

Реологические исследования проводились на установке, основной узел которой представляет собой вискозиметр системы А.А. Трапезникова. Термостатирование осуществлялось с помощью термостата и ультратермостата ТЛ-150. Исследуемый материал помещался в зазор между рабочими цилиндрами после тщательного перемешивания в течение часа.

М.Д. Устинов

К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПОКОЯЩЕМСЯ ГАЗЕ

Аналитическое исследование одномерных течений газа связано со значительными трудностями, которые определяются, с одной стороны, нелинейностью системы уравнений в частных производных, описывающих движение газа, и, с другой стороны, наличием граничных условий на заранее неизвестных линиях. В тех случаях, когда в начальных и граничных условиях задачи фигурируют лишь две постоянные с независимыми размерностями, система уравнений в частных производных сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1], и соответствующие течения называются автомодельными. Такое сведение оказывается возможным без анализа граничных условий.

В некоторых случаях (в частности, в рассматриваемой ниже задаче) постоянные, фигурирующие в условиях задачи, и независимые переменные позволяют образовать две независимые безразмерные переменные, но анализ граничных условий (и уравнений движения) дает возможность нелинейную систему уравнений движения газа свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, и в этом смысле задачу можно считать автомодельной.

1. Рассмотрим следующую задачу: пусть в полубесконечной цилиндрической трубе ($0 < x < \infty$) находится покоящийся газ, давление которого $p \equiv 0$, плотность ρ_0 является известной функцией x , $\rho_0 = \rho_* \Psi(\lambda)$, где $\lambda = x/a$, причем постоянные ρ_* и a имеют размерности плотности и длины соответственно. В момент времени $t = 0$ поршень, находящийся в сечении $x = 0$, начинает двигаться в область, занятую газом, по некоторому закону $x = x(t)$. Перед поршнем воз-

никает сильная ударная волна, закон движения которой известен

$$x = a \Phi(\mu) , \quad \mu = t / b ,$$

где Φ — известная функция; t — время и b — постоянная, имеющая размерность времени.

Требуется определить закон движения поршня $x(t)$ и течение газа в области между поршнем и сильной ударной волной.

Одномерное адиабатическое движение идеального газа описывается следующей системой уравнений [1] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial p / \rho^\gamma}{\partial t} + u \frac{\partial p / \rho^\gamma}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

где u , p , ρ — скорость, давление и плотность газа; x — геометрическая координата; t — время; γ — показатель адиабаты.

На ударной волне имеем

$$u = \frac{2}{\gamma+1} U_0 ; \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} ; \quad p = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 U_0^2 ; \quad U_0 = \frac{a}{b} \Phi'(\mu) . \quad (1.2)$$

Введем два безразмерных переменных параметра v_1 и v_2 :

$$v_1 = \Phi(\mu) - \lambda ; \quad v_2 = \Phi(\mu) / \lambda ; \quad \lambda = x/a ; \quad \mu = t/b , \quad (1.3)$$

которые на ударной волне сохраняют постоянные значения ($v_1 = 0$; $v_2 = 1$).

Поставим задачу найти функции $\psi(\lambda)$ и $\phi(\mu)$, для которых решение поставленной задачи можно искать в следующей форме:

$$u = \frac{a}{b} \phi'(\mu) f(v_1) ; \quad p = p_* \psi(\lambda) \varphi(v_1) ; \quad \rho = \rho_* \frac{a^2}{b^2} \phi'^2(\mu) \psi(\lambda) \psi(v_1) . \quad (1.4)$$

Из условий (1.2) следует, что неизвестные функции f , φ , ψ сохраняют постоянные значения на ударной волне (при $v_1 = 0, 1$).

Можно доказать, что подстановка (1.4) в систему (1.1) приводит ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

лишь в том случае, когда функции Φ и Ψ удовлетворяют определенным соотношениям, а именно:

$$\Phi'' = k(\Phi')^2; \quad \Psi' = \alpha \Psi \quad \text{для} \quad i = 1 \quad (1.5)$$

$$\Phi \Phi'' = m(\Phi')^2; \quad \lambda \Psi' = n \Psi \quad \text{для} \quad i = 2,$$

где k , α , m и n — произвольные постоянные.

Интегрируя (1.5) и учитывая, что уравнения (1.1) инвариантны по отношению к преобразованию $x' = x + h$; $t' = t + \tau$ (h и τ — постоянные), получаем следующие пять случаев:

I. $k = 0$, т.е. сильная ударная волна движется по линейному закону в покоящейся газе, плотность которого меняется по экспоненциальному закону.

II. $k \neq 0$; $\alpha \neq 0$, т.е. ударная волна движется по логарифмическому закону в среде, плотность которой меняется по экспоненциальному закону.

III. $k \neq 0$, $\alpha = 0$, когда плотность перед ударной волной, движущейся по логарифмическому закону, постоянна.

IV. $m = 1$, что соответствует движению ударной волны по экспоненциальному закону в среде, плотность которой меняется по степенному закону.

V. $m \neq 1$, когда сильная ударная волна движется по степенному закону в среде с плотностью, также меняющейся по степенному закону.

Ставшая классической теория автомодельных течений газа типа У рассмотрена в [1] и применена к исследованию задачи о поршне в [2 - 5]. Решения типа II использовались в работах [6 - 8] для решения ряда задач.

В настоящей работе исследованы случаи I, III, IV (в последнем случае плотность покоящегося газа считается постоянной).

2. Пусть в области $X > 0$ находится покоящийся газ, плотность ρ_0 которого постоянна, давление $p_0 = 0$. В момент $t = 0$ по газу начинает распространяться ударная волна по закону

$$x(t) = a \ln(1 + t/b); \quad ab > 0. \quad (2.1)$$

Требуется определить движение поршня, порождающего волну (2.1), и течение газа в области между поршнем и ударной волной.

Для решения задачи примем в качестве новых независимых переменных функций $\tau(x, t)$ и $\xi(x, t)$, существование которых вытекает из (1.1) и которые определяются равенствами

$$d\tau = \rho dx - \rho u dt ; d\xi = \rho u dx - (\rho + \rho u^2) dt \quad (2.2)$$

и приведем систему (1.1) к следующей форме [9]:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} - f(\tau) \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0 ; \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\gamma-1}{\gamma} V \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 ; \quad (2.3)$$

$$u = U ; \quad \rho = V^{\gamma/\gamma-1} ; \quad p = V^{1/\gamma-1} (\gamma-1)^{-1} f^{-1}(\tau) ,$$

где $f(\tau)$ - произвольная функция.

Ищем решение поставленной задачи в виде:

$$U = \frac{a}{b} e^{-\frac{\tau}{\alpha \rho_0}} F(\sigma) ; V = h \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \rho_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{2(\gamma-1)\tau}{\gamma \alpha \rho_0}} \Phi(\sigma) ; \quad (2.4)$$

$$f(\tau) = H \left(\frac{a}{b} \right)^{2/\gamma} \rho_0^{-(\gamma-1)/\gamma} e^{-\frac{2\tau}{\gamma \alpha \rho_0}} ; \quad \sigma = \frac{b \xi}{\rho_0 a^2} e^{\frac{\tau}{\alpha \rho_0}} ; h = 2 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} ; H = h^{-1} .$$

Тогда система (2.3) переходит в обыкновенную систему дифференциальных уравнений:

$$-F + (\sigma + F) \frac{dF}{d\sigma} - \frac{d\Phi}{d\sigma} = 0 , -2\Delta \Phi + (\sigma + F) \frac{d\Phi}{d\sigma} - \Delta F \frac{dF}{d\sigma} = 0 , \Delta = \frac{\gamma-1}{\gamma} . \quad (2.5)$$

На сильной ударной волне $\sigma = 0$ [9], и нетрудно проверить, используя (2.4), что условия на ударной волне (2.1) будут выполнены, если принять, что

$$F(0) = \frac{2(1-\Delta)}{2-\Delta} ; \quad \Phi(0) = \frac{2(1-\Delta)^2}{(2-\Delta)^2} . \quad (2.6)$$

Таким образом, необходимо найти решение системы (2.5), удовлетворяющее начальным условиям (2.6).

3. Полагая, $F = \sigma_w(\sigma)$; $\Phi = \sigma_z^2(\sigma)$, приведем систему (2.5) и условия (2.6) к следующей окончательной форме:

$$\frac{dz}{dw} = z \frac{2\alpha z + 2(\alpha-1) + (3\alpha-4)w - 2w^2}{\alpha z(w+2) - w^2(1+w)}; \quad (3.1)$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{(1+w)^2 - \alpha z}{\alpha z(w+2) - w^2(1+w)} dw, \quad \frac{z}{w^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sigma w \rightarrow \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \text{ при } \sigma \rightarrow 0.$$

Основное уравнение (3.1) имеет четыре особые точки:

$$O(0,0); A(-1,0); B\left[\frac{2(\alpha-1)}{2-\alpha}, \frac{2(\alpha-1)^2}{(2-\alpha)^2}\right] \text{ и } C\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{9\alpha}\right)$$

причем при $\alpha = 1/2$, т.е. при $\gamma=2$, точки В и С совпадают. Точка О есть седло-узел [10], каноническая окрестность которого состоит из параболического и двух гиперболических секторов. Исследование (3.1) при $w \rightarrow +0$ (внутри параболического сектора) показывает, что

$$z = C w^{2-\alpha} e^{-\frac{2(1-\alpha)}{w}}; \quad w \rightarrow +0, \text{ где } C = \text{const}. \quad (3.2)$$

В частности, при $\alpha=0$ (когда $\gamma=1$) общее решение основного уравнения (3.1) имеет вид

$$z = C w^2 e^{-\frac{2}{w}}; \quad \sigma = C_1 e^{\frac{1}{w}} w^{-1}. \quad (3.3)$$

Точка А является узлом с характеристическими направлениями $k_1=0$ и $k_2=(1-\alpha)/\alpha$ в плоскости (w, z) . Точка В является седлом при $0 < \alpha < 1/2$ и узлом при $1/2 < \alpha < 1$. Точка С является фокусом при $0 < \alpha < 7/16$, узлом при $7/16 < \alpha < 1/2$ и седлом при $1/2 < \alpha < 1$ (при $\alpha = 7/16$ - вырожденный узел). Если $\alpha=1/2$, точка С есть седло - узел.

Из (3.1) следует, что в окрестности точки $w = \infty$ иско-мое решение имеет следующее представление:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{2} w^2 - w + \frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} - 4 \frac{2+11\alpha}{3(2-\alpha)^2 w} + \dots \\ \sigma &= \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)w} + \frac{4(1-\alpha)^2}{(2-\alpha)^2 w^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

При движении вдоль траекторий частиц газа в направлении $dt > 0$ ξ уменьшается, но, как видно из (3.1), знак $d\xi$ совпадает со знаком $b d\sigma$. Следовательно, необходимо рассмотреть два случая (поскольку $ab > 0$):

$$a > 0 ; \quad b > 0 \quad (\text{первый случай})$$

$$a < 0 ; \quad b < 0 \quad (\text{второй случай}).$$

В первом случае $d\sigma < 0$, и из (3.4) следует, что движению вдоль траекторий частиц газа от ударной волны в направлении $dt > 0$ соответствует перемещение по интегральной кривой (3.4) из точки $z = +\infty$, $w = -\infty$ в направлении $dw > 0$. При таком движении, как показывает более детальное исследование поля интегральных кривых уравнения (3.1), мы неизбежно пересечем параболу $z = (w + 1)^2$ в некоторой точке $M(w_*, z_*)$, при переходе через которую $d\sigma$, а значит, и $d\xi$ меняет знак, что невозможно. Следовательно, рассматриваемое течение имеет в плоскости (x, t) предельную линию L , образом которой и является точка $M(w_*, z_*)$.

Найдем уравнения траекторий частиц газа, полагая в (2.2) $\tau = \text{const}$ и используя (2.4) и (3.1). Оказывается, что

$$x = \frac{\tau}{\rho_0} - a \int_0^\sigma \sigma w (hz\sigma^2)^{-\gamma/\gamma-1} d\sigma, \quad (3.5)$$

$$t = (e^{\frac{\tau}{a\rho_0}} - 1)b - e^{\frac{\tau}{a\rho_0}} b \int_0^\sigma (hz\sigma^2)^{-\gamma/\gamma-1} d\sigma.$$

При этом использовано то обстоятельство, что на ударной волне $\tau = \rho_0 x$ и $1 + t/b = \exp(\tau/a\rho_0)$. Полагая в (3.5) $\tau = 0$, найдем траекторию поршня. Обозначим координаты предельной точки M_* на поршне через x_*, t_* . Полагая, далее, в (3.5) $\sigma = \sigma_*$ и меняя τ от 0 до ∞ , получим в параметрическом виде уравнение предельной линии в плоскости (x, t) . Исключая τ , будем иметь

$$x = a \ln \frac{t+b}{t_*+b} + x_*. \quad (3.6)$$

Можно показать, что ударная волна (2.1) и предельная линия (3.6) не пересекаются. Докажем, что (3.6) является C^+ -характеристикой, т.е. вдоль нее $dx/dt = u + c$ ($c = \sqrt{\gamma p \rho^{-1}}$).

скорость звука). Действительно, из (2.2) следует, что вдоль C_+ -характеристики

$$d\xi = (u - c\gamma^{-1}) d\tau = \frac{a}{b}(\omega + \sqrt{\lambda z}) \sigma e^{-\frac{\tau}{\alpha\rho_0}} d\tau = -\frac{a}{b} \sigma_* e^{-\frac{\tau}{\alpha\rho_0}} d\tau,$$

поскольку на предельной линии $(1 + \omega_*)^2 = \lambda z_*$ и $\omega_* < -1$. Сравнение с равенством (2.4), связывающим σ , ξ и τ , показывает, что линия (3.6) в каждой своей точке касается выходящей из этой точки C_+ -характеристики. Следовательно, линия (3.6) является C_+ -характеристикой, выходящей из точки M_* .

Поскольку задача о продолжении решения через характеристику решается неоднозначным образом, имеем следующий результат: задача о нахождении движения поршня, порождающего ударную волну (2.1), движущуюся в покоящемся газе с параметрами $p_0 = 0$, $\rho_0 = \text{const}$ при $a > 0$, $b > 0$ имеет бесчисленное множество решений.

Во втором случае, когда $a < 0$, $b < 0$, движению вдоль траекторий частиц газа от ударной волны в направлении $dt > 0$ соответствует перемещение по интегральной кривой (3.4) из точки $\omega = +\infty$, $z = +\infty$ в направлении $d\omega < 0$ (в этом случае $\sigma > 0$). Анализ поля интегральных кривых уравнения (3.1) показывает, что при таком перемещении мы неизбежно придем в точку $z = \omega = 0$. В этом случае задача имеет единственное решение. Все частицы газа (как и ударная волна) уходят в бесконечность за конечный промежуток времени, различный для различных частиц. Если T_τ - время ухода произвольной частицы $\tau = \text{const}$ в бесконечность, то можно показать, используя (3.5), что

$$T_\tau = T_0 + (e^{\frac{\tau}{\alpha\rho_0}} - 1)(b + T_0) < T_0 = -\frac{\gamma+1}{2} b h_0, \quad h_0 = \int_0^\infty (h z \sigma^2)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} d\sigma,$$

где T_0 - время ухода поршня в бесконечность.

4. Пусть в области $x > 0$ находится покоящийся газ, давление которого равно нулю, плотность ρ_0 постоянна. В момент $t = 0$ в область, занятую газом, начинает двигаться ударная волна по экспоненциальному закону $x = a(e^{t/b} - 1)$, где a и b - постоянные, имеющие размерности длины и времени соответственно. Требуется определить движение поршня, порож-

дающего эту волну, и течение газа в области между поршнем и волной.

Решение поставленной задачи ищем в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} u = U = \frac{\tau + \alpha p_0}{b p_0} F(\sigma), \quad v = v_0 \frac{\gamma - 1}{\sigma^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \left(\frac{\tau + \alpha p_0}{b p_0} \right)^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}} \Phi(\sigma) h \\ f(\tau) = p_0 \frac{\gamma - 1}{\sigma^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \left(\frac{\tau + \alpha p_0}{b p_0} \right)^{2/\gamma} H, \quad \sigma = \frac{b p_0 \xi}{(\tau + \alpha p_0)^2}, \quad F = \sigma w, \quad \Phi = \sigma^2 z \end{aligned} \right\} (4.1)$$

Здесь используются принятые ранее обозначения. Подстановка в (2.3) приводит к системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dw} = z \frac{2\alpha z + 4(\alpha - 2) + (3\alpha - 8)w - 2w^2}{(\alpha z - w - w^2)(w + 2)}, \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{(w + 2)^2 - \alpha z}{(\alpha z - w - w^2)(w + 2)}, \\ \frac{z}{w^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sigma w \rightarrow \frac{2(1 - \alpha)}{2\alpha} \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow 0. \end{aligned} \right\} (4.2)$$

Траектории частиц газа в плоскости (x, t) определяются равенствами

$$x = \frac{\tau + \alpha p_0}{\alpha p_0} \alpha \int_0^{\sigma} \sigma w (h z \sigma^2)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} d\sigma + \frac{\tau}{p_0}, \quad t = b h \ln \frac{\tau + \alpha p_0}{\alpha p_0} - b \int_0^{\sigma} \frac{\sigma^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{(h z \sigma^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} d\sigma \quad (4.3)$$

Анализ уравнений и условий (4.2) приводит к следующему результату:

при $\alpha < 0$, $b < 0$, т.е. при $\sigma < 0$, двигаясь по интегральной кривой, удовлетворяющей условиям (4.2), из точки $w = -\infty$, $z = +\infty$, мы неизбежно пересечем параболу $\alpha z = (w + 2)^2$ в некоторой точке $M(w_*, z_*)$, причем $w_* < -2$. Эта точка является образом предельной линии L течения в плоскости (x, t) .

Полагая в (4.3) $\sigma = \sigma_* = \sigma(w_*)$ и исключая τ , найдем уравнение этой линии

$$x = x_* + (a + x_*) (e^{\frac{t-t_*}{b}} - 1). \quad (4.4)$$

Нетрудно доказать, что линия (4.4) и ударная волна не пересекаются и что (4.4) является C_+ -характеристикой течения. Следовательно, при $a < 0$, $b < 0$ задача о нахождении движения поршня, порождающего ударную волну $x = a(e^{t/b} - 1)$, которая движется в покоящемся газе с параметрами $p_0 = 0$, $\rho_0 = \text{const}$, имеет бесчисленное множество решений.

При $a > 0$, $b > 0$ ($\sigma > 0$), двигаясь по интегральной кривой из точки $w = z = +\infty$, мы неизбежно приходим в точку $w = z = 0$, и задача имеет единственное решение.

5. Пусть в области $x > 0$ находится покоящийся газ, давление которого равно нулю, а плотность ρ распределена по экспоненциальному закону $\rho = \rho_0 \exp(x/\alpha)$, где ρ_0 и α — постоянные, имеющие размерности плотности и длины соответственно. В момент $t = 0$, в область, занятую газом, начинает двигаться по линейному закону $x = U_0 t$ ($U_0 = \text{const}$) ударная волна. Для нахождения движения поршня, порождающего эту ударную волну, будем искать решение системы (2.3) в виде:

$$\left. \begin{aligned} u = U = U_0 F(\sigma), \quad v = \left(\frac{\tau + \alpha \rho_0}{\alpha} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} U_0 \Phi(\sigma) h, \quad F = \sigma w, \quad \Phi = \sigma^2 z \\ f(\tau) = \left(\frac{\tau + \alpha \rho_0}{\alpha} \right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} U_0 H, \quad \sigma = \frac{\xi}{(\tau + \alpha \rho_0) H} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Соответствующая система уравнений такова:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dw} = z \frac{2\alpha z(\alpha-2) + (\alpha-4)w - 2w^2}{(\alpha z - w - w^2)(w+1)}, \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{(w+1)^2 - \alpha z}{(\alpha z - w - w^2)(1+w)} \\ \frac{z}{w^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sigma w \rightarrow \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Исследование задачи (5.2) показывает, что при $a > 0$ (т.е. при $\sigma > 0$) задача имеет единственное решение (движение по

интегральной кривой (5.2) из точки $\omega = z = +\infty$ приводит в начало координат). При $a < 0$, двигаясь по интегральной кривой из точки $\omega = -\infty$, $z = +\infty$, мы приходим в некоторую точку $M(\omega_*, z_*)$, расположенную на параболе $(\omega + 1) = \alpha z$. Эта точка является образом предельной линии L течения в плоскости (x, t) . Можно доказать, что эта линия является прямой, параллельной линии $x = U_0 t$, и одновременно является C_+ -характеристикой. Следовательно, при $a < 0$ поставленная выше задача имеет бесчисленное множество решений.

Л и т е р а т у р а

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М., 1965. 2. Крашениникова Н.Л. О неустановившихся движениях газа, вытесняемого поршнем. - "Изв. АН СССР. ОТИ", 1955, № 8. 3. Григорян С.С. Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения). - ПММ, Т 22, вып. 2, 1958. 4. Гродзовский Г. Л., Крашениникова Н.Л. Автомодельные движения газа с ударными волнами, распространяющимися по покоящемуся газу. - ПММ, Т. 23. Вып. 5, 1959. 5. Rangarao M.P., Purohit S.C. A selfsimilar piston problem. - "Journ. Eng. Math", 1971, т. 5, № 4. 6. Райзер Ю.П. Распространение ударной волны в неоднородной атмосфере в сторону уменьшающейся плотности. ЖПМТФ. 1964, № 4. 7. Мозжилкин В.В., Фалькович С.В. Распространение ударных волн в среде с экспоненциальной плотностью. - "Изв. АН СССР. МЖГ." 1970, № 6. 8. Устинов М.Д. Некоторые аналитические решения уравнений одномерного движения газа и их приложения. - "Изв. АН СССР. МЖГ". 1973, № 2. 9. Устинов М.Д. Преобразование и некоторые решения уравнений движения идеального газа. - "Изв. АН СССР. МЖГ". 1966, № 3. 10. Андронов А.А. и др. Качественная теория динамических систем. М., 1966.

Р.В. Шаймуратов

К РАСЧЕТУ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА ЖИДКОСТЕЙ В СИСТЕМЕ СКВАЖИН

Из-за больших трудностей, возникающих при точном решении системы дифференциальных уравнений, которые описывают вытеснение нефти водой при площадном заводнении пласта, в на-