

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАК – КЕНДРИКА С ГЛОБАЛЬНОЙ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРОЙ КАК МОДЕЛЬ ЛЕЙКОЗНОГО КРОВЕТВОРЕНИЯ

Кайгермазов А.А.¹, Кудиева Ф.Х.¹, Жемухов А.Х.², Хаишхожева Д.А.¹

¹ Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова

² Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет им. В.М. Кокова

Аннотация. Предлагаемая работа посвящена математическому анализу популяционной модели, описывающей динамику лейкозного кроветворения. Методом Бусенберга-Ионелли исходная задача сводится к решению системы интегральных уравнений относительно интенсивности рождения новых особей $\chi(t)$ и численности популяции возраста τ_0 , т.е. $v(\tau_0, t)$.

Ключевые слова: популяция, возраст, возрастная структура, стационарные состояния, закон рождаемости, максимальный возраст, нелокальное условие, лимитирование.

Введение. Учет влияния возрастной структуры популяции на динамику плотности позволяет рассматривать популяцию как систему с распределенными параметрами и дает возможность описывать ее динамику более адекватно реальности [1]. Кроме того, информация о возрастной структуре популяции необходима для решения проблем, связанных с рациональной эксплуатацией как естественных, так и искусственных популяций.

В непрерывных моделях с глобальной возрастной структурой в качестве основных характеристик популяции выступают [2]:

- плотность численности (биомассы) популяции $u(\tau, t)$;
- плотность рождаемости $G(\tau, t, u(\bullet, t))$;
- плотность смертности $F(\tau, t, u(\tau, t); u(\bullet, t))$.

Здесь τ – биологический возраст популяции, t – время.

В общем случае модели этого класса можно записать в виде:

$$\begin{aligned} u_\tau + u_t &= F(\tau, t, u(\tau, t); u(\bullet, t)), \\ u(\tau, t) &= \varphi(\tau), \\ u(0, t) &= G(\tau, t, u(\bullet, t)), \end{aligned}$$

основной чертой которых является нелинейность F и G , и глобальная зависимость от возраста τ , так как он входит в F и G через $u(\bullet, t)$.

Использование глобальной возрастной структуры в популяционных задачах позволяет учитывать многие свойства внутривидовых взаимодействий самой популяции, например, внутривидовую конкуренцию. Поэтому, исследование моделей с глобальной возрастной структурой имеет большое практическое значение.

В данной работе рассмотрена математическая модель с глобальной возрастной структурой как модель лейкозного кроветворения. Предложенная модель методом расщепления Бусенберга - Ианелли сведена к решению более простых задач [3].

Постановка задачи. Учет возрастной структуры кроветворных клеток является одним из существенных моментов модели гемопоэза для анализа лучевой патологии. Успешный анализ на основе такой модели пострадиационного кроветворения позволяет надеяться на результативность аналогичных модельных построений при исследовании других гематологических заболеваний.

Модель, описывающая динамику клеток, должна учитывать размножение, созревание и «сбор урожая». Для этих целей может быть использовано следующее уравнение

$$u_\tau + u_t = \alpha(\tau, t)u - \delta u(\tau_0, t),$$

где $u(\tau, t)$ – численность созревающих клеток возраста τ в момент времени t ; $\alpha(\tau, t)$ – удельная скорость пролиферации клеток возраста τ в момент времени t ; δ – заданная постоянная; $\tau_0 \in [0, l]$.

Согласно имеющимся представлениям о механизмах регуляции в системе крови коэффициент $\alpha(\tau, t)$ можно представить в виде:

$$\alpha(\tau, t) = \frac{m}{1 + a \int_0^l u(\tau, t) d\tau},$$

где m – максимальная скорость пролиферации клеток; a – коэффициент межклеточного взаимодействия; l – полное время созревания клеток.

С учетом сказанного выше, математическую модель лейкозного кроветворения можно описать задачей [4]:

Задача. Найти непрерывное в области $\Omega = \{(\tau, t): 0 < \tau < l, 0 < t < T\}$ решение уравнения

$$u_\tau + u_t = \frac{m}{1 + a \int_0^l u(\tau, t) d\tau} u - \delta u(\tau_0, t), \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(\tau, 0) = \varphi(\tau), \quad (2)$$

$$u(0, t) = \int_0^l c(\tau) u(\tau, t) d\tau, \quad (3)$$

где $\varphi(\tau)$ – функция начального возрастного распределения клеток,

$c(\tau)$ – коэффициент размножения.

Анализ результатов. Будем искать решение уравнения (1) в виде:

$$u(\tau, t) = v(\tau, t) \cdot P(t), \quad (4)$$

где $P(t) = \int_0^l u(\tau, t) d\tau$ – общая численность лейкозных клеток.

Тогда функции $v(\tau, t)$, $P(t)$, задающие решение задачи 1 удовлетворяют задачам

$$v_\tau + v_t = -\delta v(\tau_0, t), \quad (5)$$

$$(V): \quad v(\tau, 0) = \varphi_1(\tau), \quad (6)$$

$$v(0, t) = \int_0^l c(\tau) v(\tau, t) d\tau, \quad (7)$$

$$(P): \quad P' = \frac{mP}{1 + aP}, \quad (8)$$

$$P(0) = P_0. \quad (9)$$

где $P_0 = \int_0^l \varphi(\tau) d\tau$, $\varphi_1(\tau) = \frac{\varphi(\tau)}{P_0}$.

Преимущество приведенной схемы заключается в том, что она дает возможность определения общей концентрации созревающих лейкозных клеток из решения простой задачи P . Исследуем эту задачу.

Задача (P) эквивалентна уравнению

$$P \cdot e^{a(P-P_0)} = P_0 e^{mt}. \quad (10)$$

Стационарные состояния модели (P) совпадают с неотрицательными решениями уравнения

$$m \cdot P = 0.$$

Последнее возможно в двух случаях:

1) при $m=0$. Это условие означает, что в популяции нет никакой пролиферации, и общая численность популяции остается неизменной, $P(t) = P_0$;

2) при $P=0$. В этом случае общая численность лейкозных стволовых клеток равна нулю. Если считать, что коэффициент межклеточного взаимодействия $a=0$, то из (10) следует, что

$$P(t) = P_0 \cdot e^{mt}.$$

Следовательно, общая численность лейкозных клеток растет экспоненциально.

Исследуем задачу (V) . Рассмотрим сначала локальную задачу, когда условие (3) имеет вид:

$$v(0, t) = \psi(t), \quad (11)$$

где $\psi(t)$ - известная функция.

Обращая оператор $Lv = v_\tau + v_t$ из уравнения (1), находим [5]:

$$v(\tau, t) = \begin{cases} \chi(\tau - t) - \delta \int_0^t v(\tau_0, s) ds, & \tau \geq t, \\ \chi(t - \tau) - \delta \int_\tau^t v(\tau_0, s) ds, & \tau < t, \end{cases} \quad (12)$$

где $\chi(z)$ – произвольная, непрерывно – дифференцируемая функция.

Согласовав (12) с условиями (2), (11) получим:

$$v(\tau, t) = \begin{cases} \varphi_1(\tau - t) - \delta \int_0^t v(\tau_0, s) ds, & \tau \geq t, \\ \varphi_2(t - \tau) - \delta \int_{t-\tau}^t v(\tau_0, s) ds, & \tau < t, \end{cases} \quad (13)$$

Пусть $\tau \geq t$. Считая $\tau = \tau_0$, из (13) имеем:

$$v(\tau_0, t) = \varphi_1(\tau_0 - t) - \delta \int_0^t v(\tau_0, s) ds.$$

Вводя обозначение $v(\tau_0, t) = v_0(t)$, получим:

$$v_0(t) = \left(\varphi_1(\tau_0) + \int_0^t \varphi_1'(\tau_0 - s) e^{-\delta s} ds \right) e^{-\delta t}.$$

Таким образом

$$v(\tau, t) = \varphi_1(\tau_0 - t) + \delta \varphi_1(\tau_0)(e^{-\delta} - 1) - \delta \int_0^t \int_0^z \varphi_1'(\tau_0 - s) e^{\delta(s-z)} ds dz \quad \tau \geq t. \quad (14)$$

Пусть $\tau < t$. Считая $\tau = \tau_0$, из (13) находим:

$$v_0(t) = \psi(t - \tau_0) - \delta \int_{t-\tau_0}^t v(\tau_0, s) ds.$$

Дифференцируя, получим:

$$v_0'(t) = \psi'(t - \tau_0) - \delta v_0(t) + \delta v_0(t - \tau_0). \quad (15)$$

Уравнение (15) представляет собой дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом [6].

Так как при $\tau \geq t$ решение задачи (1), (2), (11) задается формулой (14), то будем считать, что начальное условие для уравнения (15) задается на отрезке $[0, \tau_0]$, т.е.

$$v_0(t) = \mu_0(t), \quad \text{при } 0 \leq t \leq \tau_0. \quad (16)$$

Наиболее естественным методом решения задачи (15), (16) является так называемый метод шагов (или метод последовательного интегрирования), заключающийся в том, что непрерывное решение $v_0(t)$ рассматриваемой задачи определяется из дифференциальных уравнений без запаздывания. Т.к. решение задачи на отрезке $[0, \tau_0]$ существует и оно равно начальной функции $\mu_0(t)$, то при $t \in [\tau_0, 2\tau_0]$ уравнение (15) примет вид:

$$v_0'(t) = \psi'(t - \tau_0) - \delta v_0(t) + \delta \mu_0(t - \tau_0), \quad v_0(t + \tau_0) = \mu_1(t + \tau_0). \quad (17)$$

При $t \in [n\tau_0, (n+1)\tau_0]$

$$v_0'(t) = \psi'(t - \tau_0) - \delta v_0(t) + \delta \mu_n(t - \tau_0), \quad v_0(t + n\tau_0) = \mu_n(t + n\tau_0). \quad (18)$$

где $\mu_j(t)$ – решение рассматриваемой начальной задачи на отрезке $[t + (j-1)\tau_0, t + j\tau_0]$.

Рассмотрим теперь нелокальную задачу (V). Перепишем нелокальное условие (3) в виде:

$$v(0, t) = \int_0^t c(\tau) v(\tau, t) d\tau + \int_t^l c(\tau) v(\tau, t) d\tau.$$

Отсюда, учитывая (13), получим:

$$v(0, t) = \int_0^t c(\tau) v(\tau, t) d\tau + f(t). \quad (19)$$

$$\text{где } f(t) = \int_t^l c(\tau) \left[\varphi_1(\tau_0 - t) + \delta \varphi_1(\tau_0)(e^{-\delta} - 1) - \delta \int_0^t \int_0^z \varphi_1'(\tau_0 - s) e^{\delta(s-z)} ds dz \right] d\tau, \quad \tau \geq t.$$

Считая $\tau = \tau_0$, из (13) имеем:

$$v(\tau_0, t) = \chi(t - \tau_0) - \delta \int_0^t v(\tau_0, s) ds.$$

Аналогично, при $\tau = 0$, получим:

$$v(0, t) = \chi(t) - \delta \int_0^t v(\tau_0, s) ds.$$

Таким образом, учитывая (19) и последнее выражение, получим:

$$\begin{cases} v(\tau_0, t) - \delta \int_0^t v(\tau_0, s) ds = \chi(t - \tau_0), \\ \chi(t) - \int_0^t c(t - \tau) \chi(\tau) d\tau = \delta \int_0^t v(\tau_0, s) ds \left(1 - \int_0^t c(\tau) d\tau \right) + f(t). \end{cases} \quad (20)$$

Следовательно, при $\tau > t$ решение задачи (V) эквивалентно решению системы интегральных уравнений (20) относительно интенсивности рождения новых особей $\chi(t)$ и численности популяции возраста τ_0 , т.е. $v(\tau_0, t)$.

Список использованных источников

- 1) Mak-Kendrick A.G. The theory of continuous probabilities. Proc., London Math. Soc., 23, 1914. – Pp.401-415.
- 2) Hoppensteadt F. An age dependent epidemic model. I. Franklin inst., 1974. – V. 291. – Pp. 325-333.
- 3) Busenberg S., Yanelli M. A class of nonlinear diffusion problems in age – dependent population dynamics. I. of nonlin. anal. theory and appl. №5, 1983. – Pp. 501-529.
- 4) Кайгермазов А.А., Кудяева Ф.Х., Сайег Т.Х. Математические модели динамики популяции с глобальной возрастной структурой. Актуальные проблемы науки. Материалы Всероссийской научно-практической конференции (с международным участием). – Нефтекамск, 2014. – Т. 3. – С. 38-48.
- 5) Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. Дифференциальные уравнения, 1983. – Т.19. – №1. – С.86-94.
- 6) Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1964. – 127с.

УДК 631.172:636

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭНЕРГОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СРЕДСТВ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ИК ОБЛУЧЕНИЯ ПОРОСЯТ-ОТЪЕМЫШЕЙ

Косько А.Н.

*Республиканское научно-производственное унитарное предприятие
«Институт энергетики Национальной академии наук Беларуси»*

Согласно информационно-технологической концепции Industry 4.0, на современном этапе развития технологий необходима интеграция вычислительных ресурсов в физические процессы. Сельское хозяйство в целом и животноводство в частности в этом смысле не исключение. Повышение эффективности функционирования технологических процессов в аграрном производстве, согласно данной концепции, становится возможным путем внедрения в них интеллектуальных систем управления, в том числе использующих средства видеонаблюдения.

Применение инструментария видеонаблюдения позволяет решить следующие задачи [1]:

- визуальное наблюдение реального местоположения, перемещения и поведения животных и других подвижных объектов;
- формирование данных об отклонении животного от маршрута движения или поведения;