_{m_1=1; n_1=1}^{m+n=\infty} x^{2m-1} y^{2n-1} U_{2m-1; 2n-1}(z);$$

$$V = \sum_{m_1=1; n_1=1}^{m+n=\infty} x^{2m-2} y^{2n-2} V_{2m-2; 2n-2}(z);$$

$$W = \sum_{m_1=1; n_1=1}^{m+n=\infty} x^{2m-2} y^{2n-1} W_{2m-2; 2n-1}(z).$$

Далее, исходя из условий отсутствия нагрузки на боковой поверхности записываем уравнения связей [2].

Условия на боковой поверхности (рис. 1):

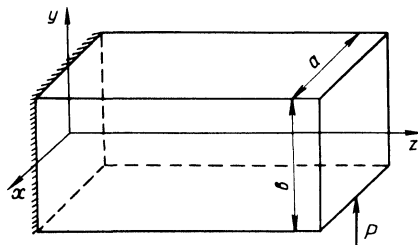


Рис. 1. Изгиб упругого параллелепипеда сосредоточенной силой P.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \gamma G \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma_2 G \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0; \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0; \\ \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0; \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \gamma G \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma_2 G \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0; \\ \tau_{yx} &= G \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0; \\ \tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{при } y = \pm \frac{b}{2}$$

Задача разбивается на IV напряженных состояния.

I напряженное состояние

$$U = 0;$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{b}{2} \right)^{2n} \left[y^2 d_z - \frac{n}{n+1} \left(\frac{b}{2} \right)^2 d_z - \frac{4n}{d_z} \right] - \frac{y^{2n+2}}{n+1} d_z \right\} W_{0,2n+1};$$

$$W = y \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n} \right) W_{0,2n+1}.$$

II напряженное состояние

a) $U = 0; W = 0;$

$$V = x^2 \left\{ \left[x^{2m+2} - (m+2) \frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} - (m+1) \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m} \right] \left[y^{2n+2} - \left(\frac{b}{2} \right)^{2n+2} - (n+1) \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \left(\frac{b}{2} \right)^{2n} \right] \right\} V_{2m+4; 2n+2};$$

б) $U = 0; W = 0;$

$$V = \frac{x^2}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left\{ \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-4} \left(y^4 - \frac{b^4}{16} \right) - \frac{1}{n} \left(y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n} \right) - (n-2) \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-2} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \right\} W'_{4,2n-1}.$$

III напряженное состояние

$U = 0;$

$$V = \frac{x^2}{2} \left\{ \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) m \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} \left[(2n+1) \left(\frac{b}{2} \right)^{2n} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \frac{1}{n+1} \left(y^{2n+2} - \frac{b^{2n+2}}{4^{n+1}} \right) + 2 \frac{y^{2n}}{b^{2n}} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \right] \left[x^{2m} - (m+1) \frac{a^{2m}}{4^m} - m \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} - \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) mn \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} \right] \right. \\ \left. x \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-2} \left[\frac{3b^2}{4} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(y^4 - \frac{b^4}{16} \right) \right] \right\} W'_{2m+2; 2n+1};$$

$$W = x^2 y \left\{ \left[x^{2m} - (m+1) \frac{a^{2m}}{4^m} \right] \left[y^{2n} - (2n+1) \frac{b^{2n}}{4^n} \right] - \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) x \right. \\ \left. x \left(y^2 - \frac{3b^2}{4} \right) mn \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-2} \right\} W_{2m-2; 2n+1}.$$

IV напряженное состояние

$$U = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} x^{2m-1} y^{2n-1} U_{2m-1; 2n-1};$$

$$\begin{aligned} V = & \frac{x^2}{2} \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left\{ \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-6} \left[\frac{x(2m-1)}{8 \cdot 2^n} \left(y^{2n} - \frac{b}{4^n} \right) - \right. \right. \\ & - (2n-1) \frac{a^2}{4} \left(y^{2n-2} - \frac{b^{2n-2}}{4^{n-1}} \right) \left. \right] - \frac{x}{8} \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-6} x \\ & \times \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-6} \left[\frac{3b^2}{4} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(y^4 - \frac{b^4}{16} \right) \right] \left[\frac{2x(2m-1)b^2}{4 \cdot 8^2} - \right. \\ & - (n-1)(2n-1) \frac{a^2}{4} \left. \right] - (2n-1) \left[\left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} y^{2n-2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{m} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-2} \left(x^{2m-2} - m \frac{a^{2m-2}}{y^{m-1}} \right) \right] \right\} U_{2m-1; 2n-1} - \\ & - \frac{x^2}{2} \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} 8^2 (2m+1) \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-4} \left\{ \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \frac{(m-2)}{8} \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-4} x \right. \\ & \times \left[\frac{3b^2}{4} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(y^4 - \frac{b^4}{16} \right) \right] + \frac{b^2}{4 \cdot 8} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \left[x^{2m-2} - \right. \\ & - m \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-2} - (m-1) \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-4} \left. \right\} U_{2m+1; 2n-1} + \\ & + \frac{3 \cdot 8^2 x^2}{16} \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{-2} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-4} \left[\frac{3b^2}{4} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(y^4 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{b^4}{16} \right) \right] U_{3, 2n-1} - \frac{x^2}{2} \left\{ \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-4} x \right. \\ & \times \left[\frac{1}{2n} \left(y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n} \right) + \frac{(m-1)(2n-1)}{m} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-2} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \right] - \\ & - \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right) \frac{(8+2)}{8} \left[\frac{1}{2} + \frac{(m-1)(2n-1)}{m} \right] \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-4} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-4} x \\ & \times \left[\frac{3b^2}{4} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(y^4 - \frac{b^4}{16} \right) \right] - 8^2 \frac{(2n-1)}{2 \cdot 8^2 m} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n-2} x \\ & \times \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \left[x^{2m-2} - m \frac{a^{2m-2}}{4^{m-1}} - (m-1) \left(x^2 - \frac{a^2}{2} \right) x \right. \\ & \left. \left. \times \left(\frac{a}{2} \right)^{2m-4} \right] \right\} U''_{2m-1; 2n-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W = & \frac{x^2 y}{2} \left\{ \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{m} \left(\frac{b}{2}\right)^{2n-2} \left(x^{2m-2} - m \frac{a^{2m-2}}{4^{m-1}}\right) - \right. \\
& - \left(\frac{a}{2}\right)^{2m-2} \frac{y^{2n-2}}{y} + \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right) \left(y^2 - \frac{3b^2}{4}\right) \frac{(\delta+2)}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^{2m-4} x \\
& \times \left(\frac{b}{2}\right)^{2n-4} \left[\frac{1}{2} + \frac{(m-1)(2n-1)}{m}\right] \left. \right\} U_{2m-1; 2n-1} - \frac{x^2 y}{8d_z} \left(x^2 - \right. \\
& - \left.\frac{a^2}{2}\right) \left(y^2 - \frac{3b^2}{4}\right) \left(\frac{a}{2}\right)^{2m-6} \left(\frac{b}{2}\right)^{2n-6} \left\{ \delta \left[\frac{2\delta(2m+1)b^2}{4\delta_2} - \right. \right. \\
& - \left. (n-1)(2n-1) \frac{a^2}{4} \right] U_{2m-1; 2n-1} + \delta_2 (m-2)(2m+1) \frac{a^2 b^2}{16} x \\
& \times U_{2m+1; 2n-1} \left. \right\} + \frac{3\delta_2 x^2 y}{8d_z} \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right) \left(y^2 - \frac{3b^2}{4}\right) \left(\frac{a}{2}\right)^{-2} x \\
& \times \left(\frac{b}{2}\right)^{2n-4} U_{3, 2n-1} .
\end{aligned}$$

Анализ полученных выражений показывает, что для первых трех напряженных состояний характерно отсутствие поперечной деформации ($U = 0$), причем первое и третье напряженно-деформированное состояние по своему характеру приближается к элементарной теории сопромата. Общее у них то, что деформированное состояние определяется лишь двумя перемещениями, причем продольное перемещение W обращается в нуль при $y = 0$ (нейтральный слой). Отличие состоит в том, что имеется продольная деформация, т.е. не выполняется гипотеза плоских сечений, и что напряжения σ_y не равны нулю, т.е. имеется давление одних волокон на другие.

Для второго деформированного состояния характерно равенство нулю двух перемещений $U = W = 0$, а на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$

отсутствие и перемещений $V|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0$.

Четвертое напряженно-деформированное состояние характеризуется наличием деформации, как продольной, так и поперечной, т.е. все три перемещения отличны от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. — Киев, 1972. 2. Крушевский А.Е., Слляр О.Н. Изгиб упругого параллелепипеда при точном выполнении условий отсутствия нагрузки на четырех боковых гранях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1979, вып. 6.

УДК 539.3

Н.Я.Бойко

РАВНОВЕСИЕ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА С ТРЕМЯ СВОБОДНЫМИ ОТ НАГРУЗКИ ГРАНЯМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ЧЕТВЕРТОЙ ГРАНИ И ИМЕЮЩЕГО НУЛЕВОЕ НОРМАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ И ОДНО НУЛЕВОЕ КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ НА ОСТАВШИХСЯ ДВУХ ГРАНЯХ

Эта задача решается, как задача статики, для упругого параллелепипеда при известных на торцах $z = \pm \frac{h}{2}$ нормальных перемещениях и касательных напряжениях. Как известно, это сочетание крайних условий дает возможность получать решение задачи в замкнутом виде. Имеет следующие краевые условия:

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad w_z^{\pm} = 0; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = +Y_z^{\pm}; \quad (1)$$

$$\text{при } y = +\frac{b}{2} \quad \sigma_y = -2Y_y^+; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \quad (2)$$

$$\text{при } y = -\frac{b}{2} \quad \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \quad (3)$$

$$\text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad \sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0. \quad (4)$$

Решение задачи (1) — (4) получается как результат наложения решений двух задач, а именно: задачи сжатия с теми же условиями (4), но

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad w_z^{\pm} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad (1')$$

$$\text{при } y = +\frac{b}{2} \quad \sigma_y = -Y_y^+; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \quad (5)$$

$$\text{при } y = -\frac{b}{2} \quad \sigma_y = +Y_y^+; \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0 \quad (6)$$

и задачи изгиба с теми же условиями (1) и (4), но

$$\text{при } y = +\frac{b}{2} \quad \sigma_y = -Y_y^+; \quad \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0; \quad (7)$$

$$\text{при } y = -\frac{b}{2} \quad \sigma_y = -Y_y^+; \quad \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0. \quad (8)$$

Решение задачи ведется на основе вариационного метода перемещений, используя ряды Фурье, неполнота которых на торцах отрезка устраняется дополнительными членами.

Искомые перемещения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_0 + \frac{2z}{h} U_1 + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) U_2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[U_{is} \sin \left(\frac{2\pi iz}{h} \right) + U_{ic} \cos \left(\frac{2\pi iz}{h} \right) \right]; \\ v &= V_0 + \frac{2z}{h} V_1 + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) V_2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[V_{is} \sin \left(\frac{2\pi iz}{h} \right) + V_{ic} \cos \left(\frac{2\pi iz}{h} \right) \right]; \\ w &= W_0 + \frac{2z}{h} W_1 + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) W_2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[W_{is} \sin \left(\frac{2\pi iz}{h} \right) + W_{ic} \cos \left(\frac{2\pi iz}{h} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Зависимость обобщенных перемещений $U_0, V_0, W_0, U_{ic}, V_{ic}, W_{ic}, U_{is}, V_{is}, W_{is}$ от координаты y представляется аналогично.

Для решения задачи используются объемные уравнения равновесия, полученные из вариационного уравнения равновесия элементарного столбика тела [1], раскрытого для разложений по координате z (формула (9)).

Поверхностные уравнения являются следствием удовлетворения краевых условий на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$.

Объемные и поверхностные уравнения получены методом ортогонализации.

Все уравнения распадаются на несколько групп, в каждой из которых возможны свои частные задачи.

В общем случае нагрузки для названных краевых условий по граням $y = \pm \frac{b}{2}$ решение указанных задач сводится к решению бесконечных систем алгебраических уравнений. Но для частного вида нагрузки (5), (6) для задач сжатия (1'), (4), (5), (6) по-

лучаются однородные алгебраические уравнения для определения постоянных и, следовательно, слагаемые с бесконечными суммами в решении задачи пропадают и решение имеет вид:

$$u = -\frac{2\delta^2}{b\delta} x V_{01}^*; \quad v = \frac{2y}{b} V_{01}^*; \quad w = 0;$$

$$\sigma_y = \frac{8(\delta-1)G}{\delta b} V_{01}^*; \quad \sigma_z = -\frac{4\delta^2 G}{\delta b} V_{01}^*; \quad \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{yz} =$$

$$= \tau_{zx} = 0.$$

Так как $V_{01}^* = -\frac{\delta b}{16(\delta-1)G} (Y_y^+ + Y_y^-)$, то окончательно

$$u = \frac{\delta^2 x}{8(\delta-1)G} (Y_y^+ + Y_y^-); \quad v = -\frac{\delta y}{8(\delta-1)G} (Y_y^+ + Y_y^-); \quad w = 0; \quad (10)$$

$$\sigma_y = -\frac{(Y_y^+ + Y_y^-)}{2}; \quad \sigma_z = -\frac{\delta^2 (Y_y^+ + Y_y^-)}{4(\delta-1)};$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Решение уравнений задачи изгиба (1), (4), (7), (8) свелось к решению дифференциальных уравнений для определяющих функций U_{01} и V_{ic2} . Для функции U_{01} дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{(\delta-1)b^2\partial_1^2}{2\delta} \left[\frac{\sin(b\partial_1)}{b\partial_1} - 1 \right] V_{01} = \frac{b}{8\delta Gh} [\sin(b\partial_1) + (\delta-1)b\partial_1] x$$

$$x \int_{-h/2}^{h/2} (Y_y^+ + Y_y^-) dz + \frac{1}{2\partial_1 Gh} \sin^2\left(\frac{b\partial_1}{2}\right) \int_{-b/2}^{b/2} (Y_z^+ + Y_z^-) dy. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) для задачи изгиба имеет вид

$$U_{01} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{\tilde{n}01} \operatorname{sh}(\lambda_{\tilde{n}} \tilde{z}_x) + U_{01}^*, \quad (12)$$

где U_{01}^* — частное решение, равное нулю в силу соотношения

$$(Y_z^+ + Y_z^-) b - (Y_y^+ + Y_y^-) h = 0, \quad (13)$$

полученного из условия равновесия параллелепипеда как абсолютно твердого тела для указанной поверхностной нагрузки.

В решении (12) $\lambda_{\tilde{n}}$ — комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения

$$\sin(b\lambda_{\tilde{n}}) - b\lambda_{\tilde{n}} = 0. \quad (14)$$

Для определяющей функции V_{ic2} дифференциальное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{(\gamma-1)b^2(\partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2})}{2\gamma} \left[\frac{\sin(b\sqrt{\partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}})}{b\sqrt{\partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}}} - 1 \right] V_{ic2} = \\ & = - \frac{\gamma_2 b^2 (-1)^i}{6\gamma hG} \sin^2 \left(\frac{b\sqrt{\partial_1^2 - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}}}{2} \right) (Y_z^+ + Y_z^-). \end{aligned} \quad (15)$$

Решение уравнения (15) для задачи изгиба имеет вид

$$V_{ic2} = \sum_{n=1}^{\infty} D_{\tilde{n}02} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}} x \right) + V_{ic2}^*, \quad (16)$$

$$\text{где } V_{ic2}^* = - \frac{\gamma_2 h (-1)^i}{8(\gamma-1)G\pi^2 i^2} (Y_z^+ + Y_z^-). \quad (17)$$

Вид функций U_{ic1} , U_{icks} , V_{ic0} , V_{ickc} , W_{is1} , W_{isks} определен по V_{ic2} согласно дифференциальным уравнениям.

Комплексные постоянные $A_{\tilde{n}01}$ и $D_{\tilde{n}02}$ подлежат определению из двух самостоятельных систем бесконечных уравнений, полученных при удовлетворении условия (4) методом ортогонализации.

Решение задачи изгиба (1), (4), (7), (8) представим нормальными напряженными:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\gamma_2 y}{\gamma b} (Y_y^+ + Y_y^-) - \frac{128(\gamma-1)\pi^3}{\gamma b^4} G \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \kappa^3 \lambda_n A_{\tilde{n}01}}{(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2})^2} x \\ & \times \operatorname{ch}(\lambda_n x) \sin\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right) - \frac{\gamma_2 h b}{2(\gamma-1)\pi} (Y_z^+ + Y_z^-) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (-1)^k}{i^2 \kappa} x \end{aligned}$$

$$x \Delta \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) + \frac{96\pi G}{\gamma_2 b^3} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^K \kappa C_1 \lambda_n^{-2}}{(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2})^2} D_{\tilde{n}02} x$$

$$x \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}} x\right) \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right);$$

$$\sigma_y = \frac{y}{b} (Y_y^+ + Y_y^-) + \frac{32(\gamma-1)\pi G}{\gamma b^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^K \kappa \lambda_n^3 A_{\tilde{n}01}}{(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2})^2} \operatorname{ch}(\lambda_n x) x$$

$$x \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) - \frac{b}{\pi h} (Y_z^+ + Y_z^-) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (-1)^K}{\kappa} \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) x$$

$$x \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) - \frac{192(\gamma-1)\pi G}{\gamma_2 b^3} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^K \kappa \lambda_n^2 D_{\tilde{n}02}}{(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2})^2} x$$

$$x \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}} x\right) \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right);$$

$$\sigma_z = \frac{\gamma_2 y}{\gamma b} (Y_y^+ + Y_y^-) + \frac{16\gamma_2 \pi G}{\gamma b^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^K \frac{\kappa \lambda_n A_{\tilde{n}01}}{(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2})} x$$

$$x \operatorname{ch}(\lambda_n x) \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) - \frac{h}{\pi b} (Y_z^+ + Y_z^-) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (-1)^K \kappa}{i^2} x$$

$$x \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) + \frac{96\pi G}{\gamma_2 b^3} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^K \kappa D_{\tilde{n}02}}{\lambda_n^2 (\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2})} x$$

$$x \left(\gamma \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} - \gamma_2 \lambda_n^2 \right) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}} x\right) \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right) -$$

$$- \frac{768(\gamma-1)\pi^3 G}{\gamma_2 b^3 h^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^K \kappa i^2 D_{\tilde{n}02}}{(\lambda_n^2 - \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2})^2} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{4\pi^2 i^2}{h^2}} x\right) x$$

$$x \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right),$$

где $C_1 = 2(\gamma - 1)\lambda_n^2 \frac{4\pi^2 u^2}{b^2} + \gamma_2 \lambda_n^2 \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} + \gamma \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \frac{4\pi^2 \kappa^2}{b^2}$;

$$\Delta = \frac{i^2}{h^2} + \frac{\kappa^2}{b^2}; \quad \partial_1 = \frac{d}{dx},$$

где b, h — соответственно размеры стержня — параллелепипеда по осям y и z , симметричные относительно начала координат; G — модуль сдвига;

$$\gamma = \frac{2(1-\gamma^*)}{1-2\gamma^*}; \quad \gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu}.$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона; Y_z^+ — равномерно распределенная нагрузка на грани $z = +\frac{h}{2}$; Y_z^- — равномерно распределенная нагрузка на грани $z = -\frac{h}{2}$; $Y_y^\pm$ — соответственно равномерно распределенная нагрузка на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$.

Таким образом, решение задачи (1)–(4) представлено сложением решений (10) и (18). Это решение может быть использовано при расчете элемента стержневой системы для указанной в (1)–(4) нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967.

УДК 539.3

В.Н. Апанович

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РИТЦА И ТРЕФТЦА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К НЕКОТОРЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Оценка быстроты сходимости и устойчивости численных методов решения задач теории упругости является необходимым этапом при разработке алгоритмов и программ расчета реальных деталей машин. Ниже представлены основные результаты исследования сходимости и устойчивости метода Ритца (МР) и метода Трефтца (МТ) применительно к расчету объемного напряженно-деформированного состояния.

При решении задач МР и МГ вектор упругих смещений разлагается в ряд $U^N(x_1, x_2, x_3)$ по системе векторных функций $\{\varphi_n(x_1, x_2, x_3)\}_{n=1}^N$, т.е.

$$U^N(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=1}^N a_n^{(N)} \varphi_n(x_1, x_2, x_3), \quad (1)$$

где $a_n^{(N)}$ — произвольные коэффициенты; N — количество членов в разложении.

Коэффициенты $a_n^{(N)}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемой при подстановке (1) в вариационное уравнение Лагранжа [2].

В МР функции $\varphi_n(x_1, x_2, x_3)$ должны удовлетворять кинематическим граничным условиям, требованиям полноты и линейной независимости; в МГ на эти функции накладывается дополнительное требование удовлетворения уравнениям Ляме [1].

В МР для представления вектора смещений использованы обычные степенные ряды, в МГ — полная система полиномиальных решений уравнений теории упругости [3].

Исследование устойчивости и сходимости вышеуказанных методов выполнено путем проведения численных экспериментов на тестовых задачах о сжатии единичного куба с центром в начале координат. Рассмотрены три вида нагружения, когда на боковых гранях вектор правых частей равен нулю, а на верхней и нижней гранях имеет составляющие.

$$\begin{aligned} \text{Задача I, } F_n^B &= \{0, 0, -\delta(x_1, x_2)\}, \quad x_1=0, x_2=0, x_3=0,5; \\ F_n^H &= \{0, 0, \delta(x_1, x_2)\}, \quad x_1=0, x_2=0, x_3=-0,5, \end{aligned}$$

где (x_1, x_2) — дельта-функция Дирака (единичная сосредоточенная сила);

$$\begin{aligned} \text{Задача II, } F_n^B &= \{0, 0, -\cos\pi x_1 \cos\pi x_2\}, \quad x_3=0,5; \\ F_n^H &= \{0, 0, +\cos\pi x_1 \cos\pi x_2\}, \quad x_3=-0,5 \end{aligned}$$

(задача Филоненко-Бородича).

$$\text{Задача III, } F_n^B = \{0, 0, -1\}; \quad x_3 = 0,5; \quad F_n^H = \{0, 0, 1\}; \quad x_3 = -0,5$$

(единичная равномерно распределенная нагрузка).

Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Все расчеты проведены по программе, составленной на алгоритмическом языке Фортран — IV. Система алгебраических уравнений решалась методом исключения Гаусса.

В соответствии с описанной методикой составлялись разрешающие системы уравнений для различных максимальных степеней аппроксимирующих полиномов ($n_{\max} = 1, 3, 5, 7, 9$), при этом в разложении (1) сохранялись только те члены, которые удовлетворяли соответствующим условиям четности для перемещений.

Т а б л и ц а 1

Методы решения	$n_{\max}$	N	Задача I		Задача II	
			$F(U^N)$	$\Delta, \%$	$F(U^N)$	$\Delta, \%$
Ритца	1	3	6,6499989	—	0,1067665	—
	3	12	1,506790	20,3	0,132996	17,6
	5	30	2,290858	18,6	0,1400663	4,91
	7	60	3,227960	22,2	0,1415734	1,04
	9	105	4,209484	23,3	0,1438735	1,60
Трефтца	1	3	0,6499998	—	0,1067665	—
	3	9	1,487163	23,9	0,1323946	18,0
	5	18	2,121183	18,1	0,1396968	5,15
	7	30	2,823641	20,0	0,1414508	1,23
	9	42	3,500344	19,3	0,1417266	0,194

Т а б л и ц а 2

$n_{\max}$	Det	
	Метод Ритца	Метод Трефтца
1	$0,259 \cdot 10^{-2}$	$0,347 \cdot 10^4$
3	$0,162 \cdot 10^{-9}$	$0,370 \cdot 10^5$
5	$0,165 \cdot 10^{-65}$	$0,243 \cdot 10^{-2}$
7	0,000	$0,249 \cdot 10^{-25}$
9	0,000	$0,971 \cdot 10^{-56}$

Этим обеспечивалась корректность постановки задач. Для оценки быстроты сходимости решения по энергии [4] в каждом приближении определялась энергия деформации тела $F_{n_{\max}}(U^N)$ ($n_{\max} = 1, 3, 5, 7, 9$) по формуле

$$F_{n_{\max}}(U^N) = \sum_{i=1}^N (F_n, \varphi_i) a_i.$$

В табл. 1 для задач I и II приведены значения $F_{n_{\max}}(U^N)$ и относительного изменения энергии деформации Δ , вычисляемого по формуле

$$\Delta = \frac{F_i(U^N) - F_{i-1}(U^N)}{F_9(U^N)} \cdot 100\%, \quad (i = 3, 5, 7, 9).$$

В задаче III для всех $n_{\max}$ получено тривиальное решение (решение сопромата), поэтому результаты не приводятся. Устойчивость решения (обусловленность матрицы системы уравнений) исследовалась путем вычисления определителя системы методом квадратных корней Холецкого. В табл. 2 даны значения определителей Det для различных приближений.

Анализ данных табл. 1 и 2 показывает следующее.

1. Для обоих методов скорость сходимости по энергии в значительной степени зависит от гладкости граничных условий. Например, для задачи I (МТ) разность энергий последнего и предпоследнего приближений $\Delta = 19,3\%$, для задачи II — $\Delta = 0,194\%$.

2. По мере увеличения числа членов в (1) решение задач по МТ быстрее сходится к точному, чем по МР. Например, для $n_{\max} = 9$ система МР состоит из $N = 105$ уравнений, при этом $\Delta = 1,59\%$; в системе МТ $N = 42$, $\Delta = 0,194\%$. Как видим, полная система полиномиальных решений уравнений теории упругости обладает лучшими аппроксимационными свойствами, чем обычные степенные ряды.

3. В МР при $n_{\max} = 9$ происходит потеря устойчивости решения. (Определитель системы при этом равен машинному нулю. Особенно отчетливо это явление наблюдается в задаче II, когда при $n_{\max} = 9$ Δ начинает возрастать.

4. МТ более устойчив по сравнению с МР, матрица системы значительно лучше обусловлена (при $n_{\max} = 5$ определитель системы МТ на 63 порядка больше определителя системы МР), с возрастанием $n_{\max}$ Δ монотонно убывает.

Поскольку в МТ каждая функция $\varphi_n(x_1, x_2, x_3)$ в разложении (1) точно удовлетворяет уравнениям Ляме, апостериорную оценку погрешности решения задачи можно производить путем вычисле-

Т а б л и ц а 3

Методы решения	N	$\Delta_{\max}$	Δ_0
Трефтца	18	0,120	0,107
	30	0,023	0,058
	42	0,025	0,041
"Источников"	66	0,090	0,080
	144	0,045	—

ния отклонений приближенных значений компонентов напряжений на границе от заданных. В табл. 3 для задачи Филоненко-Бородича даны величины наибольшего отклонения составляющих приближенного и точного решений ($\Delta_{\max}$) и максимального значения составляющих. Эти составляющие должны равняться нулю (Δ_0), получаться при решении задачи МТ и методом "источников" [1]. Из табл. 2 следует, что уже при 30 членах в разложении (1) МТ дает лучшие результаты, чем метод "источников" при 144 членах в разложении по фундаментальным решениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. А л е к с и д з е М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. — М., 1978. 2. К р у ш е в с к и й А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967. 3. Л у р ь е А.И. Полиномиальное представление решений уравнений теории упругости. — В сб.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л., 1970. 4. М и х л и н С.Г. Вариационные методы в математической физике. — М., 1970.

УДК 621.81:539.4

В.Н.Апанович

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОВОРОТНОГО СТОЛА КАРУСЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ДЛЯ КОКИЛЬНОГО ЛИТЬЯ

Объектом исследования является один из вновь проектируемых вариантов поворотного стола карусельной машины для кокильного литья. Расчетная схема стола показана на рис. 1. Основными силовыми факторами, действующими на стол, являются изгибающие моменты M_1 , создаваемые силой тяжести G_1 прикрепленных

Таблица 1

№ точек	Перемещение		Напряжение	
	$v \times 10^{-4},$ м	$w \times 10^{-4},$ м	$\sigma_x \times 10^5,$ Н/м ²	$\sigma_y \times 10^5,$ Н/м ²
1	0,084	-0,052	51,3	77,7
2	0,146	-0,216	43,9	55,5
3	0,189	-0,452	44,3	50,7
4	0,244	-0,757	51,5	71,5
5	0,333	-1,142	23,7	49,7

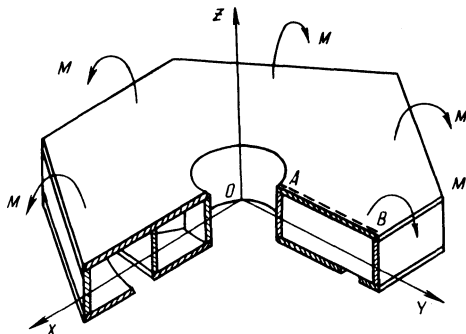


Рис. 1. Расчетная схема стола.

к боковым листам кронштейнов с кокильными секциями. Расчет напряжений и деформаций, возникающих под действием моментов M_i , выполнен методом Трефца [1]. Вектор U упругих смещений тела аппроксимируется линейной оболочкой системы вектор-функций $\{\varphi_i(x, y, z)\}_{i=1}^N$, элементы которой удовлетворяют условиям линейной независимости и полноты

$$U^N(x, y, z) = \sum_{i=1}^N a_i^{(N)} \varphi_i(x, y, z), \quad (1)$$

где $\varphi_i(x, y, z)$ — вектор-функции, тождественно удовлетворяющие дифференциальным уравнениям равновесия теории упругости (уравнениям Ляме); $a_i^{(N)}$ — произвольные коэффициенты.

Неизвестные коэффициенты $a_i^{(N)}$ определяют из системы линейных алгебраических уравнений, получаемой при подстановке разложения (1) в вариационное уравнение Лагранжа [1]. В качестве линейной оболочки (1) использована полная система полиномиальных решений уравнений теории упругости [2]. Вследствие симметрии стола и нагрузки перемещения u приняты нечетными по x и четными по y , перемещения v — четными по x и нечетными по y .

ми по y , перемещения w — четными по x и y . Такое сужение класса допустимых функций обеспечивает корректную постановку задачи. Расчет выполнен на ЭЦВМ ЕС-1022. Время счета — 8 мин. Для решения системы линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса использован соответствующий модуль пакета научных программ. В расчете максимальная степень полиномов принималась равной $n_{\max} = 8$; количество членов в разложении (1) при этом составило $N = 18$; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{12} \text{ Н} \cdot \text{м}^2$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; $G_i = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Н}$; $M_i = 1,96 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}$. В табл. 1 приведены значения некоторых компонент тензора напряжений и перемещений, возникающих в верхнем листе стола по линии АВ (рис. 1). Из табл. 1 видно, что наибольшие нормальные напряжения наблюдаются в центральной области и равны $8,97 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$. Расчет не учитывает влияние на напряженное состояние стола локальных концентраторов напряжений (например, непроваров сварных швов), а также остаточных напряжений. Указанные факторы могут быть учтены с помощью коэффициентов концентрации напряжений.

Таким образом, решение реальной инженерной задачи показало эффективность метода Трефца при расчете корпусных деталей машин.

ЛИТЕРАТУРА

1. К р у ш е в с к и й А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967.
2. Л у р ь А.И. Полиномиальное представление решений уравнений теории упругости. — В сб.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л., 1970.

УДК 532.783;
548-14

В.Б.Немцов

СДВИГОВАЯ УПРУГОСТЬ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

Жидкие кристаллы подобно жидкостям обладают равновесной объемной упругостью, но не имеют равновесных модулей сдвига.

Тем не менее жидкости обнаруживают сдвиговую упругость в виде реакции на сдвиговые деформации определенных частот, что может быть объяснено релаксацией некоторых внутренних параметров (см., напр., [1]). Аналогичным образом наличие релаксационных процессов в жидких кристаллах объясняет возможность проявления ими сдвиговой упругости.

Для жидких кристаллов важными внутренними параметрами являются компоненты тензора ориентационной упорядоченности, теория релаксации которых построена в недавно развитой статистической гидродинамике жидких кристаллов [2,3,4]. В связи с анизотропией жидких кристаллов релаксация ориентационной упорядоченности характеризуется тремя временами релаксации [2,3,4].

В настоящее время для экспериментального определения сдвиговой вязкости и других сдвиговых свойств нематиков широко применяется техника отражения сдвиговых волн от поверхности раздела кристалла кварца и жидкого кристалла [6,7,8,9].

Теория отражения и преломления сдвиговых волн на упомянутой поверхности раздела подробно рассмотрена в работах [5,6,9] и здесь не обсуждается. Отметим, однако, что выражение для тензора вязких напряжений нематика в статистической гидродинамике жидких кристаллов [2,3] отличается в некотором отношении от выражения для этого тензора в феноменологической гидродинамике Лесли-Эриксона, которая была использована в расчетах отражения сдвиговых волн.

В связи с известными преимуществами последовательности и полноты статистического рассмотрения представляется интересным провести расчет эффективных вязкостей и модулей сдвига, измеряемых техникой отражений сдвиговых волн, на основе статистической гидродинамики [2,3].

Для этого вначале сопоставим тензор вязких напряжений Лесли-Эриксона (см., напр., [9]) с тензором вязких напряжений статистической теории [2,3]. Согласно статистической гидродинамике нематиков тензор вязких напряжений определяется как

$$\tau'_{ij} = a_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}, \quad (1)$$

где

$$\dot{\epsilon}_{kl} = (\partial v_i / \partial x_k) - \Omega_m e_{mki}. \quad (2)$$

Здесь v_i — гидродинамическая скорость; Ω_m — средняя угловая скорость собственного вращения молекул; x_k — пространственные (эйлеровы) координаты; e_{mki} — тензор Леви-Чивита. Тензор $\dot{\epsilon}_{kl}$ представим в виде [10]

$$\dot{\epsilon}_{kl} = e_{kl} + (\Omega_s - \omega_s) e_{skl}, \quad (3)$$

причем

$$e_{kl} = \frac{1}{2} (\partial v_k / \partial x_l + \partial v_l / \partial x_k); \quad (4)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}. \quad (5)$$

В статистической гидродинамике угловая скорость Ω_n выражается точным образом через ортогональную матрицу поворота $\alpha_{iK}(\vec{x}, t)$ [2,3]

$$\Omega_n = 2^{-1} e_{nm i} \alpha_{mK} (d\alpha_{iK}/dt). \quad (6)$$

Вычислим Ω_n с помощью известного представления [11]

$$\alpha_{iK} = \cos \varphi \delta_{iK} + (1 - \cos \varphi) n_i n_K - e_{iKp} n_p \sin \varphi, \quad (7)$$

где φ — средний угол поворота молекул вокруг единичного вектора n_i (директора), ориентированного по направлению упорядоченности длинных осей молекул.

Результат вычисления имеет вид

$$\Omega_m = \frac{d\varphi}{dt} n_m + \sin \varphi \frac{dn_m}{dt} + (1 - \cos \varphi) w_m, \quad (8)$$

где

$$w_m = e_{msp} n_s (dn_p/dt). \quad (9)$$

Величина w_m представляет собой угловую скорость разворота директора. Она используется в динамике нематиков Лесли-Эриксона (см., напр., [9,10]).

Точная формула (8) указывает, какие пренебрежения нужно совершить при замене Ω_m на w_m . Для этого можно, считая угол φ распределенным равномерно, провести усреднение (8) по φ . Обозначая усреднение символом $\langle \dots \rangle$, получим $\langle \sin \varphi \rangle = \langle \cos \varphi \rangle = 0$. Если, кроме того, положить, что $(d\varphi/dt) = 0$, то $\Omega_m = w_m$. В этом приближении угловая скорость w_m имеет две компоненты, так как $w_m n_m = 0$.

Если не пренебрегать угловой скоростью вращения молекул вокруг директора, но принять, что $\langle \cos \varphi \rangle = \langle \sin \varphi \rangle = 0$, то получим более оправданное приближение Аэро и Булыгина [10]

$$\Omega_m = (d\varphi/dt) n_m + w_m. \quad (10)$$

Тензор коэффициентов вязкости нематических жидких кристаллов в статистической теории представляется в виде [3,4]

$$\begin{aligned} a_{ijkl} = & a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + a_2 \delta_{iK} \delta_{jL} + a_3 \delta_{iL} \delta_{jK} + a_4 (\delta_{ij} n_K n_L + \\ & + \delta_{KL} n_i n_j) + a_5 \delta_{iK} n_j n_L + a_6 (\delta_{iL} n_j n_K + \delta_{jK} n_i n_L) + \\ & + a_7 \delta_{jL} n_i n_K + a_8 n_i n_j n_K n_L, \end{aligned} \quad (11)$$

причем директор n_i направляется по оси симметрии среды.

Тензор a_{ijkl} включает восемь коэффициентов вязкости, для которых в работах [3,4] получены явные выражения через частоту ω , три времени релаксации и другие параметры, определяемые через статические и временные корреляционные функции некоторых динамических величин.

При выводе выражения (11) использованы соображения симметрии (симметрия нематиков относится к группе ∞/mmm) и автоматически учтены соотношения взаимности Онзагера.

Для сопоставления с результатами теории Лесли-Эриксона введем еще вектор N_i , описывающий скорость изменения директора относительно движущейся жидкости [9],

$$N_i = (w_s - \omega_s) n_i e_{sli}. \quad (12)$$

Подставим выражение (11) в (1) и учтем (3), (10) и (12). Тогда тензор напряжений приобретает вид

$$\begin{aligned} \tau'_{ij} = & (a_1 \delta_{ij} + a_4 n_i n_j) e_{kk} + (a_2 + a_3) e_{ij} + (a_2 - a_3) (\omega_s - \omega_s) e_{sij} + \\ & + a_4 \delta_{ij} n_k n_l e_{kl} + (a_5 + a_6) n_k n_j e_{ki} + (a_6 + a_7) n_i n_k e_{kj} + (a_6 - a_5) N_i n_j + \\ & + (a_7 - a_6) n_i N_j + a_8 n_i n_j n_k n_l e_{kl}. \end{aligned}$$

Запишем для сравнения выражение для тензора вязких напряжений Лесли-Эриксона с учетом членов, описывающих диссипацию при изменении объема. Эти члены были включены П. де Женом [9]. Рассматриваемый тензор напряжений записывается в форме

$$\begin{aligned} \sigma'_{ji} = & \rho_1 \delta_{ij} e_{kk} + \rho_2 n_i n_j e_{kk} + \rho_3 \delta_{ij} n_k n_l e_{kl} + \alpha_1 n_i n_j n_k n_l e_{kl} + \\ & + \alpha_4 e_{ij} + \alpha_5 n_j n_k e_{ki} + \alpha_6 n_i n_k e_{kj} + \alpha_2 N_i n_j + \alpha_3 n_i N_j. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь учтено, что $\tau'_{ij} = \sigma'_{ji}$, так как сила $F_i = \partial \tau'_{ij} / \partial x_j$ в нашем рассмотрении должна быть равна силе $F_i = \partial \sigma'_{ji} / \partial x_j$ в анализе Лесли-Эриксона (см. [9]).

Сравнение приводит к следующим равенствам коэффициентов вязкости:

$$\begin{cases} \rho_1 = a_1; \rho_2 = a_4; \rho_3 = a_4; \alpha_1 = a_8; \\ \alpha_4 = a_2 + a_3; \alpha_5 = a_5 + a_6; \alpha_6 = a_6 + a_7; \\ \alpha_2 = a_6 - a_5; \alpha_3 = a_7 - a_6. \end{cases} \quad (15)$$

Сопоставление показывает, что вопреки П. де Жену $\rho_2 = \rho_3$. Очевидно, также, что

$$\alpha_2 + \alpha_3 = a_7 - a_5; \quad (16)$$

$$\alpha_6 - \alpha_5 = a_7 - a_5.$$

Поэтому

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_6 - \alpha_5. \quad (17)$$

Таким образом, соотношение Пароди [12] автоматически выполняется.

В итоге вязкие напряжения в теории Лесли-Эриксона даже с учетом диссипации при изменении объема характеризуются семью коэффициентами вязкости, а не восемью, как указывает П. де Жен. Ошибка П. де Жена связана с неправильным применением соображений симметрии.

Отметим, что в тензоре вязких напряжений Лесли-Эриксона (14) отсутствует член $(a_2 - a_3)(\mathcal{P}_s - \omega_s)e_{sij}$, который учитывает диссипацию при вращении молекул вокруг директора. Вид этого члена не связан с использованием приближения (10). Набор коэффициентов вязкости в (13) совпадает с набором коэффициентов вязкости феноменологической теории Аэро-Булыгина [10], где также правильно были привлечены соображения симметрии.

Подчеркнем еще, что вязкие напряжения действительно описываются восемью коэффициентами вязкости, если корректно и последовательно строить теорию.

Рассмотрим теперь расчет эффективных вязкостей, определяющих распространение сдвиговых возмущений в нематике в акустическом эксперименте с использованием техники отражения сдвиговых волн. Расчет проведем для тех трех характерных взаимных расположений директора и вектора скорости, которые имеют место в эксперименте [7,8].

В первом случае (случай А) вектор $\vec{n}_0$ и вектор скорости $\vec{v}$ направлены вдоль оси x_2 . Здесь и ниже имеется в виду исходная ориентация вектора $\vec{n}_0$ до прохождения акустической сдвиговой волны, которая изменит эту ориентацию. Волна проникает в нематик со стороны кварца в направлении оси x_3 . Тогда $v_2 = v_2(x_3, t)$.

Уравнение движения среды с плотностью ρ [2,3]

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \quad (18)$$

в линейном приближении с учетом (13) сводится к виду

$$\rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = 2^{-1} (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_7) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + (\alpha_3 + \alpha_7) \frac{\partial \dot{n}_3}{\partial x_3}, \quad (19)$$

где $\dot{n}_3 = \frac{\partial n_3}{\partial t}$; $\alpha_7 = a_2 - a_3$. Для удобства последующего сравнения с работой [5] мы используем обозначения Лесли-Эриксона, имея в виду формулы сопоставления (15).

Уравнения собственного вращения [2,3]

$$\rho \frac{dl_i}{dt} = \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} + e_{ikl} \tau_{lk} \quad (20)$$

с учетом оправданного пренебрежения тензором моментных напряжений π_{ik} и собственным кинетическим моментом l_i (см. [5,6,9]) приобретает вид

$$e_{ikl} \tau_{lk} = 0. \quad (21)$$

В случае А, когда разворот директора происходит вокруг оси x_1 , это уравнение сводится к

$$\tau_{32} - \tau_{23} = 0,$$

что с учетом (13) дает

$$(\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_7) \dot{n}_3 - (\alpha_3 + \alpha_7) (\partial v_2 / \partial x_3) = 0. \quad (22)$$

Исключая в (19) $\dot{n}_3$ с помощью (22), получим

$$\rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = (2^{-1} (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_7) + \frac{(\alpha_3 + \alpha_7)^2}{(\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_7)}) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}. \quad (23)$$

Таким образом, эффективная вязкость в случае А определяется формулой

$$\eta_A = 2^{-1} (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_7) + (\alpha_3 + \alpha_7)^2 / (\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_7). \quad (24)$$

Если пренебречь здесь величиной α_7 , приходим к результату работы [5]. Отличие, однако, состоит не только в наличии α_7 . Существенно, что коэффициенты вязкости являются комплексными функциями частоты (см. 15) и формулы (6.16) работы [3]).

В случае В в исходном состоянии директор направлен вдоль оси x_3 , скорость — по-прежнему вдоль x_2 , сдвиговая волна разворачивает директор вокруг оси x_1 , $v_2 = v_2(x_3, t)$. Тогда (20) на основе (13) сводится к

$$\rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = 2^{-1} (\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_2) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + (\alpha_2 - \alpha_7) \frac{\partial n_2}{\partial x_3}, \quad (25)$$

а уравнение (21) дает

$$(\alpha_2 - \alpha_7) \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - (\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_7) \dot{n}_2 = 0. \quad (26)$$

Отсюда следует уравнение

$$\rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = (2^{-1} (\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_2 + \alpha_7) - \frac{(\alpha_2 - \alpha_7)^2}{(\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_7)}) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}, \quad (27)$$

из которого находим эффективный коэффициент вязкости

$$\eta_B = 2^{-1} (\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_2 + \alpha_7) - \frac{(\alpha_2 - \alpha_7)^2}{(\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_7)}. \quad (28)$$

Если положить здесь $\alpha_7 = 0$, получим известный результат [5] (см. также [9]).

Наконец, в третьем случае (случай С) в исходном состоянии директор ориентирован вдоль оси x_1 , вектор скорости v направлен вдоль оси x_2 и $v_2 = v_2(x_3 t)$. Уравнения движения среды (18) и (21) приводят к уравнениям:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} &= 2^{-1} (\alpha_4 + \alpha_7) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + \alpha_7 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}; \\ \alpha_7 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + 2\varphi \right) &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

откуда

$$\rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = 2^{-1} \alpha_4 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}, \quad (30)$$

а эффективная вязкость равна

$$\eta_C = 2^{-1} \alpha_4, \quad (31)$$

что в точности соответствует результату работы [5] (см. также [9]).

Рапини показал (см., напр., [9]), что $\eta_A = \eta_B$. Результат был установлен в пренебрежении α_7 и частотной зависимостью вязкости.

Покажем, что равенство Рапини имеет место при $\alpha_7 \neq 0$ и при наличии частотной зависимости коэффициентов вязкости. Для этого обозначим через λ_1 и λ_2 соответственно величины

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha_3 - \alpha_2 + 2\alpha_7; \\ \lambda_2 &= \alpha_2 + \alpha_3.\end{aligned}\quad (32)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 &= 2(\alpha_3 + \alpha_7); \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= -2(\alpha_2 - \alpha_7).\end{aligned}\quad (33)$$

Принимая во внимание эти определения, запишем η_A и η_B в виде

$$\begin{aligned}\eta_A &= 2^{-1}(\alpha_4 + \alpha_6) - 2^{-1}(\alpha_3 + \alpha_7)\lambda_2\lambda_1^{-1}; \\ \eta_B &= 2^{-1}(\alpha_4 + \alpha_5) - 2^{-1}(\alpha_2 - \alpha_7)\lambda_2\lambda_1^{-1}.\end{aligned}\quad (34)$$

Вычисляя разность этих величин с учетом (17), найдем, что $\eta_A = \eta_B$.

Подчеркнем, что соотношение взаимности (17) в статистической теории справедливо и при наличии частотной зависимости коэффициентов вязкости. Поэтому справедливость равенства $\eta_A = \eta_B$ доказана в общем случае частотной дисперсии и с учетом вращательной вязкости α_7 .

В связи с тем, что вязкости η_A , η_B и η_C зависят от частоты ω , можно определить соответствующие комплексные модули сдвига

$$\begin{aligned}G_A &= i\omega\eta_A = G_A' + i\omega\eta_A'; \\ G_B &= i\omega\eta_B = G_B' + i\omega\eta_B'; \\ G_C &= i\omega\eta_C = G_C' + i\omega\eta_C' .\end{aligned}\quad (35)$$

Вещественные части комплексных модулей сдвига являются модулями упругости при сдвиге, а величины η_A' , η_B' и η_C' — коэффициентами вязкости. Оба типа величин представляют собой вещественные функции частоты.

Отметим, что появление частотной зависимости и само существование модулей сдвига G_A' , G_B' и G_C' обязано тем релаксационным процессам, о которых шла речь вначале. Наличие более чем одного модуля сдвига — прямое отражение анизотропии нематиков.

Используя формулы (6.16) работы [3] (см. также [4]) и соотношения (15), (35), (24), (28) и (31), получим следующие явные выражения для модулей сдвига и коэффициентов вязкости:

$$G'_A = G'_B = \frac{\mu_A \omega^2 \tau_3^2}{1 + \omega^2 \tau_3^2}; \quad G'_C = \frac{\mu_C \omega^2 \tau_2^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2}; \quad (36)$$

$$\eta'_C = \frac{a'_2 + a'_3}{2} + \frac{\mu_C \tau_2}{1 + \omega^2 \tau_2^2}; \quad (37)$$

$$\eta'_A = \eta'_B = a'_2 + a'_7 + \frac{(a'_7 + a'_2 - a'_6 - a'_3)^2}{2a'_3 + 2a'_6 - 2a'_2 - a'_7 - a'_5} + \frac{\mu_A \tau_3}{1 + \omega^2 \tau_3^2}. \quad (38)$$

Здесь μ_A и μ_C — комбинации величин E_i и c_i , введенных в [3,4]. При получении выражений для G'_A и η'_A предполагалось, что $\mu_A \tau_3 \ll a'_1$. Напомним, что a'_i — так называемые нералаксирующие коэффициенты вязкости, а τ_2 и τ_3 — времена релаксации [2,3,4].

Небезынтересно оценить времена релаксации τ_2 и τ_3 , а также μ_A и μ_C по экспериментальным данным. Для этого привлечем результаты измерений G'_A , G'_B и G'_C для МББА на трех частотах $\omega_1 = 2\pi \cdot 2,75 \cdot 10^6$ рад/с; $\omega_2 = 2\pi \cdot 6 \cdot 10^6$ рад/с, $\omega_3 = 2\pi \cdot 10^7$ рад/с при 30°C . Измерения проведены на основе техники отражения сдвиговых волн [7].

Точность определения модулей сдвига невелика. Она падает с уменьшением частоты. Оказалось, что $G'_A \neq G'_B$, но эти величины близки друг к другу. Более точно измерены коэффициенты вязкости η'_A , η'_B и η'_C . Снова $\eta'_A \neq \eta'_B$, но отличие их незначительно. Интересно, что вязкости почти не зависят от частоты.

При оценке величин μ_A , μ_C , τ_2 и τ_3 использовались опытные данные, относящиеся к частотам ω_2 и ω_3 , при этом G'_A принималось равным $2^{-1}(G'_A + G'_B)$. Результаты оценки имеют вид $\mu_A = 1,22 \cdot 10^6$ дин/см²; $\mu_C = 3,25 \cdot 10^6$ дин/см²; $\tau_3 = 3,93 \cdot 10^{-8}$ с; $\tau_2 = 3,14 \cdot 10^{-8}$ с.

В другой работе [8] были измерены вещественные коэффициенты вязкости η'_A , η'_B , η'_C . Оказалось, что в пределах точности эксперимента $\eta'_A = \eta'_B$. Данные по модулям сдвига не получены из-за невысокой точности измерения сдвига фаз падающей и отраженной волн. Частотная дисперсия также не обнаружена.

Отметим, что порядок времен релаксации совпадает с оценками на основе статистической теории [4]. Порядок модулей сдвига μ_A и μ_C , по-видимому, на два-три порядка меньше высокочастотных предельных модулей упругости [13]. Об этом можно судить на основании статистических оценок для простых жидкостей [14,15]. С указанным различием порядков связан факт превышения нералаксирующих вязкостей над величинами $\mu_A \tau_3$ и $\mu_C \tau_2$.

Согласно (37) и (38) малость вклада релаксирующих частей вязкостей объясняет практическое отсутствие частотной зависимости коэффициентов вязкости. Можно ожидать обнаружения частотной дисперсии вязкостей на существенно более высоких частотах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П. Основы молекулярной акустики. — М., 1964.
2. Немцов В.Б. Статистическая теория гидродинамических и кинетических процессов в жидких кристаллах. — ТМФ, 25, 1975, № 1.
3. Nemtsov V.B. Statistical hydrodynamics of cholesteric liquid Crystals. — Physica, 86A, 1977.
4. Немцов В.Б. Частотная дисперсия кинетических коэффициентов нематических жидких кристаллов. — В сб.: Физика жидкого состояния. Киев, 1977, № 5.
5. Martinoty P., Candau S. Determination of viscosity coefficients of a nematic liquid crystal using a shear waves reflectance technique. — Mol. Cryst. and Liquid Cryst., 14, 1971.
6. Barrat P.G., Leslie F.M. Reflection and refraction on an obliquely incident shear wave at solid-nematic interface. — Journ. de Phys. Coll., 3, 40, 1979.
7. Lee Y.S., Golub S.L., Brown G.H. An ultrasonic shear wave study of the mechanical properties of nematic liquid crystal. — I. Phys. Chem., 76, 1972, N 17.
8. Kiry F., Martinoty P. Ultrasonic investigation of anisotropic viscosities in a nematic liquid crystal. — Journ. de Phys., 38, 1977, N 2.
9. П. де Жен. Физика жидких кристаллов. — М., 1977.
10. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н. Гидромеханика жидких кристаллов. — В сб.: Гидромеханика. М., 1973, т. 7.
11. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. — Мн., 1976.
12. Parodi O. Stress tensor for a nematic liquid crystal. — Journ. de Phys., 31, 1970, 581.
13. Немцов В.Б. О статистической теории вязко-упругих свойств асимметричных сред. — ПММ. 35, 1971, № 3.
14. Немцов В.Б., Ротт Л.А. К статистической теории упругих свойств конденсированных систем. — В сб.: Применение ультразвуки к исследованию вещества. М., 1968, вып. 23.
15. Брук-Левинсон Э.Т., Вихренко В.С., Немцов В.Б. Статистическая оценка дополнительных высокочастотных модулей упругости асимметричной среды. — Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1971, № 4.

УДК 531.3+629.11.012.5

М.А.Левин

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ РЕАКЦИИ ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТЕЙШЕГО КАТЯЩЕГОСЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА

В работе рассматривается простейшая модель деформируемого колеса, являющаяся частным случаем рассмотренной в [1]

при $b = N_1 = N_2 = 0$. При этом диск колеса движется так, что заданы $x_c(\varphi)$, $y_c(\varphi)$, $z_c = z_{c0} = \text{const}$; $\theta(\varphi)$; $\psi = 0$. Предполагается также, что $\alpha = \alpha_1 = \alpha_0 = \text{const}$. Особенностью данной работы в сравнении с [1] является удержание коэффициентов порядка α^3 перед малыми отклонениями в сравнении с α^2 в [1]. Это обстоятельство позволяет повысить точность рассмотрения механизма качения в случае простейшей модели, которая представляет также и самостоятельный интерес. С другой стороны, данную работу можно рассматривать как обобщение результатов, содержащихся в [2,3]. Ниже даны также соотношения, описывающие стационарное качение, вытекающие как частный случай из уравнений нестационарного. Изложение ведется со ссылками на работу [1] и в обозначениях этой работы.

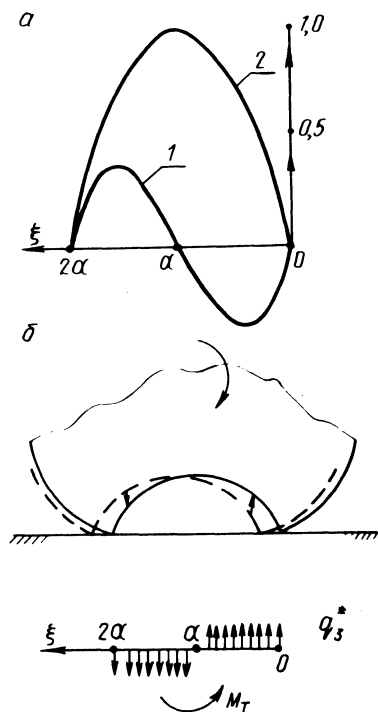


Рис. 1. Силы, действующие в области контакта колеса в свободном режиме качения:

а — в предположении об отсутствии сил трения; б — схема сил трения;
1 — зависимость $2q_1/R(c_3 - 2c_1/3)$;
2 — зависимость $2q_3/Rc_3$.

Предполагается, что проскальзывание отсутствует, точнее — зоны проскальзывания пренебрежимо малы в сравнении с длиной области контакта. Принимается также, что энергия, накопленная деформируемой периферией в области контакта, рассеивается за промежуток времени, соответствующий повороту диска на угол порядка π . В момент времени при угле поворота диска, равном

γ' (см. рис. 1 в [1]), точка деформируемой периферии (конец стержня), впервые вступающая в контакт с плоскостью качения $x\eta$, Γ_φ в данном случае не имеет начальных деформаций и совпадает с соответствующей ей на диске точкой А, которая в такой постановке совпадает с пересечением окружности радиуса R в плоскости диска и следом ее на плоскости $x\eta$, т.е. $\vec{\chi}(\varphi, 0) = 0$.

В данном случае, когда рассматривается простейшая стержневая модель, на единицу первоначальной длины элемента деформируемой периферии $R d\xi$ (здесь $\xi = \mu$, так как $\alpha = \text{const}$) в системе ортов $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ [1] действуют распределенные усилия $q_1' = c_1 \lambda_1'$; $q_2' = c_2 \lambda_2'$; $q_3' = c_3 \lambda_3'$. Подставив эти значения в выражения (2.4), (2.5) [1], найдем с удержанием в коэффициентах при λ_1 и λ_3 членов порядка не выше α^3 следующие соотношения:

$$\begin{aligned} q_1 &= [c_1 + (c_3 - c_1)(\alpha - \xi)^2] \lambda_1 + (c_1 - c_3)(\alpha - \xi) [1 - \frac{2}{3}(\alpha - \xi)^2] \lambda_3; \\ q_2 &= c_2 \lambda_2; \\ q_3 &= (c_1 - c_3)(\alpha - \xi) [1 - \frac{2}{3}(\alpha - \xi)^2] \lambda_1 + [c_3 + (c_1 - c_3)(\alpha - \xi)^2] \lambda_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим движение, мало отклоняющееся от невозмущенного. Наряду с малым отклонением θ введем

$$u_1(\varphi) = x_c(\varphi) - r\varphi; \quad u_2(\varphi) = y_c(\varphi). \quad (2)$$

Под невозмущенным движением понимается

$$x_{c0} = r\varphi; \quad y_{c0} = \theta_0 = 0; \quad z_{c0} = z_c = R \cos \alpha,$$

где r — радиус качения в свободном режиме, когда $P_1 = 0$ в этом невозмущенном движении.

Удерживая малые отклонения в степени не выше первой, из выражений (3.4) и (3.6) в [1] при $\vec{\chi}(\varphi, 0) = 0$ находим зависимости $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Например, для λ_1 получаем

$$\lambda_1 = u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi) - R \sin(\alpha - \xi) - r\xi + R \sin \alpha.$$

Подстановка $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в выражение (4.1) [1] позволяет найти все составляющие реакции опорной плоскости. Из условия $P_1 = 0$ в невозмущенном движении, когда $u_1 = 0$, находим, что λ_1 должно удовлетворять условию $\lambda_1(\xi) = -\lambda_1(2\alpha - \xi)$. Последнее дает

$$r = R \sin \alpha / \alpha \approx R (1 - \alpha^2/6), \quad (3)$$

что позволяет привести выражения для $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ к виду

$$\begin{aligned} \lambda_1(\varphi, \xi) &= U_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi) + (\alpha - \xi)r - R \sin(\alpha - \xi); \\ \lambda_2(\varphi, \xi) &= u_2(\varphi - \xi) - u_2(\varphi) + R \sin \alpha \cdot \theta(\varphi - \xi) - \\ &- (\alpha - \xi)r \theta(\varphi); \\ \lambda_3(\varphi, \xi) &= R [\cos(\alpha - \xi) - \cos \alpha]. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения (4) совпадают с (5.9)–(5.11) в [1], если учесть, что в данном случае $w_1 = u_1$; $w_2 = u_2$; $u_3 = 0$; $\mu = \xi$; $b = \beta = 0$.

Подставляя соотношения (4) в (1) с удержанием коэффициентов порядка не выше α^2 перед малыми отклонениями и свободные члены порядка не выше α^3 (в результате интегрирования при вычислении составляющих реакции связи в пределах от 0 до 2α порядок коэффициентов перед малыми отклонениями повысится на единицу), получаем

$$\begin{aligned} q_1(\varphi, \xi) &= [c_1 + (c_3 - c_1)(\alpha - \xi)^2] [u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi)] + \\ &+ R \xi (\alpha - \xi) (\xi - 2\alpha) (3c_3 - 2c_1) / 6; \\ q_2(\varphi, \xi) &= c_2 [u_2(\varphi - \xi) - u_2(\varphi) + R \alpha \theta(\varphi - \xi) - \\ &- (\alpha - \xi) R \theta(\varphi)]; \\ q_3(\varphi, \xi) &= (c_1 - c_3)(\alpha - \xi) [u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi)] + \\ &+ c_3 R \xi (2\alpha - \xi) / 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Графики для q_1 и q_3 в невозмущенном движении приведены на рис. 1, а. В выражении для $q_1(\varphi, \xi)$ можно в некоторых случаях опустить член $(c_3 - c_1)(\alpha - \xi)^2$ в сравнении с c_1 .

Подставляя полученные значения (5) в выражения (4.1) [1], найдем

$$\begin{aligned} P_1(\varphi) &= R \int_0^{2\alpha} [c_1 + (c_3 - c_1)(\alpha - \xi)^2] [u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi)] d\xi; \\ P_2(\varphi) &= R c_2 \int_0^{2\alpha} [u_2(\varphi - \xi) - u_2(\varphi) + R \alpha \theta(\varphi - \xi)] d\xi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3(\varphi) &= R(c_1 - c_3) \int_0^{2\alpha} (\alpha - \xi) [u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi)] d\xi + \frac{2}{3} c_3 R^2 \alpha^3; \\
M_1(\varphi) &= \frac{c_3}{2} R^2 \int_0^{2\alpha} \xi (2\alpha - \xi) [u_2(\varphi - \xi) - u_2(\varphi) + \\
&\quad + \alpha R \theta(\varphi - \xi)] d\xi + R \cos \alpha P_2(\varphi); \\
M_2(\varphi) &= -R^2 \int_0^{2\alpha} [u_1(\varphi - \xi) - u_1(\varphi)] [((c_1 - c_3)(\alpha - \xi)^2 + \\
&\quad + \frac{c_3}{2} \xi (2\alpha - \xi))] d\xi - R \cos \alpha P_1(\varphi) - M_T \operatorname{sign}(\dot{\varphi}); \\
M_3(\varphi) &= c_2 R^2 \int_0^{2\alpha} [u_2(\varphi - \xi) + \alpha R \theta(\varphi - \xi)] (\alpha - \xi) d\xi - \\
&\quad - \frac{2}{3} c_2 R^3 \alpha^3 \theta(\varphi).
\end{aligned} \tag{6}$$

В выражении для $M_2(\varphi)$ добавлено слагаемое M_T — момент реакции связи в свободном режиме движения, когда $P_1 = 0$. Эта величина является еще одним параметром модели, также как c_1 , c_2 , c_3 , R и 2α . Если не вводить M_T , то в невозмущенном движении получилось бы $M_2 = 0$ наряду с $P_1 = M_2 = M_1 = M_3 = 0$ и $P_3 = 2R^2 \alpha^3 c_3 / 3$. Это объясняется тем, что приведенная выше модель деформируемого колеса характеризуется диссипацией энергии за пределами области контакта, а также тем, что мы пренебрегаем здесь проскальзыванием в области контакта, хотя и весьма малым. Слагаемое M_T позволяет просто учесть диссипацию энергии в свободном режиме. Дело в том, что в первом приближении рассеивание энергии при качении, когда $P_1 = 0$, можно объяснить за счет сухого трения элементов деформируемого колеса. Очевидно, что наибольшие деформации имеют место в направлении орта $\vec{e}_3$ и поэтому такое рассеивание энергии можно считать в первую очередь следствием деформаций λ_3 .

Механизм внутреннего трения для различных деформируемых колес может существенно отличаться. Чтобы выяснить физическую сущность явления, достаточно воспользоваться простейшей моделью внутреннего трения, например, следующего вида. Предположим, что элементы периферии, перемещающиеся по вертикали вследствие деформации λ_3 , скользят относительно срединной плоскости колеса и при этом прижимаются к ней так, что возникает сухое трение. На рис. 1, б показаны деформации λ_3 в двух положениях колеса. Из рисунка видно, что в пределах $0 \leq \xi < \alpha$

элементы периферии смещаются вверх по отношению к срединной плоскости, а в пределах $2\alpha \geq \xi > \alpha$ — вниз. В результате возникает в первом приближении распределенное давление q_3^* , действующее на колесо со стороны опорной плоскости. Действительно, для перемещения элемента периферии вверх при наличии сухого трения необходимо приложить силу, направленную вверх. Очевидно, что $|q_3^*|$ зависит от "коэффициента" внутреннего трения и от сил, с которыми элемент прижимается к введенной здесь плоскости. Все эти факторы приводят к возникновению одного дополнительного момента M_T , который является моментом реакции связи в режиме движения, когда $P_1=0$, и одновременно моментом трения качения в этом режиме. Это означает, что вдоль орта $\vec{e}_2$ действует дополнительная составляющая $-M_T \text{sign}(\dot{\varphi})$.

Выше был показан один из возможных вариантов объяснения возникновения момента трения качения в свободном режиме качения. Конечно, детали процесса взаимодействия проскальзывающих внутренних элементов периферии и связанная с этим проскальзыванием форма петли гистерезиса в действительности гораздо сложнее. Однако каковы бы ни были эти особенности, они всегда приводят к одному и тому же интегральному результату, а именно, к возникновению рассмотренного момента, являющегося мерой рассеивания энергии в режиме качения $P_1=0$. Ясно, что мощность диссипации энергии в этом режиме равна $M_T \dot{\varphi}$.

Заметим, что теоретическое определение M_T требует знания многих параметров внутреннего трения, которые также определяются экспериментальным путем. Не отвергая ценности детального рассмотрения, укажем на то, что проще найти M_T из опыта, так как последнее требует нахождения только одного параметра, каковым и является величина M_T . Последняя может быть найдена, например, из опыта Кулона, который использовал нить, намотанную на вал свободного колеса, с двумя подвешенными на ее концах грузами.

В качестве примера рассмотрим движение при постоянных силах по следующему закону:

$$x_c(\varphi) = (r + \Delta_1) \varphi; \quad y_c(\varphi) = \Delta_2 \varphi; \quad \theta = 0;$$

$$\Delta_1 = \text{const}; \quad \Delta_2 = \text{const},$$

что дает с использованием соотношений (2) и (6) и удерживанием членов порядка не выше ω^4 следующее выражение для составляющих реакции опорной плоскости, приведенных к центру колеса:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -2c_1 \alpha^2 R \Delta_1 [1 + \alpha^2 (c_3 - c_1) / 3c_1] ; \\ P_2 &= -2c_2 \alpha^2 R \Delta_2 ; \\ P_3 &= \frac{2}{3} c_3 R^2 \alpha^3 [1 + \Delta_1 (c_1 - c_3) / R c_3] ; \\ M_1 &= -\frac{2}{3} c_3 R^2 \alpha^4 \Delta_2 + R (1 - \alpha^2 / 2) P_2 ; \\ M_2 &= -R (1 - \alpha^2 / 2) P_1 + \frac{2}{3} c_1 R^2 \alpha^4 \Delta_1 - M_T ; \\ M_3 &= \frac{2}{3} \alpha^3 R^2 c_2 \Delta_2 . \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

При этом $u_1(\varphi) = \Delta_1 \varphi$; $u_2(\varphi) = \Delta_2 \varphi$; $\theta = 0$.

Для момента с осью в направлении орта $\vec{e}_2$ и проходящей через центр области контакта получаем $M_{2K} = \frac{2}{3} c_1 R^2 \alpha^4 \Delta_1 - M_T$.

Таким образом, знак указанного момента зависит при достаточно больших Δ_1 не от направления вращения, а от знака Δ_1 . Это явление подтверждается экспериментом, описанным в работе [4], где отмечается, что в тормозном режиме (ему здесь соответствует $\Delta_1 > 0$) этот момент направлен по ходу вращения колеса, а не против.

Отметим также аналогию между выражениями для P_1 и P_2 . Подводящая к колесу мощность, если удерживать члены порядка не выше α^4 , оказывается равной

$$\begin{aligned} N &= N' + N'' ; \\ N' &= -P_2 \Delta_2 \dot{\varphi} = 2c_2 \alpha^2 R \Delta_2^2 \dot{\varphi} ; \\ N'' &= -[P_1 (r + \Delta_1) + M_2] \dot{\varphi} = (-P_1 \Delta_1 + M_T) \dot{\varphi} = \\ &= 2c_1 \alpha^2 R \Delta_1^2 [1 + (c_3 - c_1) \alpha^2 / 3c_1] \dot{\varphi} + M_T \dot{\varphi} . \end{aligned} \quad (8)$$

Для случая качения колеса в своей срединной плоскости может быть установлена связь с известными экспериментальными фактами в [4]. Так как $\Delta_1 = r_K - r$, где r_K — радиус качения колеса, то выражения для P_1 и M_2 можно представить в таком виде

$$P_1 = -\xi_1^0 (r_K - r); \quad M_2 = \xi_2^0 (r_K - r) - M_T; \quad (\dot{\varphi} > 0).$$

Заметим, что здесь P_1 и M_2 составляющие реакции опорной плоскости, приведенные к оси колеса. В теории автомобиля рассматривается также крутящий момент, приложенный к оси колеса

$$M_2' = -M_2 = -\xi_2^0 (r_K - r) + M_T.$$

Коэффициенты ξ_1^0 , ξ_2^0 и M_T обычно определяются экспериментально. В нашем случае

$$\xi_1^0 = 2c_1 \alpha^2 R [1 + (c_3 - c_1) \alpha^2 / 3c_1];$$

$$\xi_2^0 = R(1 - \alpha^2/2) \xi_1^0 + \frac{2}{3} c_1 R^2 \alpha^4.$$

Зависимости для P_1 , M_2 и M_2' хорошо согласуются с опытом (см., например, [4], фиг. 11 на с. 34), который подтверждает их линейный характер в функции от Δ_1 .

Приведем также зависимости $P_1(M_2')$ и $M_2'(P_1)$, которые здесь оказываются следующими:

$$P_1 = (M_2' - M_T) \xi_1^0 / \xi_2^0; \quad M_2' = P_1 \xi_2^0 / \xi_1^0 + M_T.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М.А. Определение реакции связей катящегося деформируемого колеса. — Изв. АН СССР. Сер. „Механика твердого тела“, 1977, № 6.
2. Левин М.А. Новая теория бокового увода колеса, приводящая к интегрально-разностным или дифференциально-разностным уравнениям. — В сб.: 25 науч.-техн. конф. БПИ. Материалы секции теоретической и прикладной механики. Мн., 1969.
3. Левин М.А. Теория движения деформируемого колеса при отсутствии увода, приводящая к разностным уравнениям. — В сб.: 26 науч.-техн. конф. БПИ: Материалы секции теоретической и прикладной механики. Мн., 1970.
4. Чудakov Е.А. Качение автомобильного колеса. — М., 1947.

УДК 531.3+629.11.012.5

М.А.Левин

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОДОЛЬНОЙ РЕАКЦИИ КАТЯЩЕГОСЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА

Исследование сил, действующих на катящееся деформируемое колесо со стороны опорной поверхности, составляет предмет теории качения. Уравнения теории качения в динамике транспорта

ных систем с качением имеют такое же значение, как, например, уравнения Навье-Стокса в гидродинамике или уравнения Коши в теории упругости. Правильность уравнений, описывающих связь между силами в области контакта и законом движения жесткого диска колеса, можно оценить по экспериментальным частотным характеристикам. Поэтому накопление подобных экспериментальных данных представляет интерес.

В работе излагаются результаты исследования экспериментальных частотных характеристик продольной силы деформируемого колеса. Описана экспериментальная установка, методика, а также дан анализ результатов с учетом проскальзывания в области контакта.

Эксперимент был проведен на установке, принципиальная схема которой показана на рис. 1. Деформируемое колесо представляет собой шину 1, одетую на диск, жестко соединенный с двумя шестернями 2. Диаметр шестерни подбирается таким образом, чтобы при заданной нагрузке и давлении радиус качения в свободном режиме совпадал с радиусом начальной окружности шестерни. Деформируемое колесо (шина) опирается на плоский стол 3 достаточной длины, который может перемещаться в продольном направлении, опираясь на роликовые опоры 4. Последние могут перекачиваться по горизонтальной плоскости, связанной с основанием, на котором жестко закреплены две рейки 5. Шестерни 2 находятся в зацеплении с рейками 5. Таким образом, при неподвижном столе обеспечивается радиус качения в свободном режиме. Качение шины с блоком шестерен осуществляется посредством движения проволоки 6, связанной через подшипник 7 с блоком шестерен, и наматываемой на барабан 8, жестко связанный с диском 9 фрикционного вариатора. Проволока 6 натягивается с помощью груза 17. Через ролик 10 вариатора вращение передается диску 11, связан-

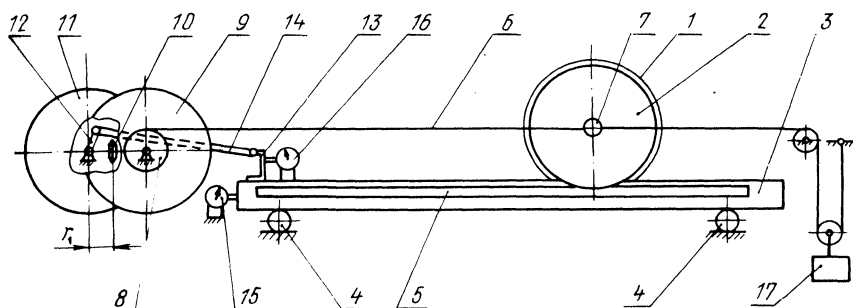


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки.

ному с кривошипом 12, который сообщает возвратно-поступательное движение плоскому столу 3 через упругий элемент 13. Величину радиуса кривошипа можно регулировать. Поскольку отношение длины шатуна 14 к радиусу кривошипа больше 200, то кинематика обеспечивает точность гармонического перемещения стола, равную $\pm 0,005\%$, что в данном случае находится в соответствии с допусками при изготовлении механизма по второму классу точности.

Перемещение стола измеряется посредством индикатора 15 с ценой деления 0,01 мм, а усилие на столе, соответствующее продольной силе с учетом погрешности "нуля", — с помощью индикатора 16 с ценой деления 0,001 мм. При этом тарировочный коэффициент оказался равным 10/17 Н/мкм. Наклейка тензорезисторов по мостовой схеме на упругий элемент 13 и тензоэлемент продольного перемещения позволяет посредством системы усилитель-осциллограф записать продольные перемещения и силу на фотоленту. Для этой же цели может быть использован также двухканальный самописец.

Значение кинематической частоты ν устанавливается посредством фиксации величины r_1 , определяющей положение ролика 10

$$r_1 = 125 / (1 + 30,3 \pi k/a); \quad k = \nu / 2 \pi.$$

При каждом значении ν записываются не менее пяти циклов колебаний (т.е. не менее 10 размахов). Средняя величина отношения амплитуды продольной силы к амплитуде продольного перемещения, равного амплитуде u_{10} тангенциального псевдоскольжения $u_1 = x_c - r \varphi = u_{10} \sin(\nu r \varphi / 2a)$, дает соответствующее значение ординаты амплитудно-частотной характеристики при заданной абсциссе ν . Здесь r — радиус качения колеса в свободном режиме; $2a$ — длина области контакта. Значение u_{10} устанавливается с помощью изменения радиуса кривошипа 12. Фазовый сдвиг может быть определен по сдвигу фаз двух записанных периодических процессов. В данном случае размахи силы определялись по максимальным отклонениям стрелки индикатора 16 в процессе медленного вращения барабана 8.

Описанная экспериментальная установка обладает рядом достоинств. Обычно реализация заданного режима качения на стенде при определенной продольной силе требует синхронизации движения приводов колеса и опорной поверхности, что приводит к большим трудностям при испытаниях на различных скоростях. Здесь же благодаря использованию системы рейка-шестерня эта проблема устраняется в широком диапазоне скоростей. Поскольку осцил-

ляционное движение должно быть синхронизировано, то в обычном исполнении это потребовало бы применения трех приводов с использованием сложной системы синхронизации. В установке на рис. 1 благодаря замыканию кинематической цепи колесо-опорная поверхность-осциллятор синхронизация обеспечивается автоматически и нужен только один привод вместо трех. Достоинством установки является также использование плоской опорной поверхности и малая мощность привода в связи с замыканием наиболее мощных силовых факторов в области между опорной плоскостью и рейками. Благодаря малой мощности привода и использованной методике с целью уменьшения погрешности эксперимента можно применять ручной привод и проводить испытания на очень малых скоростях, причем неравномерность вращения привода не оказывает никакого влияния из-за указанной выше автоматической синхронизации. Эти же особенности позволяют еще более снизить погрешность эксперимента за счет непосредственного считывания показаний с индикаторов, устранив тем самым влияние нередко значительных погрешностей записывающей аппаратуры в системе тензорезистор-усилитель-осциллограф-фотолента.

Испытывалась шина 205х56 (модель Л-155, ГОСТ 4750-74). Нагрузка составила 130 Н; давление — $0,6 \cdot 10^5$ Па; $2a = 0,09$ м; $2U_{10} = 0,125$ см. Экспериментальные точки амплитудно-частотной характеристики продольной силы показаны на рис. 2. Статистическая обработка показывает, что с надежностью в 90% для точки с абсциссой $\kappa = 0,2$ значение ординаты должно иметь отклонения в пределах не более $\pm 5,5\%$. Аналогичный результат получается и для других ординат.

Воспользуемся известной аналогией [1] между зависимостями для продольной и боковой силы. При малых ν можно определить коэффициент тангенциального (продольного) псевдоскольжения $K_{\tau} = 522 \times 9 / (17 \times 0,125 \times 0,1 \times 2 \pi) = 3520$ Н, где $522/17$ — размах продольной силы при $\kappa = 0,1$. Непосредственно из опытных данных находим $C_{\tau}^{\text{эф}} = 54\,300$ Н/м в предположении, что обработка эксперимента проводится на основе теории, являющейся обобщением теории Келдыша [2] на случай качения колеса в своей срединной плоскости. Отметим, что на рис. 2 заметно западание ординат после $\nu = 2\pi$, что говорит о возможности обработки полученных данных и на основе теории, соответствующей основному варианту в [3–6]. Значение продольной жесткости в статике равно $C_{\tau} = 72\,500$ Н/м. Значительная величина $(C_{\tau}^{\text{эф}} / C_{\tau}) = 0,34$ частично связана с несовпадением коэффици-

ентов трения скольжения и покоя и указывает на наличие существенного проскальзывания в области контакта.

Для анализа полученного экспериментального результата используем зависимости (1*), (3*), (14), (16) в работе [7], которые учитывают проскальзывание в области контакта при действии сил, лежащих только в срединной плоскости катящегося деформируемого колеса

$$P_1 = -f_1' \sigma_1;$$

$$\dot{u}_1 - \dot{\sigma}_1 = v_1 r \dot{\varphi}; \quad \dot{v}_1 = (s_1 \sigma_1 - s_2 v_1) r \dot{\varphi};$$

$$P_1(v_1) = -P_{1 \max} (1 - e^{-n}) \operatorname{sign}(v_1); \quad (1)$$

$$n = K_{\tau} |v_1| / P_{1 \max};$$

$$f_1' = |P_1(|v_1|)| / v_1 |s_1 / s_2|.$$

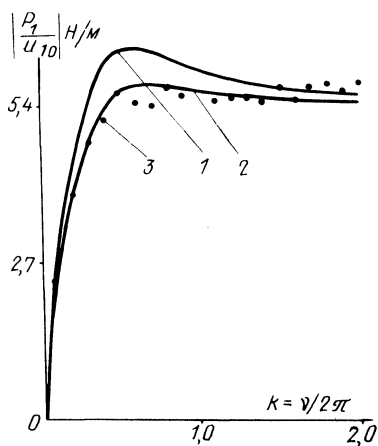


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика продольной силы для шины 205x56 (модель Л-155); 1 — в случае пренебрежимо малого проскальзывания, $\xi = 0,01$; 2 — с учетом проскальзывания по методу гармонической линеаризации при $\xi = 0,36$; 3 — экспериментальные точки.

Очевидно, что если $|v_1| \ll 1$, то получаются уравнения, обобщающие теорию Келдыша на случай качения колеса в своей срединной плоскости при пренебрежимо малом проскальзывании в области контакта [3–6].

Положим, что функция, соответствующая тангенциальному псевдоскольжению, изменяется по гармоническому закону $u_1 = u_{10} \sin(\beta \varphi)$, где $\beta = v r / 2a$. Тогда для продольной силы $P_1(t)$ получим выражение, которое при переходе к безразмерной силе принимает следующий вид:

$$P_1^*(t) = P_1(t)/f_1 u_{10} = [(1 - e^{-\infty})/\infty] a_1 \sin(\beta \varphi + \Phi_1 - \pi); \quad (2)$$

где $\infty = \xi a_2 |\sin(\beta \varphi + \Phi_2)| s_2/s_1$; $\xi = f_1 u_{10}/P_{1\max}$ — безразмерная амплитуда; $P_{1\max} = P_3 \mu$ — максимально возможная продольная сила; μ — коэффициент трения скольжения; f_1 — продольная жесткость при малых силах; a_1 и Φ_1 — амплитуда и фаза продольной деформации σ_1 ; a_2 и Φ_2 — амплитуда и фаза растяжения ν_1 деформируемой периферии в центре области контакта. Указанные амплитуды и фазы находятся при единичном по модулю гармоническом воздействии u_1 из изображений по Лапласу

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \bar{u}_1 p(p + s_2 r)/(p^2 + p s_2 r + s_1 r^2); \\ \bar{\nu}_1 &= \bar{u}_1 p r s_1/(p^2 + p s_2 r + s_1 r^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, выражение для $P_1^*(t)$ зависит от ξ , а последнее определяется величиной амплитуды воздействия. Очевидно, что при $\xi \ll 1$, а значит, и $\infty \ll 1$ получим изменение $P_1^*(t)$ по гармоническому закону, что соответствует линейной системе при пренебрежимо малом проскальзывании. Если последнее условие не выполняется, то функция $P_1^*(t)$ оказывается периодической, но не гармонической, что соответствует нелинейной системе с соответствующим скольжением.

Воспользуемся методом гармонической линеаризации для анализа зависимости $P_1^*(t)$. Посредством разработанной автором программы на ФОРТРАНе находится амплитуда и фаза первой гармоники в функции ξ .

В связи с аналогией между боковым и продольным движением с точки зрения их описания [1] проиллюстрируем результаты работы программы на примере качения при боковом гармоническом воздействии. Соответствующее выражение для $P_2^*(t)$ получается простой заменой $\sigma_1, \nu_1, s_1, s_2, P_{1\max}, \dots$ на $\sigma_2, \nu_2, s_4, s_5, P_{2\max}, \dots$ Воспользуемся экспериментальными результатами, приведенными в [2] на графике 4с.5 для шины 400х150 при давлении $1,5 \cdot 10^5$ Па и нагрузке 3000 Н, для которой $s_4 = 94 \text{ м}^{-2}$, $s_5 = 24 \text{ м}^{-1}$ и $2a \approx 0,13$ м. На рис. 3 представлены амплитудно-частотные характеристики безразмерной боковой силы при различных ξ . Из рис. 3 следует, что уже при $\xi = 0,313$ существенно изменяется вид этих характеристик и исчезает явно выраженный максимум с последующим снижением, что характерно для линейной системы при малых ξ . Очевидно, что наименее подверженной проскальзыванию является область малых ν , где

все кривые совпадают, что естественно, так как в этой области из-за малых амплитуд проскальзывание в области контакта оказывается малым.

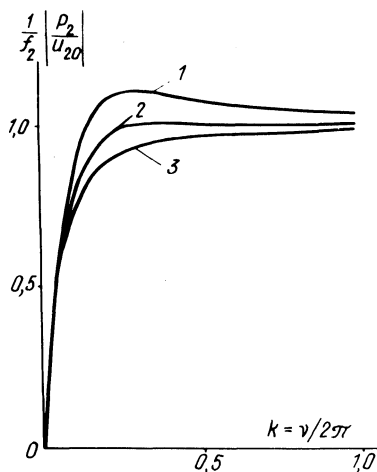


Рис. 3. Безразмерная амплитудно-частотная характеристика боковой силы по данным [2]:

1 — в случае пренебрежимо малого проскальзывания; $\xi = 0,01$; 2 — с учетом проскальзывания по методу гармонической линеаризации, $\xi = 0,313$; 3 — $\xi = 0,5$.

Из сказанного выше следует, что обработка экспериментальных частотных характеристик, полученных при наличии заметного проскальзывания, на основе линейной теории, не учитывающей его, может привести к неверным результатам, особенно при неправильном выборе области изменения кинематической частоты. Покажем это на примере обработки кривой 2 при $\xi = 0,313$, т.е. при существенном проскальзывании, по минимуму квадратического отклонения от зависимости по линейной теории [2]. При этом будем изменять число точек N , подлежащих учету, расширяя диапазон изменения ν и число варьируемых параметров. В последнем случае вариант I соответствует варьированию s_4 при обязательном выполнении в теории [2] соотношения $K/C = s_5/s_4$ и заданном C , вариант II соответствует варьированию s_4 и s_5 при заданном C , вариант III — варьированию всех трех величин s_4 , s_5 и C . Программа расчета по варианту I представлена в докладе [8], а по варианту III — в сообщении автора на заседании кафедры "Тракторы" БПИ 10.01.1978 г.

Результаты определения, например, коэффициента s_4 приведены в табл. 1. Из таблицы следует, что обработка частотной характеристики, полученной при наличии существенного проскальзыва-

Т а б л и ц а 1

$\kappa = \nu/2\pi$	N	I	II	III
0,4	4	118	200	100
0,5	5	205	288	100
0,6	6	268	334	106
0,7	7	314	368	128
0,8	8	358	405	142
0,9	9	400	440	154
1,0	10	448	488	156
1,1	11	492	531	161
1,2	12	534	572	—
1,3	13	574	603	—

ния, на основе линейной теории может привести к каким угодно результатам. Причем значения s_4 возрастают с увеличением области учитываемых значений ν , а наибольшие величины дает вариант II. Как видно, наиболее приемлемой с точки зрения нахождения кинематических коэффициентов линейной теории является область малых ν , так как здесь из-за малого проскальзывания наблюдается лучшее соответствие линейной теории, для которой должно было бы получиться $s_4 = 94 \text{ м}^{-2}$. Однако нужно учесть, что при малых ν опытные данные могут давать значительный разброс также из-за сильного влияния погрешности "нуля". Интересно, что даже небольшая ошибка в определении C (всего лишь порядка 5%) приводит при счете по вариантам I и II к результатам, отличающимся в несколько раз, если, конечно, используется область немалых ν . Действительно, по варианту III при $N = 11$ в результате счета получаем, что $s_4 = 161 \text{ м}^{-2}$, $s_5 = 41 \text{ м}^{-1}$, а вычисленная боковая жесткость меньше на 5,3% в сравнении с той, которая введена в качестве постоянной в вариантах I и II. Следовательно, если при вычислении по варианту II ввести жесткость на 5,3% меньшую использованной, то вместо значения $s_4 = 531 \text{ м}^{-2}$ получилось бы $s_4 = 161 \text{ м}^{-2}$.

Отметим, что с удовлетворительной точностью можно определять значения кинематических коэффициентов в теории [2], не прибегая к экспериментальному построению частотных характе-

ристик. При этом часто получаются результаты лучшие, чем те, которые следуют из табл. 1 с использованием области немалых ν . Для этого необходимо знать отношение K/C и величину $2a$. Действительно, в соответствии с [8] $K/C = s_5/s_4 = 2a(h_0 + 0,5)$; $h_0 = (K/C - a)/2a$;

$$\gamma^* = 3/[1 - h_0^3 / (0,5 + h_0)^3]; \quad (4)$$

$$s_5 = \gamma^* C/K; \quad s_4 = \gamma^* C^2/K^2.$$

В нашем случае $K/C = 0,25$ м; $2a = 0,13$ м, что дает по формулам (4) $s_4 = 81 \text{ м}^{-2}$, $s_5 = 20 \text{ м}^{-1}$. Эти значения близки к экспериментальным значениям $s_4 = 94 \text{ м}^{-2}$ и $s_5 = 24 \text{ м}^{-1}$ в [2].

При пренебрежимо малом проскальзывании может быть полезен также прием, основанный на нахождении абсциссы ν_* экспериментальной частотной характеристики, соответствующей ординате $S^{\text{ЭФ}}$ в области возрастания ординат (в этом случае требуется тщательный анализ при определении $S^{\text{ЭФ}}$). Тогда $s_4 = \nu_*^2/2a^2$.

Отметим, что значения s_4 и s_5 в линейной теории, полученные при обработке эксперимента с проскальзыванием, в особенности в диапазоне немалых ν , не позволяют хорошо даже осредненно учесть проскальзывание в линейной теории, так как при этом сильно искажается наиболее важный начальный участок характеристики (его кривизна более всего), соответствующий малым ν .

Таким образом, для обработки результатов эксперимента, проведенного при существенном проскальзывании, необходимо использовать и соответствующую теорию, которая учитывала бы это обстоятельство (1) — (3).

Для шины, испытанной на установке (см. рис. 1), получены значения $K_{\tau} = 3520$ Н, $S_{\tau}^{\text{ЭФ}} = 54300$ Н/м, $2a = 0,09$ м. Основываясь на аналогии между зависимостями для боковой и продольной сил, можно найти значения $s_1 = 735 \text{ м}^{-2}$ и $s_2 = 48^{-1}$ по формулам, аналогичным (4) и приведенным в [8]. Более точные методы определения этих коэффициентов даны в [5,6], а затем [9]. Исходя из того, что $P_{l \text{ max}}$ имеет порядок 100 Н, а максимальная амплитуда силы в области определения эффективной жесткости равна 36 Н, находим $\xi_2 = 0,36$. С использованием этих данных по методу гармонической линеаризации получаем амплитудно-частотную характеристику в виде кривой 2 на рис. 2, которая хорошо согласуется с опытными данными. Кривая 1 на рис. 2 соответствует характеристике, полученной без учета проскальзывания в области контакта, т.е. при очень малых ξ_2 . Отметим, что в реальных ус-

ловиях возникает проскальзывание большее, чем то, которое здесь следует при заданном ξ . Это объясняется наличием в области контакта уравновешенной системы сил, способствующей расширению зон скольжения.

Результаты экспериментальной работы доложены на семинаре по качению эластичного колеса в МАДИ 24.10.79 г., а особенности конструкции – на 35 научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава БПИ. Описанная выше установка принципиально отличается от стенда для исследования частотных характеристик при боковом уводе, о котором было доложено автором 4.11.69 г. на заседании кафедры "Автомобили" БПИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е в и н М.А. Зависимость тангенциальной реакции от псевдоскольжения при качении упругого колеса. — ДАН БССР, 1971, т. 15, № 5.
2. К е л ы ш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. — Труды ЦАГИ, 1945, № 564.
3. Л е в и н М.А. Некоторые результаты исследования реакций связей деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1973.
4. Л е в и н М.А. О реакциях связей упругого колеса при качении. — ДАН БССР, 1972, т. 16, № 5.
5. Л е в и н М.А. Понижение порядка зависимостей для реакции связей катящегося деформируемого колеса. — ДАН БССР, 1974, т. 18, № 6.
6. Л е в и н М.А. Определение реакций связей катящегося деформируемого колеса. — Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1977, № 6.
7. Л е в и н М.А., С о л о н с к и й А.С., М а т а т о в а А.П. Приложение теории качения деформируемого колеса к исследованию динамики разгона трактора. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1976, вып. 3.
8. Л е в и н М.А. Определение параметров стационарного и нестационарного увода колеса. — V и VI всесоюзные науч.-техн. семинары "Опыт работы по улучшению устойчивости и управляемости автомобиля в соответствии с нормами безопасности движения": Тез. докл. 18—20 ноября 1969, 27—29 октября 1970. М.: НАМИ, 1972.
9. Л е в и н М.А. Определение кинематических коэффициентов в теории качения. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1979, вып. 6.

УДК 539.3

Е.Н.Ламбина

ОБ ОДНОМ ОСОБОМ СЛУЧАЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Дифференциальное уравнение для радиального перемещения W в случае осесимметричных свободных колебаний сферической оболочки имеет вид [1, 2]

$$\Delta\Delta\Delta W_n + (4+K_n^2)\Delta\Delta W_n + C^2 \left(1 - \frac{K_n^2}{1-\mu^2}\right)\Delta W_n + C^2 \left(2 + \frac{1+3\mu}{1-\mu^2}K_n^2 - \frac{K_n^4}{1-\mu^2}\right)W_n = 0,$$

где Δ — дифференциальный оператор

$$\frac{d^2}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d}{d\theta},$$

θ — угол между радиусом и вертикалью; μ — коэффициент Пуассона,

$$C^2 = 12(1-\mu^2) \frac{R^2}{\delta^2} \left(1 + \frac{\delta^2}{6R^2}\right),$$

где R и δ — радиус и толщина оболочки соответственно; K_n — частотный коэффициент, связанный с частотой ω , соответствующей n -й форме колебаний, соотношением

$$\omega_n = \frac{K_n}{R} \sqrt{\frac{E}{(1-\mu^2)\rho}},$$

где E — модуль Юнга; ρ — плотность материала оболочки.

Ограниченное при $\theta = 0$ решение уравнения (1) представляется в виде

$$W_n = A_1 P_{n_1}(\cos \theta) + A_2 P_{n_2}(\cos \theta) + A_3 P_{n_3}(\cos \theta), \quad (2)$$

где $P_{n_i}(\cos \theta)$ — сферические функции; A_i — произвольные постоянные, а величины $P_i = n_i(n_i+1)$ удовлетворяют кубическому уравнению

$$p^3 - (K_n^2 + 4)p^2 + \left(1 - \frac{K_n^2}{1-\mu^2}\right)C^2 p - \left(2 + \frac{(1+3\mu)K_n^2 - K_n^4}{1-\mu^2}\right)C^2 = 0 \quad (3)$$

Формула (2) неприменима в случае кратных корней уравнения (3). Впервые правильное представление ограниченного при $\theta = 0$ решения уравнения (1) в случае кратных корней уравнения (3) получено в работе [3], где задача сводится к вычислению двойного интеграла вида

$$I = \int_0^\theta \left[\frac{1}{P_n^2(\cos \theta) \sin \theta} \int_0^\theta P_n^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] d\theta.$$

В настоящей заметке предлагается другая форма решения уравнения (1) при $p_1 = p_2$ (в виде разложения по полиномам Лежандра).

Пусть $p_1 \neq p_2 \neq p_3$. Общее ограниченное в полюсе решение уравнения (1) представим в виде

$$W = A_1 P_{n_1}(\cos \theta) + A_2 \frac{P_{n_2}(\cos \theta) - P_{n_1}(\cos \theta)}{n_2 - n_1} + A_3 P_{n_3}(\cos \theta).$$

При $p_2 \rightarrow p_1$ $n_2 \rightarrow n_1$.

Переходя к пределу, получим

$$W = A_1 P_{n_1}(\cos \theta) + A_2 \left. \frac{\partial P_{\gamma}(\cos \theta)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=n_1} + A_3 P_{n_3}(\cos \theta). \quad (4)$$

Для определения $\frac{\partial P_{\gamma}(\cos \theta)}{\partial \gamma}$ воспользуемся формулой [4]

$$P_{\gamma}(\cos \theta) = \frac{\sin \gamma \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\gamma - k} - \frac{1}{\gamma + k + 1} \right) P_k(\cos \theta) \quad (5)$$

(γ не равно целому числу).

Дифференцируя (5) по γ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\gamma}(\cos \theta)}{\partial \gamma} &= \cos \gamma \pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\gamma - k} - \frac{1}{\gamma + k + 1} \right) P_k(\cos \theta) + \\ &+ \frac{\sin \gamma \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{(\gamma + k + 1)^2} - \frac{1}{(\gamma - k)^2} \right] P_k(\cos \theta) \end{aligned} \quad (6)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\gamma}(\cos \theta)}{\partial \gamma} &= \pi \operatorname{ctg} \gamma \pi \cdot P_{\gamma}(\cos \gamma) + \frac{\sin \gamma \pi}{\pi} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{(\gamma + k + 1)^2} - \frac{1}{(\gamma - k)^2} \right] P_k(\cos \theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Первое слагаемое выражения (7) удовлетворяет при $\gamma = n_1$ уравнению (1), следовательно, уравнению (1) будет удовлетворять и выражение

$$\psi_{n_1}(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{(n_1 + k + 1)^2} - \frac{1}{(n_1 - k)^2} \right] P_k(\cos \theta)$$

(n_1 не равно целому числу).

Случай целого n_1 исследуем при помощи предельного перехода. Формулу (6) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\gamma}(\cos \theta)}{\partial \gamma} &= \cos \pi \gamma \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{(\gamma - k)} - \frac{1}{(\gamma + k + 1)} \right] P_k(\cos \theta) + \\ &+ \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{(\gamma + k + 1)^2} - \frac{1}{(\gamma - k)^2} \right] P_k(\cos \theta) + \\ &+ (-1)^1 \left[\frac{\cos \pi \gamma}{\gamma - 1} - \frac{\sin \pi \gamma}{\pi (\gamma - 1)^2} \right] P_1(\cos \theta), \end{aligned}$$

отдельно выделив слагаемые, обращающиеся при $\gamma = 1$ в бесконечность (знак "штрих" в суммах обозначает, что в коэффициентах при $P_k(\cos \theta)$ для $R = 1$ опускаются слагаемые, обращающиеся при $\gamma = 1$ в бесконечность).

Переходя к пределу при $\gamma \rightarrow 1$, учитывая, что при целом l

$$\cos \pi l = (-1)^l; \quad \sin \pi l = 0$$

и

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \left[\frac{\cos \pi \gamma}{\gamma - 1} - \frac{\sin \pi \gamma}{\pi (\gamma - 1)^2} \right] = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\pi (\gamma - 1) \cos \pi \gamma - \sin \pi \gamma}{\pi (\gamma - 1)^2} = 0,$$

получим

$$\frac{\partial P_{\gamma}(\cos \theta)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=1} = (-1)^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{(1 - k)} - \frac{1}{(1 + k + 1)} \right] P_k(\cos \theta).$$

Окончательно для (1) при $p_1 = p_2$ будем иметь

$$W = A_1 P_{n_1}(\cos \theta) + A_2 \psi_{n_1}(\cos \theta) + A_3 P_{n_3}(\cos \theta),$$

где при нецелом n_1

$$\psi_{n_1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{(n_1 + k + 1)^2} - \frac{1}{(n_1 - k)^2} \right] P_k(\cos \theta);$$

при целом n_1

$$\psi_{n_1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{(n_1 - k)} - \frac{1}{(n_1 + k + 1)} \right] P_k(\cos \theta).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лу ж и н О.В. Осесимметричные колебания сферических куполов при различных граничных условиях. — В кн.: Исследования по теории сооружений. М., 1962, вып. XI. 2. Л и з а р е в А.Д. О низших частотах собственных осесимметричных колебаний непологих сферических оболочек. — МТТ, 1967, № 3. 3. Л и з а р е в А.Д., Р о с т а н и н Н.Б. Некоторые обратные задачи теории колебаний сферических оболочек. Прикладная механика. 1967, т. XII, № 5. 4. Г р а д ш т е й н И.С., Р ы ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1962.

УДК 532.135

Е.Н.Ламбина

О ХАРАКТЕРЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКО-УПРУГИХ ЛИНЕЙНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Решение ряда задач течения вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$U = U_0 + \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cdot e^{-\mu \lambda_m t}, \quad (1)$$

где U_0 и U_m зависят только от координат и не зависят от коэффициента вязкости μ ; λ_m — положительные коэффициенты, не зависящие от μ , причем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \infty; \quad U|_{t=0} = 0.$$

К таким задачам относятся задачи течения вязкой жидкости между параллельными плоскостями, между коаксильными цилиндрами и т.п. [1]. Назовем течения подобного типа экспоненциальными. Определим соответствующие им течения вязко-упругой жидкости с функцией релаксации

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^n G_i e^{-s_i t}; \quad s_i = \frac{G_i}{\eta_i} \quad [2].$$

Используя принцип соответствия для вязко-упругих жидкостей [3], получим

$$\bar{U} = \frac{U_0}{s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_m}{s + \mu \lambda_m};$$

$$\bar{\mu}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{s+s_i} = \frac{\sum_{k=1}^n G_k \prod_{i \neq k} (s+s_i)}{\prod_{i=1}^n (s+s_i)} ;$$

$$\begin{aligned} \bar{U}' &= \frac{U_0}{s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_m}{s + \lambda_m \bar{\mu}(s)} = \\ &= \frac{U_0}{s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_m \prod_{i=1}^n (s+s_i)}{s \prod_{i=1}^n (s+s_i) + \lambda_m \sum_{k=1}^n G_k \prod_{i \neq k} (s+s_i)} . \end{aligned}$$

Используя теорему о разложении [4], находим

$$U' = U_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{jm} \sum_{j=1}^{n+1} U_m e^{s_{jm} t} , \quad (2)$$

где s_{jm} – корни уравнения $(n+1)$ степени

$$\Psi(s) = s \prod_{i=1}^n (s+s_i) + \lambda_m \sum_{k=1}^n G_k \prod_{i \neq k} (s+s_i) = 0 \quad (3)$$

и

$$A_{jm} = \frac{\prod_{i=1}^n (s+s_i) \sum_{k=1}^n G_k \prod_{i \neq k} (s+s_i)}{2 \sum_{k=1}^n G_k (s + \frac{s_k}{2}) \prod_{i \neq k} (s+s_i)} \Big|_{s=s_{jm}} .$$

Исследуем корни характеристического уравнения.

Утверждение 1. Действительные части всех корней уравнения (3) отрицательны.

Доказательство. Уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$\varphi(s) = s + \lambda_m \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{s+s_i} = 0 . \quad (4)$$

Пусть $s_{jm} = a_{jm} + b_{jm} i$.

Тогда $\bar{s}_{jm} = a_{jm} - b_{jm} i$;

$$\varphi(s_{jm}) + \varphi(\bar{s}_{jm}) = 2a_{jm} + 2\lambda_m \sum_{i=1}^n \frac{G_i (s_i + a_{jm})}{(s_i + a_{jm})^2 + b_{jm}^2} = 0 ;$$

$$a_{jm} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{G_i \lambda_m}{(s_i + a_{jm})^2 + b_{jm}^2} \right) = - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_m G_i s_i}{(s_i + a_{jm})^2 + b_{jm}^2}.$$

Из положительности выражений

$$1 + \sum_{i=1}^n \frac{G_i \lambda_m}{(s_i + a_{jm})^2 + b_{jm}^2} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_m G_i s_i}{(s_i + a_{jm})^2 + b_{jm}^2}$$

следует утверждение 1.

Из утверждения 1 следует, что при $t \rightarrow \infty$ вязко-упругое течение приближается к установившемуся течению вязкой жидкости.

Утверждение 2. Уравнение (3) имеет по крайней мере $(n-1)$ действительных корней.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности задачи, можно считать, что $s_i > s_K$ при $i > k$.

$$\text{Из (3) получим: } \psi(-s_K) = \lambda_m \sum_{i \neq k} \pi (s_i - s_K).$$

$$\text{Нетрудно видеть, что } \text{sign } \psi(-s_K) = \text{sign}(-1)^{n-k}.$$

Следовательно, между $-s_K$ и $-s_{K+1}$ лежит по крайней мере один корень уравнения (3), отсюда и следует справедливость утверждения 2.

Утверждение 3. Все действительные корни уравнения (3) расположены в интервале $[-s_1, 0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость верхней границы следует из утверждения 1. Справедливость нижней границы следует из того, что при $s < -s_1$ все слагаемые выражения (3) будут одного знака и, следовательно, $\psi(s) \neq 0$.

Утверждение 4. При достаточно большом m уравнение (3) имеет пару комплексно-сопряженных корней.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение (4), эквивалентное (3). $\varphi(s)$ непрерывна в интервалах $(-s_K, -s_{K+1})$ и $(-s_n, 0)$. Если бы все корни уравнения (4) были действительными, то по крайней мере на одном из рассмотренных интервалов лежало бы более одного действительного корня и $\varphi'(s)$ обращалось бы в ноль в некоторых точках этого интервала

$$\varphi'(s) = 1 - \lambda_m \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{(s + s_i)^2} \leq 1 - \lambda_m K^2,$$

где K^2 – минимум выражения $\sum_{i=1}^n \frac{G_i}{(s + s_i)^2}$ в области $-s_1 < s < 0$.

При достаточно большом m для всех $-s_1 < s < 0$ $\varphi'(s) < 0$. Следовательно, действительных корней только $(n-1)$ и существует пара комплексно-сопряженных корней.

Из рассмотренных утверждений следует, что для тех неустановившихся течений, где для вязкой жидкости наблюдается апериодическое приближение к установившемуся режиму, в вязко-упругих жидкостях на апериодическое течение накладываются быстро затухающие колебания. (Апериодические компоненты в разложении существуют всегда при $n > 1$)

ЛИТЕРАТУРА

1. Т а р г С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. — М.-Л., 1951.
2. К р и с т е н с е н Р. Введение в теорию вязко-упругости. — М., 1974.
3. Л а м б и н а Е.Н. О принципе соответствия для медленных неустановившихся течений вязко-упругих линейных жидкостей. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1980, вып. 7.
4. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике для научных работников. — М., 1970.

УДК 532.135

Б.И.Лапушина

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ЦИЛИНДРАМИ

Рассмотрим течение вязко-упругой среды, описываемой уравнением

$$S = 2 \int_0^t \mu(t - \tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$$-\frac{G}{\eta} t$$

где $\mu(t) = G e^{-\frac{G}{\eta} t}$ (модель Максвелла) в зазоре между круглыми соосными цилиндрами (рис. 1).

В (1) S — девиатор напряжений; $\dot{\epsilon}$ — девиатор скоростей деформации; $\mu(t)$ — функция релаксации.

Уравнение движения, пренебрегая массовыми силами и конвективными членами, запишем в виде

$$\text{Div } S = \rho \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (2)$$

Уравнение неразрывности

$$\text{div } v = 0. \quad (3)$$

Граничными условиями для скоростей являются условия прилипания:

$$v_z|_{r=R_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0; \\ u & \text{при } t > 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$v_z|_{r=R_2} = 0.$$

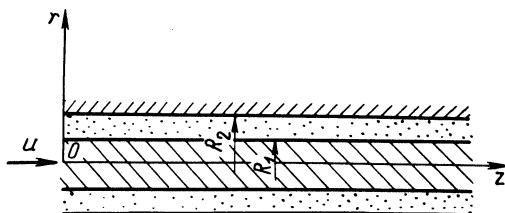


Рис. 1. Схема течения в зазоре.

Начальные условия – нулевые.

Течение из состояния покоя происходит за счет движения внутреннего цилиндра с постоянной скоростью u .

Траектории частиц полагаем прямолинейно – параллельными. Уравнение неразрывности (3) в цилиндрических координатах перепишется в виде

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad (5); \quad v_z = v(r, t),$$

а уравнения движения (2) и реологическое уравнение состояния (1) соответственно запишутся:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0; & \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} + \frac{G}{\eta} \sigma_{rz} = G \frac{\partial v}{\partial r}; \\ \sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \sigma; \\ \sigma_{r\varphi} = \sigma_{z\varphi} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Из (6) следует, что $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z}$ — функция только t или постоянная величина в случае напорного течения и $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} = 0$, если течение происходит только за счет движения внутреннего цилиндра.

Применим к (6) и (7) преобразование Лапласа по переменной t . Получим

$$\begin{cases} \rho s \bar{v} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial r} + \frac{\bar{\sigma}_{rz}}{r}; \\ \left(s + \frac{G}{\eta}\right) \bar{\sigma}_{rz} = G \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}. \end{cases} \quad (8)$$

Записывая условие совместности (8), получим для изображений дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{v}}{dr} - q^2 \bar{v} = 0, \quad (9)$$

где

$$q = \sqrt{\frac{\rho s (s + G/\eta)}{G}}, \quad (10)$$

откуда

$$v = A(s) I_0(qr) + B(s) K_0(qr). \quad (11)$$

Граничные условия для изображений:

$$\begin{cases} \bar{v}|_{r=R_1} = \frac{u}{s}; \\ \bar{v}|_{r=R_2} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Определяя с учетом граничных условий значения $A(s)$ и $B(s)$, получаем выражение

$$\bar{v} = \frac{u}{s} \frac{[K_0(qR_2)I_0(qr) - I_0(qR_2)K_0(qr)]}{[I_0(qR_1)K_0(qR_2) - K_0(qR_1)I_0(qR_2)]}. \quad (13)$$

Применим формулу обращения

$$v = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{v} e^{st} ds. \quad (14)$$

Вычисление этого интеграла заменяем определением суммы вычетов подынтегральной функции:

$$v = \sum \operatorname{Res} \Phi(s) e^{st},$$

где

$$\Phi(s) e^{st} = \frac{F(s)}{\Psi(s)} e^{st} = \frac{F(s)}{s \Psi_1(s)} e^{st}. \quad (15)$$

Один из нулей знаменателя соответствует $s = 0$, остальные определяются как корни уравнения

$$I_0(qR_1) K_0(qR_2) - K_0(qR_1) I_0(qR_2) = 0. \quad (16)$$

Для определения нулей знаменателя полагаем

$$\alpha^2 = - \frac{\rho s(s + \frac{G}{\eta})}{G}. \quad (17)$$

Тогда (16) переписывается в виде:

$$I_0(\alpha R_1) Y_0(\alpha R_2) - J_0(\alpha R_2) Y_0(\alpha R_1) = 0. \quad (18)$$

Аналогично [2] определяются значения α_m

$$(m = 1, \dots, \infty).$$

Каждому α_m соответствуют два значения s_{1m} и s_{2m} , определяемых из соотношения

$$s_m^2 + \frac{G}{\eta} s_m + \frac{G}{\rho} \alpha_m^2 = 0 \quad (m = 1, \dots, \infty). \quad (19)$$

В результате вычисления получаем вычеты, соответствующие полюсам s_{jm} ($j = 1, 2$):

$$A_{1m} = - \frac{F(\alpha_m) e^{s_{1m}t}}{s_{1m} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_m} \frac{(2s_{1m} + \frac{G}{\eta})}{2\alpha_m \frac{G}{\rho}}};$$

$$A_{2m} = - \frac{F(\alpha_m) e^{s_{2m}t}}{s_{2m} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha_m} \frac{(2s_{2m} + \frac{G}{\eta})}{2\alpha_m \frac{G}{\rho}}}; \quad (20)$$

$$B_m = A_{1m} + A_{2m} = - \frac{2F(\alpha_m)\alpha_m \frac{G}{\rho}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_m}} \times$$

$$\times \left[\frac{s_{2m}(2s_{2m} + \frac{G}{\eta}) e^{s_{1m}t} + s_{1m}(2s_{1m} + \frac{G}{\eta}) e^{s_{2m}t}}{s_{1m} s_{2m} (2s_{1m} + \frac{G}{\eta})(2s_{2m} + \frac{G}{\eta})} \right],$$

где

$$F(\alpha_m) = Y_0(\alpha_m R_2) J_0(\alpha_m r) - J_0(\alpha_m R_2) Y_0(\alpha_m r);$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_m} = \frac{2}{\pi \alpha_m} \frac{J_0^2(\alpha_m R_1) - J_0^2(\alpha_m R_2)}{J_0(\alpha_m R_1) J_0(\alpha_m R_2)};$$

$$s_{jm} = -\frac{G}{2\eta} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2\eta}\right)^2 - \left(\frac{G}{\rho} \alpha_m\right)^2}; \quad j = 1, 2; \quad m = 1, \dots, \infty.$$

Определяем A_0 из соотношения

$$A_0 = \frac{F}{\psi_1|_{s=0}},$$

где

$$\frac{F}{\psi_1} = \frac{J_0(\alpha r) Y_0(\alpha R_2) - J_0(\alpha R_2) Y_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R_1) Y_0(\alpha R_2) - Y_0(\alpha R_1) J_0(\alpha R_2)};$$

$$\frac{F(0)}{\psi_1(0)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F}{\psi_1} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F|_{\alpha \rightarrow 0}}{\psi_1|_{\alpha \rightarrow 0}}.$$

Проведя соответствующие вычисления [1], получаем

$$A_0 = \frac{\ln \frac{R_2}{r}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (21)$$

Окончательно

$$v = u \sum \operatorname{Res} \Phi(s) e^{st} = (A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m) u; \quad (22)$$

$$v = u \left\{ \frac{\ln \frac{R_2}{r}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} - \frac{\pi G}{\rho} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(\alpha_m)}{\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_m}} \times \right.$$

$$\times \left\{ \frac{s_{2m} (2s_{2m} + \frac{G}{\eta}) e^{s_{1m} t} + s_{1m} (2s_{1m} + \frac{G}{\eta}) e^{s_{2m} t}}{s_{1m} \cdot s_{2m} (2s_{1m} + \frac{G}{\eta}) (2s_{2m} + \frac{G}{\eta})} \right\}.$$

Подставляя значение v , определенное из (22), в (6) и (7), можно получить выражение для напряжений.

В случае стационарного течения будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} + \frac{G}{\eta} \sigma_{rz} = G \frac{dv_z}{dr}. \end{cases} \quad (23)$$

Решая эти уравнения при тех же граничных условиях (условия прилипания для скоростей), получим:

$$v = u \frac{\ln \frac{R_2}{r}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (24)$$

Сравнивая полученный результат с (22), видим, что он следует из (22) как частный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. — М.-Л., 1963.
2. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. — М., 1948.

УДК 532.135

А.Х.Ким, Т.Ф.Богинская

ДВИЖЕНИЕ ПЛАСТОРАСТВОРА В ШНЕКЕ

В работе приводится вывод приближенных дифференциальных уравнений пласораствора в шнеке и приближенное решение этих уравнений для реологической системы, подчиняющейся степенному закону. Для вывода уравнений используются координаты r , θ и z . Координатная поверхность $r = \text{const}$ есть цилиндрическая поверхность с осью, совпадающей с осью шнека. Координатная поверхность $\theta = \text{const}$ есть полуплоскость, ограниченная, с одной

стороны, осью шнека. Координата z направлена по нормали к стенке канала червяка.

Из уравнений равновесия элементарного объема, вырезанного внутри движущейся массы (рис. 1), получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial P_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial P_{r\theta}}{r \partial \theta} \cos \alpha + \frac{\partial P_{rz}}{\partial z} + \frac{P_{rr} - P_{\theta\theta}}{r} + \rho_0 \frac{v_\theta^2}{r} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial P_{\theta\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial P_{r\theta}}{\cos \alpha \partial r} + \frac{2P_{r\theta}}{r \cos \alpha} + \frac{\partial P_{\theta z}}{\cos \alpha \partial z} - \rho_0 \theta = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\partial P_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{P_{rz}}{r \cos \alpha} + \frac{\partial P_{rz}}{\partial r \cos \alpha} - \rho_0 z = 0. \quad (1.3)$$

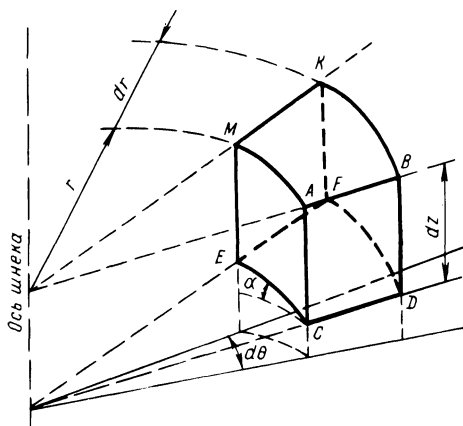


Рис. 1. Элементарный объем, вырезанный внутри движущейся массы.

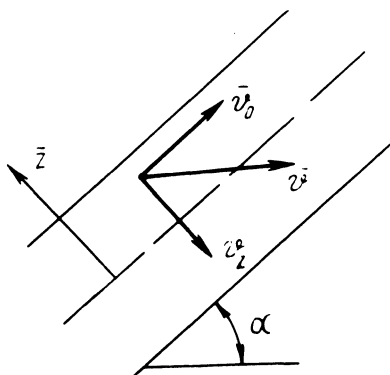


Рис. 2. Направления осей и поперечной скорости.

Система уравнений (1.1), (1.2), (1.3) переходит в известные уравнения в цилиндрических координатах, если $\alpha = 0$.

Точное математическое решение задачи о движении пласторастора в шнеке с учетом степенной зависимости напряжения от скорости деформации невозможно.

Реологическое уравнение для пласторастора имеет следующий вид:

$$P_{ik} = \delta_{ik} P + \eta_a e_{ik}^m;$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases},$$

где δ_{ik} — символ Кронекера; P — среднее гидростатическое давление; $\dot{\epsilon}_{ik}$ — тензор скорости деформации; m — степень неньютоновского поведения.

Для упрощения задачи в дальнейшем будем считать эффективную вязкость η_a постоянной.

Для наглядности представления картины распределения скоростей и напряжений в дальнейшем будем считать червяк неподвижным, а корпус вращающимся в сторону, противоположную направлению угловой скорости червяка (рис. 2).

В дальнейшем также будем полагать

$$V_z = -v \sin \alpha ; \quad V_\theta = V \cos \alpha ,$$

где V — абсолютная скорость частицы в обращенном движении.

Найдем теперь компоненты напряжения:

$$\left. \begin{aligned} P_{r\theta} &= \eta_a \left(\frac{\partial V_r}{r \partial \theta} \cos \alpha + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right)^m ; \\ P_{\theta z} &= \eta_a \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{\partial V_z \cdot \cos \alpha}{r \cdot \partial \theta} \right)^m ; \\ P_{rz} &= \eta_a \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^m ; \\ P_{rr} &= P_{\theta\theta} = P_{zz} = -P . \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Глубина канала червяка по сравнению с радиусом пренебрежимо мала. Вследствие этого можно считать, что P является функцией только от θ , а V — функцией от θ и z :

$$P = P(\theta) \quad \text{и} \quad V = V(\theta, z) .$$

Пренебрегая также в (2.1) скоростью V_r и ее производными, получим

$$\begin{aligned} P_{r\theta} &= 0 ; \quad P_{\theta z} = \eta_a \left(\cos \alpha \frac{\partial V}{\partial z} - \cos \alpha \sin \alpha \frac{\partial V}{r \partial \theta} \right)^m ; \\ P_{rz} &= 0 . \end{aligned}$$

Подставим найденные значения в (1.1), (1.2), (1.3) и заменим в полученных уравнениях r его средним значением R (это следствие малости глубины канала червяка).

Тогда получим два уравнения в виде

$$- \frac{\partial P}{R \partial \theta} + m \eta_a (\cos \alpha)^m \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\sin \alpha}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^{m-1} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \right.$$

$$-\frac{\sin \alpha}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \theta} = 0; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \cdot \partial \theta} - \frac{\sin \alpha}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0.$$

Интегрируя второе уравнение, найдем

$$V = D \cdot \exp \lambda \left(z + \frac{R}{\sin \alpha} \theta \right) + \frac{a}{2} \frac{z^2}{2} + bz,$$

где D, λ, a, b — некоторые постоянные. По физическому смыслу

$$b = \left(\frac{\tau_0}{\eta_a} \right)^{\frac{1}{m}},$$

где τ_0 — минимальное касательное напряжение, возникающее при скольжении пластораствора (в виде порошка или гранул) по стенке канала.

Для определения остальных трех постоянных используем следующие граничные условия. Процесс движения пластораствора в шнеке представляется в следующем виде. В приемную воронку шнека загружается материал в виде порошка или гранул. Этот материал в момент загрузки имеет определенную плотность ρ_0 . По мере движения массы по шнеку она уплотняется, плотность ее увеличивается.

По достижении определенной плотности ρ_K все сечения канала червяка заполняются движущейся массой и в дальнейшем пластораствор движется как сплошная масса.

Эту часть шнека, где плотность пластораствора увеличивается от ρ_0 до ρ_K , будем называть зоной питания.

В приемную воронку шнека в единицу времени (в 1 с) поступает определенное количество пластораствора Q_0 с плотностью ρ_0 .

Отсюда вытекает следующее условие:

$$\delta \int_0^h V_{\theta} \big|_{\theta=0} dz = Q_0, \quad (4.1)$$

где δ — высота канала червяка; h — расстояние между витками, измеренное по нормали.

Из двух стенок канала червяка при работе шнека одна соскабливает пластораствор со стенки корпуса и проталкивает массу к выходу, а между массой и противоположной стенкой может быть зазор максимальный в начале (при $\theta = 0$) и постепенно уменьшающийся до 0 в конце зоны питания.

Вследствие этого наибольшая абсолютная скорость V в обращенном движении (червяк неподвижен, а корпус вращается) будет при входе ($\theta = 0$), на противоположной стенке канала.

Отсюда получим второе условие для определения постоянных:

$$V = \omega R_K \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad \text{и} \quad z = h, \quad (4.2)$$

где ω — угловая скорость червяка; R_K — внутренний радиус кожуха шнека.

Имеем

$$P_{\theta z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h. \quad (4.3)$$

Следовательно, мы имеем три условия (4.1), (4.2), (4.3) для определения трех постоянных D , λ , a .

Подставляя значения V_θ при $\theta = 0$ в (4.1), имеем

$$\delta_{\cos \lambda} \left[D \int_0^h e^{\lambda z} \cdot dz + \int_0^h \left(\frac{az^2}{2} + bz \right) \cdot dz \right] = Q_0$$

или

$$\delta_{\cos \lambda} \left[\frac{D}{\lambda} (e^{\lambda h} - 1) + \frac{ah^3}{6} + \frac{bh^2}{2} \right] = Q_0. \quad (4.4)$$

Из условия (4.2) имеем

$$\omega R_K = D e^{\lambda h} + \frac{ah^2}{2} + bh. \quad (5.1)$$

А из условия (4.3) находим

$$ah + b = 0.$$

Откуда

$$a = -\frac{b}{h}. \quad (5.2)$$

Из этих уравнений получаем

$$D = \frac{\omega R_K - \frac{bh}{2}}{\exp(\lambda h)},$$

а D определяется из уравнения

$$\frac{1 - \exp(-\lambda h)}{\lambda} = \left(\frac{Q_0}{\delta_{\cos \lambda}} - \frac{bh^2}{3} \right) \cdot \frac{1}{\left(\omega R_K - \frac{bh}{2} \right)}. \quad (5.3)$$

Для решения этого уравнения можно применить графический метод. Покажем, что уравнение (5.3) всегда имеет решение, причем

$$\lambda < 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$1 - e^{-\lambda h} = \lambda A, \text{ где } A > h, h > 0$$

или

$$1 - \lambda A = e^{-\lambda h}.$$

Левую часть обозначим $X(\lambda)$, а правую часть $Y(\lambda)$.

Задача заключается в нахождении корня уравнения

$$X(\lambda) = Y(\lambda).$$

Имеем

$$\frac{dX(\lambda)}{d\lambda} = -A; \quad \frac{dY(\lambda)}{d\lambda} = -he^{-\lambda h}.$$

При $\lambda = 0$

$$\left. \frac{dX(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} > \left. \frac{dY(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}; \quad X(0) = Y(0) = 1.$$

При $\lambda \rightarrow -\infty$

$$\left| \frac{dX(\lambda)}{d\lambda} \right| < \frac{dY(\lambda)}{d\lambda}.$$

Следовательно, прямая $X(\lambda)$ обязательно пересечется с кривой $Y(\lambda)$, причем в точке пересечения $\lambda_0 < 0$.

УДК 539.215 + 622.331

В.И.Безмен

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИЙ СВОДООБРАЗОВАНИЯ В СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛАХ ПРИ ВЫГРУЗКЕ ИХ ИЗ БУНКЕРА ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Сводообразования в мелкофракционных сыпучих материалах при выгрузке их из бункеров рассмотрены в работах [1-3]. В настоящей работе решается задача определения линий сводообразования, что в конечном счете позволяет судить о прочности образовавшегося свода. Как известно, из теории упругости [4], пластин-

ка, изогнутая по дуге, выдерживает гораздо большие нагрузки, чем в прямолинейном положении. Это позволяет считать: чем круче свод, тем он прочнее. В результате определения линий сводообразований представляется возможность найти в бункере наиболее опасные зоны, где свод образуется более прочным и где необходимо устанавливать приспособления для борьбы со сводообразованием.

Рассмотрим наиболее распространенную конструкцию бункера (рис. 1) призматической формы, состоящую из двух частей: нижней с наклонными и верхней с вертикальными боковыми стенками. Очевидно, что наибольшая вероятность сводообразования будет в нижней части бункера с наклонными боковыми стенками.

Решение задачи сводится к определению в бункере той области, где соблюдается предельный случай равновесия

$$\tau = \tau_0 + fp, \quad (1)$$

где τ — касательное напряжение в данной точке; p — нормальное давление; τ_0 — начальное сопротивление сдвигу; f — коэффициент межчастичного трения.

Это значит, что выше этой области находится сплошная среда, ниже — сплошность среды нарушается, наблюдается движение частиц материала друг относительно друга.

Дифференциальные уравнения плоского равновесия в полярной системе координат с учетом равенства, характеризующего физико-механические свойства материала $\tau_{\varphi\varphi} = -\lambda p$ [3], будут иметь вид

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{r \partial \varphi} - (1 - \lambda) \frac{p}{r} = \gamma; \quad (2)$$

$$-\frac{\partial \tau}{\partial r} - \lambda \frac{\partial p}{r \partial \varphi} + \frac{2\tau}{r} = 0, \quad (3)$$

где r, φ — текущие координаты точки; γ — насыпная плотность; λ — коэффициент бокового распора.

Давление p представим в виде

$$p = \Phi(\varphi)(R - r) + P_0(\varphi), \quad (4)$$

где R — радиус входного отверстия нижней части бункера; $P_0(\varphi)$ — функция, учитывающая давление материала, находящегося в верхней части бункера с вертикальными стенками с учетом заполнения материалом. Эта функция должна быть известна. $\Phi(\varphi)(R - r)$ — функция, характеризующая давление материала,

находящегося в нижней части бункера и расположенного выше точки с радиусом r .

Решим уравнение (2) относительно τ

$$\tau = \lambda \Phi'(\varphi) \left(\frac{R}{2} - \frac{r}{3} \right) + \frac{1}{2} P_0'(\varphi) \lambda + \frac{U(\varphi)}{r^2} \quad (5)$$

Для определения функции $\Phi(\varphi)$ подставим выражения для r и τ в уравнение (2), получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\Phi''(\varphi) + \varepsilon^2 \Phi(\varphi) = W(\varphi), \quad \delta + (1-\lambda) \frac{P_0(\varphi)}{R_{cp}} - \frac{P_0''(\varphi)\lambda}{2 R_{cp}} \quad (6)$$

$$\text{где } \varepsilon^2 = \frac{1 - (1-\lambda)(\delta - 1)}{\lambda(0,5\delta - \frac{1}{3})}; \quad \frac{\delta + (1-\lambda) \frac{P_0(\varphi)}{R_{cp}} - \frac{P_0''(\varphi)\lambda}{2 R_{cp}}}{\lambda(0,5\delta - \frac{1}{3})} =$$

$$= W(\varphi); \quad \delta = \frac{R}{R_{cp}}; \quad R_{cp} = \frac{R+R_1}{2}.$$

Решение уравнения (6) будет иметь вид [3]

$$\Phi(\varphi) = -\frac{D'(0)}{\varepsilon} \sin \varepsilon \varphi + D(\varphi), \quad (7)$$

где $D(\varphi)$ — частное решение уравнения (6).

Вид частного решения зависит от принятого при решении задачи закона действия материала, находящегося в верхней части бункера, на нижнюю.

Подставив значение функции $\Phi(\varphi)$ в выражения (4) и (5), получим

$$p = (D(\varphi) - \frac{D'(0)}{\varepsilon} \sin \varepsilon \varphi) (R-r) + P_0(\varphi); \quad (8)$$

$$\tau = +\lambda(-D'(0) \cos \varepsilon \varphi - D'(\varphi)) \left(\frac{R}{2} - \frac{r}{3} \right) + P_0'(\varphi) \frac{\lambda}{2}. \quad (9)$$

Предположив, что при некотором значении $r = 1$ соблюдается равенство (1), и подставив в него значения p и τ , при различных углах φ , определим ряд точек, по которым можно построить кривую сводообразования.

Рассмотрим конкретный пример определения кривых сводообразования в бункере (рис. 1).

В качестве сыпучего материала выбран фрезерный торф с относительной влажностью 35...40% со следующими физико-механическими данными: $\delta = 3 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$, $f = 0,8$, $\lambda = 0,7$, $\tau_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$.

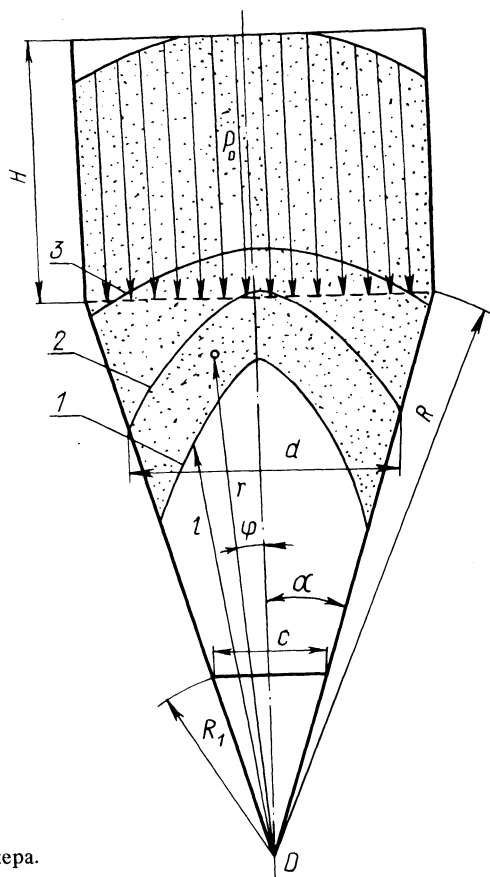


Рис. 1. Схема исследуемого бункера.

Т а б л и ц а 1. Размеры исследуемого бункера

R_1 , м	R , м	H , м	α , град	c , м
1,4	7,2	5	20	1

Т а б л и ц а 2. Зависимость радиуса l образования свода от высоты вертикальной части бункера и угла φ .

H , м	5			3			1		
φ , град	0	10	20	0	10	20	0	10	20
l , м	6,50	5,33	3,50	6,79	5,90	4,74	7,55	7,17	6,8

Зададимся функцией, учитывающей давление материала, находящегося в верхней части бункера с вертикальными стенками с учетом заполнения материалом $P_0(\varphi) = P_0 \cos 2\varphi$, где $P_0 = -\gamma H$. Эта зависимость получена автором экспериментальным путем. Знак минус указывает, что давление P_0 является сжимающим.

Подставив в выражение для $W(\varphi)$ значение функции $P_0(\varphi)$, получим

$$W(\varphi) = \frac{\gamma}{\lambda(0,5\delta - 0,33)} + \frac{P_0(1+\lambda)}{\lambda R_{cp}(0,5\delta - 0,33)} \cos 2\varphi.$$

Обозначим

$$\frac{\gamma}{\lambda(0,5\delta - 0,33)} = a - \text{const};$$

$$\frac{P_0(1+\lambda)}{\lambda R_{cp}(0,5\delta - 0,33)} = b - \text{const}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (6) с учетом введенных обозначений примет вид

$$\Phi''(\varphi) + \varepsilon^2 \Phi(\varphi) = a + b \cos 2\varphi. \quad (10)$$

Частное решение $D(\varphi)$ ищем в виде

$$D(\varphi) = A + B \cos 2\varphi, \quad (11)$$

где A, B — постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Подставив $D(\varphi)$ в уравнение (10) и приравняв соответствующие коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения, находим:

$$A = \frac{a}{\varepsilon^2}; \quad B = \frac{b}{\varepsilon^2 - 4}.$$

Следовательно, частное решение, записанное в форме (11), примет вид

$$D(\varphi) = \frac{a}{\varepsilon^2} + \frac{b}{\varepsilon^2 - 4} \cos 2\varphi. \quad (12)$$

При решении конкретной задачи целесообразно определить численные значения выражений $\frac{a}{\varepsilon^2}$ и $\frac{b}{\varepsilon^2 - 4}$. Это упростит выражение для $D(\varphi)$.

Подставив в уравнение (8) и (9) значения функции $D(\varphi)$ и ее производных $D'(\varphi)$ и $D''(\varphi)$, получим

$$p = \left(\frac{a}{\epsilon^2} + \frac{b}{\epsilon^2 - 4} \cos 2\varphi \right) (R - r) - \gamma H \cos 2\varphi; \quad (13)$$

$$\tau = - \frac{2b\lambda}{\epsilon^2 - 4} \sin 2\varphi (0,5R - 0,33r) + 2\gamma H \sin 2\varphi. \quad (14)$$

В выражения (13) и (14) входит текущая координата r точки, в которой определяются соответствующие напряжения.

Подставив в равенство (1) выражения для p и τ при соответствующем угле φ и решив затем это равенство относительно r , получим значение $r = 1$, определяющее точку, в которой соблюдается случай предельного равновесия, т.е. через эту точку проходит линия сводообразования. Решая равенство (1) при различных углах φ , получим соответствующие точки, по которым построим линии сводообразования.

Исследованиями автора установлено, что на сводообразование существенное влияние оказывает высота H вертикальной части бункера. Поэтому, чтобы получить своды в бункере на различной высоте при постоянных физико-механических свойствах сыпучего материала, изменялась высота вертикальной части бункера. Исследования сводообразований в бункере выполнены при высоте его вертикальной части 5, 3 и 1 м.

Результаты исследований сведены в табл. 2. Учитывая, что решается осесимметричная задача, достаточно брать три значения угла φ , чтобы построить кривую сводообразования.

Анализ полученных результатов показывает, что наиболее крутая кривая сводообразования 1 (рис. 1) соответствует высоте вертикальной части бункера 5 м. С увеличением высоты образования свода в бункере кривые сводообразования 2 и 3 становятся более пологими и увеличивается ширина d основания свода. Это говорит о том, что прочность свода по мере увеличения высоты его сводообразования уменьшается. Наиболее опасными с точки зрения нарушения равномерности течения сыпучих материалов из бункера являются своды, образующиеся в его нижней части. Поэтому устройства для борьбы со сводообразованиями рекомендуется устанавливать преимущественно в нижней части бункера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенков Р.Л. Механика насыпных грунтов. — М., 1964.
2. Лурье З.С. Бункерные устройства углеобогатительных и брикетных фабрик. — М., 1972.
3. Бемени В.И. Исследование сводообразования в мелкофракционных сыпучих материалах при выгрузке их из бункера. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1979, вып. 6.
4. Колкунова Н.В. Основы расчета упругих оболочек. — М., 1972.

ФОРМИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ МОДЕЛЕЙ ИЗ МАТЕРИАЛА ЭД-20

Поляризационно-оптический метод изучения напряжений требует изготовления оптически-чувствительных материалов или готовых моделей из этого материала. Чаще всего для моделей используются материалы, приготовленные на основе разных марок эпоксидных смол (ЭД). Однако приготовление моделей на основе ЭД связано с рядом трудностей и неудобств: образованием свилей из-за неоднородности смеси в процессе полимеризации; большими остаточными напряжениями полимеризации; большой усадкой материала. Для устранения этих недостатков разрабатываются режимы охлаждения с подбором соответствующих компонентов отверждения. Специальные методы, разработанные в лаборатории фотоупругости ЛГУ им. А.А.Жданова, МИСИ им. В.В.Куйбышева и других научных центрах страны и за рубежом, позволили в значительной степени устранить вышеуказанные недостатки и получать материалы высокой чистоты с ничтожно малыми напряжениями полимеризации.

Но есть ряд задач, при решении которых можно использовать вышеуказанные негативные моменты, в частности, большие остаточные напряжения полимеризации. Это задачи, связанные с созданием напряженного состояния с целью упрочнения материала, задачи фотопластичности, фотовязкости и т.д. [1]. Поэтому изучение формирования напряжений полимеризации представляет особый интерес.

Материалы на основе эпоксидных смол динамичны; малейшее отклонение от заданного режима полимеризации влечет за собой изменение хода всего процесса и сильно влияет на конечный результат.

Цель работы — выяснение возможностей использования свойств эпоксидных компаундов для изучения формирования остаточных напряжений.

Эксперименты проводились на эпоксидной смоле марки ЭД-20, отверждаемой полиэтилен-полиамином с разными добавками пластификатора (дибутилфталата) при разных температурах охлаждающей среды. Режим отверждения температурно-временной. Состав материала и температура охлаждающей среды представлены в табл.1

Каждый состав охлаждался при трех температурах охлаждающей среды. В результате получалось 15 разных составов, которые

Т а б л и ц а 1. Состав материалов на основе ЭД-20 и температура охлаждающей среды при полимеризации

№ состава	Процент поли-этилен-поли-амин	Процент дибу-тилфталата	Т°С среды
1	12	5	
2	12	10	
3	12	20	0; 10; 20
4	12	40	(охлаждающая
5	12	60	среда — вода)

П р и м е ч а н и е. Процент модифицирующих добавок брался по отношению к 100% основы ЭД-20. Представленные режимы брались как наиболее удобные по технологии изготовления.

Т а б л и ц а 2. Значения оптической чувствительности исследуемых составов

Номер состава:	1 ₁₀	2 ₁₀	1 ₂₀	2 ₂₀	3 ₂₀
Чувствительность $\tau_0 \cdot 10^{-4}$ Па	43	45	45	46	55

в дальнейшем для удобства будем обозначать: 1₀; 1₁₀; 1₂₀; 2₀; 2₁₀; 2₂₀; 3₀; 3₁₀; 3₂₀ и т.д. (цифра — номер состава, индекс — температура охлаждающей среды).

Процесс полимеризации происходил в стесненных условиях. Компаунд заливался в стеклянные формы размерами 100x100x10мм, помещенные в охлаждающую среду. Начальная температура компаунда 60°С. В процессе полимеризации компаунд просвечивался в поляризованном свете и велось наблюдение за формированием картины полос. Одновременно с помощью медно-константановых термопар, помещенных в эпоксидную массу контрольного образца, замерялась температура блоков (термопары помещались в центре блока и на расстояниях 20 мм и 40 мм от центра по диагонали). В указанных точках вычислялись скорости охлаждения блоков при полимеризации.

Из результатов наблюдений за формированием картины полос выявились следующие особенности процесса полимеризации:

а) в составах 4₀, 4₁₀, 5₀, 5₁₀ и 5₂₀ почти не наблюдалось формирование картины полос;

б) в составах 4₂₀, 3₀, 2₀, 3₁₀ наблюдались настолько слабые интенсивности, что ими можно было пренебречь. (При чувствительности материала $\tau_0 = 50 \cdot 10^4$ Па, $\tau_{\max} = (7-11,5) \cdot 10^4$ Па.);

в) в наиболее жестком составе 1₂₀ наблюдалось большое образование свилей и для дальнейших исследований этот материал был непригоден;

г) составы 1_{10} , 1_{20} , 2_{10} , 2_{20} и 3_{20} оказались наиболее удобными для наблюдения над формированием картины полос.

После полной полимеризации материал вышеуказанных составов подвергался тарировке по напряжениям и определялась оптическая чувствительность τ_0 . В табл. 2 представлены результаты измерения τ_0 для этих составов.

Из табл. 2 следует, что оптическая чувствительность незначительно зависит от состава.

Результаты наблюдений за образованием и развитием картины полос с учетом общепринятых режимов полимеризации [2] позволили разделить весь температурно-временной интервал на пять зон:

1) зона, характеризующаяся резким повышением температуры и уменьшением первоначальной вязкости материала.

2) зона, в которой происходит схватывание локальных элементов системы; при этом происходит избирательная ориентация элементов, появляется слабо выраженная картина полос. Этот процесс характеризуется дальнейшим повышением температуры.

3) в этой зоне материал переходит в высокоэластичное состояние, температура постепенно понижается, появляются термоупругие напряжения.

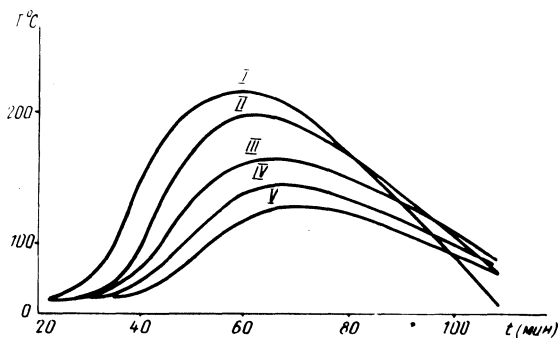


Рис. 1. Температурный режим полимеризации для составов: 1_{20} — I; 2_{20} — II; 1_{10} — III; 2_{10} — IV; 3_{10} — V.

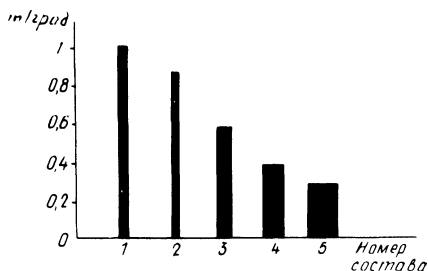


Рис. 2. Диаграмма распределения максимальных интенсивностей и времени релаксации напряжений в зависимости от материала для составов: 1_{20} ; 2_{20} ; 1_{10} ; 2_{10} ; 3_{10} .

4) происходит дальнейшее интенсивное понижение температуры, наряду с этим возникает текучесть оптико-механических характеристик; это зона максимальной неустойчивости напряжений; напряжения, образованные в третьей зоне, релаксируют.

5) зона стеклования; в этой зоне происходит выравнивание температуры по объему. Напряжения, образованные на предыдущих этапах, исчезают (но не полностью). В материале возникают самоуравновешенные по объему остаточные напряжения, соответствующие исчезнувшему температурному полю, но с обратным знаком.

Результаты экспериментов представлены следующими зависимостями:

а) температурный режим полимеризации для составов 1₂₀, 2₂₀, 1₁₀, 2₁₀ и 3₂₀ (рис. 1);

б) диаграмма зависимости максимальной интенсивности сформировавшихся напряжений и времени релаксаций напряжений от состава материала (рис. 2).

Из рис. 1 и 2 следует, что наиболее ярко выраженную картину образования полос можно наблюдать на составе 2, где имеется большой температурно-временной интервал скорости охлаждения, а время релаксации относительно невелико.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mike Masanobu, Ohmura Gasuhiko, Awatani Lobu. Photoplasticity utilizing the Stress-optic law of polyester-Bull ISME, 1977, № 145. 2. Метод фотоупругости /Под общ. ред. Г.Л. Хесина-М., 1975, т. I.

УДК 621.791:541.65

Н.Н.Буткевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ НА РЕЛАКСАЦИЮ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Задача определения температурных напряжений может решаться как упругая, если напряжения не превосходят предела пропорциональности. Определение температурных напряжений в различных случаях исходя из упругости дает верхний предел реально возможных напряжений, так как при определенных условиях наличие пластических деформаций и ползучести материала сводят к минимуму температурные напряжения.

Однако температурные напряжения, которые возникают на разных стадиях охлаждения, изменяются по сложному закону и в зависимости от скорости охлаждения могут достигать таких величин, при которых происходит разрушение материала.

Таким образом, с одной стороны, возникает опасность искажения формы детали, с другой — разрушение ее без предварительной деформации под действием температурных напряжений.

Для оценки остаточных напряжений, возникающих в реальных условиях, было проведено исследование влияния ползучести на релаксацию температурных напряжений. Исследования проводились на эпоксидном материале ЭД-20М, имеющем широкий интервал ползучести теплофизических и механических характеристик. В качестве модели был выбран простейший случай бесконечно длинного цилиндра. Задача решалась как осесимметричная.

Если при охлаждении такого цилиндрического блока скорость охлаждения воздушной среды в термостате постоянна и устанавливается регулярный тепловой режим II рода, то температура в нем рассчитывается согласно [1] по закону

$$T(r, t) = T_0 + \frac{R^2}{4a} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) V - Vt, \quad (1)$$

где T_0 — температура, принятая за начальную; R — радиус блока; V — скорость охлаждения; a — коэффициент температуропроводности.

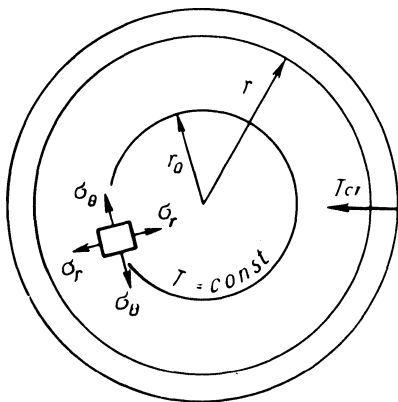


Рис. 1. Фронт продвижения стеклообразного состояния материала.

Вначале блок находится в высокоэластичном состоянии. При охлаждении блока на наружной поверхности его появляется область стеклообразного состояния, которая распространяется к центру: при $r_0 < r < R$ и $0 < r < r_0$ материал имеет линейно упругие свойства и изотерма перехода от высокоэластичного к

стеклообразному состоянию определяется уравнением $T(r, t) = T_{\text{ст}}$, где $T_{\text{ст}}$ — температура стеклования. (Фронт продвижения $T_{\text{ст}}$ показан на рис. 1). При этом

$$E, \mu, \alpha \begin{cases} E_{\infty}, \mu_{\infty}, \alpha_{\infty} & 0 < r < r_0; \\ E_{\text{ст}}, \mu_{\text{ст}}, \alpha_{\text{ст}} & r_0 < r < R. \end{cases}$$

Здесь $E_{\infty}, \mu_{\infty}, \alpha_{\infty}$ и $E_{\text{ст}}, \mu_{\text{ст}}, \alpha_{\text{ст}}$ — модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент расширения соответственно в высокоэластичном и стеклообразном состояниях.

В этих предположениях задача решена [2] и остаточные напряжения в охлажденном блоке определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_{\text{ст}} \alpha_{\text{ст}} (1 - \rho^2)}{16(1 - \mu_{\text{ст}}) \alpha} \cdot R^2 V; \\ \sigma_{\theta} &= - \frac{E_{\text{ст}} \alpha_{\text{ст}} (3\rho^2 - 1)}{16(1 - \mu_{\text{ст}}) \alpha} \cdot R^2 V; \\ \sigma_z &= - \frac{E_{\text{ст}} \alpha_{\text{ст}} (2\rho^2 - 1)}{8(1 - \mu_{\text{ст}}) \alpha} \cdot R^2 V, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_r, \sigma_{\theta}$ и σ_z — радиальные, тангенциальные и осевые напряжения, которые в данной задаче являются главными, $\rho = \frac{r}{R}$.

Так как эти напряжения рассчитывались из условия упругого состояния материала, то они являются максимально возможными.

Для сравнения с реальной картиной напряженного состояния был проделан эксперимент по охлаждению длинного цилиндрического блока высотой 150 мм и диаметром 50 мм по режиму (1) с разными скоростями охлаждения (60 г/ч, 30 г/ч, 15 г/ч) (материал блока ЭД-20М).

Охлаждение проводилось с температур высокоэластичного состояния (120°C). При охлаждении до комнатной температуры (20°C) материал ЭД-20М проходит зону ползучести оптико-механических характеристик (80–50°C), в которой происходит "замораживание" (фиксация) температурных напряжений. После охлаждения из блока вырезались темплеты по среднему сечению, перпендикулярному к оси симметрии, которые просвечивались в поляризованном свете.

При этом "незамороженные" деформации снимались и картина полос, видимая в поляризованном свете, соответствовала "замороженной" части деформации, дающей информацию об остаточных

напряжениях, прорелаксированных в зоне ползучести. Зная температурное поле в любой момент времени по зависимости (1), можно было определить соответствующую цену полосы и рассчитать разность главных напряжения $\sigma_\theta - \sigma_r$ в плоскости сечения. На рис. 2 приведено распределение расчетных и экспериментальных значений $\sigma_\theta - \sigma_r$ по радиусу сечения для вышеприведенных скоростей охлаждения. Теоретические значения $\sigma_\theta - \sigma_r$ рассчитывались по формулам (2)

$$\sigma_\theta - \sigma_r = - \frac{E_{ст} \alpha_{ст} (2\rho^2 - 1)}{8(1 - \mu_{ст})\alpha} \cdot R^2 V.$$

При всех трех скоростях охлаждения экспериментальные кривые отличаются от теоретических на разные величины. При средних (оптимальных) скоростях охлаждения (рис. 2,б) это расхождение максимально, так как время пребывания материала в зоне ползучести достаточно для значительной релаксации температурных напряжений. При высоких скоростях охлаждения процесс вязкого течения значительно подавляется и напряжения релакси-

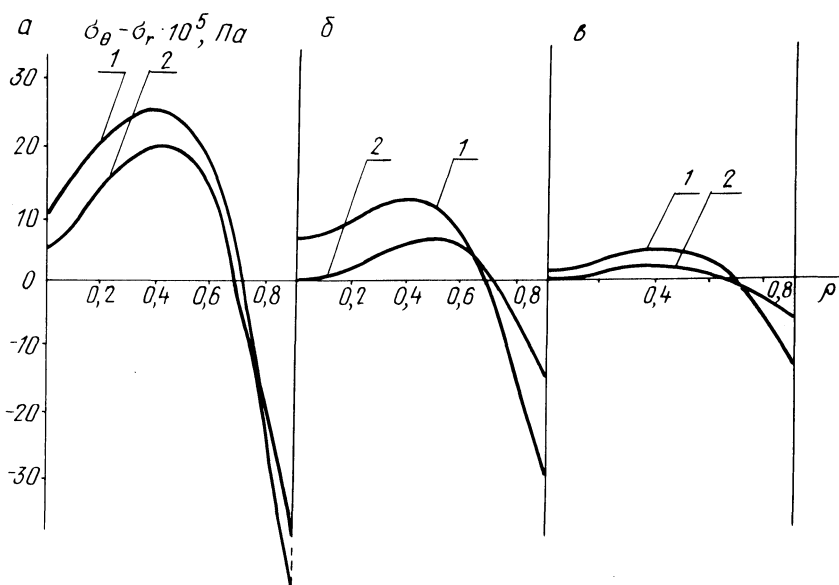


Рис. 2. Распределение максимальных значений остаточных напряжений по радиальному сечению цилиндра:

1,2 — соответственно теоретическое и экспериментальное.

руют меньше (рис. 2,а). При очень малых скоростях охлаждения напряжения сами по себе незначительны и доля, приходящаяся на релаксацию, уменьшается. Существует оптимальная скорость охлаждения, при которой достигается максимальная релаксация температурных напряжений. Эта скорость зависит от свойств материала.

Сравнивая результаты данных исследований с результатами работы [3], можно сказать, что характер распределения температурных напряжений в материале ЭД-20М при фронтальном переходе зоны высокоэластичного состояния в зону стеклообразного состояния сходен с характером распределения напряжений в цилиндрической отливке из металла при ее затвердевании. Это дает широкие возможности для постановки задач о моделировании процесса изготовления металлических деталей.

На примере охлаждения цилиндрического блока (материал ЭД-20М) показана возможность управления процессом релаксации температурных напряжений в зависимости от скорости охлаждения (нагрева).

ЛИТЕРАТУРА

1. Метод фотоупругости. Под общ. ред. Г.Л. Х е с и н а. — М., 1975. т. 1.
2. Т и м о ш е н к о С.П. Теория упругости. — М., 1955.
3. Л е в и н М.А. Определение напряжений в затвердевающей отливке: Прикладная механика, т. V, вып. 9. Киев, 1969.

УДК. 534.29

**М.Д.Мартыненко, Н.А.Долбин,
И.Г.Довгялло, Р.М.Кончиц**

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА СОБСТВЕННУЮ ЧАСТОТУ ПРОДОЛЬНО КОЛЕБЛЮЩИХСЯ МНОГOSTУПЕНЧАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Расчет многоступенчатых стержней на высокочастотную вибрацию представляет сложную в математическом отношении задачу, поэтому он выполняется на основе ряда упрощений [1–3]. Наиболее часто предполагают, что в каждый момент времени поперечные сечения стержня остаются плоскими и напряжения по ним распределяются равномерно. Тогда при отсутствии вынуждающей силы определение продольного перемещения $u(x, t)$ точек этого сечения сводится к интегрированию следующего уравнения:

$$\rho_i F_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [E_i(x) F_i(x) \frac{\partial u}{\partial x}] , \quad (1)$$

где ρ_i , E_i , F_i — плотность, модуль Юнга и площадь поперечного сечения i -й ступени.

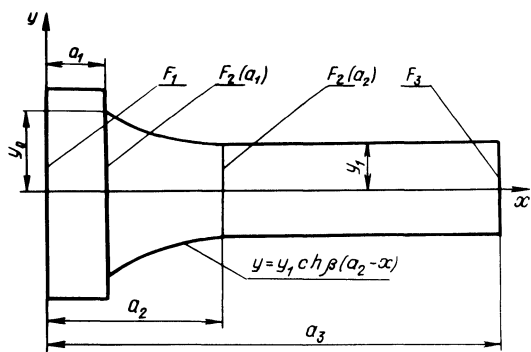


Рис. 1. Расчетная схема стержня.

Рассмотрим для определенности стержень, состоящий из двух цилиндрических ступеней. Предположим, что галтельный переход выполнен в виде катенеидальной ступени (рис. 1), $\rho_i = \rho = \text{const}$; $E_i = \text{const}$, один конец стержня ($y = 0$) закреплен, другой ($x=0$)-свободен от внешних усилий. Обозначим y_0 и y_1 , наибольший и наименьший радиусы катенеидальной ступени. Тогда уравнение ограничивающей ее катенеиды имеет вид

$$y = y_1 \text{ch } \beta(a_2 - x).$$

Из отношения $y_0/y_1 = \frac{e^{\beta(a_2-a_1)} + e^{-\beta(a_2-a_1)}}{2}$ получаем значение коэффициента β в виде

$$\beta = \frac{1}{a_2 - a_1} \ln \frac{y_0 + \sqrt{y_0^2 - y_1^2}}{y_1} \text{ и } F_2(x) = \pi y_1^2 \text{ch}^2 \beta(a_2 - x). \quad (2)$$

Полагая $\rho_i = \rho = \text{const}$, получим для определения φ и ψ следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \omega \varphi = 0;$$

$$\frac{d}{dx} [E_i(x) \frac{d\psi}{dx}] - \frac{\alpha \rho}{E} F_i(x) \psi = 0, \quad (3)$$

где α — некоторый параметр.

Исходя из условий перемещений и сопряжений на границах участков, получим следующие граничные условия:

$$\psi/x = 0 = \psi'/x = a_3 = 0; \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi/x = a_{i+0} = \psi/x = a_{i-0}; \\ F_i \psi'/x = a_{i+0} = F_i \psi'/x = a_{i-0}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из самосопряженности выражения, стоящего в левой части (3) и условий (4), (5), следует вещественность $\alpha = -\kappa^2$ ($\kappa \neq 0$) [4].

Полагая в (3) $\alpha = -\kappa^2$, получим следующие зависимости для амплитуды колебаний $\psi(x)$ стержней постоянного сечения:

$$\psi_1(x) = L_1 \cos \kappa x + M_1 \sin \kappa x; \quad 0 < x < a_1; \quad (6)$$

$$\psi_3(x) = L_3 \cos \kappa(x - a_2) + M_3 \sin \kappa(x - a_2); \quad a_2 < x < a_3. \quad (7)$$

Для галтельного перехода дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{\text{ch}^2 \beta(x - a_1)} \frac{d}{dx} [\text{ch}^2 \rho(x - a_1) \frac{d\psi_2}{dx}] + \kappa^2 \psi_2 = 0; \quad a_1 < x < a_2. \quad (8)$$

Положим, что $\psi_2 = \frac{z}{\text{ch} \beta(x - a_1)}$. Тогда уравнение (8) запишется так:

$$\frac{1}{\text{ch}^2 \beta(x - a_1)} \left[\frac{d^2 z}{dx^2} - \beta^2 z \right] + \kappa^2 \frac{z}{\text{ch} \beta(x - a_1)} = 0. \quad (9)$$

Если z есть решение этого уравнения, то $z'' - (\kappa^2 - \beta^2)z = 0$.

Для случая $\beta > \kappa$ решение уравнения (8) имеет вид

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\text{ch} \beta(x - a_1)} \left\{ L_2 \text{ch} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (x - a_1) + M_2 \text{ch} \sqrt{\rho^2 - \kappa^2} (x - a_1) \right\}. \quad (10)$$

Подставив граничные условия (4), (5) в уравнения (6), (7) и (10), получим выражения постоянных интегрирования

$$\left. \begin{aligned}
 L_1 &= 0; \\
 L_2 &= M_1 \sin \kappa a_1; \\
 L_3 &= \frac{1}{\operatorname{ch} \beta (a_2 - a_1)} L_2 \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1) + M_2 \operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1); \\
 L_3 \sin \kappa (a_3 - a_2) - M_3 \cos \kappa (a_3 - a_2) &= 0; \\
 M_2 &= -\frac{M_1}{\sqrt{\beta^2 - \kappa^2}} \left[-\frac{F_1}{F_2(a_1)} \kappa \cos \kappa a_1 \operatorname{ch} \beta (a_2 - a_1) - \right. \\
 &\quad \left. - \beta \sin \kappa a_1 \operatorname{sh} \beta (a_2 - a_1) \right]; \\
 M_3 &= \frac{1}{\kappa} \frac{F_2(a_2)}{F_3} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} [L_2 \operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1) + \\
 &\quad + M_2 \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1)].
 \end{aligned} \right\} (11)$$

Положив, что $\cos \kappa a_1 \neq 0$; $\cos \kappa (a_3 - a_2)$ и $\operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1) \neq 0$, из выражений (11) приходим к уравнению для определения собственной частоты колебаний κ :

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{\beta^2 - \kappa^2} \operatorname{tg} \kappa a_1 \left[\frac{F_2(a_2)}{F_3} \frac{\sqrt{\beta^2 - \kappa^2}}{\kappa} \operatorname{th} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1) - \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{tg} \kappa (a_3 - a_2) \right] + \left[\kappa \frac{F_1}{F_2(a_1)} - \beta \operatorname{tg} \kappa a_1 \cdot \operatorname{th} \beta (a_2 - a_1) \right] \times \\
 &\times \left[\frac{F_2(a_2)}{F_3} \frac{\sqrt{\beta^2 - \kappa^2}}{\kappa} - \operatorname{tg} \kappa (a_3 - a_2) \operatorname{th} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} (a_2 - a_1) \right].
 \end{aligned} \quad (12)$$

Если предположить, что галтельный переход в расчетной схеме отсутствует, т.е. если $a_2 = a_1$ или же $y_0 = y_1$, то получаем известное уравнение частот для двухступенчатого стержня кусочно-постоянного сечения

$$\operatorname{tg} \kappa a_1 \operatorname{tg} \kappa (a_3 - a_1) = F_1 / F_3.$$

Корни уравнений (12), (13) определялись на ЭВМ "Мир-2" методом деления отрезка пополам, для чего вначале отделялись интервалы (в которых находились значения этих корней) методом табулирования функции. При этом исходя из физической постановки задачи рассматривалась только первая гармоника.

Таблица 1

a_2 , мм	$a_2=46$ мм, $\beta=42$ 1/м	$a_2=22$ мм, $\beta=100$ 1/м	$a_2=18$ мм, $\beta=131$ 1/м	$a_2=7$ мм, $\beta=855$ 1/м	$a_2=5,5$ мм, $\beta=3420$	$a_2=5$ мм, $\beta=\infty$
65	35,5	29,7	28,7	26,4	26,1	24,1
100	20,3	17,9	17,6	16,6	16,5	15,7
135	14,0	12,8	12,6	12,2	12,1	11,6
185	9,7	9,1	8,9	8,8	8,7	8,5

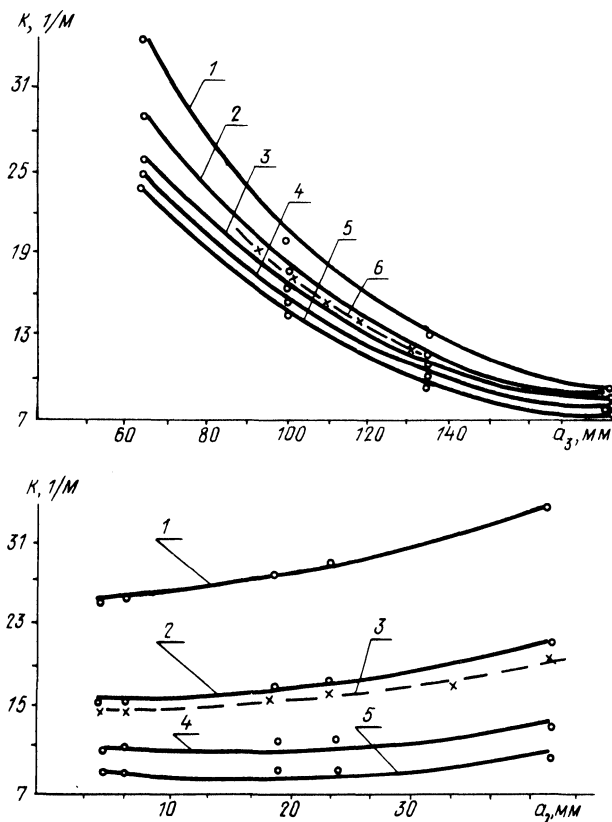


Рис. 2. Зависимость волнового коэффициента от геометрических параметров стержня:

1-5 — $a_3 = 60$ мм, 95, 95, 130, 180 мм соответственно;1-6 — $\beta = 41$ 1/м; 100, 850, 3420, ∞ и 100 1/м соответственно.

Сплошные линии — расчетные кривые; штриховые — экспериментальные.

С целью исследования влияния галтельного перехода, определяемого коэффициентом β (при определенных размерах стержня) на собственную частоту продольных колебаний k , значения геометрических параметров в уравнениях (12), (13) варьировали в определенных пределах.

Значения частоты собственных колебаний (первые корни) в зависимости от геометрических параметров стержня при $y_0 = 3,5$ мм, $y_1 = 7$ мм и $a_1 = 5$ мм приведены в табл. 1 и на рис. 2.

Как видно из приведенных данных, геометрические параметры галтельного перехода существенно влияют на частоту собственных колебаний многоступенчатых стержней, причем это влияние усиливается при увеличении значения k . Поэтому при расчете колебательных систем (концентраторов, образцов), применяемых в ультразвуковой технике, пренебрежение галтельными переходами приводит к известным ошибкам.

С целью проверки правильности предложенной методики расчета многоступенчатых стержней были проведены эксперименты на образцах из сплава Д16 при принятых в расчетах значениях y_0 , y_1 , a_1 и коэффициенте $\beta = 100$.

В качестве источника электрической энергии ультразвуковой частоты был применен стандартный ультразвуковой генератор УЗГ10-22 с выходной мощностью 10 кВт и частотой 14...20 кГц, работающий по схеме с самовозбуждением. Преобразование электрических колебаний в механические осуществлялось магнитострикционным преобразователем ПМС 15А-18. Автоматическая подстройка генератора осуществлялась с помощью обратной акустической связи. Для передачи мощности с преобразователя на образец использовался концентратор колебаний, форма которого представляла сочетание цилиндрической и конической поверхностей. Частота колебаний определялась электронным частотомером 43-9.

Экспериментальные данные, обозначенные звездочками, приведены на рис. 2. Результаты эксперимента не более 2% отличаются от теоретических. Это говорит о правильности принятой методики расчета многоступенчатых стержней с учетом галтельных переходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. К о л ь с к и й Г.Е. Волны напряжения в твердых телах. — М., 1965.
2. Д е й в и с Р.М. Волны напряжений в твердых телах. — М., 1961.
3. С е р е н с е н С.В., Г а р ф М.Э., К у з ь м е н к о в В.А. Динамика машин для испытаний на усталость. — М., 1967.
4. М а р т ы н е н к о М.Д., Д о в г я л л о И.Г. О высокочастотных продольных колебаниях многоступенчатых стержней переменного сечения. — В сб.: Механизация лесоразработок и транспорт леса. Мн., 1979, вып. 9.

И.Ф.Шидловский, Г.Н.Девойно

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ НЕСУЩЕЙ СИСТЕМЫ ТРАНСПОРТНОЙ КОНСТРУКЦИИ

В реальных условиях эксплуатации рама автомобиля подвергается совокупности действий статических и динамических нагрузок, а также кручению, вызванному неровностями дороги. В качестве объекта исследований рассмотрим раму автомобиля МАЗ-509.

Известно, что автомобиль-лесовоз МАЗ-509 значительную часть пробега совершает по плохим дорогам. Скорость автомобиля в этом случае невелика и динамическими нагрузками в некотором приближении можно пренебречь. В этих условиях можно допустить, что рама автомобиля подвергается только кручению. Это вызывает сложные напряженные состояния лонжеронов поперечин и заклепочных соединений.

Описание напряженного состояния рамы при кручении дано во многих работах. Большинство авторов этих работ предлагают определить напряжения в раме автомобиля с помощью формулы В.З.Власова для стержневых систем:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{B}{I_\omega} \omega ,$$

где N , M_x , M_y , B – силовые факторы в рассматриваемой точке сечения; x , y , ω – координаты рассматриваемой точки сечения; I_x , I_y , I_ω – моменты инерции сечения; F – площадь поперечного сечения.

Однако предлагаемые методы расчета на кручение не дают возможности учитывать влияния агрегатов и оборудования, установленных на раме на напряженное состояние ее элементов.

В [1] указывается, что установка поперечных элементов и надстроек связана с резким изменением формы и жесткости конструкции, что сказывается в образовании концентрационных эффектов в элементах рамы. Последние в существенной мере зависят от способа крепления связей и методов их сопряжения с основной несущей конструкцией (т.е. в зоне поперечных связей и надстроек возникают поля местных напряжений, которые не учитываются при расчете общих напряжений).

Для определения влияния агрегатов и оборудования, установленных на раме, на ее напряженное состояние были проведены испытания рамы автомобиля МАЗ-509 на кручение на Минском автозаводе. Испытания велись на стенде для кручения. Рама была установлена на 4-х фальшрессорах и передними колесами автомобиля имитировались переезды несимметричных выбоин одинаковой величины. Задние фальшрессоры были установлены на специальных опорах, которые давали возможность задней части рамы передвигаться в продольном направлении при ее кручении.

Для испытаний использовалась новая серийная рама МАЗ-509, на которой было наклеено 174 тензодатчика типа 2ПКБ-20-200ХБ и 2ПКБ-10-100ГВ. Датчики наклеивались как на лонжеронах, так и на поперечинах в местах наиболее частых эксплуатационных разрушений. С помощью 29 тензодатчиков определялись напряжения на краях нижней и верхней полок правого лонжерона. В качестве измерительной аппаратуры использовались тензометрический усилитель ТА-5 и шлейфовый осциллограф К-12-22.

Варианты этих испытаний представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Варианты испытаний	Состояние рамы
1	2
1	Без агрегатов
2	С раздаточной коробкой
3	С раздаточной коробкой, двигателем с коробкой передач и радиатором
4	С раздаточной коробкой, двигателем с коробкой передач, радиатором, кабиной, запасным колесом, инструментальным ящиком и грузом, имитирующим инструмент
5	С установленными агрегатами по 4-му варианту, лесовозным оборудованием, аккумуляторами, кронштейнами для топливных баков и грузами, имитирующими топливо.
6	С установленными агрегатами по 5-му варианту и погруженным на ней прицепом-ропуском
7	С установленными агрегатами по 5 варианту и грузом на переднем конике с массой 6 т

При испытаниях балка, имитирующая передний мост автомобиля, совершала примерно 7 крутильных колебаний при минимальной угловой скорости. Наибольшие изменения напряжений были зафиксированы на краю нижней полки правого лонжерона, где было наклеено 14 тензодатчиков параллельно краям полки. Значения этих напряжений для указанных тензодатчиков и их координаты относительно крайней передней точки лонжерона даются в виде табл. 2.

Полученные результаты показывают, что монтаж даже одного агрегата на раме влечет за собой изменение напряжений в той или иной мере по всей ее длине. Наибольшие напряжения зафиксированы в некоторых точках для рамы по 5-му варианту испытаний. В зоне крепления второй поперечины, где наклеен датчик 32, напряжения увеличились более чем в 18 раз по сравнению с первым вариантом испытаний. Значительные увеличения напряжений при 5-м варианте испытаний зафиксированы почти всеми наклеенными

Т а б л и ц а 2

№ дат-чиков	Координаты датчиков, мм	Значения напряжений в $\text{Па} \times 10^5$ для вариантов испытаний при угле кручения 4°						
		1	2	3	4	5	6	7
5	557	-20	-42	-55	-180	225	-240	-200
12	1007	190	182	-200	-1080	-930	-1300	-125
16	1447	130	208	210	350	385	495	870
20	1977	125	275	300	800	-625	-750	-500
24	2667	130	160	130	-295	-600	-740	-590
32	3227	-140	-195	-245	-1220	-2600	-2100	-1320
41	3517	95	70	-90	-800	-1300	-1570	-940
45	4007	-105	-25	-80	-280	-1010	-665	-540
52	4457	315	550	-365	900	-1500	-1870	-1500
57	4637	-284	-225	-185	-450	1035	-1220	-940
62	4827	75	110	90	200	-360	-360	-340
66	5457	-100	-95	-150	-230	-980	-740	-660
70	6047	-150	-250	-340	-740	-375	-475	-373
78	6287	-25	-8	-8	-15	-35	40	-50

датчиками. Значения этих напряжений далеки от напряжений для рамы без агрегатов.

Полученные результаты указывают на то, что расчет рамы на кручение необходимо вести с учетом агрегатов и оборудования, установленного на раме. Раму с агрегатами и оборудованием нельзя больше рассматривать как стержневую систему.

Установленные агрегаты и оборудование на раме представляют сложные пространственные конструкции. Они меняют жесткости рамы, накладывают на ее элементы дополнительные статические, кинематические и контактные связи.

Чтобы учесть все перечисленные выше факторы, необходима разработка новой методики расчета рам автомобилей, базирующейся на использовании методов решения задач теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. П р о с к у р я к о в В.Б. Динамика и прочность рам и корпусов транспортных машин. — Л., 1972.

УДК 621.01

Э.И.Астахов, В.В.Кудин

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ НАПРАВЛЯЮЩЕГО МЕХАНИЗМА ПРИВОДА ЭЛЕКТРОПИЛЫ

Направляющие механизмы имеют множество структурных схем исполнения. На рис. 1 изображена схема направляющего механизма шарнирного четырехзвенника ABCD, в которой при вращении кривошипа 1 точка М шатуна 2 описывает траекторию, частично или полностью совпадающую с заданной. Эта схема механизма выбрана в качестве механизма привода электропилы, рабочий орган (полотно 4) которой должен совершать возвратно-поступательное движение. Настоящая работа и посвящена определению параметров направляющего механизма, удовлетворяющих этому требованию.

Задача синтеза заключается в определении кинематических параметров: координат неподвижных точек $A, D - x_A, y_A, x_D, y_D$; длины звеньев $- a, b, c, l$; угловых координат $- \delta, \varphi_0$.

Методы синтеза направляющего механизма разработаны достаточно подробно и их можно подразделить на: а) детерминированные (методы приближения функций); б) численные (методы оптимизации). Методы приближения функций [1, 2] дают возможность

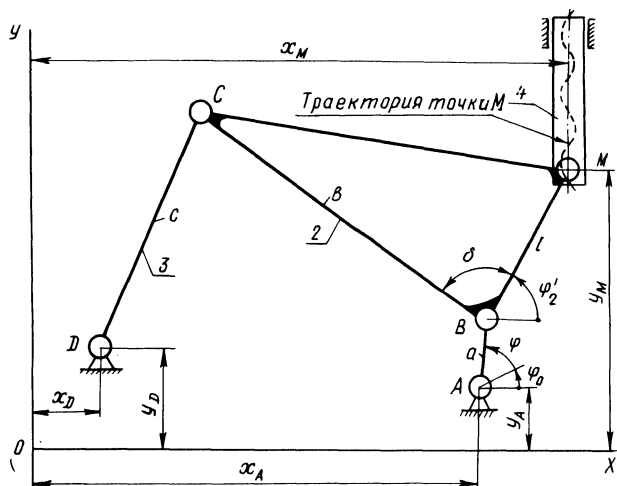


Рис. 1. Схема направляющего механизма шарнирного четырехзвенника.

решения задач синтеза только для сравнительно простых целевых функций и при небольшом числе параметров синтеза. Так как в данном случае число кинематических параметров $n = 10$, кроме того, число точек на шатунной кривой $m > n$, то детерминированные методы неприменимы.

Среди методов оптимизации можно в свою очередь выделить методы случайного поиска, направленного поиска и комбинированные [3].

Для вывода целевой функции синтеза направляющего механизма (рис. 1) воспользуемся методом условного размыкания контура [4] в точке C, тогда целевая функция

$$U(x) = U_1^2 + U_2^2 - c^2, \quad (1)$$

где

$$U_1 = x_A + a \cos(\varphi_0 + \varphi_1) + \frac{b}{l} \cos \delta [x_M - x_A - a \cos(\varphi_0 + \varphi_1)] - \\ - \frac{b}{l} \sin \delta [y_M - y_A - a \sin(\varphi_0 + \varphi_1)] - x_D;$$

$$U_2 = y_A + a \sin(\varphi_0 + \varphi_1) + \frac{b}{l} \sin \delta [x_M - x_A - a \cos(\varphi_0 + \varphi_1)] + \\ + \frac{b}{l} \cos \delta [y_M - y_A - a \sin(\varphi_0 + \varphi_1)] - y_D.$$

Параметры синтеза направляющего механизма вычисляются из условия минимума функции (1), т.е.

$$U(x) = \sum_{i=1}^m (U_1^2 + U_2^2 - c^2),$$

где $i = 1, 2, \dots, m$ — число заданных положений точки М шатуна.

При синтезе на вычисляемые параметры наложены ограничения, определяемые из конструктивных соображений

$$a_{\min} \leq a \leq a_{\max}; \quad b_{\min} \leq b \leq b_{\max}; \quad c_{\min} \leq c \leq c_{\max}; \quad l_{\min} \leq l \leq l_{\max};$$

$$x_{A \min} \leq x_A \leq x_{A \max}; \quad y_{A \min} \leq y_A \leq y_{A \max}; \quad x_{D \min} \leq x_D \leq x_{D \max};$$

$$y_{D \min} \leq y_D \leq y_{D \max}; \quad \delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}; \quad \varphi_{0 \min} \leq \varphi_0 \leq \varphi_{0 \max}.$$

Ограничения наложены и на предельные значения угла передачи между шатуном 2 и коромыслом 3:

$$\arccos \frac{b^2 + c^2 - (a+d)^2}{2bc} \leq [\gamma];$$

$$\arccos \frac{b^2 + c^2 - (a-d)^2}{2bc} \leq [\gamma],$$

где d — расстояние между точками А и D; $[\gamma] = 70^\circ$ — допускаемый угол передачи для данной схемы направляющего шарнирного четырехзвенника.

При определении отклонения точки М шатуна от заданной линии запишем координаты этой точки в системе координат ОХУ:

$$\left. \begin{aligned} x_M^* &= x_A + a \cos(\varphi_0 + \varphi_1) + l \cos \varphi_2'; \\ y_M^* &= y_A + a \sin(\varphi_0 + \varphi_1) + l \sin \varphi_2'. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Проекция отклонения траектории точки М на оси координат с учетом (3) равны

$$\Delta x_M = x_M - x_M^*;$$

$$\Delta y_M = y_M - y_M^*.$$

где x_M, y_M — координаты заданной траектории точки М.

Так как в данной задаче оптимального синтеза направляющего механизма $m > n$, то минимизация целевой функции (2) производилась демпфированным методом наименьших квадратов [4].

При выборе траектории точки М шатуна учтены три условия: а) точка должна двигаться по прямой линии; б) прямолинейное движение должно быть таким, чтобы ускорение изменялось по гармоническому закону, что позволит в дальнейшем наиболее простыми способами уравновесить силы инерции поступательно движущегося полотна 4-й электропилы; в) максимальный ход точки М должен быть не менее 80 мм, что обусловлено технологическими требованиями.

Начальные значения переменных параметров рассчитывались графическим методом синтеза направляющего механизма Чебышева, шатунная точка которого наименее уклоняется от прямой линии за полный оборот кривошипа. Ограничивающие условия были приняты из конструктивных соображений (габаритов, допустимых длин и т.д.). Начальные значения переменных параметров в первом приближении и пределы их изменения приведены в табл. 1.

Число точек оптимизации выбрано $m = 13$ (через 30° положения кривошипа 1), тогда значения координат соответственно равны: $x_M = 296$ мм; $y_M = 194; 190; 174; 152; 135; 115; 108; 115; 132; 152; 169; 184; 194$ мм.

Решение задачи оптимального синтеза направляющего механизма осуществлено на ЭВМ "Минск-22М" с использованием стандартной программы "Оптимизатор" [4]. Время, затраченное ЭЦВМ "Минск-22М" на отыскание оптимального решения по заданной целевой функции, составило около 15 мин. В результате синтеза направляющего механизма получены оптимальные параметры механизма, а именно: $a = 30,1$ мм; $b = 148,314$ мм; $c = 149,17$ мм; $l = 213,38$ мм; $x_A = 148,67$ мм; $y_A = -10,9$ мм; $x_D = -8,93$ мм; $y_D = 151,999$ мм; $\delta = 1,0007$ рад; $\varphi_0 = 0,7018$ рад.

Анализ результатов оптимального синтеза направляющего механизма электропилы с поступательно движущимся рабочим ор-

Т а б л и ц а 1

Параметры	a, мм	b, мм	c, мм	l, мм	x_A , мм	y_A , мм	x_D , мм	y_D , мм	δ , рад	φ_0 , рад
Начальные значения	30	150	150	210	150	0	0	150	0,7654	0,6991
min	20	100	100	130	50	-20	-120	100	0	0,5236
max	50	250	250	300	200	50	50	250	0,2932	1,0472

ганом показал, что размеры синтезированного механизма удовлетворяют поставленным требованиям, отклонение точки М шатуна от прямой составляет не более 1,5 мм. Выбор начальных данных по упрощенной методике (графическим методом или по соответствующим соотношениям, или формулам) позволяет значительно сократить затраты машинного времени. Положение заданной траектории точки М шатуна относительно осей кинематических пар А и D влияет на дальнейшую компоновку механизма и способ уравнивания главного вектора и главного момента сил инерции механизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А. Синтез плоских механизмов. — М., 1959. 2. Бояринов А.И., Кафаров В.В. Методы оптимизации в химической технологии. — М., 1975. 3. Рачек Н.М. Синтез четырехзвенного направляющего механизма. — Изв. вузов. Сер. Машиностроение, 1975, № 6. 4. Правила и инструкция по программированию для ЭВМ "Минск-22" на языке "АКИ". — Л., 1969.

УДК 621.01

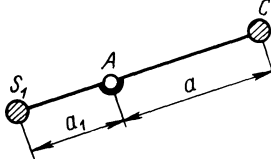
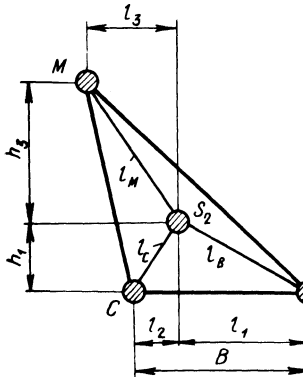
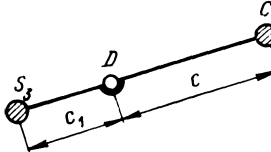
Е.А.Камцев, В.К.Акулич

КИНЕТОСТАТИЧЕСКИЙ СИЛОВОЙ РАСЧЕТ ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО ШАРНИРНО-РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В [1] достаточно подробно рассмотрена методика силового расчета плоских рычажных механизмов графо-аналитическим способом (методом планов сил). В настоящей работе рассматривается задача определения динамических реакций в кинематических парах четырехзвенного шарнирно-рычажного механизма (рис. 1) аналитическим методом, в котором вместо векторных уравнений равновесия сил применяются уравнения их проекций на оси координат. Для учета сил инерции звеньев используется метод замещающих точек. При этом отпадает необходимость в определении пар сил инерции от угловых ускорений звеньев или же в определении точек приложения результирующих сил инерции.

Силовому расчету предшествует кинематический анализ, в результате которого определяются все необходимые кинематические характеристики механизма.

Т а б л и ц а 1

Схема размещения массы звена	Расчетные формулы
 Кривошип 1	$m_{B1} = \frac{I_{S1}}{(a_1 + a)a};$ $m_{S1} = m_1 + \frac{I_{S1}}{(a_1 + a)a_1}.$
 Шатун 2	$m_{B2} = I_{S2} \frac{l_3 h_1 - l_2 h_3}{\Delta};$ $m_{C2} = I_{S2} \frac{l_1 h_3 - l_3 h_1}{\Delta};$ $m_M = I_{S2} \frac{h_1 b}{\Delta};$ $m_{S2} = m_2 - \frac{I_{S2}}{\Delta} (h_3 - h_1) b,$ где $\Delta = h_1 [l_M^2 b + l_3 (l_B^2 - l_C^2)] + h_3 (l_1 l_C^2 - l_2 l_B^2);$ $l_B^2 = h_1^2 + l_1^2; \quad l_C^2 = h_1^2 + l_2^2;$ $l_M^2 = l_3^2 + h_3^2.$
 Коромысло 3	$m_{C3} = \frac{I_{S3}}{(c_1 + c)c};$ $m_{S3} = m_3 + \frac{I_{S3}}{(c_1 + c)c_1}.$

Порядок силового расчета остается таким же, как и при графо-аналитическом методе, принятом в теории механизмов и машин, а именно: сначала рассматривается структурная группа, состоящая из коромысла 3 и шатуна 2, а затем кривошип 1.

Используя метод замещающих точек, распределенные массы каждого звена заменяем точечными массами, эквивалентными ему в динамическом отношении. Массы кривошипа и коромысла раз-

мещаем по трем точкам. Две точки выбираем в центрах шарниров, а одну — в центре масс звена. Предполагается, что и кривошип, и коромысло имеют противовесы. Массу шатуна 2, имеющего треугольную форму, размещаем по четырем точкам. Три точки выбираем на вершинах треугольника, а одну — в центре масс звена. Величины подвижных сосредоточенных масс вычисляются по формулам, приведенным в табл. 1.

Проецируя силы инерции сосредоточенных масс на оси прямоугольной системы координат xOy , получаем однотипные выражения для всех восьми замещающих точек ($B_1, B_2, C_2, C_3, M, S_1, S_2, S_3$):

$$X_i = -m_i \ddot{x}_i; \quad Y_i = -m_i \ddot{y}_i,$$

где m_i — сосредоточенная масса i -й точки; $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i$ — проекции ускорения i -й точки.

Для динамического равновесия механизма прикладываем к кривошипу уравновешивающий момент M_y и реакции в шарнирах А и D, действующие со стороны стойки O. Эти реакции также представим в виде проекций X_{01}, Y_{01} и X_{03}, Y_{03} . Схема нагружения механизма показана на рис. 1.

Выделяем из механизма структурную группу, состоящую из звеньев 2 и 3, и действие звеньев 1 и 0 на группу заменяем реакциями, проекции которых обозначим соответственно через X_{12}, Y_{12} и X_{03}, Y_{03} (рис. 2).

Реакцию в шарнире С найдем по методу В.А.Зиновьева [2]. Разложим ее на две составляющие, линии действия которых совпадают с линиями ВС и DC. В таком случае имеем:

$$\bar{R}_{32} = \bar{R}_{32}^{(2)} + \bar{R}_{32}^{(3)}; \quad \bar{R}_{23} = \bar{R}_{23}^{(2)} + \bar{R}_{23}^{(3)},$$

где $\bar{R}_{32}^{(2)}$ — составляющая силы $\bar{R}_{32}$, направленная вдоль звена ВС; $\bar{R}_{32}^{(3)}$ — составляющая той же силы, направленная вдоль линии DC.

Аналогичными символами обозначаются составляющие силы $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$. На рис. 2 показаны направления реакций, принятые за положительные.

Составляющие $\bar{R}_{23}^{(2)}$ и $\bar{R}_{32}^{(3)}$ найдем из уравнений моментов сил, действующих на звено 3 относительно точки D, и сил, действующих на звено 2, относительно точки В.

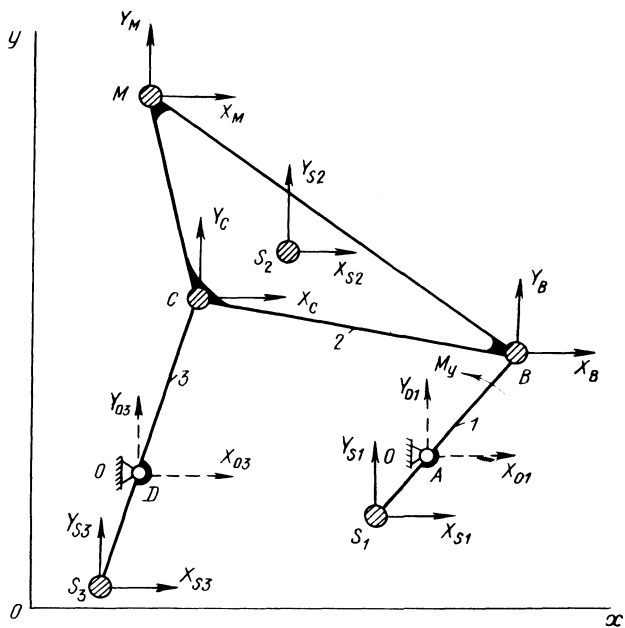


Рис. 1. Схема нагрузок, действующих на механизм.

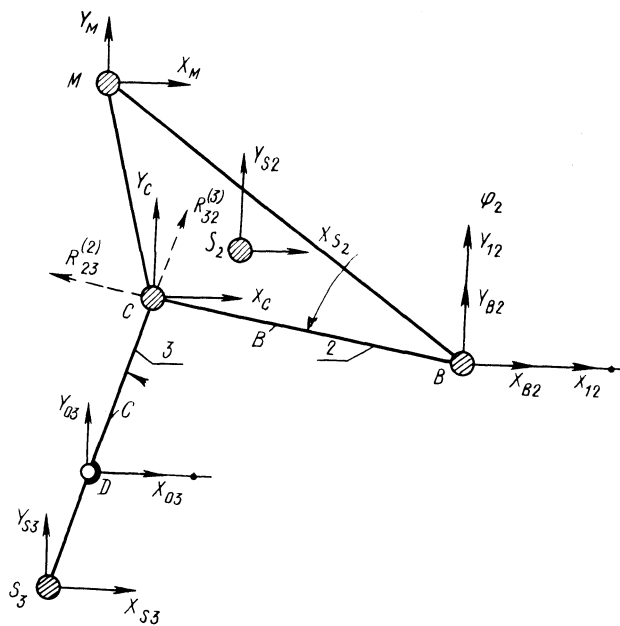


Рис. 2. Схема нагрузок, действующих на структурную группу.

Получаем

$$R_{23}^{(2)} = \frac{X_{C3}(y_D - y_C) + Y_{C3}(x_C - x_D) + X_{S3}(y_D - y_{S3}) + Y_{S3}(x_{S3} - x_D)}{c \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2)};$$

$$R_{23}^{(3)} = \frac{X_{C2}(y_B - y_C) + Y_{C2}(x_C - x_B) + X_M(y_B - y_M) + Y_M(x_M - x_B) + X_{S2}(y_B - y_{S2}) + Y_{S2}(x_{S2} - x_B)}{b \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}.$$

Полная реакция R_{23} в шарнире С равна

$$R_{23} = \sqrt{(R_{23}^{(2)})^2 + (R_{23}^{(3)})^2 + 2R_{23}^{(2)}R_{23}^{(3)} \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}.$$

Проекция этой реакции на координатные оси равны

$$X_{23} = R_{23}^{(2)} \cos \varphi_2 + R_{23}^{(3)} \cos \varphi_3;$$

$$Y_{23} = R_{23}^{(2)} \sin \varphi_2 + R_{23}^{(3)} \sin \varphi_3.$$

Определяем реакции в шарнирах В и D. Проецируя все силы, действующие на звено 3, на оси координат, найдем реакции стойки

$$X_{03} = -X_{23} - X_{S3} - X_{C3};$$

$$Y_{03} = -Y_{23} - Y_{S3} - Y_{C3}.$$

Аналогично найдем проекции реакции $\bar{R}_{12}$

$$X_{12} = X_{23} - X_{C2} - X_M - X_{S2} - X_{B2};$$

$$Y_{12} = Y_{23} - Y_{C2} - Y_M - Y_{S2} - Y_{B2}.$$

Переходя к расчету кривошипа 1, определим сначала уравновешивающий момент M_y (рис. 3).

Учитывая, что

$$X_{21} = -X_{12} \text{ и } Y_{21} = Y_{12},$$

получим

$$M_y = (X_{B1} - X_{12})(y_B - y_A) - X_{S1}(y_A - y_{S1}) - (Y_{B1} - Y_{12})(x_B - x_A) + Y_{S1}(x_A - x_{S1}).$$

Проецируя все силы, действующие на кривошип, на оси x и y (рис. 3), найдем проекции реакций

$$X_{01} = X_{12} - X_{B1} - X_{S1} ;$$

$$Y_{01} = Y_{12} - Y_{B1} - Y_{S1} .$$

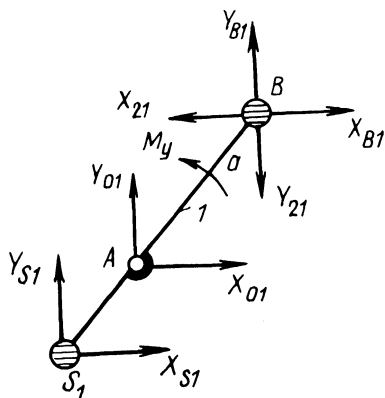


Рис. 3. Схема нагрузок, действующих на кривошип.

Для проверки M_y можно вычислить приведенный момент M_{Π} из условия баланса мощностей

$$M_{\Pi} = \frac{1}{\omega_1} (X_B \dot{x}_B + Y_B \dot{y}_B + X_C \dot{x}_C + Y_C \dot{y}_C + X_M \dot{x}_M + Y_M \dot{y}_M + \\ + X_{S1} \dot{x}_{S1} + Y_{S1} \dot{y}_{S1} + X_{S2} \dot{x}_{S2} + Y_{S2} \dot{y}_{S2} + X_{S3} \dot{x}_{S3} + Y_{S3} \dot{y}_{S3}) ,$$

где ω_1 — угловая скорость кривошипа.

Должно соблюдаться равенство

$$M_y = - M_{\Pi} .$$

Кроме того, следует иметь в виду, что геометрическая сумма реакций двух опор (в точках A и D) равна главному вектору сил инерции механизма, взятому с обратным знаком. Поэтому

$$X_{01} + X_{03} = - \Sigma X_i ;$$

$$Y_{01} + Y_{03} = - \Sigma Y_i ,$$

а момент реакций X_{03} и Y_{03} относительно точки A включает в себя моменты всех сил относительно этой же точки и уравновешивающий момент M_y [3] :

$$\begin{aligned}
M_y = & -[X_{03}(y_A - y_D) + Y_{03}(x_D - x_A) + X_B(y_A - y_B) + X_C(y_A - y_C) + \\
& + X_M(y_A - y_M) + X_{S1}(y_A - y_{S1}) + X_{S2}(y_A - y_{S2}) + X_{S3}(y_A - y_{S3}) + \\
& + Y_B(x_B - x_A) + Y_C(x_C - x_A) + X_M(x_M - x_A) + Y_{S1}(x_{S1} - x_A) + \\
& + Y_{S2}(x_{S2} - x_A) + Y_{S3}(x_{S3} - x_A)] .
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин. — М., 1975.
2. Зинovieв В.А. Курс теории механизмов и машин. — М., 1972.
3. Берестов В.А. Сравнительный анализ реакций в кинематических парах механизма шарнирного четырехзвенника для различных схем уравнивания. — Механика машин, 1977, вып. 52.

УДК 539.3

С.В.Босаков

РАСЧЕТ КЛИНА С КРАЕВЫМ РАЗРЕЗОМ

Рассматривается плоский клин с краевым симметричным разрезом под действием нормальной сосредоточенной силы (рис. 1). Определяются напряжения по оси симметрии клина. Разложим нагрузку на симметричную и обратно-симметричную. Отсутствие касательных напряжений и горизонтальных перемещений при действии симметричной нагрузки и нормальных напряжений и вертикальных перемещений при действии обратно-симметричной по оси разреза для $\bar{x} > 1$ приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\delta_1} \sigma(\xi) K_1(x, \xi) d\xi + \frac{\delta_1}{1} &= \frac{P}{1} K_1(x, a); \\
\int_1^{\delta_2} \tau(\xi) K_2(x, \xi) d\xi + \frac{\delta_2}{1} &= \frac{P}{1} K_3(x, a), \quad x = \frac{\bar{x}}{1}; \quad \xi = \frac{\bar{\xi}}{1},
\end{aligned}$$

где $\sigma(x)$, $\tau(x)$ — соответственно законы распределения нормальных и касательных напряжений по оси разреза; $K_i(x, \xi)$ — радиальные и тангенциальные перемещения точек грани клина с углом при вершине 2α от действия единичной силы, нормальной и касательной к грани ($i = 1, 2, 3$); δ_i — перемещение точки $\bar{x} = 1$ относительно вершины клина ($i = 1, 2$).

Выражения для $K_i(x, \xi)$ ($i = 1, 2, 3$) с точностью до постоянной найдены на основании известных результатов Я.С.Уфлянда [1] с

использованием методов специальной аппроксимации [2] и имеют вид:

$$\begin{aligned} K_1(x, a) &= -\frac{2}{\pi E} \ln \left| \frac{x^\beta - a^\beta}{a^\beta} \right|; \quad \beta = \frac{\pi}{2} \frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha}; \\ K_2(x, a) &= -\frac{2}{\pi E} \ln \left| \frac{x^d - a^d}{a^d} \right|; \quad d = \frac{\pi}{2} \frac{4\alpha - \sin 4\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha}; \\ K_3(x, a) &= \frac{1}{2E} \left[\pm \left(\frac{4\alpha^2}{C} - \nu \right) \mp \frac{\sin^2 2\alpha}{C} \frac{x^{\frac{\pi}{C}} - a^{\frac{\pi}{C}}}{x^{\frac{\pi}{C}} + a^{\frac{\pi}{C}}} \right]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$C = 4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha,$$

где 2α — угол раствора клина (рис. 1); E, ν — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала клина.

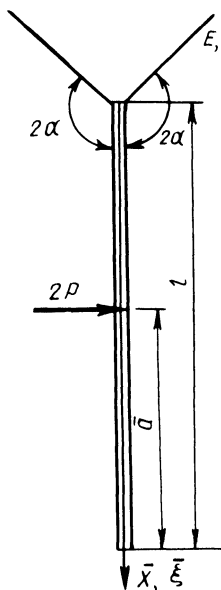


Рис. 1.

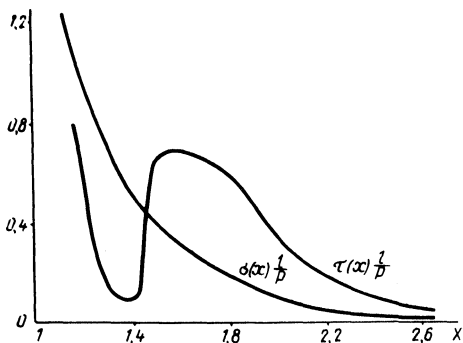


Рис. 2.

В третьем выражении из (2) верхний знак берется для $x < a$, в противном случае берется нижний знак. Примем

$$\sigma(x) = \frac{\beta}{x\sqrt{x^{2\beta} - 1}} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^1 T_{2m+1}(x^{-\beta});$$

$$\tau(x) = \frac{d}{x\sqrt{x^{2d}-1}} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^2 T_{2m+1}(x^{-d}); \quad (3)$$

$$T_K(z) = \cos(K \arccos z).$$

В дальнейшем используем следующие соотношения [3]:

$$\int_0^1 \ln \left| \frac{x-\xi}{x+\xi} \right| T_{2m+1}(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{2m+1} T_{2m+1}(x); \quad (4)$$

$$\ln(x+\xi) = -\ln 2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} T_K(x) T_K(\xi); \quad 0 \leq x, \xi \leq 1.$$

Подставим (3) в (1) и используем соотношение (4). Полученное равенство умножим на $T_{2n+1}(v) (1-v^2)^{-1/2} dv$ ($v=x^{-\beta}, x^{-d}$) и $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ и проинтегрируем в пределах $(0,1)$. Получаются бесконечные системы следующего вида:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} d_{m,n} A_{2m+1}^i + \frac{(-1)^n}{2n+1} C_i &= f_n^i, \quad n=0,1,2,\dots \quad i=1,2; \\ d_{m,n} &= -4(-1)^{m+n} \frac{2n+1}{2m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{[(2m+1)^2-4k^2][(2n+1)^2-4k^2]}; \\ d_{m,m} &= -\frac{\pi^2}{8(2m+1)} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{[(2m+1)^2-4k^2]^2}; \\ C_1 &= \frac{\pi E}{2l} \delta_1 + \frac{P}{l} \ln \frac{a^\beta}{2}; \quad C_2 = \frac{\pi E}{2l} \delta_2 + \frac{P}{l} \ln \frac{a^d}{2}; \\ \frac{1}{P} f_n^1 &= -\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{\beta k}}{2^{kK}(1+k)B(\frac{k+3}{2}+n, \frac{k+1}{2}-n)} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2n+1}{k[4k^2-(2n+1)^2]}; \\ \frac{1}{P} f_n^2 &= -\frac{\pi^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^2 2\alpha}{C} \frac{(-1)^k a^{\frac{\pi k}{C}}}{2^{\frac{\pi k}{Cd}} (1 + \frac{\pi k}{Cd}) B(n + \frac{\pi k}{2Cd} + \frac{3}{2}, \frac{\pi k}{2Cd} + \frac{1}{2} - n)}, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

где $B(x,y)$ - бета-функция.

Можно показать, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_{m,n} < 2 \ln \left| \frac{2n+3}{2n-1} \right| ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^i = 0.$$

Поэтому систему (5) можно решать методом усечения. Коэффициенты концентрации напряжений [2] у вершины разреза определяются выражениями

$$\kappa_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \sigma(x) \sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} A \frac{1}{2m+1} ;$$

$$\kappa_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \tau(x) \sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{d}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} A \frac{2}{2m+1} .$$

На рис. 2 приведены эпюры $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ при $a = 0,5$ и $2\alpha = \frac{\pi}{2}$. Предполагаемую методику расчета можно обобщить на случай действия нормальных сил, приложенных к разрезу и распределенных по любому закону.

Также очевидно, что напряженное состояние клина определяется внешней нагрузкой, приложенной к разрезу и найденными законами распределения напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. У ф л я н д Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — М.-Л., 1967. 2. Развитие теории контактных задач в СССР /Под ред. Л.А.Галина. — М., 1976. 3. П о п о в Г.Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. — ПММ, 1969, 33, № 3.

УДК 539.3.01

Н.Н.Флусов

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ R-ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Задача трехмерной теории упругости в перемещениях сводится к отысканию бигармонических функций, т.е. удовлетворяющих уравнению

$$\Delta^2 u_i = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

внутри рассматриваемой области, а также некоторым граничным условиям

$$L(\bar{u}) / \Gamma = \bar{\varphi} \quad , \quad (2)$$

где L — соответствующий оператор, определенный на границе области Γ .

Рассмотрим построение структур [1,2] для задач следующего класса. Пусть Ω — цилиндрическая область с уравнением боковой поверхности $\omega_1(x,y)$, нормализованным до первого порядка, и ограниченная плоскостями $z = 0, z = h$, объединенными в границу

$$\omega_2 = z(h-z)/h. \quad (3)$$

На боковой поверхности заданы произвольные самоуравновешенные нормальные и касательные нагрузки как функции от x, y, z .

Граничные условия на поверхности $\omega_1 = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_n &= L_n(\bar{u}) = A_{11} \frac{\partial u_1}{\partial n} + B_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + A_{12} \frac{\partial u_2}{\partial n} + B_{12} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + C_1 \frac{\partial u_3}{\partial z} \Big|_{\omega_1} = \varphi_1; \\ \tau_n &= L_{\tau}^{(1,2)}(u) = A_{21} \frac{\partial u_1}{\partial n} + B_{21} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + A_{22} \frac{\partial u_2}{\partial n} + B_{22} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} \Big|_{\omega_1} = \varphi_2; \quad (4) \\ \tau_3 &= L_{\tau}^{(3)}(\bar{u}) = A_{31} \frac{\partial u_1}{\partial z} + B_{31} \frac{\partial u_2}{\partial z} + C_2 \frac{\partial u_3}{\partial n} \Big|_{\omega_1} = \varphi_3. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{11} &= (\lambda + 2\mu)n_x; \\ B_{11} &= -[\lambda + 2\mu - 4\mu(n_x)^2]n_y; \\ A_{12} &= (\lambda + 2\mu)n_y; \\ B_{12} &= [\lambda + 2\mu - 4\mu(n_y)^2]n_x; \\ C_1 &= \lambda; \\ A_{21} &= -B_{22} = \mu n_y; \\ B_{21} &= A_{22} = -\mu n_x; \\ A_{31} &= \mu n_x; \\ B_{31} &= \mu n_y; \\ C_2 &= \mu, \end{aligned} \quad (5)$$

где n_x, n_y — направляющие косинусы к контуру в плоскости $z = \text{const}$; $\frac{\partial n_i}{\partial n}, \frac{\partial n_i}{\partial \tau}$ — производные по нормали и касательной соответственно к тому же контуру; σ_n, τ_n, τ_3 — составляющие внешней нагрузки по соответствующим осям (рис. 1).

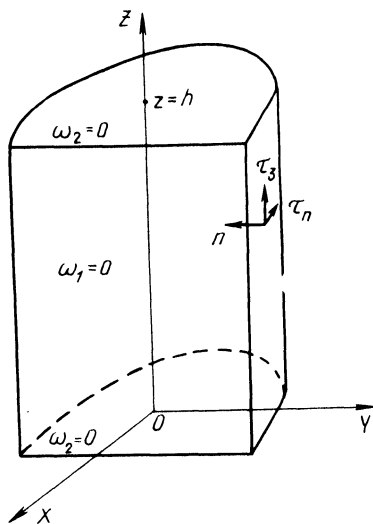


Рис. 1.

На поверхности $\omega_2 = 0$ граничные условия представлены следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= L_n(\bar{u}) = D_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + D_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} + E_1 \frac{\partial u_3}{\partial n} \Big|_{\omega_2=0} = 0; \\ \tau_1 &= L_{\tau}^{(1)}(u) = D_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} + E_2 \frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{\omega_2=0} = 0; \\ \tau_2 &= L_{\tau}^{(2)}(\bar{u}) = D_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} + E_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} \Big|_{\omega_2=0} = 0,\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}D_1 &= \lambda n_z; \\ D_2 &= \mu; \\ E_1 &= \lambda + 2\mu; \\ E_2 &= \mu n_z,\end{aligned}\tag{7}$$

где τ_1, τ_2 — проекции внешней нагрузки на оси x и y соответственно.

Продолжая граничные операторы внутрь области, получим:
от поверхности $\omega_1(x, y)$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)}(u_1) - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} [\lambda + 2\mu - 4\mu \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right)^2] T_1^{(1)}(u_1) + \\
 & + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)}(u_2) + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} [\lambda + 2\mu - 4\mu \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\right)^2] T_1^{(1)}(u_2) + \\
 & + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial z} = \varphi_1^* + \omega_1 F_1; \\
 & -\mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} T_1^{(1)}(u_1) + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)}(u_1) - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)}(u_2) - \\
 & - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} T_1^{(1)}(u_2) = \varphi_2^* + \omega_1 F_2; \\
 & \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial z} + \mu D_1^{(1)}(u_3) = \varphi_3^* + \omega_1 F_3,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где φ_i^* — функции, удовлетворяющие условию

$$\varphi_i^*|_{\omega_1} = \varphi_i; \tag{9}$$

от поверхности $\omega_2(z)$

$$\begin{aligned}
 & \lambda \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \omega_1}{\partial x} [D_1^{(1)}(u_1) + D_1^{(1)}(u_2)] + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} [T_1^{(1)}(u_2) - \right. \\
 & \left. - T_1^{(1)}(u_1)] \right\} + (\lambda + 2\mu) D_1^{(2)}(u_3) = \omega_2 F_4;
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 & \mu \left\{ D_1^{(2)}(u_1) + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)}(u_3) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} T_1^{(1)}(u_3) \right] \right\} = \omega_2 F_5;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mu \left\{ D_1^{(2)}(u_2) + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} T_1^{(1)}(u_3) + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)}(u_3) \right] \right\} = \\
 & = \omega_2 F_6.
 \end{aligned}$$

Представим перемещения в виде

$$u_i = \Phi_i^{(1)} + \omega_0 \Phi_i^{(2)}, \quad (11)$$

где

$$\omega_0 = \omega_1 \lambda \omega_2. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (8) и преобразуя получившиеся выражения, имеем

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \Phi_1^{(2)} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \Phi_2^{(2)} + \lambda \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \Phi_3^{(2)} = \theta_1 + \omega_1 F_1^{(1)}; \quad (13)$$

$$\mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \Phi_1^{(2)} - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \Phi_2^{(2)} = \theta_2 + \omega_2 F_2^{(1)};$$

$$\mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \Phi_1^{(2)} + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \Phi_2^{(2)} + \mu \Phi_3^{(2)} = \theta_3 + \omega_1 F_3^{(1)}.$$

Здесь $\theta_1 = \varphi_1^* - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)} (\Phi_1^{(1)}) + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} [\lambda + 2\mu - 4\mu (\frac{\partial \omega_1}{\partial x})^2] T_1^{(1)} (\Phi_1^{(1)}) - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)} (\Phi_2^{(1)}) - \frac{\partial \omega_1}{\partial x} [\lambda + 2\mu - 4\mu (\frac{\partial \omega_1}{\partial y})^2] T_1^{(1)} (\Phi_2^{(1)}) - \lambda \frac{\partial \Phi_3^{(1)}}{\partial z};$ (14)

$$\theta_2 = \varphi_2^* - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)} (\Phi_1^{(1)}) + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} T_1^{(1)} (\Phi_1^{(1)}) +$$

$$+ \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)} (\Phi_2^{(1)}) + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} T_1^{(1)} (\Phi_2^{(1)});$$

$$\theta_3 = \varphi_3^* - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial z} - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial z} - \mu D_1^{(1)} (\Phi_3^{(1)}),$$

где $F_i^{(1)}$ — сумма соответствующих функций, имеющих множитель ω_1 .

Решение системы (13) имеет вид

$$\Phi_1^{(2)} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \theta_1 + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \theta_2 + \omega_1 \varphi_1;$$

$$\begin{aligned}\Phi_2^{(2)} &= \frac{1}{\lambda+2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \theta_1 - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \theta_2 + \omega_2 \varphi_2; \\ \Phi_3^{(2)} &= \frac{1}{\mu} \theta_3 + \omega_1 \varphi_3.\end{aligned}\quad (15)$$

где φ_i — произвольные функции.

Подставляя (15) в (11), получим структуру, учитывающую граничные условия на поверхности $\omega_1(x, y)$:

$$\begin{aligned}u_1 &= \Phi_1^{(1)} + \omega_0 \left\{ \frac{1}{\lambda+2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \theta_1 + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \theta_2 + \omega_1 \varphi_1 \right\}; \\ u_2 &= \Phi_2^{(1)} + \omega_0 \left\{ \frac{1}{\lambda+2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \theta_1 - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \theta_2 + \omega_1 \varphi_2 \right\}; \\ u_3 &= \Phi_3^{(1)} + \omega_0 \left\{ \frac{1}{\mu} \theta_3 + \omega_1 \varphi_3 \right\}.\end{aligned}\quad (16)$$

Для того чтобы учесть граничные условия на поверхности $\omega_2 = 0$, положим

$$\Phi_i^{(1)} = \Psi_i^{(1)} + \omega_2 \Psi_i^{(2)}.\quad (17)$$

Подставляя (17) в (10), учитывая (11) и (16) и преобразуя получившиеся выражения, находим

$$\begin{aligned}& -(\lambda+2\mu) \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \Psi_1^{(2)} - (\lambda+2\mu) \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \Psi_2^{(2)} + \\& + \left[\lambda+2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right] \right] \Psi_3^{(2)} = \\& = \chi_1 + \omega_1 q_1^{(1)} + \omega_2 q_2^{(1)}; \\& \mu \left[1 - \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2 \right] \Psi_1^{(2)} - \mu \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \Psi_2^{(2)} - \\& - \frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \Psi_3^{(2)} = \chi_2 + \omega_1 q_1^{(2)} + \omega_2 q_2^{(2)}; \\& - \mu \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \Psi_1^{(2)} + \mu \left[1 - \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2 \right] \Psi_2^{(2)} - \\& - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \Psi_3^{(2)} = \chi_3 + \omega_1 q_1^{(3)} + \omega_2 q_2^{(3)},\end{aligned}\quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} x_1 = & - \left\{ (\lambda + 2\mu) [D_1^{(2)} (\psi_3^{(1)}) + \Phi_{31}^{(2)}] + \lambda \frac{\partial \omega_2}{\partial z} x \right. \\ & x \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} (D_1^{(1)} (\psi_1^{(1)}) + D_1^{(1)} (\psi_2^{(1)}) + \Phi_{11}^{(2)} + \Phi_{21}^{(2)}) + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right] x \\ & x [T_1^{(1)} (\psi_2^{(1)}) - T_1^{(1)} (\psi_1^{(1)})] \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = & -\mu \left\{ D_1^{(2)} (\psi_1^{(1)}) + \Phi_{11}^{(2)} + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)} (\psi_3^{(1)}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \Phi_{31}^{(2)} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} T_1^{(1)} (\psi_3^{(1)}) \right] \right\}; \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 = & -\mu \left\{ D_1^{(2)} (\psi_2^{(1)}) + \Phi_{21}^{(2)} + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} T_1^{(1)} (\psi_3^{(1)}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} (D_1^{(1)} (\psi_3^{(1)}) + \Phi_{31}^{(2)}) \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^{(2)} = & \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \left\{ \varphi_1^* - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)} (\psi_1^{(1)}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} [\lambda + 2\mu - 4\mu \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2] T_1^{(1)} (\psi_1^{(1)}) - (\lambda + 2\mu) x \right. \\ & x \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)} (\psi_2^{(1)}) - \frac{\partial \omega_1}{\partial x} [\lambda + 2\mu - 4\mu \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2] T_1^{(1)} (\psi_2^{(1)}) - \\ & - \frac{\partial \psi_3^{(1)}}{\partial z} \left. \right\} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \left\{ \varphi_2^* - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)} (\psi_1^{(1)}) + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} T_1^{(1)} (\psi_1^{(1)}) + \right. \\ & \left. + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)} (\psi_2^{(1)}) + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} T_1^{(1)} (\psi_2^{(1)}) \right\}; \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21}^{(2)} = & -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \left\{ \varphi_1^* - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)} (\psi_1^{(1)}) + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} [\lambda + \right. \\ & \left. + 2\mu - 4\mu \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2] T_1^{(1)} (\psi_1^{(1)}) - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)} (\psi_2^{(1)}) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \omega_1}{\partial x} [\lambda + 2\mu - 4\mu \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2] T_1^{(1)} (\psi_2^{(1)}) - \lambda \frac{\partial \omega_3^{(1)}}{\partial z} \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \left\{ \varphi_2^* - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} D_1^{(1)} (\varphi_1^{(1)}) + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} T_1^{(1)} (\varphi_1^{(1)}) + \right. \\
& \left. + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} D_1^{(1)} (\varphi_2^{(1)}) + \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} T_1^{(1)} (\varphi_2^{(1)}) \right\}; \\
& \varphi_{31}^{(2)} = \frac{1}{\mu} \left\{ \varphi_3^* - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z} - \mu \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z} - \mu D_1^{(1)} (\varphi_3^{(1)}) \right\},
\end{aligned}$$

где $q_i^{(j)}$ — произвольные функции.

Таким образом, решение системы (18) имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi_1^{(2)} = & - \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} x_1 + \frac{1}{\mu \lambda} \left\{ \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2 - \left[1 - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2 \right] x [\lambda + 2\mu - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right] \right\} x_2 - \frac{1}{\mu \lambda} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \left\{ [2(\lambda + \mu) - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right] \right\} x_3 + \omega_1 \varphi_1^{(1)} + \omega_2 \varphi_2^{(1)}; \quad (21) \\
\varphi_2^{(2)} = & - \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} x_1 - \frac{1}{\mu \lambda} \left\{ 2(\lambda + \mu) - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} x \right. \\
& \left. x \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right] \right\} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} x_2 + \frac{1}{\mu \lambda} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2 - \left[1 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2 \right] [\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right]] \right\} x_3 + \\
& + \omega_1 \varphi_1^{(2)} + \omega_2 \varphi_2^{(2)}; \\
\varphi_3^{(2)} = & - \frac{(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} x_2 - \frac{(\lambda + 2\mu)}{\lambda \mu} \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} x_3 + \\
& + \omega_1 \varphi_1^{(3)} + \omega_2 \varphi_2^{(3)}.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения (21) в (17), а затем в (16), получим структуру, учитывающую граничные условия на обеих поверхностях:

$$u_i = \varphi_i^{(1)} + \omega_2 \varphi_i^{(2)} + \omega_0 \varphi_{i0}^{(2)}, \quad (22)$$

где $\Phi_{i0}^{(2)} = \Phi_i^{(2)} (\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \varphi_3^{(1)})$.

Таким образом, каждое перемещение u_i зависит от трех общих произвольных функций и четырех независимых функций, которые выбираются так, чтобы было удовлетворено уравнение (1).

Пример. Выпишем структуру для следующей задачи. Пусть имеется цилиндр радиуса R и высоты h . На боковой поверхности задано только нормальное сжимающее усилие интенсивности $(\lambda + 2\mu)P$; торцы свободны от нагрузок.

Тогда

$$\omega_1 = \frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2). \quad (23)$$

Структура указанной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1 = & \varphi_1^{(1)} + \omega_2 \{ K_1(x) x_1 + K_2(y) x_2 + K_3(x, y) x_3 + \omega_1 \varphi_1^{(1)} + \\ & + \omega_2 \varphi_2^{(1)} \} + \omega_0 \left\{ \Phi_{11}^{(2)} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{x}{R} \frac{h - 2z}{h} \varphi_3^{(1)} + \omega_1 \varphi_3^{(1)} + \right. \\ & \left. + \omega_2 \varphi_4^{(1)} \right\}; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} u_2 = & \varphi_2^{(1)} + \omega_2 \{ K_1(y) x_1 + K_3(x, y) x_2 + K_2(x) x_3 + \omega_1 \varphi_1^{(2)} + \\ & + \omega_2 \varphi_2^{(2)} \} + \omega_0 \left\{ \Phi_{21}^{(2)} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{y}{R} \frac{h - 2z}{h} \varphi_3^{(1)} + \omega_1 \varphi_3^{(2)} + \right. \\ & \left. + \omega_2 \varphi_4^{(2)} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 = & \varphi_3^{(1)} + \omega_2 \left\{ \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{\lambda \mu} [K_1(x) x_2 + K_1(y) x_3] + \omega_1 \varphi_1^{(3)} + \right. \\ & + \omega_2 \varphi_2^{(3)} \} + \omega_0 \left\{ \Phi_{31}^{(2)} + \frac{h - 2z}{hR} (x \varphi_1^{(1)} + y \varphi_2^{(1)}) + \omega_1 \varphi_3^{(3)} + \right. \\ & \left. + \omega_2 \varphi_4^{(3)} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$K_1(t) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{h - 2t}{h} \frac{t}{R};$$

$$K_2(t) = \frac{1}{\lambda \mu} \left[\lambda \frac{t^2}{R^2} - \left[1 - \frac{t^2}{R^2} \right] (\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \frac{x(x+y)}{R^2}) \right];$$

$$\begin{aligned}
K_3(x, y) &= -\frac{1}{\lambda\mu} \frac{xy}{R^2} \left[2(\lambda + \mu) - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \frac{x(x+y)}{R^2} \right]; \\
\chi_1 &= -\left\{ (\lambda + 2\mu) [D_1^{(2)}(\psi_3^{(1)}) + \frac{1}{R} (x \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z}) - \right. \\
&\quad \left. - D_1^{(1)}(\psi_2^{(1)})] + \lambda \frac{h-2z}{hR^2} [-x(x+y)p - x(x+y) \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z} + \right. \\
&\quad \left. + N_1(y, x) T_1^{(1)}(\psi_1^{(1)}) + N_1(-y, y) T_1^{(1)}(\psi_2^{(1)})] \right\}; \\
\chi_2 &= -\mu \left\{ D_1^{(2)}(\psi_1^{(1)}) + \frac{x}{R} p + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \psi_3^{(1)}}{\partial z} - \frac{x}{R} - D_1^{(1)}(\psi_1^{(1)}) + \right. \\
&\quad \left. + N_2(x, y) T_1^{(1)}(\psi_1^{(1)}) - N_3(x, y) T_1^{(1)}(\psi_2^{(1)}) + \frac{h-2z}{hR} x \right. \\
&\quad \left. + [y T_1^{(1)}(\psi_3^{(1)}) - \frac{x}{R} (x \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z})] \right\}; \\
\chi_3 &= -\mu \left\{ D_1^{(2)}(\psi_2^{(1)}) + \frac{y}{R} p + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \psi_3^{(1)}}{\partial z} - \frac{y}{R} - D_1^{(1)}(\psi_2^{(1)}) + \right. \\
&\quad \left. + N_3(y, x) T_1^{(1)}(\psi_1^{(1)}) - N_2(y, x) T_1^{(1)}(\psi_2^{(1)}) - \frac{h-2z}{hR} \right. \\
&\quad \left. [x T_1^{(1)}(\psi_3^{(1)}) + \frac{y}{R} (x \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z})] \right\}; \\
N_1(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{R} [x(y^2 - x^2 + 2x\alpha - \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{(x+y)xy\beta}{R^2}) - \alpha]; \\
N_2(\alpha, \beta) &= 2\alpha\beta - \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\alpha^3\beta}{R^2}; \\
N_3(\alpha, \beta) &= \alpha^2 - \beta^2 (\frac{\alpha^2}{R^2} \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} + 1).
\end{aligned}$$

Таким образом, получена структура, описывающая довольно широкий класс задач для цилиндрического тела со свободными от нагрузок торцами и произвольной системой самоуравновешенных нагрузок, приложенных к боковой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р в а ч е в В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. — Киев, 1967. 2. Р в а ч е в В.Л., С л е с а р е н к о А.П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. — Киев, 1976.

УДК 532.135.001.5

А.Х.Ким, А.А.Ким

ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ НЕНЬЮТОНОВСКИХ СИСТЕМ

Обычно при реологических измерениях с помощью ротационных приборов полагают, что в процессе эксперимента реологические параметры не изменяются. Однако при больших скоростях деформации или при большой продолжительности опытов повышение температуры в системе может повлиять на результаты измерений. Как указано в [1], процесс может считаться изотермическим, если разность температур в начале и конце опыта не превышает $5-6^{\circ}$.

Применяемые в приборах разные системы термостатирования имеют целью поддержание постоянной температуры во внешней среде, но это не исключает локальное повышение температуры внутри системы.

Практически обработка экспериментальных данных, получаемых при переменной температуре в пределах одного опыта с учетом температурного фактора, не представляется возможной, так как зависимость искомых реологических параметров от температуры заранее не известна.

Методы определения температурной зависимости реологических параметров известны, но принимаемое на практике условие равенства температуры опыта и температуры окружающей среды или теплоносителя термостата требует уточнения.

Рассмотрим тепловой процесс в системе, подчиняющейся уравнению реологического состояния среды:

$$\tau = \tau_0 + \beta (\dot{\gamma})^n \quad (1)$$

при вискозиметрическом течении между двумя коаксиальными цилиндрами и скорости сдвига $|\dot{\gamma}| > 1$.

Уравнение энергии в общем виде

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \text{div} [K \text{ grad } T] + \Phi, \quad (2)$$

где ρ — плотность; C_p — теплоемкость; K — коэффициент теплопроводности; Φ — функция диссипации.

Рассмотрим одномерное движение системы, при котором

$$\begin{aligned} v_r = v_z = 0; \quad v_\theta = v_\theta(r); \\ T = T(r, t); \quad t - \text{время}. \end{aligned} \quad (3)$$

Допустим, что внешний цилиндр неподвижен, а внутренний — вращается.

Для этого случая функция $v_\theta(r)$ известна

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) < 0; \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad (4)$$

где R_1, R_2 — радиусы внешнего и внутреннего цилиндров.

Вследствие этого

$$\Phi(r) = -T_0 r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \beta \left| r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right|^{n+1}. \quad (5)$$

Тогда уравнение (2) можно переписать в виде

$$\nu \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \Phi(r), \quad (6)$$

где $\nu = \rho C_p$, $k = \text{const.}$

Представим функцию $T(r, t)$ в виде

$$T(r, t) = U_1(r, t) + U_2(r). \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial u_1(r, t)}{\partial t} = k \left[\frac{\partial^2 U_1(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1(r, t)}{\partial r} \right] + \\ + k \left[\frac{\partial^2 U_2(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_2(r)}{\partial r} \right] + \Phi(r). \end{aligned} \quad (8)$$

Это уравнение можно разбить на два уравнения:

$$k [U_2''(r) + \frac{1}{r} U_2'(r)] = -\Phi(r); \quad (9)$$

$$k \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right] = \nu \frac{\partial U_1}{\partial t}. \quad (9a)$$

Вначале рассмотрим уравнение (9).

Введем новую переменную

$$\lambda = \frac{r - R_1}{R_1},$$

где $0 \leq \lambda \leq \frac{R_2 - R_1}{R_1}$

и подставим в уравнение (9)

$$\frac{1}{R^2} \frac{d^2 U_2}{d\lambda^2} + \frac{1}{R^2(1+\lambda)} \frac{dU_2}{d\lambda} = -\frac{1}{\kappa} \Phi(\lambda). \quad (10)$$

Зазор между цилиндрами очень мал по сравнению с радиусом цилиндра $\Delta \ll R_1$. В этом случае функцию $\Phi_1(\lambda)$ можно разложить в ряд по степеням λ

$$\Phi_1(\lambda) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_{\kappa} \lambda^{\kappa}.$$

Тогда решение уравнения (9) можно представить в виде

$$U_2(\lambda) = C_1 \lg(1+\lambda) + C_2 + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_{\kappa} \lambda^{\kappa+2}. \quad (11)$$

Перепишем уравнение (9а) в виде

$$\xi \frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad (12)$$

где $\xi = \frac{\nu}{\kappa}$.

Решаем это уравнение методом Фурье. Тогда уравнения (12) можно переписать в виде

$$\xi \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)}. \quad (13)$$

Обозначим

$$\frac{\tau'}{\tau} = -\beta \text{ (const)} \quad (\beta > 0). \quad (14)$$

Откуда

$$\tau(t) = C e^{-\beta t}. \quad (15)$$

Уравнение (13) переписывается в виде

$$-\xi \beta R = R'' + \frac{1}{r} R' \quad (16)$$

или

$$R''r^2 + rR' + r^2\mu^2 R = 0, \quad (17)$$

где

$$\mu^2 = \xi \beta.$$

Это есть уравнение Бесселя. Его решением будет

$$R(r) = D I_0(\mu r) + E Y_0(\mu r), \quad (18)$$

где $I_0(\mu r)$ и $Y_0(\mu r)$ — функции Бесселя.

Тогда функцию температуры получим в виде

$$T(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} [D_k I_0(\mu_k r) + E_k Y_0(\mu_k r)] e^{-\beta_k t} + \\ + C_1 \lg(1+\lambda) + C_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lambda^{k+2}. \quad (19)$$

Принимая во внимание, что

$$r = R_1(1+\lambda),$$

перепишем (19) в виде

$$T(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} [D_k I_0(\mu_k r) + E_k Y_0(\mu_k r)] e^{-\beta_k t} + \\ + M_1 \lg r + M_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{r-R_1}{R_1} \right)^{k+2}. \quad (20)$$

Функция $T(r, t)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$1) T(R_2, t) = T_2(\text{const}). \quad (21)$$

Это условие означает, что благодаря термостатирующему устройству у внешнего цилиндра поддерживается постоянная температура T_2 .

У внутреннего цилиндра предполагается, что поток тепла равен нулю (адиабатический процесс), т.е.

$$2) \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} = 0. \quad (22)$$

Принимаем относительную температуру в начале опыта равной нулю.

$$3) T|_{t=0} = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим вначале второе граничное условие (22).

Продифференцируем равенство (20) по r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} = & \sum_{k=0}^{\infty} [D_k I_0'(\mu_k r) + E_k Y_0'(\mu_k r)] e^{-\beta_k t} + \frac{M_1}{r} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k (k+2)}{R_1} \left(\frac{r-R_1}{R_1} \right)^{k+1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для удовлетворения граничного условия (22) необходимо положить $M_1 = 0$;

$$D_k I_0'(\mu_k R_1) + E_k Y_0'(\mu_k R_1) = 0. \quad (25)$$

Температура у внешнего цилиндра должна быть постоянной, не зависящей от времени t . Значение этой температуры T_2 задано. Для осуществления этого условия в (20) все коэффициенты при $e^{-\beta_k t}$ нужно положить равными 0, а M_2 найдется из уравнения

$$T_2 = M_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1} \right)^{k+2}. \quad (26)$$

Таким образом, получаем второе уравнение

$$D_k I_0'(\mu_k R_2) + E_k Y_0'(\mu_k R_2) = 0. \quad (27)$$

Система уравнений (25) и (27) имеет ненулевое решение, если детерминант этой системы равен нулю

$$I_0'(\mu_k R_1) Y_0'(\mu_k R_2) - Y_0'(\mu_k R_1) I_0'(\mu_k R_2) = 0 \quad (28)$$

или

$$Y_1(\mu_k R_1) I_0(\mu_k R_2) - I_1(\mu_k R_1) Y_0(\mu_k R_2) = 0. \quad (29)$$

Это выражение является характеристическим уравнением. Оно имеет бесконечное множество корней $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$. Все корни вещественны и положительны.

Из (25) имеем

$$E_k = \frac{D_k I_0'(\mu_k R_1)}{Y_0'(\mu_k R_1)}. \quad (30)$$

Тогда (20) можно переписать в следующем виде:

$$T(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k V(\mu_k r) \exp(-\beta_k t) + M_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{r-R_1}{R_1} \right)^{k+2}, \quad (31)$$

где

$$A_k = \frac{D_k}{Y_1(\mu_k R_1)}. \quad (32)$$

$$V(\mu_k r) = I_0(\mu_k r) Y_1(\mu_k R_1) - Y_0(\mu_k r) I_1(\mu_k R_1). \quad (33)$$

Теперь рассмотрим третье условие (23):

$$T|_{t=0} = 0.$$

Подставляя это условие в (31), найдем

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k V(\mu_k r) = M_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{r-R_1}{R_1} \right)^{k+2}. \quad (34)$$

Функции $I_0(\mu_k r)$ и $Y_0(\mu_k r)$ являются линейно-независимыми решениями уравнения Бесселя. Поэтому линейная комбинация их также является решением уравнения Бесселя. Вследствие этого функции $V(\mu_k r)$ с весом $g(r) = 0$ обладают свойством ортогональности в интервале от 0 до R_2 .

Покажем это

$$V''(\mu_k r) + \frac{V'(\mu_k r)}{r} + \mu_k^2 V(\mu_k r) = 0; \quad (35)$$

$$V''(\mu_m r) + \frac{V'(\mu_m r)}{r} + \mu_m^2 V(\mu_m r) = 0. \quad (36)$$

Уравнение (35) помножим на $r V(\mu_m r)$, а уравнение (36) — на $r V(\mu_k r)$ и из первого вычтем второе:

$$\begin{aligned} r V(\mu_m r) V''(\mu_k r) - r V(\mu_k r) V''(\mu_m r) + V(\mu_m r) V'(\mu_k r) - \\ - V(\mu_k r) V'(\mu_m r) + (\mu_k^2 - \mu_m^2) V(\mu_m r) r = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Уравнение (37) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \left[V(\mu_m r) \frac{dV(\mu_k r)}{dr} - V(\mu_k r) \frac{dV(\mu_m r)}{dr} \right] \right\} +$$

$$+ (\mu_k^2 - \mu_m^2) \int_0^{R_2} r V(\mu_m r) V(\mu_k r) dr = 0. \quad (38)$$

Интегрируя уравнения (38) в пределах от 0 до R_2 , получим

$$\left\{ r \left[V(\mu_m r) \frac{dV(\mu_k r)}{dr} - V(\mu_k r) \frac{dV(\mu_m r)}{dr} \right] \right\}_0^{R_2} +$$

$$+ (\mu_k^2 - \mu_m^2) \int_0^{R_2} r V(\mu_m r) V(\mu_k r) dr = 0. \quad (39)$$

Согласно (29), функции $V(\mu_k R_2)$ и $V(\mu_m R_2)$ равны 0, так как μ_k и μ_m являются корнями этого уравнения.

Функции $rI_0(\mu_k r)$ и $rI_0(\mu_m r)$ при $r=0$ тоже равны нулю. Поэтому $rV(\mu_k r)$ при $r=0$ равняются нулю. Кроме того, $\mu_k^2 \neq \mu_m^2$. Вследствие этого

$$\int_0^{R_2} r V(\mu_k r) V(\mu_m r) dr = 0. \quad (40)$$

Из (40) следует, что выражение правой части (34)

$$- \left[M_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{r-R_1}{R_1} \right)^{k+2} \right] \quad (41)$$

можно разложить в ряд по функциям $V(\mu_k r)$. Коэффициенты разложения определяются по формуле

$$A_k = - \frac{\int_0^{R_2} r \left[M_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{r-R_1}{R_1} \right)^{k+2} \right] V(\mu_k r) dr}{\int_0^{R_2} V^2(\mu_k r) r dr}. \quad (42)$$

Таким образом, получено решение задачи, удовлетворяющее всем граничным условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. — М., 1967.

К ВОПРОСУ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КАРКАСА ОБОЛОЧКИ СО СЛУЧАЙНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ВЕРШИНАМИ

Известно, что обтекатели больших размеров конструктивно выполняются в виде каркасированных оболочек. Поскольку каркас изготавливается из металла, то существенным для прохождения излучения являются эффекты рассеивания и искажения диаграммы направленности.

Поэтому важным представляется характер распределения элементов каркаса по поверхности обтекателя, так как при случайном равномерном распределении элементов каркаса по поверхности сферы в раскрыве системы результирующий эффект помех, вызываемых металлическим каркасом, пренебрежительно мал [1].

В предлагаемой работе на примере сферической оболочки излагается методика раскрыя поверхности оболочек вращения на треугольные подобласти, вершины которых могут быть приняты за вершины каркаса со случайным равномерным распределением элементов по заданной поверхности.

В первую очередь для решения задачи необходимо получить требуемое распределение случайных величин в заданной области. Существуют различные методы извлечения выборки из заданной плотности распределения [2,3]. Остановимся на методе инверсий, который для двумерной случайной величины можно сформулировать так. Пусть плотность распределения $f(x_1, x_2)$ – функция двух действительных переменных. Требуется построить последовательность двумерных векторов $(t_1^{(1)}; t_2^{(1)}; (t_1^{(2)}, t_2^{(2)}; \dots$ такую, что

$$P\{(t_1^{(j)}, t_2^{(j)}) \in B_n\} = \iint_{B_n} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\text{и } P\{(t_1^{(j_1)}, t_2^{(j_1)}) \dots (t_1^{(j_N)}, t_2^{(j_N)}) \in B_n\} = [\iint_{B_n} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2]^N.$$

Здесь B_n – любое множество, такое, что интеграл в правой части существует; $P\{t \in B_n\}$ – вероятность того, что вектор t принадлежит B_n .

Рассмотрим два уравнения:

$$F_1(x_1) = \rho_1; \quad F_2(x_2/x_1) = \rho_2,$$

где $F_1(x_1)$ – частная функция распределения; $F_2(x_2/x_1)$ – условная функция распределения; ρ_1, ρ_2 – независимые, равномерно распределенные случайные числа.

Вводя функции

$$\varphi_1(\rho_1) = \sup x_1; \quad \varphi_2(\rho_2/x_1) = \sup x_2;$$

$$F_1(x_1) < \rho_1; \quad F_2(x_2/x_1) < \rho_2$$

и беря пару равномерно распределенных чисел (ρ_1, ρ_2) , вычислим $t_1 = \varphi_1(\rho_1)$; $t_2 = \varphi_2(\rho_2/t_1)$. Тогда вектор (t_1, t_2) будет выборочным значением случайной величины с плотностью распределения $f(x_1, x_2)$. Пусть, например, необходимо осуществить выборку "точек", равномерно распределенных по части единичной сферы:

$$0 \leq \theta \leq \alpha; \quad 0 \leq \varphi \leq \beta.$$

Здесь θ, φ — сферические координаты. Тогда в принятой системе координат для дифференциала функции распределения получим

$$dF(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{(1 - \cos \alpha)\beta},$$

т.е. плотность распределения будет

$$f(\theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \alpha)\beta} & 0 \leq \theta \leq \alpha; \\ & 0 \leq \varphi \leq \beta; \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Выбирая пару случайных чисел (ρ_1, ρ_2) , равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$, получим в соответствии с (1) два уравнения, определяющих точки (θ_i, φ_i) :

$$F_1(\theta) = \int_0^\theta \int_0^\beta \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \alpha)\beta} d\theta d\varphi = \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \alpha} = \rho_1;$$

$$F_2(\varphi/\theta) = \int_0^\varphi \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \alpha)\beta} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \theta} d\varphi = \frac{\varphi}{\beta} = \rho_2.$$

Откуда

$$\theta_i = \arccos [1 - \rho_1^{(i)} (1 - \cos \alpha)]; \quad \varphi_i = \beta \rho_2^{(i)}. \quad (2)$$

Выборку (θ_i, φ_i) необходимо получить достаточно представительной с тем, чтобы обеспечить не только хорошее соответствие критерию согласия, но также исходя из конструкции требуемой задачи раскрыя поверхности.

Итак, пусть имеется представительная выборка, такая, что при разбиении заданной поверхности на n непересекающихся подобластей S_i в каждую из них попало достаточное число точек $(\theta_{ji}, \varphi_{ji})$.

Следовательно, вся выборка будет разбита на группы. Представителем каждой такой группы выберем точку, координатами которой будут первые моменты

$$m_{x_i}^{r_1} y^{r_2} = \iint_{S_i} x^{r_1} y^{r_2} f(x, y) dx dy; \quad (r_1 + r_2 = 1). \quad (3)$$

Очевидно, что покрыв равномерно заданную поверхность одинаковыми непересекающимися подобластями и сгруппировав исходную выборку указанным образом, получим выборку точек, также равномерно распределенных по поверхности. Однако по отношению к исходной данная выборка обладает важным свойством:

для каждой точки $(\theta_{j_i}, \varphi_{j_i})$ можно сразу указать точки, принадлежащие подобластям, окружающим данную точку, причем этих точек будет всегда фиксированное число, определенное структурой покрытия подобластями S_i . Это покрытие, например, для полусферы выполним следующим образом. Пометим на ее поверхности меридиональные линии через каждые $\varphi_n = \frac{2\pi}{n}$ рад. Считая две соседние линии направляющими, проведем через них цилиндрические поверхности; тем самым образуем купол, вписанный в полусферу, причем очевидно, что, выбирая n достаточно большим, получим сколь угодно близкое приближение к полусфере. Разрезая ку-

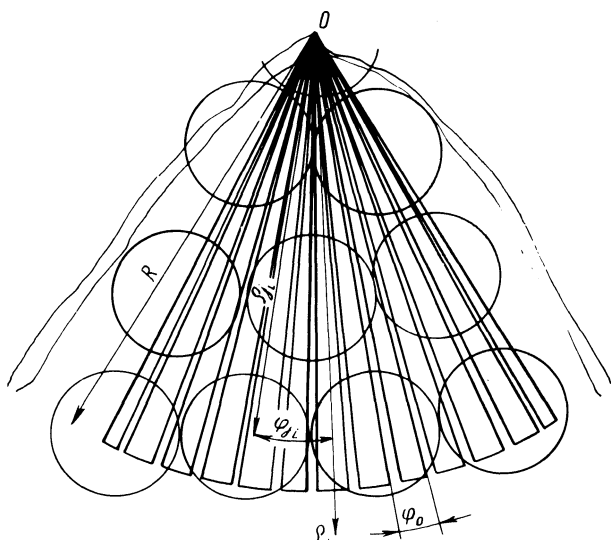


Рис. 1. Лепестковая развертка части сферического купола.

пол по указанным меридиональным линиям, получим развертку купола в виде плоской лепестковой фигуры (рис. 1). Внешний радиус этой фигуры обозначим через R . Для сферы единичного радиуса и при $n > N$, где N — достаточно большое число, можно принять $R = \frac{\pi}{2}$. Сравнивая площади круга радиуса $R = \frac{\pi}{2}$, т.е. $S_R = \frac{1}{4} \pi^3$, и полусферы единичного радиуса $S_{п.с}$, получим, что лепестковая развертка покрывает 81% площади плоского круга. Пустоты — части круга радиуса $R = \frac{\pi}{2}$, не покрытые лепестковой разверткой, распределены равномерно по координате φ и неравномерно по координате θ сферической оболочки. Если покрыть равномерно развертку малыми кругами, соблюдая требуемую структуру, а затем "склеить" ее в купол, то обнаружим, что круги на экваторе "сожмутся" в широтном направлении, а чем ближе к полюсу $\theta \rightarrow 0$, это "сжатие" будет уменьшаться до нуля в зависимости от радиуса кругов покрытия. Следовательно, будет реализовано покрытие неравными подобластями. Для того чтобы области были равновелики, радиусы кругов покрытия на плоскости должны увеличиваться при удалении их от полюса. С учетом отмеченного процента пустот радиусы кругов покрытия в первом приближении будут

$$r_{j_i}^{(k)} = r_+^{(0)} \sqrt{\frac{\sin \rho_{j_i}^{(0)}}{\rho_{j_i}^{(0)}} \frac{\rho_{j_i}^{(k-1)}}{\sin \rho_{j_i}^{(k-1)}}}. \quad (4)$$

Здесь k — номер итерации; j_i — номер круга в i -м слое (считаем круг в полюсе, принадлежащем нулевому слою); r_{j_i} — радиус j_i -го круга; ρ_{j_i} — расстояние до центра j_i -го круга; $\rho_{j_i}^{(0)}$ — расстояние до центра базового круга, базовой площади $\pi(r_+^0)^2$ (индекс нуль соответствует покрытию плоского круга).

Координаты $(\rho_{j_i}^{(k)}, \varphi_{j_i}^{(k)})$ вычисляются по формулам:

$$\rho_{j_i}^{(k)} = r_{j_i}^{(k)} \sqrt{3i^2 + j_i^2}; \quad \varphi_{j_i} = \arctg \frac{j_i}{i\sqrt{3}}.$$

Относительно индекса j_i следует сделать замечание: номер круга со знаком в i -м слое отсчитываем от оси симметрии области (против часовой стрелки берем с полюсом). В нечетном слое номера — нечетные $\pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots$. В четном — четные $0, \pm 2, \pm 4 \dots$

Таблица 1

i	0	1	2	3		
j	0	± 1	0	± 2	± 1	± 3
$\rho_j^{(0)}$	0	0,2244	0,3887	0,0488	0,5937	0,6773
$\varphi_{ji}^{(0)}$	полюс	$\pm 0,5236$	0	$\pm 0,5736$	$\pm 0,1911$	$\pm 0,5236$
r_{ji}^1	0,0899	0,0899	0,0907	0,0910	0,0922	0,0931
$\rho_{ji}^{(1)}$	0	0,1798	0,3140	0,3642	0,4880	0,5584
θ_i	0,2	0,2213	0,3784	0,4569	0,5084	0,6568
φ_i		0,2070		0,4741	0,5997	0,6497
		+0,6283	0,0345	0,4712	0,4014	0,5934
		-0,4364		-0,5759	-0,4221	-0,4363
$\rho_j^{(0)}$	1,1660	1,1874	1,2454	1,3463	1,3650	1,4013
$\varphi_{ji}^{(0)}$	0	$\pm 0,1901$	$\pm 0,3674$	$\pm 0,5236$	$\pm 0,080$	$\pm 0,2430$
$r_{ji}^{(1)}$	0,1008	0,1012	0,1027	0,1052	0,1057	0,1067
$\rho_{ji}^{(1)}$	1,0478	1,0720	1,1439	1,2624	1,2860	1,3332
θ_i	1,2352	1,1281	1,1995	1,3352	1,3923	1,3566
		1,1852	1,2280	1,3566	1,3851	1,4351
φ_i	0	0,1919	0,3316	0,4363	0,0872	0,4014
		0,1919	0,3665	0,5759	0,0872	0,2094

Применение методики рассмотрим на примере. Положим в (2) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, т.е. ограничимся третьей частью полусферы. Используя формулы (4) и (5), покроем исходную область равномерно распределенными непересекающимися областями равной площади. Лепестковая развертка в этом случае будет покрыта кругами, радиус которых увеличивается с удалением от полюса (рис. 1). Используя таблицу равномерно распределенных случайных чисел, например [4], по формулам (2) получим выборку (θ_i, φ_i) . Вычисляем для каждой подобласти S_j моменты по формулам (4) и принимаем их за координаты вершин каркаса. Соединяя каждую вершину с вершинами в областях, примыкаемых к рассматриваемой,

4			5		
0	+2	± 4	± 1	± 3	± 5
0,0777	0,8091	0,8996	0,9781	1,0283	1,1220
0	$\pm 0,2810$	$\pm 0,5236$	$\pm 0,1150$	$\pm 0,3334$	$\pm 0,5236$
0,0942	0,0946	0,0959	0,0972	0,0981	0,0999
0,6526	0,6826	0,7880	0,8474	0,8991	0,999
0,7497	0,8211	0,8567	0,9996	0,9924	1,0781
	0,8282	0,8282	0,9496	1,0781	1,0924
0,0349	0,2967	0,5934	0,1221	0,2967	0,4886
	-0,2792	-0,4263	-0,1221	-0,3491	-0,5585
1,4715	1,5708	1,5567	1,5708	1,6182	1,6942
$\pm 0,3511$	$\pm 0,5236$	0	$\pm 0,1433$	$\pm 0,2810$	$\pm 0,4086$
0,1089	0,1122	0,1116	0,1122	0,1139	
1,4277	1,5708	1,5468	1,5708	1,6430	
1,4922	1,5208	1,5779	1,5779		
1,4351	1,5065		1,5708		
0,3665	0,541	0,0174	0,1221		
0	0,4537		0,1396		

мой, получим нерегулярную решетку из случайных элементов, равномерно распределенных по заданной области.

Результаты расчета приведены в табл. 1. Здесь принято

$$i = 7; j_+ = 0; r_+^0 = 0,1122.$$

На рис. 2 изображена полученная часть каркаса.

Областью сферы, из которой производится выборка, может быть вся поверхность оболочки. Однако в этом нет не только необходимости, но и целесообразности. В зависимости от раскрытия антенны и требований стандартизации и унификации элементов эта область может быть частью поверхности оболочек, которую впредь будем называть модулем. Если на модуле каркас "органи-

зован”, то каркас на всей оболочке может быть получен ”отражением” модуля на остальную поверхность оболочки. Так, в рассматриваемом случае модуль представляет собой треть полусферы.

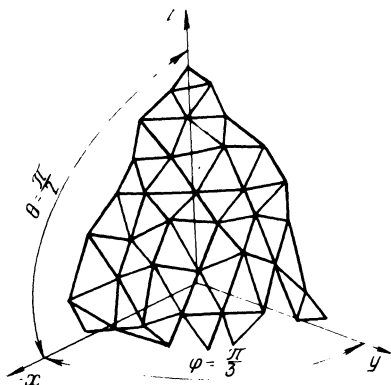


Рис. 2. Схема части каркаса с равномерным случайным размещением вершин.

Тогда, полагая координаты $(\theta_i; \varphi_i + \frac{\pi}{3})$ и $(\theta_i; \varphi_i + \frac{2}{3}\pi)$, получим координаты вершин в остальных двух третях.

Для отражения на нижнюю полусферу надо положить координаты: $(\pi - \theta_i, \varphi_i)$; $(\pi - \theta_i, \varphi_i + \frac{\pi}{3})$; $(\pi - \theta_i, \varphi_i + \frac{2}{3}\pi)$. Совершенно аналогично могут быть ”раскроены” и другие оболочки вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сканирующие антенные системы СВЧ /Под ред. Г.Т.Маркова, А.Ф. Чаплина. — М., 1966.
2. Кендал А.Ж., Стюарт А. Теория распределений. — М., 1966.
3. Спанье Д.Ж., Гелбард Э. Метод Монте-Карло в задаче переноса нейтронов. — М., 1971.
4. Кадыров М. Таблицы случайных чисел. — Ташкент, 1936.

УДК 621.85.01

О.С.Баршай

К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ РАСТЯЖИМОЙ НИТИ ПО ШКИВУ*

Рассматривается нестационарное движение гибкой растяжимой нити, взаимодействующей со шкивом, периферия которого обладает сдвиговыми свойствами. Дан вывод уравнения, приве-

* Выполнена под руководством канд.техн.наук М.А.Левина.

денного в [1] и описывающего нестационарное движение нити на основе подхода, развитого в [2–4]. Показано, что существует аналогия в описании движения нити по шкиву и качения деформируемого колеса. В связи с этим ряд результатов, касающихся динамики нити, взаимодействующей со шкивом, вытекает из описания движения катящегося деформируемого колеса в простейшем случае, т.е. при ограниченном числе степеней свободы в сравнении со случаем, рассмотренным в [3,4].

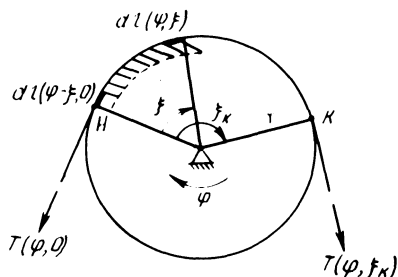


Рис. 1.

Рассмотрим нестационарное движение нити при отсутствии проскальзывания по дуге обхвата ξ_K (рис. 1). Обозначим угол поворота шкива φ , а угловую координату точки на периферии шкива — ξ . За начало отсчета ξ примем точку набегания нити на шкив. Рассмотрим некоторый элемент нити dl . В каждый момент времени, которому соответствует определенный угол поворота шкива φ , длина элемента dl определяется этим углом φ и углом ξ на дуге обхвата, т.е. $dl = dl(\varphi, \xi)$. В момент, когда этот элемент находился в точке набегания, было $dl = dl(\varphi - \xi, 0)$, так как тогда угол поворота шкива был равен $\varphi - \xi$. Поскольку проскальзывание нити по шкиву отсутствует, изменение относительного удлинения элемента нити $\frac{dl(\varphi, \xi) - dl(\varphi - \xi, 0)}{dl(\varphi - \xi, 0)}$ будет

равно изменению относительного удлинения соответствующего элемента периферии шкива. Тогда

$$\frac{1}{EF} [T(\varphi, \xi) - T(\varphi - \xi, 0)] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \lambda(\varphi, \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial \lambda(\varphi - \xi, 0)}{\partial \xi} \right], \quad (1)$$

где E — модуль Юнга для нити; F — площадь сечения нити; T — натяжение нити; λ — перемещение периферии шкива; r — радиус шкива.

Если обозначить сдвиговую жесткость периферии шкива c , а касательное усилие на единицу длины — τ , то легко показать, что $\lambda = \frac{1}{cr} \frac{\partial T(\varphi, \xi)}{\partial \xi}$.

Отметим, что при выводе уравнения (1) и последующих соотношений используются известные зависимости

$$\epsilon = \frac{T}{EF} = \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \xi} = c \lambda,$$

где ϵ — относительное удлинение нити.

Таким образом уравнение (1) примет вид

$$\mu^2 [T(\varphi, \xi) - T(\varphi - \xi, 0)] = \frac{\partial^2 T(\varphi, \xi)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 T(\varphi - \xi, 0)}{\partial \xi^2}, \quad (2)$$

где $\mu^2 = \frac{cr^2}{EF}$.

Возможна более компактная форма записи

$$\left[\frac{\partial^2 T(\varphi, \xi)}{\partial \xi^2} - \mu^2 T(\varphi, \xi) \right] \Big|_{\varphi-\xi, 0}^{\varphi, \xi} = 0. \quad (3)$$

Имеем следующие условия к уравнению (3):

$$T(\xi) \Big|_{\xi=0} = T_H; \quad T(\xi) \Big|_{\xi=\xi_K} = T_K; \quad \frac{dT(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad (4)$$

где T_H — натяжение в набегающей ветви; T_K — в сбегающей. Последнее условие объясняется тем, что в точке набегания нити на шкив сдвиговой слой не напряжен, и $\lambda(0) = 0$.

Уравнение (2) можно также представить в виде

$$\frac{\partial^2 T(\varphi, \xi)}{\partial \xi^2} - \mu^2 T(\varphi, \xi) = L(\varphi - \xi). \quad (5)$$

Очевидно, что частное решение имеет вид $\psi(\varphi - \xi)$, а решение однородного уравнения можно представить в виде произведения $F(\varphi) \Phi(\xi)$. В результате решение уравнения (5) оказывается следующим:

$$T(\varphi, \xi) = F_1(\varphi) e^{\mu \xi} + F_2(\varphi) e^{-\mu \xi} + \psi(\varphi - \xi). \quad (6)$$

Используя граничные условия (4), получим систему уравнений, приведенную в [5]:

$$\left. \begin{aligned} T_H(\varphi) &= F_1(\varphi) + F_2(\varphi) + \Psi(\varphi); \\ T_K(\varphi) &= F_1(\varphi)e^{\mu\xi_K} + F_2(\varphi)e^{-\mu\xi_K} + \Psi(\varphi - \xi_K); \\ F_1(\varphi) - F_2(\varphi) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi(\varphi)}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Выразив из уравнений (7) $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$, после введения обозначений $a = \mu / \operatorname{th}(\mu \xi_K)$; $b = \mu / \operatorname{sh}(\mu \xi_K)$; $R(\varphi) = T_K(\varphi)b - T_H(\varphi)a$ получим уравнение для Ψ , совпадающее с приведенным в [5]:

$$R(\varphi) = \frac{\partial \Psi(\varphi)}{\partial \varphi} - \Psi(\varphi)a + \Psi(\varphi - \xi_K)b = 0 \quad (8)$$

По структуре уравнение (8) совпадает с уравнением (12) в работе [2] и является частным случаем уравнений (1.3), (1.11), приведенных в [3], при $u_3 = 0$. Что касается уравнения (4) в [1], то оно в точности совпадает с уравнением на с. 25 в работе [2]. Таким образом, и соответствующие частотные характеристики в функции кинематической частоты также оказываются аналогичными.

Заметим, что уравнения движения нити по шкиву в сравнении, например, с уравнениями, приведенными в [3,4], являются более простыми, так как оказываются эквивалентными по сложности случаю качения колеса в своей срединной плоскости при постоянном z_C . При этом не приходится сталкиваться с нелинейными эффектами и необходимостью учитывать "большие" деформации в области контакта катящегося колеса.

Очевидно, что по аналогии с работами [3,4] легко получить уравнения более низкого порядка по типу уравнений М.В.Келдыша с использованием метода достаточно больших кинематических параметров и скоростей, предложенного Ю.И.Неймарком и Н.А.Фуфаевым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баршай О.С., Левин М.А. Нестационарное движение гибкой нити, взаимодействующей со шкивом. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1979, вып. 6.
2. Левин М.А. Новая теория бокового увода колеса, приводящая к интегрально-разностным или дифференциально-разностным уравнениям. — В сб.: 25 науч.-техн. конф. БПИ: Материалы секции теоретической и прикладной механики. Минск, 1969.
3. Левин М.А. Некоторые результаты исследования реакций связей деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1973.
4. Левин М.А. Пониже-

ние порядка зависимостей для реакций связей катящегося деформируемого колеса. — "ДАН БССР", 1974, № 6, т. 18. 5. О ч а н М.Ю., Р о ж к о в В.И. Исследование нестационарного режима и устойчивости движения нити при передаче окружного усилия. — В сб.: Механика машин, 1978, вып. 53.

УДК 531.325.531.355

Л.К.Рапинчук

ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рабочие органы многих сельскохозяйственных машин представляют собой сочетание двух пересекающихся поверхностей, подвижных или неподвижных друг относительно друга. Например, диск с жестко укрепленной на нем лопаткой в центробежном разбрасывателе, шнек, представляющий собой сочетание геликоида и цилиндра.

Пусть уравнения поверхностей заданы в ортогональных декартовых системах координат, жестко связанных с поверхностями:

$$\psi_I(x_I^j) = 0 \quad \text{и} \quad \psi_{II}(x_{II}^j) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Римскими индексами I и II будем обозначать объекты, принадлежащие соответственно первой или второй поверхности и жестко связанным с ними координатным системам. Объекты, у которых отсутствуют римские индексы, будем считать принадлежащими обоим поверхностям или любой из них.

Координаты неподвижной (абсолютной) системы выражаются через координаты подвижных (относительных) систем равенствами

$$\begin{aligned} X^i &= X_{I0}^i + \alpha_{Ij}^i x_I^j; \\ X^i &= X_{II0}^i + \alpha_{IIj}^i x_{II}^j, \end{aligned} \quad (2)$$

где X_{I0}^i , X_{II0}^i — координаты начала координат относительных систем в абсолютной; α_{Ij}^i и α_{IIj}^i — коэффициенты преобразований координат.

Равенства (2) записаны с использованием соглашения о суммировании, применяемого в тензорном исчислении [1], согласно которому суммирование производится по двум одинаковым индексам, называемыми немymi. Индексы объектов во внешнем трехмерном пространстве будем обозначать малыми латинскими

буквами, на поверхности — греческими. Таким образом, всякий немой (повторяющийся) малый латинский индекс означает суммирование от 1 до 3, греческий — от 1 до 2. Свободные (неповторяющиеся) малые латинские индексы пробегает значение от 1 до 3, греческие — от 1 до 2. В дальнейшем вышесказанное предполагается, если не будет особых оговорок относительно индексов.

Выразим относительные координаты через абсолютные:

$$\begin{aligned}x_I^j &= (X^i - X_{I0}^i) \tilde{\alpha}_{Ii}^j ; \\x_{II}^j &= (X^i - X_{II0}^i) \tilde{\alpha}_{IIi}^j ,\end{aligned}\tag{3}$$

где $\tilde{\alpha}_{Ii}^j$, $\tilde{\alpha}_{IIi}^j$ — коэффициенты обратных преобразований, определяемых для ортогональных декартовых координат равенствами [2]:

$$\tilde{\alpha}_i^j = \alpha_j^i .\tag{4}$$

Координаты X_{I0} и X_{II0} и коэффициенты $\tilde{\alpha}_{Ii}^j$ и $\tilde{\alpha}_{IIi}^j$ являются функциями времени. Поэтому, подставив значения координат из равенств (3) в уравнение (1), получим

$$\left. \begin{aligned}\psi_I(X^i, t) &= 0 ; \\ \psi_{II}(X^i, t) &= 0 .\end{aligned} \right\}\tag{5}$$

Система (5) определяет линию пересечения поверхностей.

Введем параметризацию

$$X^i = X^i(\eta, t),\tag{6}$$

превращающую равенство (5) в тождества. Тогда равенства (6) будут представлять собой уравнение линии пересечения двух поверхностей в параметрической форме. X^i можно рассматривать и как координаты материальной точки, находящейся на линии пересечения поверхностей. Дифференцируя дважды по времени, получим проекции скорости и ускорения материальной точки:

$$\begin{aligned}\dot{X}^i &= \frac{\partial X^i}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial X^i}{\partial t} ; \\ \ddot{X}^i &= \frac{\partial X^i}{\partial \eta} \ddot{\eta} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta^2} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta \partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2} .\end{aligned}\tag{7}$$

Приняв параметр η за обобщенную координату, запишем уравнение движения материальной точки по линии пересечения двух поверхностей в форме уравнения Лагранжа второго рода [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial (T+U)}{\partial \eta} = Q, \quad (8)$$

где T – кинетическая энергия материальной точки; U – потенциал силовой функции гравитационного поля; Q – обобщенная сила;

$$T = \frac{m}{2} \dot{X}^i \dot{X}^i;$$

$$U = m g_0 \alpha_0^i X^i, \quad (9)$$

где m – масса точки; g_0 – модуль ускорения свободного падения тел; α_0^i – направляющие косинусы силы тяжести в осях абсолютной системы координат.

Найдя частные производные от кинетической энергии и потенциала по обобщенным координате и скорости, подставим их в уравнение (8). Производя дифференцирование и приведение подобных, получим

$$m \left(\frac{\partial X^i}{\partial \eta} \ddot{\eta} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta^2} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta \partial t} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2} - g_0 \alpha_0^i \right) \frac{\partial X^i}{\partial \eta} = Q. \quad (10)$$

Найдем частные производные от координат линии по обобщенной координате, дифференцируя обе части равенств (2) и считая X_0^i и α_j^i зависящими только от времени, а x^j как от времени, так и от обобщенной координаты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^i}{\partial \eta} &= \alpha_j^i \frac{\partial x^j}{\partial \eta} = \alpha_j^i \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta^2} &= \alpha_j^i \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial q^\sigma \partial q^\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta} + \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial \eta^2} \right); \\ \frac{\partial^2 X^i}{\partial \eta \partial t} &= \dot{\alpha}_j^i \frac{\partial x^j}{\partial q} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} + \alpha_j^i \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial q^\sigma \partial q^\tau \partial \eta} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial t} + \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial \eta \partial t} \right); \\ \frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2} &= \ddot{X}_0^i + \ddot{\alpha}_j^i x^j + 2 \dot{\alpha}_j^i \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} \frac{\partial q^\sigma}{\partial t} + \\ &+ \alpha_j^i \left(\frac{d^2 x^j}{\partial q^\sigma \partial q^\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial t} \frac{\partial q^\tau}{\partial t} + \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial t^2} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где q^σ – внутренние координаты поверхности, координаты местных (локальных) двумерных базисов, выбор которых определяется тем, что параметризация $x^j = x^j(q^\sigma)$ превращает уравнения (1)

в тождества; $q^{\sigma} = \tilde{q}^{\sigma}(\eta, t)$ – уравнение линии пересечения поверхностей в параметрической форме во внутренних координатах местных (локальных) базисов поверхностей, первой или второй.

Подставив частные производные из равенств (11) в уравнение (10), найдя их свертки с $\frac{\partial x^i}{\partial \eta}$ и произведя преобразования, получим:

$$\begin{aligned} m \left\{ g_{\sigma\tau} \left[\frac{\partial q^{\sigma}}{\partial \eta} \ddot{\eta} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \left(\frac{\partial q^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial t} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial t} \right) + \right. \right. \\ \left. + 2 \omega^b_{d\sigma} \left(\frac{\partial q^d}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q^d}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 q^{\sigma}}{\partial \eta^2} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial^2 q^{\sigma}}{\partial \eta \partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial^2 q^{\sigma}}{\partial t^2} \right] + (\ddot{x}^i_0 + \ddot{x}^i_j - g_0 \alpha^i_0) \times \\ \left. \times \alpha^i_k \frac{\partial x^k}{\partial q^{\tau}} \right\} \frac{\partial q^{\tau}}{\partial \eta} = Q, \end{aligned} \quad (12)$$

где $g_{\sigma\tau} = \frac{\partial x^j}{\partial q^{\sigma}} \frac{\partial x^j}{\partial q^{\tau}}$ – первый, метрический, тензор поверхности;

$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = g^{\sigma\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^j}{\partial q^{\lambda} \partial q^{\mu}}$ – коэффициент связности внутренней гео-

метрии поверхностей, символы Кристоффеля второго рода; $g^{\sigma\alpha} = \frac{G^{\sigma\alpha}}{g}$ – тензор, взаимный метрическому; g – определитель метрического тензора; $G^{\sigma\alpha}$ – алгебраическое дополнение элемента метрического тензора $g_{\sigma\alpha}$ в определителе $|g_{\sigma\alpha}|$; $d^{\sigma}_\alpha = \pm e^{\sigma}_\alpha \cdot n^1$ –

контравариантный тензор во внешнем пространстве и ковариантный тензор на поверхности; $n^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial x^j}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial q^2} - \frac{\partial x^k}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial q^2} \right) -$

координаты единичного вектора в относительной системе координат (j, k, l – циклическая перестановка чисел 1, 2, 3); верхний знак плюс соответствует случаю, когда единичный вектор нормали образует правый репер с координатными векторами местного базиса (это правило имеет место для всех коэффициентов, знаки которых зависят от ориентации местного базиса); $\dot{e}^1_1 =$

$= -\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}$; $\dot{e}^1_2 = -\frac{g^{22}}{\sqrt{g}}$; $\dot{e}^2_1 = \frac{g_{11}}{\sqrt{g}}$; $\dot{e}^2_2 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g}}$ – компоненты

тензора на поверхности; $\omega^l = \dot{\alpha}^i_l \alpha^i_k$ – координаты вектора угловой скорости (j, k, l – циклическая перестановка чисел 1, 2, 3).

Обобщенную силу определим из выражения элементарных работ на виртуальном перемещении δs точки, приняв во внимание лишь непотенциальные силы, т.е. силы трения. Тогда

$$\delta A = -(F_{\text{трI}} \cos \varepsilon_I + F_{\text{трII}} \cos \varepsilon_{II}) \delta s = -(F_{\text{трI}} \cos \varepsilon_I + F_{\text{трII}} \cos \varepsilon_{II}) \sqrt{g_{\sigma\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta}} \delta \eta, \quad (13)$$

где $F_{\text{трI}}, F_{\text{трII}}$ — тангенциальные составляющие реакций поверхностей, силы трения; $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$ — углы между касательной к линии пересечения поверхностей и направлениями относительных перемещений точки по поверхностям (рис. 1).

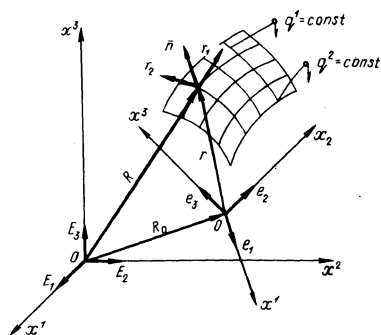


Рис. 1. Схема действия реакций поверхностей на материальную точку.

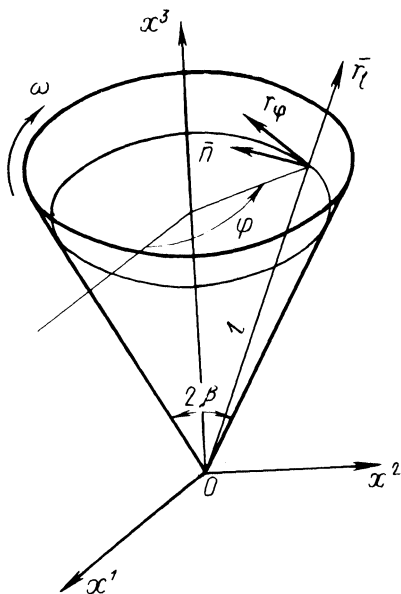


Рис. 2. Диск с криволинейной лопаткой.

Выражение, стоящее перед обобщенным виртуальным перемещением и будет обобщенной силой.

$$Q = -(F_{\text{трI}} \cos \varepsilon_I + F_{\text{трII}} \cos \varepsilon_{II}) \sqrt{g_{\sigma\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta}}. \quad (14)$$

Скорость точки в относительном перемещении ее по поверхности

$$\mathbf{v} = \dot{q}^{\sigma} \bar{\mathbf{r}}_{\sigma} = \left(\frac{\partial q^{\sigma}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial t} \right) \bar{\mathbf{r}}_{\sigma}, \quad (15)$$

где $\bar{\mathbf{r}}_{\sigma}$ — координатные векторы локальных базисов поверхностей.

Единичный вектор касательной к линии пересечения поверхностей

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{dq^{\sigma} \bar{\mathbf{r}}_{\sigma}}{|dq^{\sigma} \bar{\mathbf{r}}_{\sigma}|} = \frac{\frac{\partial q^{\sigma}}{\partial \eta}}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial \eta}}} \bar{\mathbf{r}}_{\sigma}. \quad (16)$$

Тогда

$$\cos \varepsilon = \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}} \bar{\mathbf{v}}}{|\bar{\mathbf{v}}|} = \frac{g_{\sigma\tau} \left(\frac{\partial q^{\sigma}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial t} \right) \frac{\partial q^{\tau}}{\partial \eta}}{\sqrt{g_{\alpha\rho} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial \eta} \frac{\partial q^{\rho}}{\partial \eta}} \sqrt{g_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial q^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial t} + \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial t} \frac{\partial q^{\mu}}{\partial t} \right)}}. \quad (17)$$

Спроектируем все силы, действующие на материальную точку, на направление нормалей к поверхностям.

$$\left. \begin{aligned} N_I + N_{II} \cos \gamma - F_{II} \cos \varphi_{II} &= m (\ddot{X}^i - g_0 \alpha^i_0) \alpha^i_{Ij} n^j_I; \\ N_I \cos \gamma + N_{II} - F_I \cos \varphi_I &= m (\ddot{X}^i - g_0 \alpha^i_0) \alpha^i_{IIj} n^j_{II}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где N_I, N_{II} — нормальные составляющие реакций поверхностей на материальную точку; γ — угол между нормальными к поверхностям; φ_I, φ_{II} — углы между нормалью к поверхности и направлением перемещения точки по другой поверхности.

$$\cos \gamma = \bar{n}_I n_{II} = \alpha^i_{Ij} \alpha^i_{IIk} n^j_I n^k_{II}.$$

$$\cos \varphi_I = \frac{\bar{\mathbf{v}}_I \bar{\mathbf{n}}_{II}}{|\bar{\mathbf{v}}_I|} = \frac{\left(\frac{\partial q_I^{\sigma}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q_I^{\sigma}}{\partial t} \right) \frac{\partial x^j_I}{\partial q_I^{\sigma}} \alpha^j_{Ij} \alpha^i_{Ik} n^k_{II}}{\sqrt{g_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial q_I^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q_I^{\mu}}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q_I^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q_I^{\mu}}{\partial t} + \frac{\partial q_I^{\lambda}}{\partial t} \frac{\partial q_I^{\mu}}{\partial t} \right)}}, \quad (19)$$

$$\cos \varphi_{II} = \frac{\bar{\mathbf{v}}_{II} \bar{\mathbf{n}}_I}{|\bar{\mathbf{v}}_{II}|} = \frac{\left(\frac{\partial q_{II}^{\sigma}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q_{II}^{\sigma}}{\partial t} \right) \frac{\partial x^j_{II}}{\partial q_{II}^{\sigma}} \alpha^j_{IIj} \alpha^i_{Ik} n^k_I}{\sqrt{g_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial q_{II}^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q_{II}^{\mu}}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q_{II}^{\lambda}}{\partial \eta} \frac{\partial q_{II}^{\mu}}{\partial t} + \frac{\partial q_{II}^{\lambda}}{\partial t} \frac{\partial q_{II}^{\mu}}{\partial t} \right)}}. \quad (20)$$

Угол ψ может быть определен как плоский угол трехгранного угла, две грани у которого взаимно ортогональны

$$\cos \psi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) = \sin \gamma \sin \varepsilon. \quad (21)$$

Учитывая, что при наличии относительного перемещения точки по поверхности $F_{\text{тр}} = fN$, где f — коэффициент трения, найдем из системы (18):

$$\begin{aligned} N_I &= m \frac{\alpha_{Ij}^i n_I^j - \alpha_{IIj}^i n_{II}^j (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})}{1 - (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I) (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})} (\ddot{X}^i - g_0 \alpha_0^i), \\ N_{II} &= m \frac{\alpha_{Ij}^i n_{II}^j - \alpha_{IIj}^i n_I^j (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I)}{1 - (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I) (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})} (\ddot{X}^i - g_0 \alpha_0^i). \end{aligned} \quad (22)$$

Подставив значения частных производных из выражений (11) во второе из равенств (7), определим ускорение материальной точки. Подставив его в равенство (22), определим силы трения и подставим их в равенство (14). Полученное значение обобщенной силы подставим в уравнение (12). Разделив правую и левую части полученного уравнения на m , получим дифференциальное уравнение движения материальной точки по линии пересечения двух поверхностей:

$$\begin{aligned} & \left\{ g_{\sigma\tau} \left[\frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \ddot{\eta} + \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \left(\frac{\partial q^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q^\mu}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q^\mu}{\partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial q^\lambda}{\partial t} \frac{\partial q^\mu}{\partial t} \right) + \right. \right. \\ & + 2 \omega_I^1 c_I^1 \left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q^\alpha}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial \eta^2} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial \eta \partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial^2 q^\sigma}{\partial t^2} + \\ & + (\ddot{X}_0^i + \ddot{x}_j^i x_j^j - g_0 \alpha_0^i) \alpha_K^i \frac{\partial x^K}{\partial \tau} \left. \right\} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta} = -a_I [h_{I\lambda\mu} \left(\frac{\partial q^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q^\mu}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + \right. \\ & + 2 \frac{\partial q_I^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q_I^\mu}{\partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial q_I^\lambda}{\partial t} \frac{\partial q_I^\mu}{\partial t} \left. \right) + 2 \omega_I^1 c_I^1 \left(\frac{\partial q_I^\sigma}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q_I^\sigma}{\partial t} \right) + (\ddot{X}_{I0} - g_0 \alpha_0^i + \\ & + \ddot{x}_{Ij}^i x_{Ij}^j) \alpha_{IK}^i n_{II}^K] - a_{II} [h_{II\lambda\mu} \left(\frac{\partial q_I^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q_{II}^\mu}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial q_{II}^\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial q_{II}^\mu}{\partial t} \dot{\eta} + \frac{\partial q_{II}^\lambda}{\partial t} \frac{\partial q_{II}^\mu}{\partial t} \right) + \\ & + 2 \omega_{II}^1 c_{II}^1 \left(\frac{\partial q_{II}^\sigma}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q_{II}^\sigma}{\partial t} \right) + (\ddot{X}_{II0} - g_0 \alpha_0^i + \ddot{x}_{IIj}^i x_{IIj}^j) \alpha_{IIK}^i n_{II}^K], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_I &= \frac{f_I \cos \varepsilon_I - f_{II} \cos \varepsilon_{II} (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I)}{1 - (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I) (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})} \sqrt{g_{\sigma\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta}}; \\ a_{II} &= \frac{f_{II} \cos \varepsilon_{II} - f_I \cos \varepsilon_I (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})}{1 - (\cos \gamma - f_I \cos \psi_I) (\cos \gamma - f_{II} \cos \psi_{II})} \sqrt{g_{\sigma\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta}}; \end{aligned} \quad (23)$$

$h_{\lambda\mu} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial q^\lambda \partial q^\mu} n^j$ — второй тензор поверхности; $c_{\sigma}^j = \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} n^k - \frac{\partial x^k}{\partial q^\sigma} n^j$ — ковариантный тензор на поверхности и контравариантный во внешнем пространстве.

Уравнение (23) разрешимо относительно старшей производной $\ddot{\eta}$. Для этого нужно разделить левую и правую части его на

свертку $g_{\sigma\tau} \frac{\partial q^\sigma}{\partial \eta} \frac{\partial q^\tau}{\partial \eta}$. Это уравнение существенно не линейно.

Оно содержит те же коэффициенты, что и уравнение движения материальной точки по одной поверхности [4]. При этом в правой части уравнения в первых квадратных скобках стоят величины, зависящие от формы (уравнения) и закона движения первой поверхности, во вторых квадратных скобках — величины, зависящие от формы и закона движения второй поверхности.

В левую часть уравнения можно подставлять коэффициенты, связанные с одной из поверхностей: или первой, или второй.

Если линия пересечения неподвижна относительно какой-либо поверхности, то соответствующий угол ε равен нулю и $\cos \varepsilon = 1$. Угол же ψ между направлением относительного перемещения точки по этой поверхности и нормалью к другой поверхности равен $\frac{\pi}{2}$ и $\cos \psi = 0$. Если поверхности взаимно ортогональны вдоль линии пересечения, то $\cos \gamma = 0$. Выражения для определения a_I и a_{II} в этих случаях упрощаются.

Уравнение (23) позволяет формализовать составление уравнений движения материальной точки по линии пересечения поверхностей. Оно универсально для любых поверхностей, движущихся с любыми законами. При этом не следует определять ни сил, ни ускорений. Нужно лишь, зная уравнения поверхностей, выбрать параметризацию $x^j = x^j(q^\sigma)$, $q^\sigma = q^\sigma(\eta)$, определить коэффициенты поверхностей, большинство которых, кроме c_{σ}^1 и d_{σ}^1 , известны из дифференциальной геометрии [5]. c_{σ}^1 и d_{σ}^1 впервые введены нами [4]. Еще лучше иметь каталог таких коэффициен-

тов, а затем определить коэффициенты, связанные с законом движения поверхностей $\omega^1, \alpha_K^1, \ddot{\alpha}_K^1, \ddot{X}_0^1$.

Пусть, например, нужно составить уравнение движения материальной точки по плоскому горизонтальному диску с укрепленной на нем криволинейной цилиндрической и перпендикулярной ему лопаткой, вращающейся с постоянной частотой вокруг вертикальной оси (рис. 2). Обе поверхности соединены друг с другом. Угол между ними всюду $\frac{\pi}{2}$. Поэтому $\cos \epsilon = 1, \cos \gamma = 0, \cos \psi = 1$.

Расположим оси координат, как указано на схеме (рис. 2) запишем уравнения поверхностей диска и лопатки:

$$x_I^3 = 0, \quad \Psi_{II}(x_{II}^1, x_{II}^2) = 0. \quad (24)$$

Уравнение лопатки в цилиндрической системе координат может быть представлено в виде $\varphi = \varphi(\rho)$.

В качестве внутренних координат диска примем полярные координаты $(q_I^1 = \rho, q_I^2 = \varphi)$, лопатки — цилиндрические координаты $(q_{II}^1 = 2, q_{II}^2 = \rho)$. За обобщенную координату примем ρ . Тогда частные производные от внутренних координат по обобщенной

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_I^1}{\partial \eta} = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} = 1; \quad \frac{\partial q_{II}^1}{\partial \eta} = \frac{\partial 2}{\partial \rho} = 0; \\ \frac{\partial q_I^2}{\partial \eta} = \frac{d\varphi}{d\rho} = \varphi'; \quad \frac{\partial q_{II}^2}{\partial \eta} = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} = 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Частные производные от внутренних координат поверхностей по времени равны нулю. Частные производные второго порядка от внутренних координат поверхностей по обобщенной равны нулю, кроме

$$\frac{\partial^2 q_I^2}{\partial \eta^2} = \frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} = \varphi''.$$

Коэффициенты диска отличные от нуля:

$$x_I^1 = \rho \cos \varphi; \quad x_I^2 = \rho \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial x_I^1}{\partial q_I^1} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial x_I^2}{\partial q_I^1} = \sin \varphi; \quad \frac{\partial x_I^1}{\partial q_I^2} = -\rho \sin \varphi; \quad \frac{\partial x_I^2}{\partial q_I^2} = \rho \cos \varphi;$$

$$g_{111} = 1; \quad g_{122} = \rho^2; \quad n_1^3 = 1; \quad \Gamma_{122}^1 = -\rho; \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\rho};$$

$$c_{I1}^1 = \sin \varphi; c_{I1}^2 = -\cos \varphi; c_{I2}^1 = \rho \cos \varphi; c_{I2}^2 = \rho \sin \varphi; \\ d_{I2}^{13} = -\rho; d_{I1}^{23} = \frac{1}{\rho}.$$

Коэффициенты лопатки, отличные от нуля:

$$x_{II}^1 = \rho \cos \varphi; x_{II}^2 = \rho \sin \varphi; x_{II}^3 = z; \\ \frac{\partial x_{II}^3}{\partial q_{II}^1} = 1; \frac{\partial x_{II}^1}{\partial q_{II}^2} = \cos \varphi - \rho \varphi' \sin \varphi; \frac{\partial x_{II}^2}{\partial q_{II}^2} = \sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi; \\ g_{II11} = 1; g_{II22} = 1 + \rho^2 \varphi'^2; n_{II}^1 = -\frac{\sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}}; n_{II}^2 = \frac{\cos \varphi - \rho \varphi' \sin \varphi}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}}; \\ h_{II22} = \frac{2\varphi' + \rho \varphi'' + \rho^2 \varphi'^3}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}}; \Gamma_{II22}^2 = \rho \varphi' \frac{\varphi' + \rho \varphi''}{1 + \rho^2 \varphi'^2}; \\ c_{II2}^3 = \sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}; c_{II1}^1 = -\frac{\cos \varphi - \rho \varphi' \sin \varphi}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}}; c_{II1}^2 = -\frac{\sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}}; \\ d_{II1}^{21} = -\frac{\sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi}{1 + \rho^2 \varphi'^2}; d_{II1}^{22} = \frac{\cos \varphi - \rho \varphi' \sin \varphi}{1 + \rho^2 \varphi'^2}; \\ d_{II2}^{11} = \sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi; d_{II2}^{12} = -\cos \varphi + \rho \varphi' \sin \varphi.$$

Коэффициенты, определяемые движением поверхностей, одинаковы для обеих поверхностей. Отличные от нуля из них:

$$\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \cos \omega t; \alpha_1^2 = -\alpha_2^1 = \sin \omega t; \alpha_3^3 = 1; \\ \ddot{\alpha}_1^1 = \ddot{\alpha}_2^2 = -\omega^2 \cos \omega t; \ddot{\alpha}_1^2 = -\ddot{\alpha}_2^1 = -\omega^2 \sin \omega t; \\ \omega^3 = \omega; \alpha_0^3 = -1.$$

Коэффициенты a_I и a_{II} при одинаковых коэффициентах трения материала по диску и лопатке равны $f\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}$.

Подставив значения коэффициентов в выражение (23), получим после преобразований уравнение движения материальной точки по линии пересечения диска с лопаткой:

$$\ddot{\rho} = \frac{\omega^2 \rho}{1 + \rho^2 \varphi'^2} - \rho \varphi' \frac{\varphi' + \rho \varphi''}{1 + \rho^2 \varphi'^2} \dot{\rho}^2 - f \left(\frac{2\varphi' + \rho^2 \varphi'^3 + \rho \varphi''}{1 + \rho^2 \varphi'^2} \dot{\rho}^2 + \right. \\ \left. + 2\omega \dot{\rho} + \frac{\omega^2 \rho^2 \varphi'}{1 + \rho^2 \varphi'^2} + \frac{g_0}{\sqrt{1 + \rho^2 \varphi'^2}} \right). \quad (29)$$

Если горизонтальная поверхность (диск) неподвижна, а лопатка равномерно вращается вокруг вертикальной оси, то оси абсолютной и относительных систем координат направим также, как и в предыдущем случае. Однако в отличие от предыдущего случая оси координат, жестко связанные с первой поверхностью (диском), будут неподвижны и совпадут с абсолютными. Система координат, жестко связанная со второй поверхностью, будет вращаться относительно первой с частотой ω . Линия пересечения поверхностей будет неподвижна относительно второй поверхности (лопатки) и подвижна относительно первой.

Внутренние координаты поверхностей будут те же, что и в предыдущем случае, кроме $q_1^2 = \varphi + \omega t$, ибо полярный угол в неподвижной системе больше полярного угла в подвижной на угол поворота ωt .

За обобщенную координату примем также ρ . Тогда частные производные от внутренних координат по обобщенной будут те же, что и для предыдущего случая. Кроме того, отличной от нуля будет частная производная по времени $\frac{\partial q_1^2}{\partial t} = \omega$

Коэффициенты второй поверхности (лопатки) определятся равенствами (28), коэффициенты первой поверхности (диска) определятся из равенств (27), если в них вместо φ подставить $\varphi + \omega t$. Так как первая поверхность неподвижна, а вторая вращается с частотой ω , то

$$\alpha_{I1}^1 = \alpha_{I2}^2 = \alpha_{I3}^3 = \alpha_{II3}^3 = 1; \\ \alpha_{II1}^1 = \alpha_{II2}^2 = \cos \omega t; \quad \alpha_{II1}^2 = -\alpha_{II2}^1 = \sin \omega t; \\ \alpha_{II1}^1 = \alpha_{II2}^2 = -\omega^2 \cos \omega t; \quad \ddot{\alpha}_{II1}^2 = -\ddot{\alpha}_{II2}^1 = -\omega^2 \sin \omega t; \\ \omega_{II}^3 = \omega; \quad \alpha_0^3 = -1. \quad (30)$$

Так как линия пересечения неподвижна относительно второй поверхности (лопатки) и поверхности перпендикулярны вдоль линии пересечения, то

$$\cos \varepsilon_{II} = 1; \quad \cos \varepsilon_I = \frac{(1+\rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho} + \omega \rho^2 \varphi'}{\sqrt{1+\rho^2 \varphi'^2} \sqrt{(1+\rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho}^2 + 2\omega \rho^2 \varphi' \dot{\rho} + \omega^2 \rho^2}},$$

$$\cos \psi_I = \sin \varepsilon_I = \frac{\omega \rho}{\sqrt{1+\rho^2 \varphi'^2} \sqrt{(1+\rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho}^2 + 2\omega \rho^2 \varphi' \dot{\rho} + \omega^2 \rho^2}}, \quad (31)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \cos \psi_{II} = 0.$$

Тогда

$$a_I = f \frac{(1+\rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho} + \omega \rho^2 \varphi'^2 + f \omega \rho}{\sqrt{(1+\rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho}^2 + 2\omega \rho^2 \varphi' \dot{\rho} + \omega^2 \rho^2}}.$$

$$a_{II} = f \sqrt{1+\rho^2 \varphi'^2}. \quad (32)$$

Подставив значения коэффициентов в равенство (23) и проведя преобразования, получим уравнение движения материальной точки по криволинейной лопатке, вращающейся равномерно вокруг вертикальной оси над горизонтальной плоскостью:

$$\ddot{\rho} = \frac{\omega^2 \rho}{1+\rho^2 \varphi'^2} - \rho \varphi' \frac{\varphi' + \rho \varphi''}{1+\rho^2 \varphi'^2} \dot{\rho}^2 - f \left[\frac{2\varphi' + \rho^2 \varphi'^3 + \rho \varphi''}{1+\rho^2 \varphi'^2} \dot{\rho}^2 + \right.$$

$$\left. + 2\omega \dot{\rho} + \frac{\omega^2 \rho^2 \varphi'}{1+\rho^2 \varphi'^2} + \frac{(1+\rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho} + \omega \rho^2 \varphi' + f \omega \rho}{\sqrt{(1+\rho^2 \varphi'^2) \dot{\rho}^2 + 2\omega \rho^2 \varphi' \dot{\rho} + \omega^2 \rho^2}} \frac{g_0}{1+\rho^2 \varphi'^2} \right]. \quad (33)$$

Формализм составления уравнений (29) и (33) очевиден. Нам не пришлось определять ни сил, ни скоростей, ни ускорений. Были установлены лишь коэффициенты, связанные с геометрией поверхностей и их движением. Эти коэффициенты подставлены в уравнение (23). Еще более упростился и облегчился процесс составления уравнений, если бы существовал каталог коэффициентов плоскости и цилиндра. Составление же каталога коэффициентов наиболее распространенных поверхностей вполне возможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сокольников И.С. Тензорный анализ. — М., 1971.
2. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. — М., 1969.
3. Сулов Г.К. Теоретическая механика. — М., —Л., 1946.
4. Рапинчул Л.К. Дифференциальные уравнения движения материальной точки по шероховатой поверхности. — В сб.: Пути совершенствования сельскохозяйственной техники. Мн., 1972, вып. 21.
5. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. — М., 1963.

К СОСТАВЛЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Выполнение технологического процесса многими рабочими органами сельскохозяйственных, дорожных, горнодобывающих и других машин связано с перемещением материальных частиц по ним. Во многих случаях движение этих частиц может рассматриваться приближенно как движение материальной точки. Для оптимизации параметров рабочего органа необходимо знать параметры движения материала по нему, траекторию и скорость движения. Для этого необходимы дифференциальные уравнения движения материальных частиц по рабочему органу и проинтегрирование их.

Движение материальной точки по поверхности изучали еще И.Ньютон, Л.Эйлер, Ж.Лагранж, И.И.Рахманинов, М.Тиссот, Д.Эндэ, Т.Бельтрами, П.В.Воронец, Е.Т.Уиттекер. Частные вопросы о движении материалов по конкретным поверхностям отображены в трудах Г.Линднера, Л.Б.Левенсона, М.И.Акимова, А.О.Спиваковского, Л.Г. Лойцянского, А.И. Лурье, В.А. Олевского, И.Ф. Гончаревича, И.И.Блехмана, Г.Ю.Джанилидзе, П.М.Василенко и других. В настоящее время наблюдается повышенный интерес к движению материальной точки по более сложным поверхностям: логарифмическому цилиндру, конусу, гиперболоиду вращения, тору и другим.

Во всех известных нам работах рассматривались или движение точки по конкретным поверхностям, или движение по идеально гладким поверхностям в общем случае (И.И.Рахманинов) [1], или движение по стационарным шероховатым поверхностям (П.В. Воронец) [2], или общие вопросы движения тел по поверхности.

Каждый раз при составлении дифференциальных уравнений движения приходится определять все силы, действующие на материальную точку (активные, реактивные и силы инерции), их проекции на выбранные оси системы координат и затем записывать уравнения [3]. Это не всегда просто, особенно, если форма поверхности или закон движения поверхности сложны. Мы попытались найти дифференциальные уравнения движения материальной точки по поверхности в общем виде. В эти уравнения входит ряд коэффициентов, которые зависят или только от формы поверхности, или только от закона движения последней. Предполагается, естественно, что уравнение поверхности и закон движения ее известны.

Цель настоящей работы — свести составление дифференциальных уравнений движения материальной точки по поверхности к подстановке в уравнение коэффициентов, зависящих либо от формы (уравнения) поверхности, либо от закона ее движения, а также дать алгоритм определения этих коэффициентов.

Шероховатая поверхность накладывает на движение материальной точки связь. Связь эта конечная, или геометрическая, ибо поверхность накладывает ограничения лишь на возможные положения точки в пространстве. В общем случае эта связь нестационарная. Ограничимся рассмотрением недеформирующихся поверхностей.

Связь, накладываемая поверхностью на движение материальной точки, неудерживающая. Будем отдельно рассматривать интервалы времени, когда: а) материальная точка находится на поверхности в состоянии относительного покоя или движения, связь напряжена и ее можно рассматривать как удерживающую и б) когда материальная точка оторвана от поверхности, связь не напряжена и движение материальной точки свободное. В первом случае, когда связь напряжена, материальная точка обладает двумя степенями свободы, и ее движение может быть описано изменением двух обобщенных координат. Во втором случае число степеней свободы и число обобщенных координат равно трем.

Связь, накладываемая шероховатой поверхностью на движение материальной точки, не идеальная. Однако ее можно рассматривать как идеальную, учитывая при этом только нормальную составляющую реакции поверхности на точку, а силу трения считать за неизвестную активную силу. Появление новой неизвестной компенсируется дополнительным соотношением, получаемым из экспериментальных законов трения.

Абсолютное движение материальной точки складывается из переносного движения поверхности и относительного движения точки по поверхности (рис. 1).

Пусть $\vec{R} = X^i E_i$ — радиус-вектор материальной точки относительно инерциальной (абсолютной) системы координат с единичными базисными векторами E_i ($i = 1, 2, 3$); $\vec{r} = x^j e_j$ — радиус-вектор той же точки относительно неинерциальной (относительной) системы координат, жестко связанной с движущейся поверхностью и с единичными базисными векторами e_j ($j = 1, 2, 3$); $\vec{R}_0 = X_0^i E_i$ — радиус-вектор начала относительной системы в абсолютной (рис. 1). И пусть для упрощения обе системы ортогональные (декартовы и правые). Выражения радиусов-векторов через их координаты записаны с использованием "соглашения о суммировании", предложенного А.Эйнштейном и применяемого в тен-

зорном исчислении [4], согласно которому суммирование производится по двум одинаковым индексам, называемым "немыми". Для обозначения объектов, являющихся тензорами по отношению к преобразованиям внутренних координат поверхности, будем применять греческие индексы, по отношению внешних координат — латинские. Таким образом, всякий "немой" (повторяющийся) малый греческий индекс обозначает суммирование от 1 до 2, латинский — от 1 до 3; свободные (неповторяющиеся) малые греческие индексы пробегает значения от 1 до 2, латинские — от 1 до 3. В дальнейшем вышеизложенное будет предполагаться при отсутствии особых оговорок относительно индексов.

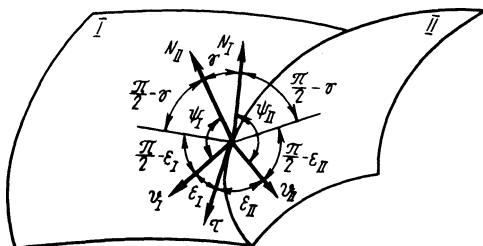


Рис. 1. Схема систем координат.

Пусть уравнение поверхности задано в неявном виде

$$\psi(x^j) = 0. \quad (1)$$

Параметризуем внешние координаты x^j двумя параметрами q^σ так, чтобы подстановка

$$x^j = x^j(q^\sigma) \quad (2)$$

в уравнение (1) превращала его в тождество относительно параметров q^σ .

Параметры q^σ являются внутренними координатами поверхности с координатными векторами локального базиса

$$\bar{r}_\sigma = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^\sigma} = r_\sigma^j e_j = \frac{\partial x^j}{\partial q^\sigma} e_j. \quad (3)$$

Приняв внутренние координаты поверхности q^σ за обобщенные, запишем дифференциальные уравнения движения материальной точки по поверхности в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma, \quad (4)$$

где T — кинетическая энергия точки; U — потенциал силовой функции гравитационного поля; Q_σ — обобщенная сила.

На основании теоремы Кенига

$$T = \frac{m}{2} \dot{X}^i \dot{X}^i, \quad (5)$$

где m — масса точки.

Координаты точки в абсолютной и относительной системах связаны соотношением

$$X^i = X_0^i + \alpha_j^i x^j, \quad (6)$$

где α_j^i — направляющие косинусы осей относительной системы в абсолютной.

Проекции скорости и ускорения материальной точки

$$\begin{aligned} \dot{X}^i &= \dot{X}_0^i + \alpha_j^i r_\sigma^j \dot{q}^\sigma + \dot{\alpha}_j^i x^j; \\ \ddot{X}^i &= \ddot{X}_0^i + \alpha_j^i (r_\sigma^j \ddot{q}^\sigma + r_{\sigma\tau}^j \dot{q}^\sigma \dot{q}^\tau) + 2 \dot{\alpha}_j^i r_\sigma^j \dot{q}^\sigma + \ddot{\alpha}_j^i x^j, \end{aligned} \quad (7)$$

где $r_{\sigma\tau}^j = \frac{\partial r_\sigma^j}{\partial q^\tau} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial q^\sigma \partial q^\tau}$.

Частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам и скоростям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} &= m \dot{X}^i \frac{\partial \dot{X}^i}{\partial q^\sigma} = m (\dot{X}_0^i + \alpha_j^i r_\sigma^j \dot{q}^\sigma + \dot{\alpha}_j^i x^j) (\alpha_k^i r_{\sigma\sigma}^k \dot{q}^\sigma + \dot{\alpha}_k^i r_{\sigma\sigma}^k); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} &= m \dot{X}^i \frac{\partial \dot{X}^i}{\partial \dot{q}^\sigma} = m (\dot{X}_0^i + \alpha_j^i r_\sigma^j \dot{q}^\sigma + \dot{\alpha}_j^i x^j) \alpha_k^i r_{\sigma\sigma}^k. \end{aligned} \quad (8)$$

Потенциал силовой функции гравитационного поля

$$U = m g_0 \alpha_0^i X^i = m g_0 \alpha_0^i (\alpha_j^i x^j + X_0^i), \quad (9)$$

где g_0 — модуль ускорения свободного падения тел; α_0^i — направляющие косинусы вектора ускорения свободного падения тел в базисе $\{E_i\}$.

Частные производные от потенциала силовой функции по обобщенным координатам

$$\frac{\partial U}{\partial q^\sigma} = m g_0 \alpha_0^i \alpha_j^i r_\sigma^j. \quad (10)$$

Подставив значения частных производных в уравнения Лагранжа, проведя дифференцирование и преобразования, получим

$$m [\ddot{X}_0^i - g_0 \alpha_0^i + \alpha_j^i (r_{\alpha}^j \ddot{q}^{\alpha} + r_{\lambda\mu}^j \dot{q}^{\lambda} \dot{q}^{\mu}) + 2\alpha_j^i r_{\alpha}^j \dot{q}^{\alpha} + \ddot{\alpha}_j^i x^j] \alpha_{\kappa}^i r_{\sigma}^{\kappa} = Q_{\sigma} \quad (11)$$

Обобщенные силы найдем из выражения элементарных работ сил на виртуальных перемещениях точки, выраженных через вариации обобщенных координат. Работа нормальной составляющей реакции поверхности при любом перемещении точки по поверхности равна нулю. При небольших скоростях и размерах тел сопротивление воздушной среды мало и им можно пренебречь. Сила веса учтена в потенциале силовой функции гравитационного поля. Единственной силой, принимаемой для определения обобщенных сил, будет сила трения $F_{\text{тр}} \leq fN$, где f – коэффициент трения. Здесь знак " $<$ " соответствует относительно покою, знак " $=$ " – скольжению. Сила трения направлена обратно относительно перемещению:

$$\sigma A = -F_{\text{тр}} \delta s = -f N \frac{\partial s}{\partial q^{\sigma}} \delta q^{\sigma} \quad (12)$$

Тогда

$$Q_{\sigma} = -fN \frac{\partial s}{\partial q^{\sigma}} \quad (13)$$

Модуль нормальной реакции поверхности на материальную точку

$$N = m(\ddot{X}_0^i - g_0 \alpha_0^i) \alpha_{\kappa}^i n^{\kappa} = m[\ddot{X}_0^i - g_0 \alpha_0^i + \alpha_j^i (r_{\alpha}^j \ddot{q}^{\alpha} + r_{\lambda\mu}^j \dot{q}^{\lambda} \dot{q}^{\mu}) + 2\alpha_j^i r_{\alpha}^j \dot{q}^{\alpha} + \ddot{\alpha}_j^i x^j] \alpha_{\kappa}^i n^{\kappa}, \quad (14)$$

где n^{κ} – координаты единичного вектора нормали той стороны поверхности, где находится точка в базисе $\{e_{\kappa}\}$.

N – величина не отрицательная. При $N=0$ происходит отрыв точки от поверхности. Здесь и далее будем предполагать, что рассматривается период, когда точка находится на поверхности.

Первая квадратическая форма поверхности

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dq^{\alpha} dq^{\beta}, \quad (15)$$

где $g_{\alpha\beta} = r_{\alpha}^j r_{\beta}^j$ – компоненты первого, или метрического, тензора поверхности.

С другой стороны,

$$ds = \frac{\partial s}{\partial q^\sigma} dq^\sigma. \quad (16)$$

Тогда

$$\frac{\partial s}{\partial q^\sigma} dq^\sigma = \sqrt{g_{\alpha\beta}} dq^\alpha dq^\beta. \quad (17)$$

Умножим и разделим правую часть полученного равенства на

$\sqrt{g_{\alpha\beta}} dq^\alpha dq^\beta$ и поменяем индексы:

$$\frac{\partial s}{\partial q^\sigma} dq^\sigma = \frac{g_{\sigma\alpha} dq^\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\beta}} dq^\alpha dq^\beta} dq. \quad (18)$$

Тогда

$$\frac{\partial s}{\partial q^\sigma} = \frac{g_{\sigma\alpha} dq^\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\beta}} dq^\alpha dq^\beta} = \frac{g_{\sigma\alpha} \dot{q}^\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\beta}} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta}. \quad (19)$$

Подставив значения обобщенных сил в уравнения (11), разделив их левые и правые части на m и учитывая, что

$$\alpha_j^i \alpha_k^i = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k, \end{cases} \quad (20)$$

так как матрица коэффициентов α^i ортогональная, получим

$$\begin{aligned} & g_{\sigma\alpha} \ddot{q}^\alpha + r_{\lambda\mu}^j r_{\sigma}^j \dot{q}^\lambda \dot{q}^\mu + (\ddot{X}_0^i - g_0^i \alpha_0^i + \ddot{x}_j^i x_j^i) \alpha_k^i r_{\sigma}^k + 2 \dot{x}_j^i \alpha_k^i r_{\alpha}^j r_{\sigma}^k \dot{q}^\alpha = \\ & = -f \frac{g_{\sigma\alpha} \dot{q}^\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\beta}} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta} [r_{\lambda\mu}^j n_j^j \dot{q}^\lambda \dot{q}^\mu + 2 \dot{x}_j^i \alpha_k^i r_{\alpha}^j n_k^k \dot{q}^\alpha + (\ddot{X}_0^i - g_0^i \alpha_0^i + \\ & + \ddot{x}_j^i x_j^i) \alpha_k^i n_k^k]. \end{aligned} \quad (21)$$

Свертка $\dot{x}_j^i \alpha_k^i$ является кососимметричным тензором второго ранга, что легко увидеть, продифференцировав по времени обе части равенства (20):

$$\dot{x}_j^i \alpha_k^i + \alpha_k^i \dot{x}_j^i = 0. \quad (22)$$

Этому тензору эквивалентен псевдовектор мгновенной угловой скорости с координатами ω^l в базисе $\{e_l\}$:

$$\dot{x}_j^i \alpha_k^i = e_{jkl} \omega^l, \quad (23)$$

где e_{jkl} — кососимметричный тензор с существенной компонентой, равной единице ($e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$; $e_{132} = e_{321} = e_{213} = -1$, все компоненты, у которых $j = k$, или $j = l$, или $k = l$, равны нулю).

Тензор, взаимный метрическому, определяется условием

$$g^{\tau\sigma} g_{\sigma\alpha} = \delta_{\alpha}^{\tau} = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau = \alpha, \\ 0 & \text{при } \tau \neq \alpha. \end{cases} \quad (24)$$

Его компоненты равны

$$g^{\tau\sigma} = \frac{G^{\tau\sigma}}{g}, \quad (25)$$

где $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ — определитель метрического тензора; $G^{\tau\sigma}$ — алгебраическое дополнение элемента $g_{\tau\sigma}$ в определителе g .

Свернув обе части равенства (21) со взаимным тензором $g^{\tau\sigma}$, произведя преобразования и поменяв индексы, получим

$$\ddot{q}^{\sigma} = -\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \dot{q}^{\lambda} \dot{q}^{\mu} - 2d_{\tau}^{\sigma} \omega_j \dot{q}^{\tau} - (\ddot{X}_0^i - \alpha_0^i g_0 + \ddot{\alpha}_i^1 x^1) \alpha_j^i r^{\sigma j} - \\ - f \frac{\dot{q}^{\sigma}}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta}}} [h_{\lambda\mu} \dot{q}^{\lambda} \dot{q}^{\mu} + 2c_{\tau}^j \omega_j \dot{q}^{\tau} + (\ddot{X}_0^i - \alpha_0^i g_0 + \ddot{\alpha}_i^1 x^1) \alpha_j^i n^j], \quad (26)$$

где $r^{\sigma j} = g^{\sigma\tau} r_{\tau}^j$ — проекции координатных векторов взаимного

локального базиса; $n^j = \pm \frac{e_{jkl}}{\sqrt{g}} r_l^k r_2^l$ — координаты единичного

вектора нормали (знак "+", если $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ и $\bar{n}$ образуют правый репер, знак "—" — левый); $h_{\lambda\mu} = r_{\lambda}^j r_{\mu}^j$ — компоненты второго тензора поверхности; $\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = g_{\alpha}^{\sigma} \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}$ — коэффициенты связности внутренней геометрии поверхности, или символы Кристоффеля; $c_{\tau}^j = e_{jkl} r_{\tau}^k n^l$ — координаты ковариантного вектора, принадлежащего поверхности и перпендикулярного $\bar{r}_{\tau}$; $d_{\tau}^{\sigma j} = e_{jkl} r_{\tau}^k r^{\sigma l}$ — координаты смешанного тензора на поверхности и вектора в пространстве, перпендикулярного поверхности ($d_{\tau}^{\sigma j} = 0$ при $\sigma = \tau$, если локальный базис ортогонален); $\omega_j = \frac{1}{2} e_{jkl} \dot{\alpha}_k^i \alpha_l^i$ — коор-

динаты мгновенной скорости вращения в базисе $\{e_j\} : \dot{\alpha}_j^1$ — направляющие косинусы осей подвижной системы координат в неподвижной, которые лучше всего выразить через углы Эйлера.

Равенство (26) представляет собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка, разрешенных относительно старших производных. Имея это равенство, можно формализовать составление дифференциальных уравнений движения материальной точки. При этом не нужно будет определять ни силы инерции, ни скоростей, ни ускорений. Нужно лишь, зная уравнение поверхности, ввести параметризацию $x^j(q^\sigma)$, определить компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, координаты векторов взаимного локального базиса r^j_{σ} и единичного вектора нормали n^j , компоненты второго тензора поверхности $h_{\lambda\mu}$ и символы Кристоффеля $\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}$, координаты тензоров c^j_{τ} и $d^{\sigma j}_{\tau}$. По заданным закономерностям изменения углов Эйлера необходимо определить направляющие косинусы d^1_j , их производные по времени $\dot{\alpha}_j^1$ и $\ddot{\alpha}_j^1$; проекции мгновенной угловой скорости. Все полученные данные подставить в равенство (26) при $\sigma = 1$ и $\sigma = 2$.

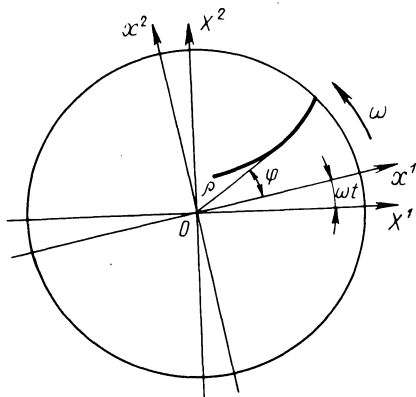


Рис. 2. Внутренняя и внешняя системы координат конуса.

Все указанные коэффициенты, зависящие от формы поверхности, известны из дифференциальной геометрии [5], кроме двух последних: c^j_{τ} и $d^{\sigma j}_{\tau}$. Нами составлен каталог всех этих коэффициентов для многих поверхностей (всего более 300 поверхностей). Имея такой каталог, любой инженер, проектирующий рабочий орган машины, может без труда составить уравнение. Затем уравнения могут быть решены или в квадратурах (что крайне редко), или одним из приближенных методов, или с помощью электронных цифровых либо аналоговых вычислительных машин. Можно решать и обратную задачу подбора нужной поверхности по

желаемым параметрам движения и виду дифференциального уравнения.

Пусть требуется составить уравнение движения материальной точки по конусу с углом 2β при вершине, вращающемуся равномерно с частотой ω вокруг своей оси симметрии, которая вертикальна (рис. 2). Параметрическое уравнение поверхности $x^1 = l \sin\beta \cos\varphi$, $x^2 = l \sin\beta \sin\varphi$; $x^3 = l \cos\beta$,

(27)

где l — расстояние от точек конуса до его вершины.

Примем за обобщенные координаты параметры l и φ . Компоненты метрического тензора поверхности:

$$g_{11} = 1; \quad g_{12} = 0; \quad g_{22} = l^2 \sin^2 \beta. \quad (28)$$

Проекции координатных векторов взаимного локального базиса:

$$\begin{aligned} r^{11} &= \sin\beta \cos\varphi; \quad r^{12} = \sin\beta \sin\varphi; \quad r^{13} = \cos\beta; \\ r^{21} &= -\frac{1}{l} \frac{\sin\varphi}{\sin\beta}; \quad r^{22} = \frac{1}{l} \frac{\cos\varphi}{\sin\beta}; \quad r^{23} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Координаты единичного вектора нормали:

$$n^1 = -\cos\beta \cos\varphi; \quad n^2 = -\cos\beta \sin\varphi; \quad n^3 = \sin\beta. \quad (30)$$

Компоненты второго тензора поверхности и символы Кристоффеля, отличные от нуля:

$$h_{22} = l \sin\beta \cos\beta; \quad \Gamma_{22}^1 = -l \sin^2\beta; \quad \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{l}. \quad (31)$$

Так как все ω_j , кроме ω_3 , равны нулю, то потребуются значения лишь тех компонентов тензоров поверхности c_{τ}^j и $d_{\tau}^{\sigma j}$, у которых $j = 3$. Определим их.

$$c_1^3 = 0; \quad c_2^3 = l \sin\beta \cos\beta; \quad d_1^{13} = d_1^{23} = 0; \quad d_2^{13} = -l \sin^2\beta; \quad d_1^{23} = \frac{1}{l}. \quad (32)$$

Направляющие косинусы осей и их производные по времени, отличные от нуля:

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 &= \cos\omega t; \quad \alpha_2^1 = \sin\omega t; \quad \alpha_1^2 = -\sin\omega t; \quad \alpha_2^2 = \cos\omega t; \quad \alpha_3^3 = 1. \\ \ddot{\alpha}_1^1 &= -\omega^2 \cos\omega t; \quad \ddot{\alpha}_2^1 = \omega^2 \sin\omega t; \quad \ddot{\alpha}_1^2 = \omega^2 \sin\omega t; \quad \ddot{\alpha}_2^2 = -\omega^2 \cos\omega t. \end{aligned} \quad (33)$$

Координаты мгновенной угловой скорости вращения и направляющие косинусы ускорения свободного падения тел, отличные от нуля:

$$\omega_3 = -\omega; \quad \alpha_0^3 = -1.$$

Представив найденные значения коэффициентов в уравнение (26) и произведя преобразования, получим дифференциальные уравнения движения материальной точки по конусу:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{l} &= l(\omega - \dot{\varphi})^2 \sin^2 \beta - g_0 \cos \beta - f \frac{l \sin \beta}{\sqrt{l^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta}} [l(\omega - \dot{\varphi})^2 \cos \beta + \\ &+ g_0]; \\ \ddot{\varphi} &= 2 \frac{\omega - \dot{\varphi}}{l} - f \frac{\dot{\varphi} \sin \beta}{\sqrt{l^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \beta}} [l(\omega - \dot{\varphi})^2 \cos \beta + g_0]. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Решение полученной системы с учетом начальных условий и дает уравнение траекторий материальной точки на конусе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахманинов И.И. О движении материальной точки по поверхности. — Киев, 1887. 2. Воронец П.В. Дифференциальное уравнение траектории материальной точки на шероховатой поверхности. — Киев, 1916. 3. Сулов Г.К. Теоретическая механика. — М.-Л., 1946. 4. Сокольников И.С. Тензорный анализ. — М., 1971. 5. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. — М., 1963.

УДК 536.24

А.А.Ким

СТАЦИОНАРНОЕ ДИССИПАТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ С ТЕПЛОЗАВИСИМОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Рассмотрим одномерную задачу при отсутствии продольного градиента давления и нулевых инерционных и конвективных членов в левых частях полных уравнений переноса импульса и тепловой энергии. Положим равными нулю все градиенты скорости и температуры, исключая производные

$$\frac{dT}{dy}; \quad \frac{d^2 T}{dy^2}; \quad \frac{dU}{dy}, \quad (1)$$

где T — абсолютная температура потока.

Тогда имеем уравнение движения продольной составляющей импульса (подстрочные индексы опускаем) :

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Примем реологическое уравнение состояния системы

$$\tau^{1/n} = \tau_0^{1/n} + (\mu_p \frac{du}{dy})^{1/m}. \quad (3)$$

Уравнение энергии с учетом диссипации механической энергии

$$\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{du}{dy} \tau = 0. \quad (4)$$

Зависимость пластической вязкости от температуры выражается следующим образом:

$$\mu_p = \frac{\mu_0}{1 + \alpha T} = \frac{\mu_0}{1 + \alpha (T - T_0)}. \quad (5)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} y = 0; & \quad y = h; \\ u = 0; & \quad u = v; \\ T = T_0; & \quad \frac{dT}{dy} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Первое граничное условие означает прилипание жидкости к нижней изотермической стенке, соединенной с термостатом, а второе — выражает увлечение среды теплоизолированной верхней стенкой с постоянной скоростью v . Такая ситуация чаще всего встречается в реальных условиях.

Введение безразмерных переменных и комплексов

$$\eta = \frac{y}{h}; \quad T' = \frac{T - T_0}{T_0}; \quad s = \frac{\tau}{(\mu_0 \frac{v}{h})^{n/m}}; \quad s_0 = \frac{\tau_0}{(\mu_0 \frac{v}{h})^{n/m}}; \quad (7)$$

$$Br = \frac{\mu_0 v^{\frac{n+m}{m}}}{\lambda T_0} \left(\frac{\mu_0}{h} \right)^{\frac{n-m}{m}}; \quad w = \frac{u}{v}; \quad \beta = \alpha T_0 \quad (8)$$

дает следующую систему выражений:

$$\frac{ds}{d\eta} = 0; \quad (9)$$

$$s^{1/n} = s_0^{1/n} + \left(\frac{dw}{d\eta}\right)^{1/m} \left(\frac{1}{\lambda + \beta T}\right)^{1/m}; \quad (10)$$

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + Br s \frac{dw}{d\eta} = 0 \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \eta = 0; \quad \eta = 1; \\ w = 0; \quad w = 1; \\ T = 0; \quad \frac{dT}{d\eta} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В случае $m = n$ безразмерный параметр s_0 идентичен критерию Ильюшина-Олдройда-Бингама и выражает соотношение между пластической и вязкой диссипациями, т.е. соотношение между энергией, затрачиваемой на разрушение структурного каркаса, и работой вязких касательных напряжений.

Параметр Бринкмана Br в данной формулировке характеризует соотношение интенсивностей диссипативного тепловыделения и теплоотода в термостат. Величина β является характеристикой температурной зависимости пластической вязкости и выражает влияние фактора неизотермичности на процесс течения.

Из (9) следует

$$s = \text{const} = c_1 > 0. \quad (13)$$

Тогда из (10) и (13) имеем

$$\frac{dw}{d\eta} \frac{1}{1 + \beta T} = (C_1^{1/n} - s_0^{1/n})^m \quad (14)$$

или

$$\frac{dw}{d\eta} = (1 + \beta T) (C_1^{1/n} - s_0^{1/n})^m. \quad (15)$$

Подстановка (15) в (11) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно искомой температуры:

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + Br C_1 (C_1^{1/n} - s_0^{1/n})^m \beta T = -(C_1^{1/n} - s_0^{1/n})^m C_1 Br. \quad (16)$$

Обозначим

$$C_2 = (C_1^{1/n} - s_0^{1/n})^m C_1 > 0. \quad (17)$$

Тогда приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + Br C_2 \beta T = -C_2 Br \quad (18)$$

с граничными условиями

$$T(0) = 0; \quad \frac{dT(1)}{d\eta} = 0. \quad (19)$$

Общее решение дифференциального уравнения (18) представим в виде

$$T(\eta) = M_1 \sin \lambda_1 \eta + M_2 \cos \lambda_1 \eta - \frac{1}{\beta}, \quad (20)$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{\beta_1 C_2 Br}. \quad (21)$$

Дифференцируя (20), получаем

$$\frac{dT}{d\eta} = \lambda_1 M_1 \cos \lambda_1 \eta - \lambda_1 M_2 \sin \lambda_1 \eta. \quad (22)$$

Константы интегрирования определяются граничными условиями (19) в виде

$$M_1 = \frac{1}{\beta} \operatorname{tg} \alpha; \quad M_2 = \frac{1}{\beta}. \quad (23)$$

После несложных преобразований получаем искомое распределение температурного поля:

$$T(\eta) = \frac{\cos[(1-\eta)\lambda_1]}{\beta \cos \lambda_1} - \frac{1}{\beta}. \quad (24)$$

В выражение (24) входит через величины λ_1 неизвестная величина C_2 , связанная с C_1 . Для их определения обратимся снова к решению динамической задачи, опираясь на полученный выше профиль скоростей. Тогда имеем

$$1 + \beta T(\eta) = \frac{\cos[(1-\eta)\lambda_1]}{\cos \lambda_1}. \quad (25)$$

Подстановка выражения (25) в (15) приводит к

$$\frac{dw}{d\eta} = \frac{C_2}{C_1} \frac{\cos[(1-\eta)\lambda_1]}{\cos \lambda_1} \quad (26)$$

или после интегрирования

$$w = D - \frac{C_2}{C_1} \frac{\sin[(1-\eta)\lambda_1]}{\lambda_1 \cos \lambda_1} \quad (27)$$

Постоянную D определим из условия прилипания на стенке

$$D = \frac{C_2}{C_1} \frac{\operatorname{tg} \lambda_1}{\lambda_1} \quad (28)$$

Таким образом, профиль скоростей поперек зазора имеет вид

$$w(\eta) = \frac{C_2}{C_1} \frac{1}{\lambda_1 \cos \lambda_1} \left\{ \sin \lambda_1 - \sin[(1-\eta)\lambda_1] \right\} \quad (29)$$

Для определения связанных между собой соотношениями (17) и (21) величин C_1, C_2, λ_1 используем второе граничное условие для скоростей, а именно: $w = 1$ при $\eta = 1$. Тогда имеем

$$\frac{C_2}{C_1} \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1 \cos \lambda_1} = 1 \quad (30)$$

Подстановка выражения (17) и (20) в соотношение (30) приводит к виду

$$\operatorname{tg} \left\{ [\beta \operatorname{Br} C_1 (C_1^{1/n} - s_0^{1/n})^m] \right\} = [(C_1^{1/n} - s_0^{1/n})^m] [\beta \operatorname{Br} (C_1^{1/n} - s_0^{1/n})^m C_1]^{1/2} \quad (31)$$

Выражение (31) является определяющим уравнением данной задачи. Оно трансцендентное относительно величины C_1 (безразмерное касательное напряжение). Определив его, находим сопротивление трения в боковом направлении.

Теперь возвращаемся к задаче теплообмена. Определив температуру на верхней стенке

$$T(1) = \frac{1 - \cos \lambda_1}{\beta \cos \lambda_1} \quad (32)$$

находим изменение температурного перепада между верхней и нижними стенками:

$$\Delta T = \frac{1 - \cos \lambda_1}{\beta \cos \lambda_1} = T(1) \quad (33)$$

Тепловой поток в нижнюю стенку

$$q = - \left. \frac{dT}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\lambda_1 \operatorname{tg} \lambda_1}{\beta} \quad (34)$$

Таким образом, определены все искомые зависимости для сопротивления и теплообмена.

В том случае, если на верхней стенке задано касательное напряжение, а не скорость, задача значительно упрощается. Тогда величина C_1 и, следовательно, C_2 и λ_1 определяются непосредственно из задания граничных условий. Тогда температурное поле определяется из выражения (20).

Формула (32) устанавливает связь равновесной температуры адиабатической стенки с реологическими характеристиками среды, зависящими от состава композиции.

Формула (33) выражает зависимость температурного напора между ограничивающими течение стенками и остальными переменными задачами. Это соотношение имеет важное значение, поскольку, пользуясь им, легко предвычислить безопасные, либо оптимальные с точки зрения производительности и экономичности режимы течения и теплоотвода. Задаваясь определенной допустимой величиной ΔT , можно определить соответствующие критические величины $v_{кр}$ при фиксированном зазоре h , либо высоту зазора $h_{кр}$ при заданной скорости движения верхней стенки.

Равенство (34) определяет количество тепла, отводимого в термостат при стационарном режиме течения. Оно для заданных условий задачи должно быть равно мощности теплового рассеяния, т.е. вязкой диссипации.

СОДЕРЖАНИЕ

К р у ш е в с к и й А.Е., С е в е н ю к А.З. Построение структуры решения задачи определения спектра частот продольных колебаний консольного стержня прямоугольного сечения с круглым отверстием	3
К р у ш е в с к и й А.Е., С к л я р О.Н. Построение структуры решения задачи изгиба упругого параллелепипеда при отсутствии нагрузки на четырех гранях	6
Б о й к о Н.Я. Равновесие упругого параллелепипеда с тремя свободными от нагрузки гранями под действием равномерно распределенной нагрузки на четвертой грани и имеющего нулевое нормальное перемещение и одно нулевое касательное напряжение на оставшихся двух гранях	11
А п а н о в и ч В.Н. Исследование устойчивости и сходимости методов Ритца и Трефца применительно к некоторым пространственным задачам теории упругости	16
А п а н о в и ч В.Н. Напряженно-деформированное состояние поворотного стола карусельной машины для кокильного литья .	20
Н е м ц о в В.Б. Сдвиговая упругость нематических жидких кристаллов	22
Л е в и н М.А. К определению реакции опорной поверхности простейшего катящегося деформируемого колеса	31
Л е в и н М.А. Экспериментальное определение частотных характеристик продольной реакции катящегося деформируемого колеса	38
Л а м б и н а Е.Н. Об одном особом случае осесимметричных свободных колебаний сферической оболочки	47
Л а м б и н а Е.Н. О характере неустановившихся экспоненциальных течений вязко-упругих линейных жидкостей	51

Лапушина Б.И. Неустановившееся течение вязко-упругой среды Максвелла в зазоре между цилиндрами	54
Ким А.Х., Богинская Т.Ф. Движение пластораствора в шнеке.	59
Безмен В.И. Определение линий сводообразования в сыпучих материалах при выгрузке их из бункера призматической формы	64
Буткевич Н.Н. Формирование остаточных напряжений при изготовлении моделей из материала ЭД-20.	70
Буткевич Н.Н. Исследование влияния ползучести на релаксацию температурных напряжений	73
Мартыненко М.Д., Долбин Н.А., Довгялло И.Г., Кончиц Р.М. Влияние геометрических параметров на собственную частоту продольно колеблющихся многоступенчатых стержней.	77
Шидловский И.Ф., Девойно Г.Н. Экспериментальное определение напряжений при кручении несущей системы транспортной конструкции	83
Астахов Э.И., Кудин В.В. Оптимальный синтез направляющего механизма привода электропилы	86
Камцев Е.А., Акулич В.К. Кинетостатический силовой расчет четырехзвенного шарнирно-рычажного механизма аналитическим методом.	90
Босаков С.В. Расчет клина с краевым разрезом	96
Флусов Н.Н. К вопросу о применении R-функций в задачах трехмерной теории упругости.	99
Ким А.Х., Ким А.А. Диссипация энергии при вискозиметрическом течении неньютоновских систем	109
Ершов Г.Ф., Косых Э.Г. К вопросу проектирования каркаса оболочки со случайно расположенными вершинами	116
Баршай О.С. К выводу уравнений нестационарного движения растяжимой нити по шкиву	122
Рапичук Л.К. Движения материальной точки по линии пересечения двух поверхностей.	126

Р а п и н ч у к Л.К. К составлению дифференциальных уравнений движения материальной точки по шероховатой поверхнос- ти.	138
К и м А.А. Стационарное диссипативное течение нелинейно вязко- пластичной среды с теплозависимой вязкостью	147

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

В ы п у с к 8

Редактор *Г.В.Вагабова*
Мл.редактор *И.В.Бирюкова*
Худож.редактор *Ю.С.Сергачев*
Техн.редактор *Л.И.Жук*
Корректор *Н.И.Бондаренко*
График *И.В.Журавлева*
Оператор *А.И.Маль*

ИБ 1125

Подписано в печать 18.11.80 г. АТ 13660. Формат 60х90 1/16. Бумага офсет. Офсет. печать. Гарнитура Сенчури. Усл.печ.л. 10,25. Усл. кр.-отт. 10,5. Уч.-издл. 8,22. Изд. № 80—17. Тираж 850 экз. Зак.5616. Цена 1 р.30к.

Издательство "Вышэйшая школа" Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Типография "Победа". Молодечно, ул. Тавлая, 11.

Отпечатано с оригинала-макета, изготовленного в издательстве "Вышэйшая школа".

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.3.

К р у ш е в с к и й А.Е., С е в е н ю к А.З. Построение структуры решения задачи определения спектра частот продольных колебаний консольного стержня прямоугольного сечения с круглым отверстием. — Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 3—6.

Построены степенные ряды для упругих перемещений при условии отсутствия нагрузки на четырех гранях параллелепипеда и цилиндрической поверхности отверстия. Для этого рассмотрены ряды до 22-й степени включительно и построено 39 уравнений связей. — Библиогр. 1.

УДК 539.3.

К р у ш е в с к и й А.Е., С к л я р О.Н. Построение структуры решения задачи изгиба упругого параллелепипеда при отсутствии нагрузки на четырех гранях. — Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 6—11.

Построена структура решения задачи изгиба параллелепипеда для степенных рядов аппроксимирующих функций любой степени, при условии точного выполнения отсутствия нагрузки на его четырех боковых гранях. — Ил. 1. Библиогр. 2.

УДК 539.3

Б о й к о Н.Я. Равновесие упругого параллелепипеда с тремя свободными от нагрузки гранями под действием равномерно распределенной нагрузки на четвертой грани и имеющего нулевое нормальное перемещение и одно нулевое касательное напряжение на оставшихся двух гранях. — Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 11—16.

На основе вариационного принципа Лагранжа с помощью рядов Фурье с дополнительными членами в виде полиномов Лежандра дано решение задачи изгиба упругого прямоугольного параллелепипеда с тремя свободными от нагрузки гранями под действием равномерно распределенной нагрузки на четвертой грани. Решение задачи представлено как результат наложения решений задач изгиба и сжатия. Граничные условия выполняются точно или в интегральном виде. Полученное решение удовлетворяет уравнениям Ламе и Коши. — Библиогр. 1.

УДК 539.3

А п а н о в и ч В.Н. Исследование устойчивости и сходимости методов Ритца и Трефца применительно к некоторым пространственным задачам теории упругости. — Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 16—20.

Приведены результаты исследований устойчивости и сходимости методов Ритца и Трефца применительно к расчету объемного напряженно-деформированного состояния, полученные при проведении численного эксперимента на тестовых задачах. — Табл. 3. Библиогр. 4.

УДК 621.81:539.4

А п а н о в и ч В.Н. Напряженно-деформированное состояние поворотного стола карусельной машины для кокильного литья.— Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 20—22.

В постановке пространственной задачи теории упругости выполнен расчет поворотного стола карусельной машины. Показана возможность применения метода Трефца при расчете корпусных деталей машин. — Ил. 1. Табл. 1. Библиогр. 2.

УДК 532.783; 548—14

Н е м ц о в В.Б. Сдвиговая упругость нематических жидких кристаллов.— Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 22—31.

Проведено сопоставление тензоров вязких напряжений статистической теории автора и теории Лесли—Эриксона, обобщенной П. де Женом для учета сжимаемости жидких кристаллов. Показано, что обобщение П. де Жена не корректно и вязкие свойства нематиков в обобщенной теории Лесли—Эриксона характеризуются семью, а не восемью коэффициентами вязкости. Восемь частотно-зависящих коэффициентов вязкости описывают вязко-упругие свойства нематических жидких кристаллов в статистической теории.

На основе статистической теории рассчитаны эффективные вязкости и модули сдвига, измеряемые по отражению сдвиговых волн от поверхности раздела кварца и жидкого кристалла. В связи с учетом релаксации ориентационной упорядоченности эффективные вязкости и модули сдвига содержат частотную зависимость. Установлена справедливость соотношений Рапини в случае учета частотной дисперсии и коэффициента вращательной вязкости. — Библиогр. 15.

УДК 531.3+629.11.012.5

Л е в и н М.А. К определению реакции опорной поверхности простейшего катящегося деформируемого колеса.— Теоретическая и прикладная механика, 1981, с. 31—38.

Рассматривается катящееся деформируемое колесо простейшего вида. В сравнении с цитированными работами автора повышена точность анализа с удержанием членов порядка контактного угла в кубе перед малыми отклонениями. Это позволило выяснить ряд особенностей механизма качения деформируемого колеса, в частности, и в стационарном случае. Получены также выражения для мощности диссипации энергии и проанализирован механизм возникновения потерь при качении в свободном режиме при отсутствии продольной силы. Полученные соотношения для реакций связи хорошо согласуются с экспериментальными данными. — Ил. 1. Библиогр. 4.

Левин М.А. Экспериментальное определение частотных характеристик продольной реакции катящегося деформируемого колеса. Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 38—47.

Излагаются результаты исследования экспериментальных частотных характеристик продольной реакции катящегося деформируемого колеса в функции кинематической частоты и тангенциального псевдоскольжения. Описана экспериментальная установка и методика. Дан анализ результатов с учетом проскальзывания в области контакта колеса с опорной плоскостью. При этом использован метод гармонической линеаризации. Показано сильное влияние проскальзывания на вид частотных характеристик как для продольной, так и для боковой составляющих реакции в области контакта колеса. — Ил. 3. Табл. 1. Библиогр. 9.

УДК 539.3

Ламбина Е.Н. Об одном особом случае осесимметричных свободных колебаний сферической оболочки. Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 47—51.

Определяется общее решение дифференциального уравнения для радиального перемещения при осесимметричных свободных колебаниях сферической оболочки в случае кратных корней характеристического уравнения. — Библиогр. 4.

УДК 532.135

Ламбина Е.Н. О характере неустановившихся экспоненциальных течений вязко-упругих линейных жидкостей. Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 51—54.

Определяются течения вязко-упругой среды с функцией релаксации

$$M(t) = \sum_{i=1}^n G_i e^{-s_i t}$$

Показано, что в вязко-упругой жидкости возникают быстро затухающие колебания. — Библиогр. 4.

УДК 532.135

Лапушина Б.И. Неустановившееся течение вязко-упругой среды Максвелла в зазоре между цилиндрами. Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 54—59.

Рассмотрено течение вязко-упругой среды Максвелла в зазоре между цилиндрами, происходящее из состояния покоя за счет осевого перемещения внутреннего цилиндра с постоянной скоростью u . Определено поле скоростей. — Ил. 1. Библиогр. 2.

УДК 532.135

К и м А.Х., Б о г и н с к а я Т.Ф. Движение пластораствора в шнеке. – Теоретическая и прикладная механика , 1981, вып. 8, с. 59–64.

Дано решение задачи о движении в шнеке пластораствора, реологические свойства которого описываются степенным законом.

Результаты полученного решения позволяют определить распределение скоростей, давлений, мощности при движении пластораствора в шнеке. — Ил. 2.

УДК 539.215+622.331

Б е з м е н В.И. Определение линий сводообразования в сыпучих материалах при выгрузке их из бункера призматической формы. – Теоретическая и прикладная механика , 1981, вып. 8, с. 64–69.

Теоретически определены линии сводообразований в мелкофракционных сыпучих материалах при выгрузке их из бункера. Использование полученных результатов позволит более эффективно бороться с явлениями сводообразования в бункерах. — Ил. 1. Табл. 2.

УДК 621.791:541.65

Б у т к е в и ч Н.Н. Формирование остаточных напряжений при изготовлении моделей из материала ЭД-20. – Теоретическая и прикладная механика , 1981, вып. 8, с. 70–73.

Приводятся результаты исследования поведения компаундов на основе ЭД-20 при полимеризации. Показана возможность изучения формирования остаточных напряжений для создания предварительно напряженного состояния в деталях и изучения вопросов ползучести и релаксации на этих материалах. — Ил. 2. Табл. 2. Библиогр. 2.

УДК 621.791:541.65

Б у т к е в и ч Н.Н. Исследование влияния ползучести на релаксацию температурных напряжений. – Теоретическая и прикладная механика , 1981, вып. 8, с. 73–77.

Приводятся результаты исследования влияния скорости охлаждения цилиндрических моделей из материала ЭД-20М на процесс релаксации температурных напряжений, происходящий в зоне ползучести механических характеристик материала. Предполагается возможность моделирования напряжений в металлических отливках при их затвердевании. — Ил. 2. Библиогр. 4.

УДК 534.29

М а р т ы н е н к о М.Д., Д о л б и н Н.А., Д о в г я л л о И.Г., К о н ч и ц Р.М. Влияние геометрических параметров на собственную частоту продольно колеблющихся многоступенчатых стержней. – Теоретическая и прикладная механика , 1981, вып. 8, с. 77–82.

Получено уравнение частот собственных колебаний многоступенчатых стержней с учетом галтельных переходов. Решение данного уравнения на ЭВМ "Мир-2", показало, что геометрия галтельного перехода значительно влияет на значение волнового коэффициента. Приведено сравнение расчетных и экспериментальных данных. — Ил. 2. Табл. 1. Библиогр. 4.

УДК 539.319

Ш и д л о в с к и й И.Ф., Д е в о й н о Г.Н. Экспериментальное определение напряжений при кручении несущей системы транспортной конструкции. — Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 83—86.

Определены напряжения при кручении рамы на 4^0 для 7 вариантов испытаний и указывается на необходимость разработки новой методики расчета рам на кручение с учетом влияния связей, наложенных на ее элементы. — Табл. 2. Библиогр. 1.

УДК 621.01

А с т а х о в Э.И., К у д и н В.В. Оптимальный синтез направляющего механизма привода электропилы. — Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 86—90.

Рассмотрен оптимальный шарнирно-рычажной направляющий механизм, предназначенный в качестве механизма привода электропил. Используя условие размыкания кинематической цепи, получена целевая функция, минимизация которой с учетом ограничений на длины звеньев и углы передачи позволила синтезировать механизм, удовлетворяющий технологическим требованиям. Задача решена на ЭЦВМ "Минск—22М" с применением стандартной программы "Оптимизатор". Получены конкретные значения десяти параметров механизма по заданному закону перемещений точки М шатуна. — Ил. 1. Табл. 1. Библиогр. 4.

УДК 621.01.

К а м ц е в Е.А., А к у л и ч В.К. Кинетостатический силовой расчет четырехзвенного шарнирно-рычажного механизма аналитическим методом. — Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 90—96.

Рассматривается аналитический метод определения динамических реакций в кинематических парах механизма шарнирного четырехзвенника. Для учета сил инерции используется метод замещающих точек. Приведенные формулы пригодны для реализации задач на ЭЦВМ. — Ил. 3. Табл. 1. Библиогр. 3.

УДК 539.3

Б о с а к о в С.В. Расчет клина с краевым разрезом. "Теоретическая и прикладная механика", 1981, вып. 8, с. 96—99.

Способом ортогональных многочленов, используя методы специальной аппроксимации, предлагается решение плоской задачи теории упругости для клина с краевым симметричным разрезом. — Ил. 2. Библиогр. 3.

Ф л у с о в Н.Н. К вопросу о применении R -функций в задачах трехмерной теории упругости.— Теоретическая и прикладная механика , 1981, вып. 8, с. 99—109.

Получена структура решения задачи трехмерной теории упругости в перемещениях для цилиндрического тела поперечного сечения произвольной формы. Тело нагружено по боковой поверхности системой самоуравновешенных нагрузок; торцы свободны от нагрузок.

Общее решение проиллюстрировано примером. — Ил. 1.
УДК 532.135.001.5

К и м А.Х., К и м А.А. Диссипация энергии при вискозиметрическом течении неньютоновских систем.— Теоретическая и прикладная механика , 1981, вып. 8, с. 109—115.

Рассматривается процесс диссипации энергии при вискозиметрическом течении неньютоновской жидкости, подчиняющейся степенному реологическому закону.

УДК 621.791.541.65

Е р ш о в Г.Ф., К о с ы х Э.Г. К вопросу проектирования каркаса оболочки со случайно расположенными вершинами. "Теоретическая и прикладная механика", 1981, вып. 8, с. 116—122.

В статье изложена методика раскрытия оболочки вращения на неравносторонние треугольные подобласти со случайно расположенными вершинами.

На примере сферической оболочки произведены вычисления и получены численные результаты. — Ил. 2. Табл. 1. Библиогр. 4.

УДК 621.85.01

Б а р ш а й О.С. К выводу уравнений нестационарного движения растяжимой нити по шкиву.— Теоретическая и прикладная механика , 1981, вып. 8, с. 122—126.

Приведен вывод уравнения, описывающего нестационарное движение гибкой растяжимой нити по шкиву с деформируемой периферией. Показана аналогия с качением деформируемого колеса. Предлагается использовать аппарат теории качения для описания динамики нити, взаимодействующей со шкивом. — Ил. 1. Библиогр. 5.

УДК 531.325.531.355

Р а п и н ч у к Л.К. Движение материальной точки по линии пересечения двух поверхностей.— Теоретическая и прикладная механика , 1981, вып. 8, с. 126—137.

Получено дифференциальное уравнение движения материальной точки по линии пересечения двух подвижных, недеформирующихся поверхностей. Величины, входящие в это уравнение, зависят либо от формы (уравнение) одной или другой поверхности, либо от движения их. Даны формулы для опре-

деления этих величин. Приведены примеры формализованного составления уравнения движения материала в центробежном разбрасывателе. — Ил. 2. Библиогр. 5.

УДК 531.32

Р а п и н ч у к Л.К. К составлению дифференциальных уравнений движения материальной точки по шероховатой поверхности. — Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 138—147.

Получены дифференциальные уравнения движения материальной точки по шероховатой, подвижной, недеформирующей поверхности. Часть коэффициентов уравнений зависят от формы (уравнения) поверхности, часть — от движения ее. Даны формулы для определения коэффициентов поверхностей. Полученные уравнения позволяют свести составление дифференциальных уравнений движения материальной точки по поверхности к подстановке коэффициентов. — Ил. 2. Библигр. 5.

УДК 536.24

К и м А.А. Стационарное диссипативное течение нелинейно вязко-пластичной среды с температурозависимой вязкостью. — Теоретическая и прикладная механика, 1981, вып. 8, с. 147—152.

Рассмотрено одномерное течение реологически сложной среды с учетом диссипации тепловой энергии.