

Министерство образования Республики Беларусь

**БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ**

Кафедра инженерной математики

Н. Н. Роговцов

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов специальностей

T.06.01, T.06.02, T.23.03,...

БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ
АКАДЕМИЯ

Кафедра инженерной математики

Н. Н. Роговцов

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов специальностей

Т.06.01, Т.06.02, Т.23.03,...

*Рекомендовано Советом БГПА
в качестве учебного пособия*

Минск 2000

УДК 510.222+510.6+512.5+512.62+512.64+517.5](075.8)

Р 59

Р 59 Роговцов Н.Н. Курс лекций по высшей математике для студентов специальностей Т.06.01, Т.06.02, Т.23.03. – Мн.: Технопринт, 2000. – 166 с.

ISBN 985-6582-59-8

Данная часть курса лекций по высшей математике посвящена изложению исходных положений "наивной" теории множеств и логики, а также элементов общей и линейной алгебры. Кроме этого в нем кратко описан процесс формирования математики, достаточно подробно обсуждены свойства поля комплексных чисел и даны общие сведения об аксиоматическом подходе, математических структурах и моделях.

Курс разбит на два раздела, в первом из которых содержатся тексты семи лекций, во втором - пяти лекций. В разделе 1, в основном, собраны сведения, имеющие общематематический характер, а в разделе 2 изложен ряд важных понятий, конструкций и методов линейной алгебры.

В работе даны расширенные варианты лекций, которые содержат два уровня изложения. Текст, набранный более мелким шрифтом, можно опустить при упрощенном варианте чтения лекций или же оставить для самостоятельной проработки вне лекционных занятий.

Курс лекций будет представлять интерес, по крайней мере, для студентов ряда приборостроительных специальностей, а также для преподавателей, читающих им лекции по высшей математике.

УДК 510.222+510.6+512.5+512.62+512.64+517.5](075.8)

Рецензенты:

Профессор кафедры высшей математики БГУ ИР

Р. М. Жевняк

Доцент кафедры высшей математики № 2 БГПА

В. В. Павлов

ISBN 985-6582-59-8

© Роговцов Н. Н., 2000

ВВЕДЕНИЕ

Результаты научно-технического прогресса, имевшего место в XIX и особенно в XX вв., ярко продемонстрировали огромную силу знаний, уровня образования и достижений естественных наук. Среди них одно из достойных мест занимает математика, понятия конструкции и методы которой принесли неоценимую пользу при решении громадного числа фундаментальных и прикладных проблем, возникших в самых разнообразных областях человеческой деятельности. В настоящее время практически невозможно обойтись без использования математики на стадиях разработки и реализации многих технических проектов. Кроме этого без внедрения в сферу производства и управления целого ряда достижений математики и компьютерной техники (она самым непосредственным образом демонстрирует возможности, которые предоставляет логика и математика) было бы, например, невозможно создать современные наукоемкие производства, системы связи и космическую технику.

Характерными чертами математического подхода являются, в частности, следующие: абстрактность, общность, универсальность, рациональность, четкость, лаконичность. К сказанному следует добавить еще то, что в математике и теоретической физике, в которой используются очень многие математические понятия и конструкции, очень ценится и эстетичность теории. Это связано с тем, что такого рода теории зачастую наиболее ярко и адекватно описывают закономерности реального мира или являются самыми эффективными при решении многих классов сложных проблем и задач.

При чтении лекций курса "Высшая математика" студентам высших технических учебных заведений весьма важно не только изложить конкретный материал, но и ознакомить слушателей с указанными выше чертами математического подхода. Это позволит существенно расширить кругозор студентов, а также даст возможность студентам (и будущим инженерам) более быстро и эффективно пользоваться многими общими и универсальными методами, созданными в математике.

В курсе лекций будут изложены только два раздела. В разделе 1, который содержит 7 лекций, описан процесс формирования математики, приведены исходные положения теории множеств, логики, общей алгебры. В нем также даны понятия об аксиоматическом подходе и математических структурах, моделях. Кроме этого достаточно подробно освещены вопросы, относящиеся к свойствам поля комплексных чисел и алгебраических уравнений. В разделе 2, состоящим из 5 лекций, рассмотрен материал, относящийся к линейной алгебре. В нем с общих позиций изложены элементы теорий матриц, определителей, систем линейных алгебраических уравнений. При этом должное внимание уделено вычислительным процедурам, используемым при отыскании рангов матриц, определителей, решении систем линейных алгебраических уравнений. В данном же разделе достаточно подробно описаны свойства линейных и евклидовых пространств, линейных операторов, а также введены понятия линейных, билинейных и квадратичных форм. Более подробно, чем обычно принято, изложены сведения, относящиеся к законам преобразований компонент векторов, матриц линейных операторов при переходе к другому базису. В разделе 2 введены еще понятия тензоров и их инвариантов, которые играют важную роль, в частности, в самой математике, механике и физике. Кратко затронут также важный вопрос об изоморфизме математических структур.

В данной работе даны расширенные варианты лекций, которые содержат два уровня изложения. Текст, набранный более мелким шрифтом можно опустить при упрощенном варианте чтения лекций или же оставить для самостоятельной проработки вне лекционных занятий. При чтении данных лекций предполагается предоставлять студентам тексты самих лекций. Это позволит уделить гораздо больше времени разъяснению сути математических понятий, их взаимосвязей, методов решения и т.д. и частично снимет чисто техническую проблему, связанную с отсутствием навыков быстрой фиксации материала у студентов в I семестре.

РАЗДЕЛ I

ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, ЛОГИКИ И ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ. ПОНЯТИЕ О МАТЕМАТИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ И МОДЕЛЯХ

ЛЕКЦИЯ 1

Содержание лекции: "Общие исторические сведения о развитии математики и ее современном состоянии. Элементарные понятия интуитивной ("наивной") теории множеств. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна. Примеры множеств и доказательств тождеств теории множеств"

1.1. Некоторые исторические сведения

Археологические исследования древних стоянок, пещер, в которых жили далекие предки современного человека, указывают на то, что 30 - 40 тысяч лет тому назад наиболее выдающиеся представители эпохи палеолита уже обладали интеллектуальными способностями, сравнимыми с творческим потенциалом исследователей нашего времени. Примерно в те давние времена зародились первые представления о *числе* и счете, были построены достаточно совершенные календарные системы, а также созданы достаточно изящные произведения искусства (статуэтки животных). Во 2-ом десятке тысяч лет до нашей эры человечество, несмотря на Ледниковую эпоху, сумело создать весьма точные календари, которые позволяли предсказывать даже время наступления солнечных и лунных затмений. Примером такого календаря является, в частности, ритуальный жезл из бивня мамонта, который был найден в 1972 г. в Хакасии (его возраст составлял примерно XVIII тыс. лет).

Несравненно более высокий уровень интеллектуальной деятельности был достигнут в течение эпохи неолита (VIII-III тыс. лет до н. э.). В конце этой эпохи появились первые (ранние) цивилизации (Древние царства Египта, Шумер), в недрах которых зародилась архитектура, первые истоки философии, математики и инженерной мысли. В частности, около 3400 г. в Шумере были изобретены гончарный круг и колесо, представлявшие наиболее симметричные искусственные объекты, созданные в те времена руками человека. Кроме того, несколько позднее были изобретены весы и клещи, использование которых было неявно основано на законах рычага. В конце неолита была создана письменность (Шумер, Древний Египет), что позволило *фиксировать* и *сохранять* информацию и первые "научные" знания. Это обстоятельство существенно способствовало возникновению астрономии, математики и первых элементов физики в бронзовом веке (III-I тыс. лет до н.э.).

В эпоху бронзового века были сделаны первые попытки упорядочения данных опытов и наблюдений. В Древнем Египте около 2500г. до н.э. были введены единицы измерения длины, веса, объема, времени. В Шумере, Древнем Египте, а затем в Вавилоне, были разработаны системы исчисления и процедуры выполнения арифметических операций. К тому же появились первые школы и первые математические работы. Древнейший манускрипт египетской математики был написан около 2000 лет до н.э. Ахмесом. Древними египтянами были созданы развитые календари, одна из модификаций которого (юлианский календарь) использовалась в Европе вплоть до XVI века н.э. Ремесленники и

художники Древнего Востока (особенно египтяне) создали все возможные изящные типы узоров на плоскости, которые соответствуют всем 17 типам симметричных орнаментов, которые только и могут реализовываться.

Колоссальный прорыв был достигнут человечеством в 1-ом тысячелетии до н.э. (железный век). Несмотря на то, что в эпоху бронзового века мудрецы Древнего Востока могли производить достаточно сложные вычисления, находить площади и объёмы относительно простых фигур (например, треугольников, трапеций, пирамид, цилиндров и т.п.) и решать некоторые другие задачи, они не создали развитого *рационального мышления*, которое основывается на использовании логических умозаключений, обобщений и элементов анализа, синтеза. Такое *мышление, подход* к решению разнообразных задач было разработано древними греками. Они, в частности, создали философию, логику, первые основы современной математики и физики. Среди выдающихся представителей Древней Греции нужно отметить Фалеса (ок. 624 - ок. 547 гг. до н.э.), Пифагора (VI в. до н.э.), Платона (428 или 427 - 348 или 347 гг. до н.э.), Аристотеля (ок.384 - ок.322 гг. до н.э.), Евклида (III в. до н.э.), Архимеда (ок. 287-212 гг. до н.э.), Апполония (ок. 260 - ок.170 гг. до н.э.), Диофанта (III в. н.э.). Древнегреческим математикам принадлежит честь создания евклидовой геометрии, а также некоторых других разделов геометрии, которые только частично будут затронуты в курсе "Высшая математика". В частности, Апполоний исследовал некоторые важные свойства эллипса и гиперболы.

Пифагорейцы являются создателями основ математического естествознания. В частности, они знали некоторые закономерности колебаний струн звуковых инструментов. Архимед первым доказал логическую разумность законов рычага и установил свой знаменитый закон Архимеда, используя для этого очень интересные и изящные геометрические построения и логические умозаключения. Диофант наряду с учёными Древнего Китая и Древней Индии создал основы алгебры, подлинный расцвет которой начался только в конце 1-го тысячелетия н.э. в работах арабских математиков.

Значительные успехи в области алгебры, тригонометрии, приближённых вычислений, создания удобных систем исчисления были достигнуты в XI-XV вв. в странах Древнего Востока. Кроме того, ряд выдающихся результатов был получен учёными этих стран в области астрономии.

Интеллектуальное пробуждение Западной Европы после падения Римской империи (476г. до н.э.) наступило только в XI-XIII вв. н.э. Значительную роль в этот процесс внесли школы при монастырях и первые университеты, появившиеся в XII в. в Париже, Болонье, а в XIII в. в Падуе, Оксфорде, Кембридже, Неаполе, Риме и т.д. Наиболее значительным вкладом европейских учёных в первой половине 2-го тысячелетия н.э. является формирования основных понятий механики (скорость, ускорение, сила и т.п.), построение функций типа $y = x^\alpha$, α - любое действительное число, а также развитие логических форм мышления (в рамках схоластических учений). Кроме того, европейским художникам эпохи Возрождения удалось установить эмпирическим путём ряд законов перспективы (они относятся к области проективной геометрии). Среди этих художников и учёных особо выделялся Леонардо да Винчи (1452-1519 гг.).

Начиная со второй половины 2-го тысячелетия н.э. европейские учёные, инженеры, изобретатели внесли наибольший вклад в развитие человеческой цивилизации. В XVI в. были, в частности, решены алгебраические уравнения 3 и 4-ой степеней, были введены комплексные числа. У. Гильберт (1544-1603 гг., англ. физик) впервые использовал метод физического моделирования магнитного поля Земли, а Симон Стевин (1548-1620 г.г., нидерл. физик, матем. и инженер) использовал для доказательства закона равновесия тела, опирающегося на наклонную плоскость, невозможность существования вечного движения.

В XVII в. было создано интегральное и дифференциальное исчисление, заложены

основы аналитической геометрии, сформулированы законы Кеплера, построено здание классической механики, введены понятия рядов, бесконечных произведений, цепных дробей, определены логарифмические и показательные функции, созданы первые элементы теории дифференциальных уравнений, сформулированы первые теоремы проективной геометрии.

В XVIII в. чрезвычайно сильно были разработаны аналитические методы, а также введены двукратные, трёхкратные и иные интегралы, исследованы многие элементарные и более сложные функции. Кроме этого, в те времена зародилась математическая физика, аналитическая механика, начали усиленно развиваться методы вычислений, зародилась теория функций комплексного переменного.

В XIX в. продолжал усиленно развиваться математический анализ, значительных успехов добились в области проективной и дифференциальной геометрии. В этом же веке были заложены основы современной алгебры, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей. Тогда же было разработано векторное и тензорное исчисление и даны плодотворные применения математических методов к решению физических и инженерных задач. Существенного прогресса в XIX в. добились в области теории чисел и построения более строгих и общих математических теорий, что позволило сразу охватывать и анализировать целые классы математических объектов. Это обстоятельство существенно расширило область применения математики, ее эффективность и гибкость.

В XVIII-XIX вв. математика в значительной мере абстрагировалась от своих истоков, что дало возможность конструировать математические объекты и развивать теории, которые сыграли неоценимую роль, в частности, в разработке физических теорий (термодинамики, статистической механики, квантовой механики, общей теории относительности). Математики в XIX и особенно в XX вв. исследовали не только количественные характеристики различных объектов, но и изучали качественные их стороны и свойства.

В XX в. математические исследования отличались уже весьма высокой степенью абстракции, широко использовались при моделировании разнообразных процессов и применялись при проведении качественного и количественного анализа реальных технических конструкций. Математика в XX в. стала неотъемлемой частью не только науки, но и технического прогресса. Без использования ее методов невозможно решить практически ни одну сложную техническую проблему, строить физические теории, объясняющие поведение тех или иных физических объектов, явлений, процессов. Более того, без употребления образов, символов, языка, математических конструкций, методов вычислений, теорем и т.п., которые созданы и доказаны в недрах математики, по сути невозможно объяснить закономерности окружающего мира, фиксировать информацию, проводить анализ свойств объектов и делать правильные выводы о их свойствах, а также нельзя надеяться на реализацию наукоемких технических проектов.

Итак, человеческий интеллект, который является продуктом развития человечества в течение многих и многих тысячелетий, стал огромной движущей силой, развивающей человеческое сообщество. Наряду с другими науками математика играет в этом процессе не последнюю роль.

1.2. Элементарные понятия интуитивной ("наивной") теории множеств.

Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.

Примеры множеств и доказательств тождеств теории множеств

Математика - абстрактная наука, которая посредством специальных символов, знаков, образов, умозаключений и т.д. изучает реальные или ис-

кусственно построенные объекты, конструкции, а также их совокупности. В XIX в. математики стали в явной форме осознавать, что результаты их труда и теории, созданные ими, имеют гораздо более общий смысл, а область применимости математики гораздо шире по сравнению с исходными постановками задач или целями, которые ставились в начале исследований. Именно абстрактность математических построений позволяет применять математические теории для изучения внешне разнородных объектов, а также объединять совокупности объектов в единое целое по некоторым отвлеченным признакам. Одной из теорий, которая способствовала процессу повышения уровня абстрагирования математических исследований, является теория множеств, созданная Г. Кантором (1845-1918 гг.; немец. мат.; род. в С. - Петербурге) в XIX веке.

Опр. 1.1. Множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящимися в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств.

Существенным моментом канторовского абстрактного понимания множества является то, что собрание, совокупность предметов, объектов само рассматривается как один предмет, объект, т.е. мыслится как *единое целое*. Основной упор в нем делается не на отдельные предметы, а на их собрания, совокупности. В обычном разговорном языке аналогами понятия множества являются слова "стая", "компания", "стадо" и т.п.

Замечание 1.1. Данное выше определение множества не накладывает ограничений на природу предметов, элементов, входящих в множество.

Со времён Г. Кантора под множеством стали понимать (в подавляющем числе случаев) нечто *актуально данное* (даже если эти множества трудно обозреть или представить). Примеров множеств, которые согласуются с данными выше "определениями" (дать строгое определение множества весьма сложно, ибо это по сути неопределяемое понятие) можно привести довольно много. Таковыми являются, в частности, множества натуральных

чисел, целых, рациональных и действительных чисел. Они обозначаются буквами N, Z, Q, R .

Для обозначения множества используют фигурные скобки $\{\dots\}$. Если элементы множества можно перечислить или задать способ, алгоритм их перечисления, то все элементы множества записывают внутри этих скобок. Например, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Множествами являются, например, следующие совокупности: $\{1, 5, 6\}$; $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где n - натуральное число; все люди, живущие в данный момент на Земле; все студенты, сидящие в этой аудитории; все звезды, видимые невооруженным глазом. Множества будем обычно обозначать прописными буквами какого-либо алфавита. Элементы множеств, из которых они состоят, будем обозначать строчными буквами.

Пусть A - множество. Тогда элементы этого множества будем обозначать, например, таким образом: a, a_1, a_2 и т.п. Для обозначения факта вхождения, принадлежности элемента a множеству A используют знак $\in$ и пишут $a \in A$. Если a не является элементом A , то пишут $a \notin A$ или $a \notin A$. Запись $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ означает, что $a_1 \in A, \dots, a_n \in A$. Если множество A состоит только из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, то пишут $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Важнейшим понятием в математике является понятие *равенства*.

Опр. 1.2. Два множества равны в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Равенство двух множеств X и Y обозначают посредством соотношения $X = Y$, а неравенство $X \neq Y$. Обозначение множества посредством фигурных скобок, удобное для явного задания множеств, которые составлены из небольшого числа элементов, легко различимых, весьма неудобно для задания множеств с большим числом элементов и практически неприменимо для бесконечных множеств, имеющих бесконечно много элементов. Для обозначения множеств в этом случае тоже используют фигурные скобки, но внутри их ставят некоторое высказывание, предложение $P(x)$, которое может быть либо истинным либо ложным. Точнее говоря множество X обозначают так $\{x \mid$

$P(x)\} = \{x: P(x)\}$. При этом данная запись читается следующим образом: X - множество всех таких x , что $P(x)$ - истинное высказывание. Предложение, утверждение $P(x)$ определяет некоторое *свойство* элементов множества X . Для обозначения множеств используют и такие записи $\{x \mid x \in X \text{ и } P(x)\} = \{x \in X \mid P(x)\}$. Эта запись означает, что в качестве элементов множества $\{x \in X \mid P(x)\}$ берутся все $x \in X$, которые обладают свойством $P(x)$.

В теории множеств, кроме отношений $\in$ и $=$, используется еще и несколько других отношений между множествами.

Опр. 1.3. Пусть A и B - множества. Будем говорить, что A **включено** (содержится) в B и писать $A \subset B$ (или $A \subseteq B$), если каждый элемент множества A принадлежит B . Множество A называется подмножеством B . Обозначение $B \supset A$ эквивалентно $A \subset B$. Если же множество A не содержится в множестве B , т. е. существует объект, принадлежащий A , но не принадлежащий B , то пишут $A \not\subset B$.

Опр. 1.4. Будем говорить, что A **строго включено** в B или A - истинное подмножество B , если $A \subset B$ (или $A \subseteq B$), но $A \neq B$.

Теорема 1.1. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A=B$.

Док-во. Из $A \subset B$ следует, что любой элемент множества A принадлежит B . С другой стороны, из $B \subset A$ следует, что любой элемент множества B принадлежит A . Поэтому любой элемент, не принадлежащий A не принадлежит B . Отсюда следует, что $A=B$. Теорема доказана.

Замечание 1.2. Отношения принадлежности и включения различны.

Например, хотя $X \subset X$ ($X \subseteq X$), имеет место соотношение $X \notin X$.

Опр. 1.5. Множество, которое не имеет элементов, называется пустым множеством и обозначается через $\emptyset$.

Замечание 1.3. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Действительно, отношение $\emptyset \subset A$ означает, что из $x \in \emptyset$ следует $x \in A$.

Хотя элементов, принадлежащих множеству $\emptyset$, нет, но требование, чтобы любой элемент множества $\emptyset$ принадлежал A , нужно считать выполненным; оно, во всяком случае, не нарушается. Нарушением было бы существование такого элемента x , что $x \in \emptyset$ и $x \notin A$; но именно потому, что не существует объекта, принадлежащего $\emptyset$, этого быть не может. Таким образом, для любого множества A имеет место $\emptyset \subset A$.

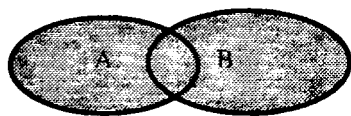
Образовывать новые множества из уже имеющихся можно посредством *операций* над множествами.

Опр. 1.6. Под *объединением* (соединением, суммой) $A \cup B$ (или $B \cup A$) множеств A и B понимается множество всех элементов, которые являются элементами множества A и B , т. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ (слово "или" имеет неисключающий смысл).

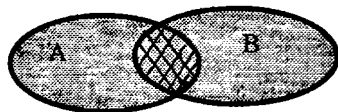
Опр. 1.7. Под *пересечением* (произведением) $A \cap B$ (или $B \cap A$) множеств A и B будем понимать множество всех элементов, являющихся элементами обоих множеств A и B , т.е. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Опр. 1.8. Под абсолютным дополнением множества A (оно обозначается через $\bar{A}$) понимают множество $\{x \mid x \notin A\}$. Относительным дополнением (или *разностью* множеств X и A) называется множество $X \cap \bar{A}$ и обозначается через $X \setminus A$ (или $X - A$).

Смысл операций над множествами становится очевидным, если воспользоваться диаграммами Эйлера-Венна, которые приведены ниже в серии рисунков 1.1.



$A \cup B$



$A \cap B$

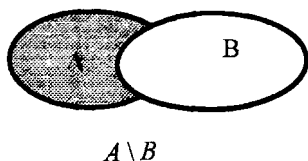


Рис.1.1. Диаграммы Эйлера-Венна.

Операции над множествами обладают рядом замечательных свойств, некоторые из которых приведены ниже.

Теорема 1.2. Для любых множеств A, B, C справедливы следующие тождества:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C, \quad (1.1)$$

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A, \quad (1.2)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (1.3)$$

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap U = A, \quad (1.4)$$

$$A \cup \bar{A} = U, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad (1.5)$$

где U - универсальное множество, включающее в себя все множества A, B, C и т.п. Первая строчка тождеств называется законами *ассоциативности*, вторая - законами коммутативности, а третья - законами дистрибутивности.

Данные тождества, а также другие тождества, нетрудно доказать с использованием определений равенства множеств и операций над множествами. Их также наглядно можно проиллюстрировать, если использовать диаграммы Эйлера-Венна.

Докажем для примера только первое из тождеств (1.1) и тождество (1.2). Справедливость тождеств (1.2) сразу следует из определений операций $\cup$ и $\cap$, ибо одновременные замены A на B и B на A не приводят к изменениям множеств $A \cup B$ и $A \cap B$.

Докажем теперь справедливость тождества $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

Из определения операции $\cup$ вытекает, что $B \subset B \cup C$. Следовательно, заменив в

множестве $A \cup B$ множество B на $B \cup C$, мы не можем получить множество, которое не содержит хотя бы одного элемента из множества $A \cup B$. Поэтому имеет место $A \cup B \subset A \cup (B \cup C)$. С другой стороны, из $C \subset B \cup C$ и $B \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ следует, что $C \subset A \cup (B \cup C)$. В свою очередь, из справедливости $A \cup B \subset A \cup (B \cup C)$ и $C \subset A \cup (B \cup C)$ следует верность $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. Данное соотношение справедливо для любых множеств A, B, C . Поэтому, заменяя A на C , а C на A , получаем, что $(C \cup B) \cup A \subset C \cup (B \cup A)$. Но $(C \cup B) \cup A = A \cup (B \cup C)$ и $C \cup (B \cup A) = (A \cup B) \cup C$. С учетом этих равенств и предыдущего соотношения получим, что $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$. Наконец, из верности соотношений $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ и $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$ и теоремы 1.1 следует справедливость первого из тождеств (1.1).

Замечание 1.4. Множество, образованное из всех подмножеств любого непустого множества M , вместе с определенными выше операциями $\cup, \cap, \setminus$ и отношением включения (строгого или нет), фиксируемого символами $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq$, образует специфическую алгебру множеств. Эта алгебра существенно отличается по своим свойствам, например, от алгебраических свойств обычных вещественных чисел.

ЛЕКЦИЯ 2

Содержание лекции: "Декартовы произведения. Отношения, их классификация, примеры отношений. Отношение эквивалентности, его конструктивная и обобщающая роль в формировании математических понятий. Исходные понятия исчисления высказываний"

2.1. Декартовы произведения; отношения, их классификация, примеры отношений; применения отношения эквивалентности

Одним из наиболее общих и важных математических понятий является "отношение", которое используется для обозначения, "описания", какой-либо связи между объектами, предметами, самими понятиями и т.п. При определении понятия отношения исходят из представления о множествах упорядоченных пар, троек и т.д.

Опр. 2.1. Пусть X и Y - множества, а $\{x, y\}$ – множество, состоящее из двух элементов $x \in X, y \in Y$. Под упорядоченной парой будем понимать множество $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, в котором указано, какой из элементов считается первым, а другой – вторым (x – первый элемент).

Опр. 2.2. Упорядоченной тройкой элементов, предметов x, y, z ($x \in X, y \in Y, z \in Z$) называется множество $\{(x, y, z)\}$, в котором x – первый элемент, y – второй, а z – третий.

Опр. 2.3. Упорядоченной n -кой называется множество $\{(a_1 a_2, \dots, a_n)\}$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ причём a_1 – первый элемент, a_2 – второй, ..., a_n – n -й элемент. При этом обычно фигурные скобки удаляются из обозначения n -и, т.е. пишут $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Опр. 2.4. Декартовым (прямым) произведением $A \times B$ будем называть множество, состоящее из всех упорядоченных пар вида (a, b) , где $a \in A, b \in B$.

Опр. 2.5. Бинарным отношением ρ – будем называть множество упорядоченных пар $(x, y) (x \in X, y \in Y)$, которое является подмножеством множества $A \times B$.

Выражения $(x, y) \in \rho$ и $x \rho y$ считаются *равноценными*. При этом говорят, что x находится в отношении ρ к y в том и только в том случае, когда $x \rho y$.

Примерами отношений являются следующие:
 $x = y, x < y, x > y, x \equiv y$, отношение подобия. Если $X = Y$ то отношение $\rho \subset X \times X$ называется бинарным отношением, заданным на множестве X .

Опр. 2.6. Отношение σ называется менее общим, чем отношение τ , а τ – более общим, чем σ , если для любых элементов a и b из $a \sigma b$ следует $a \tau b$.

Например, на множестве всех фигур на плоскости можно определить

отношения равенства и подобия. Так как равные фигуры всегда подобны, то отношение равенства является менее общим, чем отношение подобия.

Опр. 2.7. Проекцией элемента $c = (a, b) \in A \times B$, где $a \in A, b \in B$, на множество A будем называть элемент a . Если $M \subset A \times B$, то проекцией M на A будем называть множество тех элементов из A , которые являются проекциями элементов из M на A .

Опр. 2.8. Сечением $x = a$ множества M называется множество элементов $y \in B$, для которых $(a, y) \in M$.

Пусть теперь $A = B$. В этом случае, как уже было отмечено выше, будем говорить, что отношения заданы на множестве A .

Опр. 2.9. Отношение σ называется рефлексивным, если для любого элемента $a \in A$ имеет место $a \sigma a$.

Примерами рефлексивных отношений являются равенство отрезков, подобие фигур, включение $\subset$.

Опр. 2.10. Отношение σ называется симметричным, если для любых $a, b \in A$ из $a \sigma b$ следует $b \sigma a$.

Примерами симметричных отношений являются перпендикулярность, параллельность прямых и подобие фигур.

Опр. 2.11. Отношение σ называется транзитивным, если для любых $a, b, c \in A$ из $a \sigma b$ и $b \sigma c$ следует $a \sigma c$.

Примерами транзитивных отношений являются отношения равенства отрезков, подобия фигур, отношение "меньше" для чисел.

Опр. 2.12. Отношение σ называется связным, если для любых различных элементов $a, b \in A$ имеет место по крайней мере одно из отношений $a \sigma b$ и $b \sigma a$. Если данные условия не выполняются, то отношение называется несвязным. *Например*, отношение "левее" связно, а отношение равенства отрезков несвязно.

Опр. 2.13. Отношение ρ , заданное на множестве X , называется отно-

шением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Это отношение зачастую обозначают знаком $\sim$.

Опр. 2.14. Разбиением χ множества A называют совокупность множеств $A_1, \dots, A_r$, любые два из которых не имеют общих элементов и которые удовлетворяют соотношению $A = A_1 \cup \dots \cup A_r = \bigcup_{i=1}^r A_i$.

Замечание 2.1. Отношение эквивалентности ρ , заданное на множестве A *разбивает* его на классы эквивалентности $A_1, \dots, A_r$. Все элементы любого из множеств A_k эквивалентны друг другу (находятся в отношении ρ друг к другу) и выполняются соотношения $A = \bigcup_{i=1}^r A_i$, $A_m \cap A_s = \emptyset$ для любых $m \neq s$ ($m, s = \overline{1, r}$).

Замечание 2.2. Тождество (отношение тождества) представляет собой предельный случай отношения эквивалентности, т.к. единственным элементом, равным какому-либо данному элементу, является этот самый элемент. Разбиение множества, определяемое отношением тождества, есть самое полное разбиение. Класс эквивалентности, порожаемый каким-либо элементом, состоит из одного этого элемента.

Однако, чтобы два элемента были ρ – эквивалентны, они должны быть сходны только *в одном*, а именно находиться между собой в отношении ρ . Класс ρ – эквивалентности состоит из всех элементов, которые *неразличимы* с точки зрения отношения ρ . Следовательно, произвольное отношение эквивалентности на множестве A определяет на A *обобщённую форму равенства*. С этой точки зрения все элементы одного класса эквивалентности можно отождествить, т.е. приписать всем его элементам *одно и то же свойство*.

Очень важной областью применения отношений эквивалентности является *формализация* математических и иных понятий. Эта формализация носит название определений через абстракцию. Суть этой процедуры состоит в определении понятия как совокупности (множества) всех предметов, объектов и т.п., обладающих каким-либо *свойством*, характеризующим это поня-

тие.

Например, понятие *направления* определяется как класс эквивалентности, состоящий из параллельных между собой прямых. Понятие *геометрической формы* определяется как класс эквивалентности, связанный с отношением подобия.

2.2 Исходные понятия исчисления высказываний

Сформулируем теперь простейшие понятия исчисления высказываний.

Опр. 2.15. В логике под *высказыванием* понимают осмысленное утвердительное предложение, т. е. повествовательное предложение, о котором в рамках определённого контекста можно говорить, что оно *истинно* или *ложно*.

Высказывание является термином логики, а предложение - чисто лингвистическое понятие. Приведём несколько примеров высказываний и предложений, которые не являются высказываниями. Высказываниями будут следующие утверждения: «Аист – насекомое»; «Фалес – философ»; «Пётр и Виктор – братья». Предложения: «Сколько стоит автомобиль?», «Идите сюда!» – не являются высказываниями.

В исчислении высказываний можно *расчленять* высказывания только до тех пор, пока их составляющие также будут высказываниями. Это ограничивает произвол в выборе расчленения сложных высказываний, которые могут состоять из совокупности *простых высказываний* (они не подлежат дальнейшему расчленению). Теперь уточним, что же в исчислении высказываний понимают под простыми высказываниями. В математических и других рассуждениях часто встречаются осмысленные утвердительные предложения, образованные посредством видоизменения других таких предложений с помощью слов "не", "и", "или", "если..., то" и "тогда и только тогда, когда". Эти пять слов или комбинаций слов называются *сентенциональными связками*. В исчислении высказываний под *простыми* предложениями понима-

ют такие высказывания, которые не содержат эти связки или сами по себе рассматриваются в качестве *неразложимых*.

Будем обозначать высказывания прописными буквами.

Опр. 2.16. Под высказыванием $\bar{A}$ будем понимать высказывание "не A ", т.е. отрицание A

Опр. 2.17. Высказывание $A \wedge B$, полученное из высказываний A и B с помощью связки "и", называется *конъюнкцией* этих высказываний (символ $\wedge$ – заменитель "и").

Опр. 2.18. Высказывание $A \vee B$, образованное из двух высказываний A , B посредством связки "или" ($\vee$ имеет смысл "или"), называется *дизъюнкцией* этих предложений. Связка "или" здесь употребляется *не* в разделительном смысле (либо- либо).

Опр. 2.19. Высказывание "если A , то B " называется *импликацией*, причём A – посылка, а B – следствие. Такое высказывание символически записывается в виде $A \Rightarrow B$.

Опр. 2.20. Высказывание " A тогда и только тогда, когда B " называется эквиваленцией (*двойной импликацией*) и обозначается $A \Leftrightarrow B$.

В исчислении высказываний при использовании символической записи используется ряд условных соглашений, вводящих субординацию для выполнения действий с использованием знаков $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Очередь выполнения логических операций в сложных высказываниях производится в порядке следования написанных выше символов, если нет скобок.

Обратимся теперь к *истинностным* значениям высказываний, построенных с использованием связок $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Для краткости "истинность" и "ложность" будет обозначаться буквами T и F . Истинностный смысл, который придаётся сложным высказываниям, которые содержат связки, иллюстрируется следующими таблицами:

Таблица 2.1

Отрицание		Конъюнкция			Дизъюнкция			Импликация			Эквиваленция		
P	$\bar{P}$	P	Q	$P \wedge Q$	P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \Rightarrow Q$	P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	T	T	F	F	T	F	F
		F	T	F	F	T	T	F	T	T	F	T	F
		F	F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	T

Эти таблицы являются по сути определениями, естественным образом согласованными с пониманием смысла сентенциональных связей.

Рассмотрим непустое множество осмысленных предложений. Расширим это множество с помощью присоединения к нему всех предложений, которые можно образовать, используя многократно и всевозможными способами различные связи. Элементами такого расширенного множества будем называть *формулами*. Элементы исходного множества называются *простыми* или *элементарными формулами*, а остальные - *составными формулами*. Простые формулы, входящие в составную, называются её простыми компонентами.

Пусть простыми компонентами формулы B служат $B_1, B_2, \dots, B_n$. Запишем формально формулу B в виде $B=f(B_1, B_2, \dots, B_n)$, причем под f следует понимать правило, в соответствии с которым образуется формула B на основе компонент $B_1, B_2, \dots, B_n$ и сентенциональных связей. Истинные значения формулы B можно представить в виде таблицы из 2^n строк, каждая из которых изображает одно из возможных распределений Т и F, приписываемых компонентам $B_1, B_2, \dots, B_n$. Эта таблица имеет следующий вид:

Таблица 2.2

B_1	B_2	B_3	...	B_n	B
b_{11}	b_{12}	b_{13}	...	b_{1n}	b_1
b_{21}	b_{22}	b_{23}	...	b_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
b_{n1}	b_{n2}	b_{n3}	...	b_{nn}	b_n

Здесь под символами b_i и b_{ij} , где $i, j = \overline{1, n}$, надо понимать Т или F, причем различные строчки, содержащие только символы b_{ij} должны отличаться друг от друга хотя бы одним истинностным значением символов, входящих в них. Заметим, что таблица 2.1 содержит фактически пять таблиц типа 2.2.

Весьма важную роль в логике играют формулы истинное значение которых есть Т при любых истинностных значениях приписываемых простым компонентам таких формул. Такие формулы называются тождественно истинными, общезначимыми или тавтологиями. Известными тавтологиями являются следующие:

$$| = P \vee \bar{P} \text{ (закон исключения третьего)} \quad (2.1)$$

$$| = \overline{(P \wedge \bar{P})} \text{ (закон противоречия)} \quad (2.2)$$

$$| = \bar{\bar{P}} \Leftrightarrow P \text{ (закон двойного отрицания)} \quad (2.3)$$

Здесь символ $| =$ является символом общезначимости.

Другим важным понятием логики является понятие *эквивалентности* (*равносильности*) формул. Пусть P и Q формулы, объединение множеств простых компонент которых есть $\{P_1, \dots, P_m\}$. Тогда будем считать формулу P эквивалентной (равносильной) формуле Q , если они равны как истинностные функции для перечня переменных $P_1, \dots, P_m$, где каждое P_i входит в качестве простого компонента по меньшей мере в одну из формул P и Q . Следует отметить, что отношение *равносильности* на каждом множестве формул есть отношение *эквивалентности*.

Пример 2.1. В суде разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из

них совершил преступление.

На следствии каждый из них сделал два заявления:

Браун: “Я не делал этого. Смит сделал это”.

Джонс: “Смит не виновен. Браун сделал это”.

Смит: “Я не делал этого. Джонс не делал этого”.

Суд установил, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий - один раз солгал, один раз сказал правду. Кто совершил преступление?

Решение.

Пусть $B \equiv \{\text{Преступление совершил Браун}\}$,

$D \equiv \{\text{Преступление совершил Джонс}\}$,

$C \equiv \{\text{Преступление совершил Смит}\}$.

Рассмотрим все шесть возможных случаев:

N	Дважды солгал	Один раз солгал	Дважды сказал правду
1	Браун	Джонс	Смит
2	Браун	Смит	Джонс
3	Джонс	Браун	Смит
4	Джонс	Смит	Браун
5	Смит	Браун	Джонс
6	Смит	Джонс	Браун

В первом случае из заявления Брауна следует, что высказывание B истинно, а C - ложно. Но отсюда вытекает, что первое заявление Джонса - правда, второе - ложь, т.е. B - ложно. Никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Следовательно, первый случай невозможен.

Во втором случае из заявления Брауна вытекает, что B - истинно и C - ложно. Следовательно, у Смита первое заявление - правда, а второе - ложь, т.е. D истинно. Но B и D не могут быть истинны одновременно, т.е. второй случай невозможен.

В третьем случае из заявления Джонса вытекает, что C истинно, а из

заявления Смита вытекает, что истинно B . Следовательно, и этот случай невозможен.

В четвертом случае из заявления Джонса следует истинность C и ложность B , из заявления Брауна - ложность B и истинность C . Заявления Смита не противоречат заявлениям Брауна и Джонса, если Смит первый раз солгал, а второй раз сказал правду.

В пятом и шестом случаях из заявлений Смита следует одновременная истинность C и D , т.е. эти случаи невозможны.

Таким образом, преступление совершил Смит.

Пример 2.2. Путешественник находится в одном из городов M или P , но в каком именно, ему неизвестно. Он задает вопрос, на который может получить ответ "да" или "нет", причем этот ответ может быть правдой или ложью. Что следует спросить путешественника, чтобы определить, в какой город он прибыл?

Решение. Достаточно спросить: "Верно ли, что я нахожусь в городе M и мне говорят правду или что я нахожусь в городе P и мне говорят ложь?"

Действительно, пусть

$A \equiv \{\text{Путешественник находится в городе } M\}$,

$B \equiv \{\text{Путешественнику говорят правду}\}$.

Путешественник спрашивает, истинно ли высказывание $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$?

Легко понять, что из ответа "да" вне зависимости от того, правдив ли этот ответ или нет, вытекает, что путешественник находится в городе M , а из ответа "нет" следует, что он находится в городе P . Например, допустим, что путешественник получил ответ "да" и этот ответ - ложь. Это означает, что высказывание

$(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$ ложно и высказывание B тоже ложно. Но если высказывание

$(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$ ложно, то $\bar{A} \wedge \bar{B}$ ложно, и т.к. $\bar{B}$ истинно, то $\bar{A}$ ложно, т.е. A истинно. Аналогично рассматриваются остальные три случая.

Целый ряд полезных сведений по рассмотренным вопросам можно найти в [1-7].

ЛЕКЦИЯ 3

Содержание лекции: "Элементы исчисления предикатов и теории вывода. Основные понятия аксиоматического подхода. Метод математической индукции"

3.1. Элементы исчисления предикатов

Для решения многих математических проблем приходится использовать целый ряд более сложных построений, разработанных в логике.

Отметим некоторые факты из *исчисления предикатов*. Исчисление высказываний ограничивается изучением структуры предложений в терминах предложений-компонент, т.е. рассматривает простые предложения как нечто целое. Это сужает возможности использования исчисления высказываний для вывода многих математических результатов, а также для анализа структуры умозаключений. В *исчислении предикатов* проводится *разделение* предложений на составляющие, каковыми являются *субъекты* (подлежащие) и *предикаты* (сказуемые). Это исчисление обобщает исчисление высказываний. В исчислении предикатов вводятся высказывания, отнесённые к предметам, объектам. В нём используются три дополнительных логических понятия, которые называются *термами*, *предикатами* и *кванторами*. Это позволяет записывать очень многое из того, что содержится в математических и иных рассуждениях.

Рассмотрим некоторое множество M , которое назовём *предметной областью*. Строчные буквы 2-й половины латинского алфавита и символы будем применять для обозначения неопределённых элементов множества M . Эти элементы будем называть *предметными* переменными (в качестве их могут, в частности, выступать неизвестные корни, решения уравнений, а также переменные величины). Строчные буквы 1-й половины латинского алфавита будем использовать в качестве названий конкретных элементов (предметов, объектов и т.п.) из M (т.е. они будут заменять имена собственные). Такие элементы называются *индивидуальными предметами* или *предметными постоянными*.

Опр. 3.1. Предметные переменные и предметные постоянные (в виде собственных имён или описаний), вместе взятые, называются *термами*.

Замечание 3.1. Грамматическая функция переменных подобна функции местоимений и нарицательных имён в обычном языке, а функция предметных постоянных подобна роли имён собственных.

В грамматике *предикат* есть слово (или группа слов) в предложении, которое выражает, что говорится о субъекте. В логике слово "предикат" используют в более общем смысле, чем в грамматике. Поясним сказанное. Пусть $a, b, c, d \in M$. Тогда высказывания об этих элементах (предметах) будем обозначать в виде $P(a), Q(b), K(c, d)$ и т.д., где $P(a)$ и $Q(b)$ - соответственно высказывания о предметах a и b , $K(c, d)$ - высказывания о предметах c и d и т.д. Такого рода высказывания могут быть как истинными так и ложными. В отличие от исчисления высказываний символы типа $P(x), Q(y)$ и $K(u, v)$ и т.д. ставят в соответствие предметам x, y и u, v и т.д. значения T (истина) и F (ложь). Однако эти высказывания становятся определёнными, когда x, y и u, v и т.д. заменены на фиксированные элементы из M . Выражения $P(a), Q(b)$ и $K(c, d)$ представляют собой уже вполне определённые высказывания. Высказывание типа $P(x), Q(y), K(u, v), H(x, y, u)$ и т.д. представляют собой функции, определённые на множествах $M, M \times M, M \times M \times M$ и принимающие значения на множестве $\{T, F\}$. Это означает, что для любых конкретных $x, y, (u, v), (x, y, u)$ высказывания $P(x), Q(y), K(u, v), H(x, y, u)$ становятся истинными или ложными т.е. принимают значения T или F .

Опр. 3.2. Неопределённые высказывания называются *логическими функциями* или *предикатами*.

Предикат $P(x)$, зависящий от одной переменной x , позволяет выразить *свойство* предмета x . *Примерами* свойств являются следующие: " u есть гиперболой", " v есть равнобедренный треугольник".

Кроме операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ алгебры высказываний в исчислении предикатов используют ещё две новые операции. Пусть $P(x)$ - предикат, прини-

мающий значение T или F для каждого элемента $x \in M$. Тогда под выражением $\forall x P(x)$ принимается высказывание *истинное*, когда $P(x)$ истинно для любого x из M , и *ложное* в противном случае. Заметим, что это высказывание *не зависит* от x .

Опр. 3.3. Символ $\forall x$ называется *квантором всеобщности*.

Рассмотрим теперь некоторый предикат $Q(x)$. Свяжем с ним формулу $\exists x Q(x)$, определив её значение как истину, если существует элемент множества M , для которого $Q(x)$ истинно, и как ложь в противном случае. Формула $\exists x Q(x)$ от x *не зависит*.

Опр. 3.4. Знак $\exists x$ называется *квантором существования*.

Под областью действия квантора, входящего в некоторую формулу, понимают ту часть формулы, к которой он относится (при этом двусмысленность устраняется применением скобок). При отсутствии скобок символы $\forall$ и $\exists$ действуют, как и операция $\neg$ (отрицание), на ближайший объект формулы.

Ниже приведены *примеры* формул в исчислении предикатов.

Пример 3.1. Для любых действительных x имеет место равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ($\forall x \in R \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Пример 3.2. Для $\forall x \in R$ справедливо $x < 2^x$.

Пример 3.3. $\exists x \in R$, для которого выполняется равенство $x^2 + x - 2 = 0$.

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий полезность использования понятий исчисления предикатов.

Пример 3.4. Рассмотрим два определения легкой контрольной работы:

1. Контрольная работа называется легкой, если *каждую* задачу решил *хотя бы один* ученик.

2. Контрольная работа называется легкой, если *хотя бы один* ученик решил *все* задачи.

а) Может ли контрольная работа быть легкой в смысле первого опреде-

ления и трудной (не легкой) в смысле второго?

в). Может ли работа быть легкой в смысле второго определения и трудной в смысле первого?

Решение.

а). Да, может. Такой контрольной будет, например, контрольная работа, в которой количество задач равно количеству учеников, причем первый ученик решил только первую задачу, второй - только вторую, третий - только третью и т.д.

б). Нет, не может. Из того, что существует ученик, решивший все задачи, следует, что каждая задача решена хотя бы одним учеником (например, тем, который решил все задачи).

Замечание к задаче. Этот пример показывает, что в высказывании $(\forall x)(\exists y)A(x, y)$ нельзя, вообще говоря, поменять местами знаки $\forall$ и $\exists$, т.е. написать $(\exists y)(\forall x)A(x, y)$.

3.2. Элементы теории вывода

Обратимся теперь к рассмотрению вопросов, связанных с проблемой **вывода** высказываний, утверждений, формул из некоторой совокупности исходных высказываний, утверждений, формул.

Опр. 3.5. Будем говорить, что высказывание P *следует* из высказывания Q и писать $P \supset Q$ (здесь символ отношения $\supset$ не имеет смысла отношения **включения** одного множества в другое), если из справедливости высказывания Q автоматически следует справедливость высказывания P .

Так, **например**, если P есть высказывание "вчера весь день был пасмурным", а Q - "вчера весь день шел дождь и небо было затянуто тучами", то $P \supset Q$. Но $Q \supset P$ не имеет места, ибо высказывание "вчера весь день был пасмурным" может быть верным тогда, когда справедливо утверждение "вчера весь день шел снег и все небо было затянуто тучами", т.е. из справедливости P автоматически не следует верность Q .

Опр. 3.6. Установление факта связи двух высказываний P и Q посредством отношения $\supset$ называется **выводом**. В записи $P \supset Q$ высказывание Q называется **условием**, а высказывание P - **заключением или следствием**.

Опр. 3.7. Пусть имеет место $P \supset Q$. Тогда зачастую говорят, что P - **необходимое условие** истинности Q (ибо для того, чтобы имело место Q , **необходимо**, чтобы имело место также и P), а Q - **достаточное условие** истинности P (ибо для того чтобы имело место P , вполне **достаточно**, чтобы было истинным Q).

Опр. 3.8. Если $P \supset Q$ и $Q \supset P$, то говорят, что справедливость P представляет собой **необходимое и достаточное** условие того, что Q имеет место (и наоборот, Q доставляет такое же условие для справедливости P).

Отношение $\supset$ между двумя высказываниями P и Q (т.е. $P \supset Q$) связано с логической операцией $\Rightarrow$ (импликацией) между этими же высказываниями. Но при этом $P \supset Q$ соответствует $Q \Rightarrow P$. Из определения импликации следует, что высказывание $Q \Rightarrow P$ истинно во всех тех и только тех случаях, когда имеет место $P \supset Q$. Следует подчеркнуть, что сложное высказывание $Q \Rightarrow P$ можно образовать для любых высказываний P и Q , причем оно как и любое другое высказывание, может оказаться ложным или истинным. Однако отношение $P \supset Q$ связывает **лишь некоторые** пары высказываний. Классическими **примерами**, отражающими связь между отношением $\supset$ и импликацией $\Rightarrow$, являются следующие силлогизмы [1,5]:

$P \supset (Q \Rightarrow P) \wedge Q, \bar{Q} \supset (Q \Rightarrow P) \wedge \bar{P}$. Отметим, что силлогистика является неотъемлемой частью теории доказательства, которая была развита еще Аристотелем.

Построение **теории вывода** (т. е. **принципов рассуждения**) является одной из наиболее важных задач логики. Разработка теории вывода сводится к получению критериев для решения чисто «техническим» путем вопроса о

том, можно ли некоторую цепь рассуждений, основываясь на ее форме, считать правильной. Такая цепочка рассуждений представляет собой конечную последовательность высказываний, приводимых в обоснование утверждения, что самое последнее высказывание в данной последовательности (*заключение*) можно вывести из некоторых начальных высказываний (они называются *посылками*). В математике заключения обычно называются *теоремами*, которые выводятся из принятой начальной системы высказываний (они называются *аксиомами* или *постулатами*) в соответствии с *правилами вывода*, установленными в какой-либо логической системе. Исчисления высказываний и предикатов непосредственно используются в теории вывода, так как они дают критерии (вместе с различными конкретными формами их применения) для решения вопроса о том, когда заключительному предложению рассуждения нужно приписать истинное значение Т при условии истинности каждой посылки.

Как показано в [1,4,5], высказывание Q тогда и только тогда является логическим следствием высказывания P , когда $\vdash P \Rightarrow Q$. В общем случае выяснение вопроса о том, какие высказывания являются логическими следствиями других высказываний (в рамках исчисления высказываний) сводится к выяснению того, какие высказывания представляют собой *тавтологии*.

Весьма важным вопросом в логике является проблема непротиворечивости.

Опр. 3.9. Множество $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ высказываний называется *непротиворечивым* в исчислении высказываний, если существует по меньшей мере одно такое распределение истинных значений простых компонент, для которого все $P_1, P_2, \dots, P_m$ принимают одновременно значение Т.

Опр. 3.10. Множество $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ есть *противоречивое множество*, если при всяком распределении истинных значений простых компонент по меньшей мере одно из $P_k \in \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ ($k = \overline{1, m}$) получает значение F.

Опр. 3.11. Противоречием будем называть формулу, которая всегда

принимает значение F .

Замечание 3.1. Множество высказываний противоречиво, если из него в качестве логического следствия можно вывести противоречие [1].

3.3. Основные понятия аксиоматического подхода

Ряд исходных понятий аксиоматического подхода фактически уже нами был рассмотрен выше. Ниже опишем этот подход в самых общих чертах. Аксиоматический подход возник еще во времена Евклида. Он получил значительное развитие и применение в XIX–XX вв. Классическим *образцом* использования аксиоматического подхода явились «Начала» Евклида. В них сначала даются определения некоторых *первичных терминов*. Затем описываются различные *свойства* этих первичных терминов, причем некоторые из таких описаний назывались *аксиомами*, а другие *постулатами*. Эти свойства считались истинными. С использованием первичных терминов определялись другие понятия, а из аксиом и постулатов *логическим* путем выводились описания новых *свойств*, которые назывались *теоремами*. В XIX в. было осознано, что *первичным терминам* аксиоматической теории можно придавать различный смысл. Например, можно построить математические объекты, которые будут удовлетворять системе аксиом Евклида и не будут иметь смысла обычных точек, прямых, плоскостей и т.д. В рамках аксиоматического подхода возникли первые идеи о *моделях, интерпретации, независимости и непротиворечивости* системы аксиом.

Существенным толчком для развития аксиоматического подхода явилось создание в 1826–1830 гг. в работах Н. И. Лобачевского (1792–1856 гг.; российский математик) и в 1832 г. в исследованиях Я. Бойаи (1802–1860 гг.; венгерский математик) неевклидовой геометрии. Существенный отпечаток на дальнейшее развитие аксиоматического подхода оказали также исследования, выполненные в XIX в., в области римановой и проективной геометрий (более подробные исторические сведения изложены в [7]). Кроме того, принципиальные результаты в этом направлении были получены в конце XIX и в XX вв., когда произошел синтез идей, возникших в геометрии и математической логике.

Сейчас термин «аксиоматическая теория» применяется, по сути, для описания двух множеств высказываний, причем одно из них является собственным подмножеством другого. Объединяющее множество высказываний определяет *предметную область* аксиоматической теории. Элементы же его собственного подмножества считаются в этой теории *истинными* или *доказуемыми*. Доказуемые высказывания называются *теоремами*, а за-

ранее выбранные и фиксированные высказывания называются обычно *аксиомами*.

Первым шагом в направлении построения аксиоматической теории являются перечисление основных объектов, которые кладутся в основу теории, а также введение определенных терминов, выражающих *свойства* этих объектов и *отношения* между ними. При этом не дается определений ни самих объектов, ни *свойств* и *отношений*, а высказывается ряд исходных утверждений, которые должны выполняться. Эти утверждения *выделяют* из всевозможных систем объектов, их *свойств* и *отношений* между ними такие системы, для которых они выполнены. Затем в качестве имен для выбранных *объектов*, *свойств* и *отношений* вводятся какие-нибудь *символы* (в качестве них могут выступать и слова). После этого *свойства* объектов записываются с помощью отобранных символов. Эти символы носят название первичных *терминов* (или *символов*) формализуемой теории, а исходные высказывания, составленные из них, *аксиом* данной теории. В дальнейшем в рамках некоторой фиксированной системы логики выводятся теоремы. Примером аксиоматической теории, построенной в рамках описанной схемы, является теория, изложенная в "Началах" Евклида.

Опр. 3.12. Если для какой-либо совокупности объектов, их свойств и отношений некоторые аксиомы истинны, то говорят, что данная совокупность объектов удовлетворяет системе этих аксиом или является *интерпретацией* данной системы аксиом.

Опр. 3.13. Пусть дана некоторая аксиоматическая теория. Приписывание значений первичным ее терминам также называется *интерпретацией* теории.

Опр. 3.14. Если некоторая совокупность предметов, выбранных в качестве значений первичных терминов аксиоматической теории (т.е. в качестве ее интерпретации), удовлетворяет аксиомам, то она называется *моделью* этой теории.

Опр. 3.15. Аксиоматическая теория называется *противоречивой* (или *несовместимой*) если она содержит такое высказывание A , что как A , так и его отрицание $\bar{A}$ являются теоремами.

Опр. 3.16. Аксиоматическая теория, не являющаяся противоречивой, называется *совместной* или *непротиворечивой*.

Замечание 3.2. Появление противоречия в теории означает, что рассматриваемая система аксиом ничего не описывает.

Замечание 3.3. Аксиоматическая теория будет непротиворечивой, если для нее удастся указать свободную от противоречий модель.

Опр. 3.17. Аксиоматическая теория называется *полной*, если она содержит достаточное для каких-либо целей количество теорем.

Опр. 3.18. Система аксиом называется *независимой*, если исключение любой из аксиом этой системы приводит к уменьшению запаса теорем. В противном случае система аксиом называется зависимой.

Опр. 3.19. Отдельная аксиома называется *независимой*, если ее исключение из системы уменьшает запас теорем. Если это условие не выполняется, то аксиома называется *зависимой*.

Следует отметить, что создание в XIX в. неевклидовой геометрии (геометрии Лобачевского) и ее интерпретации явилось доказательством независимости V постулата Евклида (от остальных аксиом его геометрии) и непротиворечивости этой неевклидовой геометрии.

3.4. Метод математической индукции

Выше рассматривался фактически (в рамках исчисления высказываний) только *метод дедукции*, т.е. метод получения по правилам логики следствий из исходных утверждений, аксиом, посылок. Однако в математике очень важную роль играет и индуктивный метод, позволяющий на основе совокупности частных фактов формулировать более общие утверждения.

Надо сразу подчеркнуть, что хотя утверждение может быть справедливым в целом ряде частных случаев, оно в то же время может быть несправедливым вообще. Теперь возникает вопрос. Имеется утверждение, справедливое в нескольких частных случаях. Но все частные случаи не всегда поддаются рассмотрению. Как же тогда узнать, справедливо ли это утверждение вообще? Этот вопрос удастся иногда решить посредством использования *метода математической индукции (полной индукции, совершенной индукции)*.

В основе этого метода лежит *принцип математической индукции*, который гласит:

Утверждение справедливо для $\forall n \in N$, если:

1) оно верно для $n=1$ и

2) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n=k$ следует его справедливость для $n=k+1$.

Доказательство этого принципа и его использование обсуждены в работах [8,9].

Доказательство, основанное на принципе математической индукции, называется доказательством методом математической индукции. Такое доказательство должно состоять из доказательства двух самостоятельных теорем:

Теорема 3.1. Утверждение справедливо для $n=1$.

Теорема 3.2. Утверждение справедливо для $n=k+1$, если оно справедливо для $n=k$, где k – какое либо произвольное натуральное число.

Если обе эти теоремы доказаны, то на основании принципа математической индукции утверждение справедливо для всякого натурального n .

Пример 3.4. Вычислить сумму

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \in N. \quad (3.1)$$

Мы непосредственно убеждаемся, что $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$, $S_4 = \frac{4}{5}$. Поэто-

му разумно предположить, что $S_n = \frac{n}{n+1}$ для $\forall n \in N$. Это предположение заведомо верно при $n=1, 2, 3, 4$. Воспользуемся для доказательства формулы (3.1) методом математической индукции. Нами уже была фактически доказана справедливость теоремы 3.1 для нашего случая. Теперь докажем верность и теоремы 3.2. Предположим для этого, что гипотеза (предположение) верна для некоторого $n = k \in N$, т.е.

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Докажем, что гипотеза тогда верна и для $n = k+1$, т.е. $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$. Действи-

тельно

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Следовательно, теорема 3.2 верна. Поэтому согласно принципу математической

индукции верна формула $S_n = \frac{n}{n+1}$ для $\forall n \in N$, т.е. наше предположение справедливо.

ЛЕКЦИЯ 4

Содержание лекции: "Функции (отображения), алгебраические операции, их классификация. Композиция и обращение функций. Связь понятия функций с отношениями. Инварианты. Последовательности. Простейшие представления о математических структурах (моделях)"

4.1. Функциональные отношения, функции одного аргумента и их классификация. Обращение и композиция функций

Функция, отображение, соответствие, оператор, преобразование наряду с понятиями множества, отношения являются одним из наиболее важных математических понятий. В зависимости от контекста эти термины могут использоваться как синонимы, так и в них может быть вложен различный смысл.

Опр. 4.1. Отношение $\sigma \subset A \times B$, где A, B - множества, называется **функциональным**, если для $\forall x \in A$ сечение σ по x содержит не более одного элемента (или один и только один).

Опр. 4.2. Если сечение отношения σ по любому элементу из A содержит один и только один элемент, то функциональное отношение называется **всюду определённым**.

Опр. 4.3. Отношение σ^{-1} (обратное к σ) между элементами $b \in B$ и $a \in A$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место $a \sigma b$.

Примерами обратных друг к другу отношений являются $<$ и $>$, $\subset$ и $\supset$.

Опр. 4.4. Если обратное отношение σ^{-1} к σ тоже функционально, то отношение σ называется **взаимно-однозначным**.

Опр. 4.5. Любое функциональное отношение (взаимно однозначное или нет) определяет по сути **функцию (отображение)** f , связанное с этим отношением. Сечение $\sigma(x)$ множества (функционального отношения) σ по

$x \in A$ называют **образом аргумента** x для функции f и обозначают через $f(x)$. Аргумент также называют переменной, а $f(x)$ - значением функции.

Опр. 4.6. Сечение $\sigma^{-1}(y)$ обратного отношения σ^{-1} по $y \in B$ называют **прообразом** y для функции f .

Опр. 4.7. Множество $x \in A$, таких, что существует $f(x)$ ($\sigma(x)$ не пусто), называется **областью определения** функции, связанной с функциональным отношением σ .

Если f определена всюду, т.е. область определения совпадает с A , то говорят, что f - отображение множества A в B и пишут $f: A \rightarrow B$ или $A \xrightarrow{f} B$.

Опр. 4.8. Под равными функциями f и g понимают функции, имеющие одинаковые области определения и удовлетворяющие условию $f(x) = g(x)$ для любого x из этой области.

Опр. 4.9. Множество $f(A)$ всех значений $f(x)$, когда $x \in A$, называется **образом** множества A .

Опр. 4.10. Пусть образ $f(A)$ равен B . Тогда говорят, что имеет место отображение A на B или f - **сюръективное отображение**.

Опр. 4.11. Если f - функция, связанная с функциональным взаимно однозначным отношением σ , то функция, связанная с σ^{-1} , обозначается f^{-1} . В этом случае f называется **инъективной** функцией (отображением), а f^{-1} - **обратной функцией**.

Опр. 4.12. Если выполнены условия опр.4.11 и f всюду определена, то f - инъективное отображение, или инъекция. Инъективная функция $f: A \rightarrow B$ называется также **вложением**.

Для инъективного отображения (функции) из равенства $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$ ($x, y \in A$).

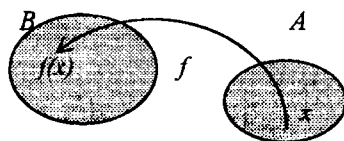
Опр. 4.13. **Биективными отображениями** или **биекциями** называют отображения одновременно сюръективные и инъективные. Биекция f обозна-

чается так $f: A \leftrightarrow B$. Множества A и B при этом называются *равномощными*.

Опр. 4.14. Если существует биективное отображение множества A на множество $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, то A называется *счётным множеством*.

Смысл сделанных выше определений пояснён на рисунках 4.1.

a)

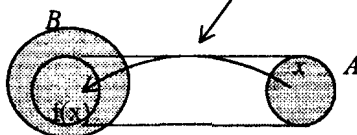


Образ, или значение
функции



Аргумент или переменная

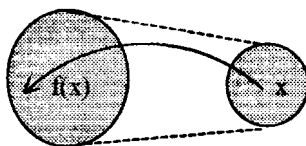
b) Отображение A в B



Множество значений

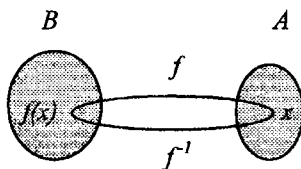
Множество определения

с) Отображение A на B , или сюръективное отображение B (множество значений)

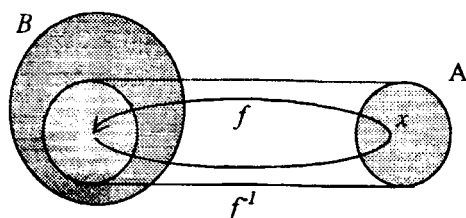


A (множество определения)

d) f - инъективная функция, f^{-1} - обратная функция.



е) Инъективное отображение.



ж) Биективное отображение

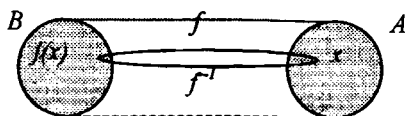


Рис.4.1. Типы отображений

Опр. 4.15. Пусть $y = f(x)$ - функция, определённая на A со значением в B , а $z = g(y)$ - функция, определённая на B со значениями в множестве C . Если для $\forall x \in A$ найдётся такое $z \in C$, что $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, то полученная таким образом функция, определённая на A со значениями в C , называется **композицией** (или суперпозицией) функций g и f и обозначается через $f \circ g = fg$ и т.п.

Частным случаем этого определения является следующее: если $f: A \rightarrow B$, а $g: B \rightarrow C$, то $g \circ f = gf: A \rightarrow C$.

Функции могут задаваться различным образом. В частности, их можно задавать в виде аналитических выражений, таблиц, чётко определённых алгоритмов получения y по известному x . Они могут задаваться в явной или неявной формах. Одним из важных способов неявного задания функций является задание их в виде решения (решений) уравнения (уравнений).

4.2. Последовательности, семейства, функции многих переменных

В математике часто пользуются переменными, которые называются индексами. Пусть f - функция, определённая на множестве I индексов. Если

$i \in I$ - индекс, то соответствующее значение функции f обозначается через f_i .

Опр. 4.16. Рассмотрим множество B , в котором функция f принимает свои значения. Под **семейством** элементов в B , занумерованных посредством I , понимают отображение $f: I \rightarrow B$.

Хотя семейство есть не что иное как отображение, его удобно представлять себе в виде совокупности объектов из B и записывать с помощью символов $\{f_i\}_{i \in I}$.

Опр. 4.17. Если множество индексов I совпадает с N или $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, то соответствующая функция называется **последовательностью**, а каждое её значение - **членом** последовательности. Если множество значений функции f является подмножеством множества действительных чисел, то последовательность называется **числовой**.

Выше было введено понятие функции (отображения) одной переменной (аргумента). По аналогии можно определить и функции нескольких переменных.

Опр. 4.18. Под функцией n переменных ($n \geq 1$) будем понимать функцию, аргументом которой являются упорядоченные n -и. Другими словами, это такая функция $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$), которая ставит в соответствие любой n -е $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не более одного элемента $z \in Z$.

4.3. Алгебраические операции, их классификация

Опр. 4.19. Рассмотрим декартово произведение $X \times X \times \dots \times X$ всех n -к $(x_1, x_2, \dots, x_n) (A_1 = A_2 = \dots = A_n = X)$. Под n -арной внутренней алгебраической операцией в X будем понимать функцию n переменных, определённую в $X^n = X \times X \times \dots \times X$ и принимающую значения только в X .

Если $n = 2$, то алгебраическая операция называется **бинарной**. Для обозначения этой операции используют различные символы, например, o , $+$, $-$, $*$, $\times$. Пусть на множестве M задана бинарная алгебраическая операция, т.е.

любой паре $(a, b) \in M \times M$ поставлен в соответствие единственный элемент $c \in M$, т.е. $a \circ b = a * b = ab = c$.

Опр. 4.20. Бинарная алгебраическая операция $*$ называется ассоциативной, если для $\forall a, b, c \in M$ имеет место равенство $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Примерами ассоциативных операций являются сложение и умножение чисел. Но операция возведения в степень не является ассоциативной, т.к. в общем случае $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$. В частности, $(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}$.

Опр. 4.21. Бинарная алгебраическая операция $*$ называется коммутативной, если для $\forall a, b \in M$ $a * b = b * a$.

Пусть на множестве M заданы две бинарные внутренние алгебраические операции $*$ и $\circ$.

Опр. 4.22. Говорят, что операция $\circ$ *дистрибутивна* относительно операции $*$, если для $\forall x, y, z \in M$ имеют место равенства: $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$, $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$

В математике используют различные виды записи алгебраических операций, в частности, аддитивную и мультипликативную. При употреблении аддитивной формы часто используют знак «+». Например, ассоциативность и коммутативность в таком случае выглядят таким образом: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $a+b=b+a$ для $\forall a, b, c \in M$. В рамках же мультипликативной формы записи знак операции вовсе опускается, а данные свойства выглядят следующим образом: $(ab)c = a(bc)$, $ab=ba$ для $\forall a, b, c \in M$.

Кроме бинарных алгебраических операций в алгебре рассматриваются обратные алгебраические операции. *Примерами* таковых для операций сложения и умножения чисел являются операции вычитания и деления. Дадим некоторые пояснения общего характера, относящиеся к способам введения обратных алгебраических операций.

Пусть на множестве M задана бинарная внутренняя алгебраическая

операция $\circ$, т.е. $\forall u, r \in M$ поставлен в соответствие единственный элемент $(u \circ r) = b \in M$. Сразу отметим, что элемент $b \in M$ может сопоставляться и другой паре элементов u_1, r_1 , т.е. может быть $(u_1 \circ r_1) = b$. Можно поставить такую задачу: найти все такие $u, r \in M$, для которых $u \circ r = b$, где b - некоторый фиксированный элемент из M . Данная задача сводится к решению уравнений следующих двух типов: $a \circ x = b$, $y \circ a = b$, где x, y - неизвестные элементы из M , а a, b - произвольные фиксированные элементы из M . Если указанные уравнения имеют единственные решения при $\forall a, b \in M$, то тогда мы можем любой паре $(a, b) \in M \times M$ поставить в соответствие однозначно определенные элементы $x, y \in M$. В этом случае исходная операция $\circ$ порождает две внутренние бинарные алгебраические операции, которые называются соответственно правой и левой обратными операциями по отношению к исходной операции $\circ$. Следует отметить, что если исходная операция $\circ$ коммутативна, то обе обратные операции совпадают друг с другом.

Кроме внутренних алгебраических операций, определенных выше, в математике широко используются и внешние алгебраические операции (законы композиции).

Опр. 4.23. Рассмотрим два множества M и A . Пусть любому элементу $m \in M$ и произвольному элементу $\alpha \in A$ поставлен в соответствие по некоторому правилу (закону) элемент $b \in M$. Тогда множество A называется множеством операторов на множестве M . При этом внешний закон композиции есть ни что иное, как отображение множества $A \times M$ в множество M .

Целый ряд примеров внешних алгебраических операций будет рассмотрен в последующих лекциях. Заметим только, что типичной операцией такого рода является операция умножения векторов силы, скорости, ускорения на числа. При этом в качестве множества M выступают множества таких векторов, а в качестве множества A - множество действительных чисел.

4.4. Математические структуры (модели). Инварианты

В школьном курсе математики рассматривались, в частности, элементы геометрии Евклида, свойства действительных чисел, элементарных функций и неравенств, а также изучались простейшие типы уравнений. Однако в XIX-XX вв. область применения математики при решении разнообразных проблем и задач, возникших в логике, в самой математике, физике, химии, астрофизике, биологии, экономике и технике, настолько расширилась, что теперь легче указать, где используются математические методы, чем описать сферы человеческой деятельности, в которых они почти не употребляются. В качестве пояснения отметим, что математика теперь широко используется в таких, казалось бы, далеких от нее областях, как лингвистика, искусство, социология, медицина, психология. В связи со сказанным резонно задать следующий вопрос: Чем занимается математика и как ее результаты связаны с реальными явлениями, процессами, событиями, происходящими в окружающем нас мире и в человеческом обществе? Ответить на этот вопрос в законченной форме практически невозможно из-за постоянного расширения сферы использования математики. Поэтому ниже будут даны общие определения ряда математических понятий и образов, которые уже нашли весьма плодотворное применение в указанных выше областях. Полезно еще отметить, что современная математика занимается не столько объектами исследования, сколько структурой разнообразных отношений между этими объектами. К тому же в ней исследуются многие свойства, присущие многим реальным объектам, явлениям, процессам и т.д.

Выше были даны определения отношений, алгебраических операций, функций и исходных понятий логики. На их основе уже можно сформулировать ряд очень важных общих понятий и конструкций математики, которые широко и эффективно используются при рассмотрении, решении теоретических и прикладных проблем науки и техники.

Рассмотрим некоторое множество $Y = \{A_\beta\}_{\beta \in B}$ объектов (явлений, процессов, и т.п.), где B - множество индексов, а A_β - элемент (или множество), сопоставляемый элементу $\beta \in B$. Каждый объект (элемент, множество) $A_\beta \in Y$ обладает некоторой совокупностью свойств. Каждое из них обуславливает его различие и общность с другими объектами, а также выявляется во взаимоотношениях элемента A_β с самим собою и с другими элементами множества Y или каких-либо других множеств объектов. Свойства могут фиксироваться, например, с помощью определенных утверждений, сформулированных в рамках какого-либо логического исчисления. Кроме этого свойства очень удобно задавать посредством отношения эквивалентности, заданного на множестве Y или множестве, которое содержит в себе Y .

Пример 4.1. Пусть M - множество квадратов на некоторой плоскости P . Это множество характеризуется таким общим свойством: квадрат - четырехугольник, все стороны которого равны и углы между всеми смежными сторонами которого одинаковы.

Поясним, каким образом можно задавать свойства с помощью отношений эквивалентности. Для этого надо ввести понятие инварианта.

Опр. 4.24. Пусть M - множество объектов, снабженное фиксированным отношением эквивалентности ρ . Под классом эквивалентности элемента $m \in M$ понимают множество K_m всех элементов из M , которое связано с m отношением ρ .

Опр.4.25. Пусть M - множество с заданным на нем отношением эквивалентности ρ , а φ - отображение этого множества в S , т.е. $\varphi: M \rightarrow S$. Тогда под **инвариантом** в математике понимают такое отображение φ , которое сопоставляет каждому классу эквивалентности K_m ($m \in M$) множества M (по отношению ρ) единственный элемент $s_m \in S$, т.е. имеет место равенство: $s_m = \varphi(r)$ для $\forall r \in K_m$.

Из данного определения следует, что каждому классу эквивалентности (и всем его элементам) множества M сопоставляется *один и тот же* элемент определенного множества S , элементы которого можно трактовать как **инварианты** (т.е. **неизменные** объекты, величины и т.д.), соответствующие заданным классам эквивалентности. Заметим, что различным классам эквивалентности сопоставляются различные элементы из множества S .

Замечание 4.1. Каждый **инвариант** возможно интерпретировать как свойство, присущее всем элементам выбранного класса. **Инварианты** называют также **значениями** данного **свойства**.

Замечание 4.2. **Свойства**, соответствующие различным классам, связаны между собой, ибо отношение эквивалентности задано на всем множестве Y . Поэтому разумно считать, что вся совокупность **инвариантов**, образующая множество S , определяет одно общее свойство, присущее всем элементам множества Y . При этом конкретные значения

этого свойства, сопоставляемые какому-либо классу задаются элементами множества S .

Опр. 4.26. Под математическим моделированием понимают замещение исследования свойств оригинала (физического, математического, биологического, химического, лингвистического, экономического и т.д.) изучением математической абстрактной модели, которая фиксирует (отражает) все его существенные стороны, свойства. Математическая модель - образ оригинала в некотором множестве математических символов, понятий, конструкций, операций и т.п.

В рамках "чистой" математики также широко используется понятие математической структуры, которому придают более узкое содержание по сравнению со смыслом, вложенным в понятие математического моделирования согласно определению 4.26. Математические структуры используются при построении математических моделей реальных объектов, явлений, процессов. Простота и одновременно универсальная приложимость математики в значительной степени связаны с тем, что в ней мы постоянно сталкиваемся с ограниченным набором основных математических структур, многократно возникающих как в самой математике, так и ее приложениях.

Опр. 4.27. Под математической структурой будем понимать множество $S = \{M_1, \dots, M_r; \sigma_1, \dots, \sigma_k; \nu_1, \dots, \nu_p\}$, состоящее из определенного набора исходных множеств $M_1, \dots, M_r$ ($r \in N$) совокупности отношений $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ ($k \in N$; отношения могут быть бинарными, тернарными и т.д. [6,7]) и набора $\nu_1, \dots, \nu_p$ ($p \in N$) внутренних и внешних (по отношению к множествам $M_1, \dots, M_r$) нуль-арных, унарных, бинарных алгебраических операций.

В опр.4.27. под нуль-арными и унарными алгебраическими операциями понимается соответственно действия, сводящиеся к выделению в множествах $M_1, \dots, M_r$ отдельных элементов, которые обладают определенным набором *свойств*, и к отображению этих множеств в себя. Например, в множестве натуральных чисел выделенным элементом является 1, которая обладает тем свойством, что ее произведение на любое число из N не меняет его.

Замечание 4.3. Основные свойства отношений $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ и алгебраических операций $\nu_1, \dots, \nu_p$ фигурирующих в опр.4.27, задаются аксиомами, которые обязательно должны быть включены в полное описание математической структуры.

Замечание 4.4. Содержание связанной со структурой S математической теории (например, планиметрии или теории вещественных чисел) составляет изучение дальнейших свойств отношений $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ и алгебраических операций $\nu_1, \dots, \nu_p$, которые можно вывести из аксиом.

Следует отметить, что множество M с заданным на нем набором бинарных отношений в математике зачастую называют просто моделями [10].

В следующих лекциях будет приведен целый ряд конкретных примеров математических структур, которые широко используются в математике и ее приложениях в физике и технике.

ЛЕКЦИЯ 5

Содержание лекции: “Классические примеры математических структур (моделей), широко используемых в науке и технике. Приближенные числа. Основные положения интервальной арифметики”

5.1. Отношение частичной упорядоченности, частично упорядоченные и упорядоченные множества

Опр. 5.1. Бинарное отношение $\bar{\sigma}$, заданное на множестве M , называется **противоположным** к бинарному отношению σ , если имеет место $a\bar{\sigma}b$, где $a, b \in M$, тогда и только тогда, когда $a\sigma b$ места не имеет.

Примерами противоположных отношений являются $=$ и $\neq$.

Опр. 5.2. Если для любых различных между собой элементов $a, b \in M$ из $a\sigma b$ следует $b\bar{\sigma}a$, то отношение σ называется **антисимметричным**.

Примером антисимметричного отношения является отношение $\subset$ (отношение включения в теории множеств).

Опр. 5.3. Бинарное отношение σ , заданное на M называется **отноше-**

нием частичной упорядоченности, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Для записи этого отношения обычно употребляют символ $\leq$. При этом, если $a, b \in M$ и $a \leq b$, то в зависимости от обстоятельств говорят, что a меньше или равно b , a содержится в b , a предшествует b .

Опр. 5.4. Множество M с заданным на нем отношением частичной упорядоченности называется *частично упорядоченным множеством*.

Опр. 5.5. Бинарное отношение σ , заданное на M , называется отношением строгого порядка, если оно транзитивно и не является рефлексивным и симметричным.

Примером такого отношения является отношение $<$.

Опр. 5.6. Пусть в множестве M задано отношение частичной упорядоченности σ . Элементы $a, b \in M$ называются *сравнимыми*, если имеет место $a \leq b$ или $b \leq a$.

Следует отметить, что не все пары в M могут быть сравнимы между собой.

Опр. 5.7. Частично упорядоченное множество, в котором любые два элемента сравнимы, называется *упорядоченным множеством*, или *линейно упорядоченным множеством*.

В качестве *примеров* линейно упорядоченных множеств можно отметить множество натуральных чисел N и множество точек прямой линии.

Примерами частично (но не линейно) упорядоченных множеств служат: множество всех подмножеств некоторого данного множества с отношением включения $\subset$ в качестве отношения частичной упорядоченности, множество всех натуральных чисел, если $a \leq b$ понимать в том смысле, что b делится на a .

Замечание 5.1. Частично упорядоченные и упорядоченные множества являются одними из простейших (но очень важных) *примеров* математических структур.

5.2. Множества натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел

Когда мы считаем какие-либо предметы, объекты, то используем натуральные числа. Громадный эмпирический опыт указывает на то, что можно производить процесс счета только в тех случаях, когда объекты, предметы сохраняются неизменными (или достаточно медленно меняются) в течение некоторых промежутков времени. Натуральные числа широко используются вследствие того, что они обладают известными свойствами, которые отражают целый ряд закономерностей, присущих реальным объектам, предметам.

Множество натуральных чисел N представляет собой типичный *пример* математической структуры в смысле определения 4.27. При этом на множестве N заданы две бинарные алгебраические операции (сложение и умножение) и отношение порядка, которые обладают определенными *свойствами*, которые отражены (в явной и неявной формах) в системе аксиом, определяющих множество N . Кратко опишем указанную математическую структуру.

На множестве N определена внутренняя бинарная алгебраическая операция – сложение $(+)$, которая сопоставляет каждой паре (a, b) , образованной из элементов, принадлежащих N , единственный элемент $a + b \in N$, называющийся *суммой* a и b . Эта операция является коммутативной и ассоциативной, т.е. имеют место равенства (фактически это аксиомы)

$$a + b = b + a, (a + b) + c = a + (b + c) \text{ для } \forall a, b, c \in N \quad (5.1)$$

Кроме того, для $\forall a, a', b, b' \in N$ справедливы следующие свойства (аксиомы): из $a = a'$ и $b = b'$ следует $a + b = a' + b'$; из $a + b = a' + b$ следует $a = a'$; из $a + b = a + b'$ следует $b = b'$.

Множество N наделяется отношением строгого порядка $<$.

Опр. 5.8. Пусть дана пара (a, b) , где $a, b \in N$. Если существует элемент

$c \in N$, такой, что $a + c = b$, то будем говорить, что a *меньше*, чем b , и писать $a < b$.

Существование отношения $<$ постулируется таким утверждением.

Аксиома (трихотомии). Для $\forall(a, b) \in N \times N$ либо $a = b$, либо $a < b$, либо $b < a$, причем эти случаи исключают друг друга.

Замечание 5.2. Множество натуральных чисел N является упорядоченным множеством относительно отношения $\leq$.

Замечание 5.3. Любое подмножество множества N является также упорядоченным множеством.

Опр. 5.9. Элемент m частично упорядоченного множества M называется *минимальным*, если не существует такого элемента $x \in M$, что $x < m$ (под отношением $<$ в частично упорядоченном множестве будем понимать отношение $\leq$, применяемое только к различным элементам из M).

Кроме сформулированных выше аксиом множество натуральных чисел N выделяется из множества других множеств посредством еще ряда аксиом.

Аксиома (полной упорядоченности). Всякое непустое подмножество множества N содержит минимальный элемент.

Из данной аксиомы следует, что N содержит минимальный элемент, который обозначается знаком 1 (единица).

В множестве N дополнительно к операции $+$ вводят еще бинарную алгебраическую операцию умножения, которая для $\forall a, a', b, b', c \in N$ обладает следующими *свойствами* (т.е. удовлетворяет таким аксиомам): из $a = a'$ и $b = b'$ следует $ab' = a'b'$; из $ab = ab'$ следует $b = b'$; из $ab = a'b$ следует $a = a'$; $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения); $ab = ba$ (коммутативность умножения); $a(b + b') = (ab) + (ab')$ - дистрибутивность умножения относительно сложения; $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

В качестве последнего основного *свойства* множества N используется зачастую такое утверждение.

Аксиома Архимеда. Для $\forall a \in N$, большего или равного b , либо суще-

существует такое $q \in N$, что $a = bq$, либо существует такое $q \in N$, что $bq < a < b(q+1)$.

Из сказанного выше видно, что даже такая казалась бы простая математическая структура, как N , требует для своего описания введения достаточно большого числа важных понятий.

Множества целых чисел $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, рациональных чисел $Q = \left\{q : q = \frac{m}{n}; m, n \in Z \text{ и } n \neq 0\right\}$ и действительных чисел R строятся уже на базе множества натуральных чисел посредством постепенного обобщения и расширения свойств, присущих натуральным числам. При этом используются различные математические приемы. Среди них следует отметить процедуру расширения, доопределения множества рассматриваемых объектов, операций и применения свойств отношения эквивалентности, которые позволяют строить все более и более абстрактные математические объекты.

5.3. Понятия группы и симметрии

Опр. 5.10. Пусть G - непустое множество, на котором задана бинарная алгебраическая операция $\circ$. Множество G будем называть *группой*, если выполняются следующие аксиомы (свойства):

- 1.° для $\forall a, b, c \in G$ $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- 2.° $\exists e \in G$ такой, что $ea = a$ для $\forall a \in G$ (e - единичный элемент группы);
- 3.° для $\forall a \in G$ $\exists a^{-1} \in G$, для которого имеет место равенство $a^{-1} \circ a = e$ (a^{-1} - обратный элемент к элементу a);

Можно строго доказать, что в группе G справедливы также равенства $a \circ e = a$ и $a \circ a^{-1} = e$ для $\forall a \in G$.

Замечание 5.4. В группе операция $\circ$ (группового умножения) не обязана быть коммутативной.

Опр. 5.11. Если в группе G для $\forall a, b \in G$ справедливо равенство $a \circ b = b \circ a$, то группа называется абелевой.

Замечание 5.5. Группа G является важным примером математической структуры, которая широко применяется в математике, физике и даже в искусстве при исследовании свойств *симметрии*, с которым тесно связаны понятия *гармонии* и *красоты*.

Приведем простейшие примеры групп.

Пример 5.1. Пусть множество G состоит из тождественного преобразования e обычного пространства и элемента a являющегося *симметрией* относительно некоторой плоскости (эту операцию называют также зеркальным отражением). Эта группа содержит два элемента, т.е. $G = \{e, a\}$. При этом в качестве закона композиции (т.е. бинарной алгебраической операции $\circ$) берется композиция биективных преобразований пространства. При этом выполняются следующие равенства: $e \circ e = e$, $e \circ a = a \circ e = a$, $a \circ a = a^2 = e$, $a = a^{-1}$, $a \circ (a \circ a) = (a \circ a) \circ a = a$. Несложно проверить с учетом этих соотношений, что все аксиомы группы выполняются.

Пример 5.2. Пусть $G = \{-1, 1\}$, а в качестве групповой операции взято обычное умножение. Тогда G - группа.

Пример 5.3. Пусть $G = \{e, a, b\}$, причем $b = a \circ a = a^2$, $a \circ a \circ a = a^3 = e$, $e \circ e = e$, $e \circ a = a \circ e = a$, $e \circ b = b \circ e = b$. Несложно убедиться, что G - группа.

Группа, указанная в примере 5.3., допускает простую наглядную трактовку. Рассмотрим для этого некоторый равносторонний $\triangle ABC$, лежащий на фиксированной плоскости. В качестве элементов группы G возьмем только *операции* поворотов e (поворот на нулевой угол), $\alpha = a$ (поворот на угол $2\pi/3$) и $\beta = b$ (поворот на угол $4\pi/3$). Будем предполагать при этом, что повороты происходят в указанной плоскости относительно точки, в которой пересекаются его медианы. В качестве групповой операции $\circ$ возьмем композицию поворотов. Тогда в качестве обратных элементов к a и $a \circ a = a^2$ (т.е.

элементы a^{-1} и $(a \circ a)^{-1}$ будут выступать соответственно $a \circ a = a^2$ и a . При любом из названных поворотов треугольник будет *совмещаться сам с собою* как *целое* (его вершины могут менять при этом свое положение). По этой причине группа G из примера 5.3. в абстрактной форме отражает *симметрию* равностороннего треугольника (но не всю).

Замечание 5.6. Под *симметрией* (геометрической, физической или иной) следует в *наиболее простых ситуациях* понимать ту совокупность преобразований (биективных отображений) объектов, множеств самих на себя, которые *не изменяют* в целом их существенных *свойств*. При этом данная совокупность должна быть группой.

5.4. Алгебра Буля

Среди классических алгебраических понятий (математических структур) особое положение занимает *алгебра Буля* (булева структура), ибо она непосредственно связана с алгеброй множеств (см. лекцию 1) и исчислением высказываний (см. лекцию 2).

Опр. 5.12. Под алгеброй Буля понимают множество B , на котором заданы две внутренние бинарные алгебраические операции $+$ и $\circ$, и выполняются следующие аксиомы:

1.° Операции $+$ и $\circ$ коммутативны.

2.° Законы композиции $+$ и $\circ$ дистрибутивны одна относительно другой, т.е. $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$, $a + b \circ c = (a + b) \circ (a + c)$ для $\forall a, b, c \in B$

3.° Существуют такие два элемента $0, 1 \in B$, что для $\forall a \in B$ имеют место равенства $0 + a = a$, $1 \circ a = a$.

4.° Для $\forall a \in B$ существует элемент $\bar{a} \in B$, удовлетворяющий условиям $a + \bar{a} = 1$, $a \circ \bar{a} = 0$.

Между элементами a и b из B можно определить отношение $a \supset b$ с помощью условий $a + b = a$ или $a \circ b = b$ (т.е. при выполнении одного из них считается, что $a \supset b$; при этом полагается, что записи $a \supset b$ и $b \subset a$ равноценны). Выписанные выше аксиомы носят “самодвойственный” характер, ибо заменив в них $+$ на $\circ$ и наоборот, 1 на 0 и наоборот (и $\supset$ на $\subset$ и наоборот) и оставив операцию $\bar{}$ (это унарная операция) без изменения, мы получаем новые аксиомы (также справедливые), в совокупности совпадающие с исходным набором аксиом. Поскольку любая теорема теории алгебры Буля выводится из ак-

сиом, то будет справедлив **принцип двойственности**, согласно которому любое верное булево утверждение переходит при заменах $+ \leftrightarrow \circ$, $1 \leftrightarrow 0$, $\bar{} \leftrightarrow $, $\supset \leftrightarrow \subset$ снова в истинное предположение.

Следует подчеркнуть, что алгебра Буля допускает различные модели. В частности, ее конкретными реализациями являются алгебры множеств и высказываний, релейно-контактные схемы. Такая математическая структура как алгебра Буля непосредственно используется при проектировании компьютерной техники.

5.5. Приближенные числа. Основные положения интервальной арифметики

Основные свойства вещественных чисел рассматривались уже в школьном курсе математики. Как было отмечено ранее множество вещественных чисел R является существенным расширением (доопределением) множества рациональных чисел, в котором операции сложения, вычитания, умножения, деления можно выполнить точно, в множестве R эти же действия при проведении конкретных (а не формальных) вычислений невозможно всегда осуществить без внесения определенных погрешностей. Поэтому будет полезно отметить некоторые источники возникновения этих погрешностей и дать ряд определений, которые используются при выполнении арифметических операций над вещественными числами.

Известно [11,12], что любое вещественное число может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби. Однако реальные вычисления в подавляющем числе случаев приходится выполнять, прибегая к процедуре обрезания, т.е. переходу от бесконечных десятичных дробей к конечным дробям. Эта процедура является одним из источников вносимых при вычислениях погрешностей. Кроме того причиной возникновения погрешностей является использования в математике бесконечных процессов, алгоритмов (ведь практически приходится от них переходить к конечным процедурам, что вызывает внесение погрешностей в процесс вычислений). При исследовании реальных объектов, явлений и т.д. нам приходится ис-

пользовать заведомо приближенные значения характеристик, которые измерены экспериментальным образом. К сказанному нужно добавить, что выполнение арифметических и иных операций по существу также приводит к появлению дополнительных ошибок, так как зачастую их невозможно выполнить с абсолютной точностью. Из изложенного выше следует, что весьма полезно обсудить *свойства* арифметических операций над приближенными числами и дать простейшие понятия, используемые при оценках качества вычислений.

Опр. 5.13. Приближенным числом a называется число, “незначительно” отличающееся от точного A и заменяющее последние в вычислениях. Если $a < A$, то a - приближенное значение A *по недостатку*; если же $a > A$, то - *по избытку*.

Опр. 5.14. Погрешностью (ошибкой) Δa приближенного числа a обычно понимают число $\Delta a = A - a$ (или $\Delta a = a - A$), т.е. $A = a + \Delta a$.

Опр. 5.15. Если знак ошибки не известен, то удобно использовать абсолютную погрешность Δ приближенного числа, которая определяется равенством $\Delta = |\Delta a| = |A - a|$.

Опр. 5.16. Предельной абсолютной погрешностью Δ_a приближенного числа понимается всякое число, не меньшее Δ , т.е. $\Delta \leq \Delta_a$.

Из опр. 5.16. следует, что имеет место двойное неравенство

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a. \quad (5.2)$$

Опр. 5.17. Относительной погрешностью δ приближенного числа a называется любое число $\delta = \Delta |A|^{-1}$.

Опр. 5.18. Предельной относительной погрешностью приближенного числа a называется любое число δ_a , удовлетворяющее неравенству $\delta \leq \delta_a$.

При этом $\Delta \leq \delta_a |A|^{-1}$, $\Delta \leq |A| \delta_a$.

За предельную абсолютную погрешность числа a можно взять

$\Delta_a = |A|\delta_a$. Поскольку на практике $A \approx a$, то вместо этой формулы зачастую пользуются выражением $\Delta_a = |a|\delta_a$. Отсюда, зная δ_a , можно получить границы для точного числа. Точное число лежит на отрезке $[a(1 - \delta_a), a(1 + \delta_a)]$. Из сказанного выше следует, что выполнение арифметических операций над приближенными числами фактически сводится к действиям над совокупностями чисел, полностью заполняющих определенные отрезки на вещественной оси.

Перейдем теперь к формулировке исходных понятий интервальной арифметики. Рассмотрим множество $M = \{[a, b] \mid [a, b] \in R, b - a \geq 0\} \cup R$, которое состоит из всех отрезков конечной длины, которые принадлежат R , и самого множества вещественных чисел R . Будем предполагать, что арифметические операции сложения, вычитания, умножения, деления на числа из R определены традиционным образом. Используя свойства этих операций, дадим определения родственных им операций над элементами (отрезками, сегментами) из M .

Опр. 5.19. Под арифметическими операциями «+» (сложения), «-» (вычитания), «·» (произведения), «:» (деления), производимыми над парами элементов из M , будем понимать действия, осуществляемые по следующим правилам:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]; \quad (5.3)$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]; \quad (5.4)$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]; \quad (5.5)$$

$$[a, b] : [c, d] = [a, b] \cdot [1/d, 1/c]; \quad (5.6)$$

причем при делении отрезок $[c, d]$ не должен содержать нуль. Под символами $\min(\dots)$ и $\max(\dots)$ в (5.5) понимаются соответственно минимальное и максимальное из чисел, расположенных на месте многоточий.

Определения операций +, -, ·, : внешне похожи на соответствующие

арифметические операции над обычными вещественными числами. В частности, сложение и умножение элементов из M подчиняются коммутативному закону, т.е.

$$\begin{aligned}[a, b] + [c, d] &= [c, d] + [a, b]; \\ [a, b] \cdot [c, d] &= [c, d] \cdot [a, b]\end{aligned}\tag{5.7}$$

Тем не менее основные *свойства* операций над элементами из M существенно отличаются от *свойств* операций над обычными вещественными числами. Отметим некоторые из этих отличий.

Во-первых, операция вычитания в M не является обратной по отношению к сложению. Если отрезок $[a, b]$ невырожденный (т.е. $b - a > 0$), то он не имеет обратного элемента относительно сложения (это означает, что для любого невырожденного $[a, b] \in M$ не существует элемента $[c, d] \in M$, который обладал бы свойством $[a, b] + [c, d] = [0, 0]$; $[0, 0]$ - нулевой элемент из M). Более того, при вычитании из него такого же отрезка получается ненулевой отрезок, т.е. $[a, b] - [a, b] = [a - b, b - a]$ (при этом отрезок $[a - b, b - a]$ содержит 0). Из сказанного следует, что уравнение относительно неизвестного отрезка $X = [x_1, x_2]$

$$[a, b] + [x_1, x_2] = [c, d]\tag{5.8}$$

имеет решение лишь тогда, когда $b - a \leq d - c$. Отметим, что любое решение такого уравнения удовлетворяет условию $[x_1, x_2] \subset [c, d] - [a, b]$. Аналогично, деление в M не обратное умножению. Если $b - a > 0$, то элемент $[a, b] \in M$ не имеет обратного элемента относительно умножения. Если уравнение $[a, b] \cdot [x_1, x_2] = [c, d]$, где $0 \notin [a, b]$, имеет решение $[x_1, x_2]$, то оно удовлетворяет условию $[x_1, x_2] \subset [c, d] : [a, b]$. Заметим также, что в M , вообще говоря, не выполняется дистрибутивный закон. Вместо условия дистрибутивности для чисел $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ в M выполняется лишь более слабое условие

$$[a, b] \cdot ([c, d] + [e, f]) \subset [a, b] \cdot [c, d] + [a, b] \cdot [e, f]\tag{5.9}$$

Отмеченные выше *свойства* основных операций, определенных на M , показывают, что интервальная арифметика отличается от обычной.

Замечание 5.7. Множество M , на котором определены операции «+», «-», «·», «:» и отношение включения $\subset$, представляет собой *пример* математической структуры.

В заключение этой лекции следует отметить, что классическими *примерами* математических структур являются геометрические системы, построенные Евклидом и Лобачевским.

ЛЕКЦИЯ 6

Содержание лекции: Поле комплексных чисел, как пример математической структуры. Свойства алгебраических операций над комплексными числами. Различные формы представления комплексных чисел и их геометрическая интерпретация.

6.1. Некоторые общие сведения о решениях алгебраических уравнений

6.1.1. Будем сначала предполагать, что мы можем оперировать (т.е. совершать различные действия) только над действительными числами.

Опр. 6.1. Полиномом (многочленом) n -й степени (порядка) будем называть выражение вида $P_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n$, где x – переменная величина ($x \in R$), а коэффициенты $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n$ – произвольные вещественные числа, причем $b_0 \neq 0$. При этом под равенством двух полиномов будем понимать совпадение их значений для $\forall x \in R$.

Теорема 6.1. Два полинома $P_{n_1}(x)$ и $P_{n_2}(x)$ равны друг другу тогда и только тогда, когда $n_1 = n_2$ и равны все коэффициенты этих полиномов, которые стоят при одинаковых степенях x .

Док-во. Пусть даны два полинома $P_{n_1}(x) = \sum_{l=0}^{n_1} a_l x^l$, $P_{n_2}(x) = \sum_{l=0}^{n_2} a'_l x^l$. Допустим, что эти полиномы равны для $\forall x \in R$. Тогда полагая $x = 0$, получим, что $a_0 = a'_0$. Продифференцируем теперь эти полиномы по x . Получим $P'_{n_1}(x) = \sum_{l=1}^{n_1} l a_l x^{l-1}$, $P'_{n_2}(x) = \sum_{l=1}^{n_2} l a'_l x^{l-1}$. Так как $P_{n_1}(x) \equiv P_{n_2}(x)$, то будет справедливо равенство $P'_{n_1}(x) \equiv P'_{n_2}(x)$ для $\forall x \in R$. Учитывая это и полагая $x = 0$, получим $a_1 = a'_1$. Описанную процедуру можно продолжить и показать, что $a_2 = a'_2$, $a_3 = a'_3$ и т.д. Это означает, что полиномы имеют одинаковые степени и их все коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x , равны друг другу. Итак, из равенства полиномов следует равенство всех их соответствующих коэффициентов. Если же предположить, что коэффициенты полиномов $P_{n_1}(x)$ и $P_{n_2}(x)$, которые стоят при одинаковых степенях x , равны друг другу, то они будут полностью совпадать друг с другом, т.е. бу-

дуг равны для $\forall x \in R$. Теорема доказана.

Опр. 6.2. Алгебраическим уравнением n -о порядка будем называть уравнение вида $P_n(x) = 0$ ($n \in N$) относительно неизвестного x . Любое значение $x \in R$, обращающее уравнение $P_n(x) = 0$ в истинное равенство называется решением этого уравнения на множестве вещественных чисел.

Опр. 6.3. Если существует хотя бы одно решение $x \in R$ уравнения $P_n(x) = 0$, то будем говорить, что это уравнение разрешимо (имеет решение) на множестве R .

6.1.2. Алгебраические уравнения 1-й степени были известны еще древним египтянам за 2000 лет до н.э. Им также был известен метод его решения. В Вавилоне рассматривались некоторые частные случаи квадратных и кубических уравнений. Известная из школьного курса математики формула решения квадратного уравнения была по существу как определенное правило, выраженное словами, знакома древним грекам (Герон, I в. до н.э. – I в. н.э.; Диофант, III в. н.э.). Однако им был известен только способ отыскания положительного решения (отрицательные числа они еще в явной форме не использовали). Эту же формулу знали и индусы (Ариабхатта, конец V в.; Брахмагупта, VII в.) Впоследствии индусский математик Бхаскара (XII в.) нашел оба действительных корня (для тех случаев, когда они существуют) квадратного уравнения.

Указанное правило (формула) решения квадратного уравнения дает определенную конечную совокупность действий (начиная от сложения и кончая извлечением корня) в заданной последовательности, которые нужно произвести над коэффициентами, чтобы получить искомые корни. Это так называемое «алгебраическое» решение, или решение «в радикалах». По аналогии решение алгебраических уравнений более высоких порядков пытались в последующие времена найти в «радикалах», да и вообще такие решения считались вполне естественными. Но в дальнейшем дела пошли не так гладко. Арабские и персидские математики до XVI в. нашли решения некоторых типов алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней в геометрическом виде. Общие решения уравнений 3-й и 4-й степеней в «радикалах» были получены в 1-й половине XVI в. итальянскими математиками. В 1505г. Ш. дель Ферро нашел решение кубического уравнения, но не опубликовал его. Оно вскоре было переоткрыто Н. Тарталья. Г. Кардано в 1545г. опубликовал книгу, в которой привел это решение (с указанием имен Ферро и Тарталья). Г. Кардано привел способ решения общего алгебраического уравнения 4-й степени, который был открыт его учеником Л. Феррари.

Что касается алгебраических уравнений более высоких степеней, то их не удалось решить в общем виде в радикалах. П. Руффини (итальян. матем.) в 1799г. и Н. Г. Абель (норвеж. матем.) в 1826г., в частности доказали, что таких решений не существует для алгебраических уравнений 5-й степени, т.е. не существует общих формул для корней, содержащих кроме операций сложения, вычитания, умножения, деления (это рациональные действия) еще только радикалы. Наконец Э. Галуа (1811-1832гг.; франц. матем.) с помощью теории групп доказал, что для общего уравнения любой степени n , большей четырех, эта задача неразрешима.

Решение в «радикалах» кубического уравнения с помощью формул Кардано приводило, вообще говоря, к необходимости вычисления действительных корней уравнения с действительными коэффициентами через квадратные корни из отрицательных чисел. При этом такие ситуации имеют место и тогда, когда исходное кубическое уравнение заведомо имеет

три действительных корня. Этот факт явился одним из побудительных мотивов для введения в математику «мнимых» чисел и определения для них правил действий (алгебраических операций), которые формально близки к правилам действий над действительными числами. Обоснование правил действия над комплексными числами (синоним мнимых чисел) было дано только в 1572г. итальянским математиком Р. Бомбелли. К 1800г. была также дана геометрическая интерпретация действий над комплексными числами, что существенно подтвердило обоснованность и разумность введения множества комплексных чисел, которое является расширением (доопределяющим) множества вещественных чисел.

6.2. Поле комплексных чисел

6.2.1. Опр. 6.4. Пусть задано непустое множество B , на котором определены две внутренние бинарные алгебраические операции «+» и « $\cdot$ ». Данное множество M будем называть полем, если имеют место следующие аксиомы:

1. Множество B представляет собой абелеву группу по отношению к операции «+».

2. Справедливы законы дистрибутивности $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ для $\forall a, b, c \in B$.

3. Множество B содержит по крайней мере один элемент, отличный от нуля (под нулем 0 понимается элемент, обладающий свойством $a + 0 = a$ для $\forall a \in M$).

4. Множество $B \setminus \{0\}$ – группа по отношению к операции « $\cdot$ », которая обладает свойством коммутативности (т.е. $a \cdot b = b \cdot a$ для $\forall a, b \in M$).

Замечание 6.1. Множество вещественных чисел является полем.

Следует отметить, что необходимость введения комплексных чисел диктовалась не только указанными выше свойствами формул Кардано, но и отсутствием действительных решений даже простейших квадратных уравнений (например, таковых решений не имеет уравнение $x^2 + 5 = 0$). К сказанному следует добавить, что любое расширение поля действительных чисел желательно было бы произвести естественным образом, т.е. так, чтобы более общая числовая система (математическая структура) в частном случае переходила бы в множество действительных чисел. Ниже дано определение поля комплексных чисел, проведена геометрическая интерпретация этих чисел и показано, что система

комплексных чисел является расширением множества действительных чисел.

6.2.2. Опр. 6.5. Пусть C - множество, элементами которого являются любые пары $(x, y) \in R \times R$ и на котором заданы две внутренние бинарные алгебраические операции «+» (сложение) и «·» (умножение), определенные для $\forall (a, b), (c, d) \in C$ с помощью равенств

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (6.1)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c), \quad (6.2)$$

где знаки «+», «-» и «·», стоящие в внутри скобок в правых частях (6.1) и (6.2), имеют смысл обычных операций сложения, вычитания и умножения вещественных чисел. Тогда множество является полем, которое называется множеством (полем) комплексных чисел. При этом любой элемент $(x, y) \in R \times R$, называется комплексным числом.

Замечание 6.2. Операции «+» и «·», определенные равенствами (6.1), (6.2), обладают всеми основными свойствами, которыми характеризуются операции сложения и умножения действительных чисел. Эти операции коммутативны и ассоциативны, связаны законом дистрибутивности и для них существуют обратные операции – вычитание и деление (кроме деления на нуль; в качестве нуля в C выступает элемент $(0, 0)$ (доказательство этих фактов приведено в [13]).

Замечание 6.3. Операции вычитания и деления комплексных чисел в C для $\forall a, b, c, d \in R$, задаются соответственно посредством равенств

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d), \quad (6.3)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right), \quad (6.4)$$

где $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d)$ (в (6.4) везде для упрощения записи опущен знак «·»)

Замечание 6.4. В качестве единичного элемента e в C выступает элемент

$(1, 0) \in C$. При этом он для $\forall (a, b) \in C$ обладает следующим свойством:
 $(1, 0) \cdot (a, b) = (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$.

В справедливости этого замечания нетрудно убедиться, если использовать определение операции умножения « $\cdot$ » комплексных чисел (см. формулу (6.2)).

Опр. 6.6. Два комплексных числа (a, b) и (c, d) называются равными, если $a = c$ и $b = d$.

Опр. 6.7. Если $\beta = (c, d) \neq (0, 0)$ (т.е. $\beta \in C$ не является нулевым элементом), то обратным элементом β^{-1} для β будем называть элемент $\left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right) \in C$. При этом обратный элемент β^{-1} удовлетворяет условиям $\beta^{-1} \cdot \beta = \beta \cdot \beta^{-1} = (1, 0) = e$.

Замечание 6.5. Множество комплексных чисел C является математической структурой, ибо оно подпадает под действие опр. 4.27.

6.3. Геометрическая интерпретация множества комплексных чисел.

Различные представления этих чисел

6.3.1. Известно, что множество действительных чисел можно биективно (т.е. взаимно однозначно) отобразить на множестве точек прямой l , на которой зафиксирована некоторая точка O (начало координат), выбраны масштаб длины и положительное направление на l . При этом каждому числу $x \in R$ ставится в соответствие точка $P \in l$, абсцисса которой равна x . Поэтому естественно пары $(a, b) \in C$ интерпретировать как точки на плоскости A , на которой зафиксирована некоторая точка O (начало координат), через которую проходят две взаимно перпендикулярные оси X и Y (оси абсцисс и ординат). Любой точке $P \in A$ в этой системе координат можно сопоставить пару (x, y) где x – абсцисса, а y – ордината точки $P(x, y \in R)$. Следует отметить, что сопоставление пар $(x, y) \in R \times R$ и точек плоскости A , когда указанная система координат фиксиро-

вана, является биективным.

Однако на множестве C заданы операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел. Поэтому необходимо еще дать геометрическую интерпретацию и этим операциям. Пусть даны две произвольные точки P_1 и P_2 на A , которые имеют в выбранной системе координат соответственно такие координаты: (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (x_1 и x_2 - абсциссы точек P_1 и P_2 , а y_1 и y_2 - их ординаты). Под «суммой» точек P_1 и P_2 будем понимать точку P_3 с координатами $(x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, а под «разностью» точек P_1 и P_2 будем подразумевать точку P_4 с координатами $(x_4, y_4) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. В свою очередь под «умножением» точек P_1 и P_2 будем понимать точку P_5 , которая имеет координаты $(x_5, y_5) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. Если точка P_2 не совпадает с началом координат, то можно определить и «частное» точек P_1 и P_2 . При выполнении данного условия под результатом «деления» точки P_1 на P_2 будем подразумевать точку P_6 , которая имеет координаты $(x_6, y_6) = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$.

Описанные выше операции над точками плоскости полностью согласуются с операциями над комплексными числами. В этом нетрудно убедиться, если сравнить выписанные выше соотношения с формулами (6.1) – (6.4).

6.3.2. Покажем теперь, что множество C является расширением (доопределением) множества действительных чисел. Для этого надо доказать, что $R \subset C$ и операции над элементами из C в частных случаях совпадают с операциями над вещественными числами. Рассмотрим все точки (элементы из C) вида $(a, 0)$ и поставим им в соответствие действительные числа $a \in R$. Применение к этим точкам (элементам) равенств (6.1) и (6.2) приводит к соотношениям

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \quad (6.5)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0), \quad (6.6)$$

т.е. точки $(a, 0)$, $(b, 0)$ складываются и перемножаются друг с другом так же, как и соответствующие действительные числа.

Замечание 6.6. Множество точек, лежащих на оси абсцисс, рассматриваемое как часть множества комплексных чисел, по своим алгебраическим свойствам ничем не отличается от множества действительных чисел, обычным образом изображенного точками прямой линии.

Из сказанного следует, что можно не различать точку $(a, 0)$ и действительное число a , т.е. всегда полагать $a = (a, 0)$. В частности нуль $(0, 0)$ и единица $(1, 0)$ в C оказываются обычными действительными числами. 0 и 1.

Докажем сейчас, что среди комплексных чисел содержится корень уравнения $x^2 + q = 0$, где $q \in R_+ = R \setminus (-\infty, 0]$. Корнем этого уравнения будет такое комплексное число, квадрат которого равен действительному числу $(-q) < 0$. Корнями этого уравнения будут являться комплексные числа $(0, \pm\sqrt{q})$, где $\sqrt{q}$ — арифметический квадратный корень из числа $q \in R_+$. Покажем, что это действительно так. Для этого умножим элементы $(0, \pm\sqrt{q})$ сами на себя. Принимая во внимание формулу (6.2), получим, что $(0, \pm\sqrt{q}) \cdot (0, \pm\sqrt{q}) = (-q, 0) = ((-1)|q|, 0)$. Это означает, что действительно комплексные числа точки $(0, \pm\sqrt{q})$ лежат симметрично относительно начала координат на оси ординат. Итак, расширение множества R до множества комплексных чисел позволяет находить корни уравнений, которые не имеют решений среди действительных чисел.

6.3.3. В математике широко используется более компактная запись комплексных чисел по сравнению с приведенной выше.

Опр. 6.8. Элемент $(0, 1)$ назовем мнимой единицей $i = (0, 1)$ (при этом $i \cdot i = i^2 = -1$).

Найдем теперь произведение действительного числа $b = (b, 0)$ на $i = (0, 1)$. Учитывая равенство (6.2), получим, что $bi = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b)$. Следовательно, число bi лежит на оси ординат и имеет ординату b , причем все точки оси ординат представимы в виде таких произведений. Если теперь (a, b) — произвольная точка (элемент) из C , то ввиду равенства $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib$ мы прихо-

дим к алгебраической форме записи комплексного числа, т.е. к равенству $z = a + ib$.

Опр. 6.9. Число a называется действительной частью $\operatorname{Re} z = a \in R$ комплексного числа $z \in C$. Соответственно число $b = \operatorname{Im} z \in R$ называется мнимой частью комплексного числа $z \in C$. Числа bi , где $b \in R$, называют чисто мнимыми.

Замечание 6.7. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части.

Справедливость этого утверждения вытекает из того, что упорядоченные 2-и (a, b) и (c, d) , сопоставляемые комплексным числам, равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

В рамках представления комплексных чисел z_1 и z_2 в виде $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ с учетом равенства $i^2 = -1$ несложно чисто формально осуществить над z_1 и z_2 операции сложения, вычитания, умножения и деления. Имеют место следующие равенства:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (6.7)$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i, \quad (6.8)$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i, \quad (6.9)$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i. \quad (6.10)$$

В (6.7) – (6.10) для упрощения записи удалены знаки умножения. Соотношения (6.7), (6.8) допускают простую геометрическую интерпретацию. Смысл ее сводится к тому, что сумме $z_1 + z_2$ соответствует комплексное число, которое сопоставляется точке, которая является концом вектора, полученного при сложении векторов, исходящих из начала координат и заканчивающихся в точках P_1 и P_2 , изображающих комплексные числа z_1 и z_2 (при этом используется правило параллелограмма). Несложно понять и смысл разности $z_1 - z_2$ (см. рис. 6.1).

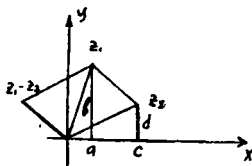


Рис. 6.1.

6.3.4. Для того, чтобы дать геометрическую интерпретацию операций умножения и деления комплексных чисел необходимо ввести ряд новых понятий, описывающих комплексные числа.

Опр. 6.10. Модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + yi$ будем называть арифметический корень $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Опр. 6.11. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется комплексно сопряженным к числу $z = x + yi$.

Опр. 6.12. Аргументом $\varphi = \arg z$ комплексного числа z называется угол между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат в точку, которая сопоставляется z (знак $\arg z$ определяется так же, как и в тригонометрии). При этом $\arg z$ задается с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Действительная и мнимая части комплексного числа $z = x + yi$ связаны с его модулем и аргументом посредством формул

$$x = \operatorname{Re} z = |z| \cos \varphi, \quad y = \operatorname{Im} z = |z| \sin \varphi \quad (6.11)$$

справедливость которых непосредственно следует из определений $|z|$, $\arg z = \varphi$ и геометрических соображений. С учетом (6.11) получим, что

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (6.12)$$

Выражение (6.12) называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

Пусть $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тогда с учетом

определения операции умножения, равенства $i^2 = -1$ и элементарных тригонометрических формул получим, что

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (6.13)$$

Из (6.13) следует, что имеют место соотношения

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, k \in \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad (6.14)$$

Аналогичным образом получим

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{|z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Из (6.15) следует справедливость равенств

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, R \in \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}. \quad (6.16)$$

На основе (6.13) – (6.16) уже легко геометрически интерпретировать операции умножения и деления комплексных чисел. Из (6.13), (6.14) следует, что точку, изображающую произведение комплексных чисел z_1 и z_2 , можно получить, если вектор, сопоставляемый z_1 повернуть против часовой стрелки на угол $\arg z_2$, а затем растянуть его в $|z_2|$ раз. В свою очередь из (6.15), (6.16)

видно, что $z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = |z_2|^{-1} (\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2))$. Это означает, что для получения

точки P^* , соответствующей z_2^{-1} , надо сначала от точки P_2 , составляемой z_2 перейти к точке P_3 , лежащей на расстоянии $|z_2|^{-1}$ от нуля на том же луче, на котором лежит P_2 , а затем перейти к точке симметричной P_3 относительно действительной оси. Результат же деления z_1 на z_2 можно уже получить из z_2^{-1} посредством умножения этого комплексного числа на z_1 , геометрическая интерпретация которого была дана выше.

ЛЕКЦИЯ 7

Содержание лекции: «Простейшие функции комплексного переменного (степенные функции с рациональными показателями, полиномы, рациональные функции, экспоненты) и их элементарные свойства»

7.1. Степенные функции. Формулы Муавра и Эйлера.

Извлечение корней n -й степени из комплексных чисел

7.1.1. Опр. 7. 1. Пусть D - подмножество множества комплексных чисел. Будем говорить, что на D задана функция комплексного переменного $f(z)$, если $\forall z \in D$ в соответствии с некоторым правилом, законом, определяемым символом f , сопоставляется множество значений $W_z \subset C$. При этом D называется областью определения функции $f(z)$, а W_z - областью значений этой функции. Если для $\forall z \in D$ множество W_z содержит только один элемент из C , то $f(z)$ называют однозначной функцией комплексного переменного, а в противном случае говорят, что $f(z)$ - многозначная функция.

Переход от множества вещественных чисел R к множеству комплексных чисел C позволяет рассматривать существенно более широкий класс функций. Одной из простейших среди них является степенная функция вида $w = z^q$, где q - любое рациональное число, т. е. $q = \frac{m}{n}$, где m, n - любые целые числа, причем $n \neq 0$. Ниже будут указаны некоторые элементарные свойства этой функции. Заметим сразу, что при $n=1$ и $m \in N$ функция $w = z^q$ определена на всей комплексной плоскости (т. е. на всем множестве C) и является однозначной. Справедливость этих утверждений следует непосредственно из того, что результат операции умножения определен и однозначен для любых конечных комплексных чисел (число $z \in C$ называется конечным, если $|z| < +\infty$). При этом надо также учесть, что применение операции умножения конечное число раз не нарушает однозначности.

Используя тригонометрическую форму записи комплексных чисел легко получить выражение для степенной функции $w = z^m$, когда $m \in N$.

Пусть $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда из формулы (6.13) следует, что $z^2 = zz = |z|^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$. Аналогичным образом получим, что $z^3 = zz^2 = |z|^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$. Методом математической индукции несложно доказать, что для $\forall m \in N$ будет справедлива **формула Муавра**:

$$z^m = |z|^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi) \quad (7.1)$$

Несколько более сложной является степенная функция вида $w = z^{-m}$, где $m \in N$. Областью ее определения является все множество C за исключением точки $z = 0$. Принимая во внимание равенства $z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \left(\frac{1}{z}\right)^m$ (фактически это определение операции возведения в отрицательную целую степень комплексного числа) и соотношение $z^{-1} = |z|^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$, выведенное в предыдущей лекции, приходим к выводу, что формула Муавра справедлива и для целых отрицательных степеней. Это означает, что для получения z^{-m} , где $m \in N$, достаточно в (7.1) заменить m на $-m$.

7.1.2. Гораздо более сложными свойствами обладает функция $w = z^{\frac{1}{n}}$, $n \in N$, которая формально имеет смысл корня n -ой степени из комплексного числа z . Однако символу $z^{\frac{1}{n}}$ надо предварительно придать точный смысл.

Опр. 7.2. Под символом $w = z^{\frac{1}{n}}$ будем понимать правило, закон, который сопоставляет числу $z \in C$ все то множество комплексных чисел, n -е степени которых равны z . При этом операция, связанная с отысканием функции $w = z^{\frac{1}{n}}$, называется извлечением корня n -й степени из z .

Для отыскания указанного множества комплексных чисел воспользуемся формулой Муавра и тригонометрической формой представления комплексных чисел. Допустим, что надо извлечь корень n -й степени ($n \in N$) из числа $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Согласно **опр.7.2** n -е степени всех корней должны совпа-

дать с z . Возьмем какой-либо из этих корней $\alpha = |\alpha|(\cos \psi + i \sin \psi)$ ($\alpha \in C$) и возведем его в n -ю степень. В итоге с учетом сказанного получим:

$$\alpha^n = |\alpha|^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (7.2)$$

Поскольку два комплексных числа (каковыми являются α^n и z) равны тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части, то получим следующие равенства:

$$|\alpha|^n \cos n\psi = |z| \cos \varphi, \quad |\alpha|^n \sin n\psi = |z| \sin \varphi \quad (7.3)$$

Если возвести эти равенства в квадрат и сложить, то получим, что $|\alpha|^{2n} = |z|^2$. Из этого соотношения следует, что

$$|\alpha|^n = |z|, \quad |\alpha| = \sqrt[n]{|z|}. \quad (7.4)$$

Итак, модуль корня α определяется по известному числу $z \in C$ однозначно.

В свою очередь с учетом (7.3), (7.4) получим, что должны выполняться равенства $\cos n\psi = \cos \varphi$, $\sin n\psi = \sin \varphi$. Эти равенства будут выполняться тогда и только тогда, когда $n\psi = \varphi + 2k\pi$, где k – любое целое число. Следовательно, $\arg \alpha = \psi$ определяется по известному z неоднозначно, так как ψ может принимать любое из значений:

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad (7.5)$$

Придавая k различные значения, мы не всегда будем получать различные значения искомого корня. Однако значениям $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ будут соответствовать различные значения корней. Пусть теперь $k = nq + r$, где $0 \leq r \leq n-1$ а q – любое целое число. Заметим, что любое целое число k можно представить в таком виде. Тогда $\psi = \frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi) = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi(nq + r)) = \frac{1}{n}(\varphi + 2r\pi) + 2\pi q$. Это означает, что прибавление к числу r числа nq не приводит (с точностью до числа $2\pi q$) к изменению $\arg \alpha$. Отсюда следует, что все множество корней, соответствующих всем $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ совпадает с множеством корней, кото-

рые получаются при $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ посредством формул (7.4), (7.5) и выражения $\alpha = |\alpha|(\cos \psi + i \sin \psi)$.

Замечание 7.1. Извлечение корня n -й степени из любого комплексного числа z всегда возможно и дает n различных значений.

Все значения корня n -й степени расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в нуле и делят эту окружность на n равных частей. При этом справедлива формула:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}. \quad (7.6)$$

Пример 7.1. Найти все корни n -й степени из единицы.

Единицу можно представить таким образом: $1 = 1 + 0i = 1(\cos 0 + i \sin 0)$.

Поэтому $|1| = 1$ и $\arg 1 = 0$. Тогда в соответствии с формулой (7.6)

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (7.7)$$

Действительные значения корня n -й степени из 1 получаются из (7.7) при $k = 0$ и $n/2$, если n четно, и при $k = 0$, если n нечетно. На комплексной плоскости корни n -й степени из 1 расположены на единичной окружности и делят ее на n равных частей, причем одной из точек деления служит само число 1.

Замечание 7.2. Степенная функция $w = z^{\frac{m}{n}}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ определена на всей комплексной плоскости и может быть получена посредством последовательного использования функций $w = z^m$ и $w = z^{\frac{1}{n}}$, т.е. $w = z^{\frac{m}{n}} = (z^m)^{\frac{1}{n}}$.

Замечание 7.3. Степенная функция $w = z^{\frac{m}{n}}$, где $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{\dots, -2, -1\}$, определена для любых $z \neq 0$ и может быть получена посредством последовательного использования функций $w = \frac{1}{z}$, $w = z^{|m|}$, $w = z^{\frac{|m|}{n}}$.

7.1.3. В дальнейшем при изучении раздела «Числовые последовательности, пределы числовых последовательностей» будет введено понятие числа e ,

которое является трансцендентным числом. В качестве его приближенного значения можно взять, в частности, 2,73. В XVIII в. Л. Эйлером (1707-1783гг.; швейцар. математик и физик) была найдена простая связь, существующая между показательной функцией $e^{i\Theta}$, где $\Theta \in \mathbb{R}$ и $\cos \Theta, \sin \Theta$. Им было показано, что справедлива следующая формула Эйлера:

$$e^{i\Theta} = \cos \Theta + i \sin \Theta. \quad (7.8)$$

Выражение сводит вычисление экспоненциальной функции $e^{i\Theta}$ к отысканию обычных синусов и косинусов. Справедлива также более общая формула Эйлера

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (7.9)$$

где $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Заметим, что функция e^z определена для $\forall z \in \mathbb{C}$. Из (7.9) видно, что $|e^z| = e^x$. С учетом этого любое z , записанное в тригонометрической форме, легко представить и в экспоненциальной форме. Пусть $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда $z = e^{\ln|z|}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{\ln|z| + i\varphi}$, где под $\ln|z|$ понимается натуральный логарифм числа $|z|$, т.е. логарифм числа $|z|$ по основанию e .

7.2. Полиномы и рациональные функции. Алгебраические уравнения

7.2.1. Опр. 7.3. Полиномом (многочленом) n -о порядка (степени) от комплексного переменного z будем называть функцию вида $P_n(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n$, где все коэффициенты $b_0, b_1, \dots, b_n$ — произвольные комплексные числа (но $b_0 \neq 0$), а $n \in N_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Если $n=0$, то полином имеет нулевую степень и обращается просто в комплексное число.

Опр. 7.4. Два полинома $P_{n_1}(z)$ и $P_{n_2}(z)$ считаются равными тогда и только тогда, когда $n_1 = n_2$ и равны их коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях z .

Теорема 7.1. Два многочлена $P_{n_1}(z)$ и $P_{n_2}(z)$ равны тогда и только тогда, когда

$n_1 = n_2$ и равны их коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях z .

Справедливость этой теоремы можно доказать аналогично способу, примененному при доказательстве теоремы 6.1.

Опр.7.5. Под рациональной функцией (рациональной дробью) понимают функцию, представимую в виде $\frac{P_m(z)}{P_n(z)}$.

Опр.7.6. Общим алгебраическим уравнением n -й степени ($n \in N$) будем называть уравнение вида $P_n(z) = 0$, где $z \in C$. Под решением (корнем) этого уравнения будем понимать $\forall z \in C$, для которого соотношение $P_n(z) = 0$ обращается в истинное равенство.

Теорема 7.2. (Основная теорема алгебры комплексных чисел). Любое алгебраическое уравнение $P_n(z) = 0$, где $n \in N$, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.

Данная теорема неоднократно высказывалась в XVIII в. В частности, ее формулировку дал Ж. Б. Д'Аламбер (1717-1783гг., франц. матем. и механик). Однако первое ее строгое доказательство нашел К. Гаусс (1777-1855гг., немец. ученый) только в XIX в.

7.2.2. Для получения важных следствий теоремы 7.2. и формулировки ряда результатов, относящихся к свойствам рациональных функций отметим ряд свойств множества, образованного из всех полиномов.

Полиномы можно складывать, вычитать и умножать, пользуясь при этом обычными правилами элементарной алгебры (однако переменную z разбивать на сумму вида $x+iy$ не следует). Степень суммы, разности многочленов $P_{n_1}(z)$ и $P_{n_2}(z)$ будет равна n_1 , если $n_1 > n_2$, но при $n_1 = n_2$ она может случайно оказаться меньше n_1 .

Например, $(2z^4 - 3z^2 + z - 1) + (z^3 + 4z^2 + 3) = 2z^4 + z^3 + z^2 + z + 2$, но $(3z^5 - 4z^2 + 1) - (3z^5 + 2z^4 + 3) = -2z^4 - 4z^2 - 2$. Степень же произведения многочленов равна сумме степеней сомножителей.

Операции сложения и умножения многочленов коммутативны и ассоциативны. Это следует непосредственно из коммутативности и ассоциативности операций сложения и умножения комплексных чисел, а также из равенств $z^{m+n} = z^m z^n = z^n z^m$, справедливых для

$\forall m, n \in N_0$. Для многочленов выполняется также дистрибутивный закон, т.е. имеет место равенство

$$(P_{n_1}(z) + P_{n_2}(z))P_{n_3}(z) = P_{n_1}(z)P_{n_3}(z) + P_{n_2}(z)P_{n_3}(z) \text{ для } \forall n_1, n_2, n_3 \in N_0 \text{ и } \forall z \in C. \quad (7.10)$$

Замечание 7.4. Результат деления любого полинома $P_{n_1}(z)$ на произвольный полином $P_{n_2}(z)$ при $n_2 \in N$ не принадлежит множеству полиномов, а является элементом множества рациональных функций.

Теорема 7.3. Для любых двух полиномов $P_{n_1}(z)$ и $P_{n_2}(z)$, где $n_1 \geq n_2$, можно найти такие полиномы $P_{n_3}(z)$ и $P_{n_4}(z)$, что

$$P_{n_1}(z) = P_{n_2}(z)P_{n_3}(z) + P_{n_4}(z), \quad n_1 = n_2 + n_3, \quad (7.11)$$

При этом степень полинома $P_{n_4}(z)$ меньше степени полинома $P_{n_2}(z)$ или же $P_{n_4}(z) \equiv 0$. Многочлен $P_{n_3}(z)$ называют частным от деления $P_{n_1}(z)$ на $P_{n_2}(z)$, а $P_{n_4}(z)$ — остатком от этого деления.

Доказательство этой теоремы изложено, например, в книге [13]. Метод практического отыскания полиномов $P_{n_3}(z)$ и $P_{n_4}(z)$ проиллюстрирован ниже.

Пример 7.2. Пусть даны два полинома $P_{n_1}(z) = -2z^5 + 3z^4 - 2z^3 + 4z^2 - z + 1$, $P_{n_2}(z) = 3z^3 - z^2 + 2z - 2$. Требуется найти полиномы $P_{n_3}(z)$ и $P_{n_4}(z)$, т.е. частное и остаток.

Для отыскания этих полиномов произведем процедуру деления полинома $P_{n_1}(z)$ на полином $P_{n_2}(z)$. Эта процедура формально напоминает метод деления одного целого числа на другое целое число.

$$\begin{array}{r} \text{Имеем} \quad -2z^5 + 3z^4 - 2z^3 + 4z^2 - z + 1 \quad \left| \begin{array}{l} 3z^3 - z^2 + 2z - 2 \\ -\frac{2}{3}z^2 + \frac{7}{9}z + \frac{1}{27} \end{array} \right. \\ \hline \quad 2z^5 + \frac{2}{3}z^4 - \frac{4}{3}z^3 + \frac{4}{3}z^2 \\ \hline \quad (3 - \frac{2}{3})z^4 + (-2 + \frac{4}{3})z^3 + (4 - \frac{4}{3})z^2 - z + 1 \\ \hline \quad \frac{7}{3}z^4 - \frac{7}{9}z^3 + \frac{14}{9}z^2 - \frac{14}{9}z \\ \hline \quad (-\frac{2}{3} + \frac{7}{9})z^3 + (\frac{8}{3} - \frac{14}{9})z^2 + (-1 + \frac{14}{9})z + 1 \\ \hline \quad \frac{1}{9}z^3 - \frac{1}{27}z^2 + \frac{2}{27}z - \frac{2}{27} \\ \hline \quad (\frac{10}{9} + \frac{1}{27})z^2 + (\frac{5}{9} - \frac{2}{27})z + (1 + \frac{2}{27}) \end{array}$$

Результат деления указывает на то, что в качестве частного выступает полином $P_{n_3}(z) = -\frac{2}{3}z^2 + \frac{7}{9}z + \frac{1}{27}$, в качестве остатка — $P_{n_4}(z) = \frac{31}{27}z^2 + \frac{13}{27}z + \frac{29}{27}$. При этом для $\forall z \in C$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
 & (-2)z^5 + 3z^4 - 2z^3 + 4z^2 - z + 1 = \\
 & = (3z^3 - z^2 + 2z - 2)\left(-\frac{2}{3}z^2 + \frac{7}{9}z + \frac{1}{27}\right) + \frac{31}{27}z^2 + \frac{13}{27}z + \frac{29}{27}.
 \end{aligned}$$

Опр. 7.7. Пусть даны ненулевые многочлены $P_{n_1}(z)$, $P_{n_2}(z)$, где $n_1 \geq n_2$. Если остаток от деления $P_{n_1}(z)$ на $P_{n_2}(z)$ равен нулю, то будем говорить, что $P_{n_1}(z)$ делится без остатка (или делится нацело) на $P_{n_2}(z)$. При этом $P_{n_2}(z)$ называется делителем многочлена $P_{n_1}(z)$.

В дальнейшем делимость без остатка будем зачастую называть просто делимостью.

Теорема 7.4. Справедливы следующие свойства делимости многочленов [11, 13]:

1. Если $P_{n_1}(z)$ делится на $P_{n_2}(z)$, а $P_{n_2}(z)$ делится на $P_{n_3}(z)$, то $P_{n_1}(z)$ будет делиться на $P_{n_3}(z)$.
2. Если $P_{n_1}(z)$ и $P_{n_2}(z)$ делятся на $P_{n_3}(z)$, то из суммы и разности также делятся на $P_{n_3}(z)$.
3. Если $P_{n_1}(z)$ делится на $P_{n_2}(z)$, то произведение $P_{n_1}(z)$ на любой многочлен также будет делиться на $P_{n_2}(z)$.
4. Любой многочлен делится на многочлен нулевой степени.
5. Многочлены $P_{n_1}(z)$, $P_{n_2}(z)$ одновременно делятся друг на друга тогда и только тогда, когда $P_{n_1}(z) = cP_{n_2}(z)$, где $c \neq 0$.

7.2.3. Обсудим теперь вопрос о представлении полиномов в виде произведения более простых полиномов. Его рассмотрение тесно связано с решениями алгебраических уравнений.

Теорема 7.5. (Теорема Декарта). Если $P_n(z)$ – произвольный полином ($n \geq 1$), а y – произвольное комплексное число, то $P_n(z) - P_n(y)$ делится без остатка на $z - y$.

Док-во. Рассмотрим случай деления полинома $P_n(z)$ на линейную функцию вида $z - y$ (это полином 1-о порядка). В соответствии с теоремой 7.3. в результате деления получим $P_n(z) = (z - y) P_{n_1}(z) + r$, где $n = n_1 + 1$ ($n \geq 1$) и $r = \text{const}$

(это полином нулевой степени). Положив в этом равенстве $z = y$ приходим к равенству $P_n(y) = r$. Следовательно, $P_n(z) = (z - y) P_n(z) + P_n(y)$. Из этого равенства и следует справедливость теоремы.

Следует отметить, что теорему 7.5. называют также теоремой Безу.

Следствие 7.5.1. Алгебраическое уравнение $P_n(z) = 0$ тогда и только тогда имеет корень α , когда $P_n(z)$ делится без остатка на $(z - \alpha)$.

Док-во. Если α корень, то $P_n(\alpha) = 0$ и по теореме Декарта $P_n(z)$ делится без остатка на $(z - \alpha)$. Обратно, пусть $P_n(z)$ делится на $(z - \alpha)$. По теореме Декарта полином $P_n(z) - P_n(\alpha)$ тоже делится на $(z - \alpha)$, т.е. $P_n(z) - P_n(\alpha) = (z - \alpha) P_n(z)$ ($n_1 = n - 1 \geq 0$). Разделим это выражение на $(z - \alpha)$. Получим $((P_n(z)/(z - \alpha)) - (P_n(\alpha)/(z - \alpha)) = P_n(z)$, причем $(P_n(z)/(z - \alpha))$ — полином $(n-1)$ -о порядка, который ограничен по модулю при $z = \alpha$. Выписанное равенство может выполняться только в том случае, если $P_n(\alpha)$ также делится без остатка на $(z - \alpha)$. Но это может быть только тогда, когда $P_n(\alpha) = 0$, т.е. α — корень алгебраического уравнения $P_n(z) = 0$. Утверждение доказано.

Теорема 7.6. Любое алгебраическое уравнение $P_n(z) = 0$ имеет n различных или равных корней, или любой полином $P_n(z)$ разлагается на n линейных множителей, т.е. можно записать $P_n(z)$ в виде $P_n(z) = b_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$.

Док-во. В силу основной теоремы алгебры комплексных чисел алгебраическое уравнение $P_n(z) = 0$, ($n \in N$) имеем хотя бы один корень $z_1 \in C$. Тогда в соответствии со следствием 7.5.1. имеет место равенство $P_n(z) = (z - z_1) P_{n_1}(z)$, где $0 \leq n_1 < n$. Если $n_1 \in N$, то рассмотрим алгебраическое уравнение $P_{n_1}(z) = 0$. К этому уравнению и полиному $P_{n_1}(z)$ можно опять применить рассуждения, которые выше были использованы при рассмотрении уравнения $P_n(z) = 0$ и полинома $P_n(z)$.

Согласно указанной основной теоремы алгебры существует хотя бы один корень $z_2 \in C$ уравнения $P_{n_1}(z) = 0$. С другой стороны в силу следствия 7.5.1. справедливо соотношение $P_{n_1}(z) = (z - z_2) P_{n_2}(z)$, где $n_1 > n_2 \geq 0$. С учетом сказанного ранее приходим к

выводу, что $P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)P_{n_2}(z)$. Если $n_2 \in N$, то описанную процедуру можно применить к уравнению $P_{n_2}(z) = 0$ и полиному $P_{n_2}(z)$. В конце концов полином $P_n(z)$ при $n \in N$ возможно представить в виде следующего разложения на множители:

$$P_n(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n = b_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n), \quad (7.12)$$

где все $z_1, \dots, z_n \in C$. Очевидно, что все числа $z_1, \dots, z_n$ являются корнями алгебраического уравнения $P_n(z) = 0$. Теорема доказана.

Среди чисел $z_1, \dots, z_n$ могут быть равные между собой. Пусть $z_{\alpha_1}, \dots, z_{\alpha_r} \in \{z_1, \dots, z_n\}$, а $z_{\alpha_1}, \dots, z_{\alpha_r}$ – все попарно различные числа из множества $\{z_1, \dots, z_n\}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \{1, 2, \dots, n\}$). Тогда (7.12) преобразуется к такому каноническому разложению полинома $P_n(z)$ на множители:

$$P_n(z) = b_0 (z - z_{\alpha_1})^{k_1} (z - z_{\alpha_2})^{k_2} \dots (z - z_{\alpha_r})^{k_r}, \quad (7.13)$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Это разложение единственно с точностью до порядка расположения сомножителей [13, 14].

Опр. 7.8. Если в каноническом разложении какое-либо число $k_m \in \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ равно единице, то корень z_{α_m} , соответствующий ему, называют простым корнем алгебраического уравнения $P_n(z) = 0$. Если же какое-либо из чисел $k_1, k_2, \dots, k_r$ отлично от единицы, то сопоставляемый ему корень называют кратным с кратностью, равной этому числу.

Если все коэффициенты полинома $P_n(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n$ являются действительными числами, то корни алгебраического уравнения $P_n(z) = 0$ обладают рядом дополнительных свойств. Для того чтобы сформулировать их отметим сначала некоторые свойства операции комплексного сопряжения (см. опр. 6.11).

Теорема 7.7. Операция комплексного сопряжения (для ее обозначения используется черта над буквами) обладает следующими свойствами [13]:

$$|\alpha| = |\bar{\alpha}|, \overline{(\alpha \pm \beta)} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}, \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}, \alpha + \bar{\alpha} = 2 \operatorname{Re} \alpha \in R, \alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2, \quad (7.14)$$

где α, β – произвольные комплексные числа. При этом $\bar{\alpha} = \alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть теперь многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень ν , т.е. $P_n(\nu) = b_0\nu^n + b_1\nu^{n-1} + \dots + b_{n-1}\nu + b_n = 0$. Из теоремы 7.7. следует, что одновременно с этим равенством будет выполняться и такое равенство $b_0(\bar{\nu})^n + b_1(\bar{\nu})^{n-1} + \dots + b_{n-1}\bar{\nu} + b_n = 0$. Но это означает, что $\bar{\nu} \in \mathbb{C}$ является также корнем уравнения $P_n(\nu) = 0$. Если принять во внимание (7.13), то можно сделать заключение, что если $\nu \in \mathbb{C}$ является корнем кратности m для случая алгебраического уравнения с действительными коэффициентами, то корнем кратности m будет также и число $\bar{\nu} \in \mathbb{C}$.

Теорема 7.8. Если число z_0 является комплексным корнем (но $z_0 \notin \mathbb{R}$) кратности m для алгебраического уравнения с действительными коэффициентами, то число $\bar{z}_0$ также будет корнем кратности m для этого уравнения.

Из теоремы 7.8. следует, что, если z_0 – комплексный корень ($z_0 \notin \mathbb{R}$) кратности m для уравнения с действительными коэффициентами, то в каноническом разложении (7.13) должно обязательно присутствовать произведение $(z - z_0)^m(z - \bar{z}_0)^m = (z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0)^m$. Из (7.14) видно, что коэффициенты квадратного трехчлена внутри скобок являются действительными числами. В силу сказанного выше приходим к выводу о справедливости утверждения.

Теорема 7.9. Пусть $P_n(z)$ – полином с действительными коэффициентами. Тогда каноническое разложение (7.13) можно представить в таком виде:

$$P_n(z) = b_0(z - z_{\beta_1})^{k_1} \dots (z - z_{\beta_s})^{k_s} (z^2 + p_1z + q_1)^{m_1} \dots (z^2 + p_lz + q_l)^{m_l}, \quad (7.15)$$

$$k_1 + \dots + k_s + 2(m_1 + \dots + m_l) = n$$

где s – число действительных корней (если их нет, то все множители типа $(z - \beta_p)^{k_p}$ в (7.15) должны отсутствовать), а l – количество отличных друг от друга пар комплексно сопряженных корней. При этом все дискриминанты квадратных трехчленов в (7.15) должны быть отрицательными.

Следствие 7.9.1. Если алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имеет нечетную степень, то оно имеет по крайней мере один действительный корень.

7.2.4. В дальнейшем при изучении простейших методов интегрирования рациональных функций будет весьма полезно воспользоваться рядом свойств этих функций. Ниже сформулированы некоторые из них.

Опр. 7.9. Рациональная функция (рациональная дробь) $\frac{P_m(z)}{P_n(z)}$ называется правильной, если $m < n$. Когда $m \geq n$, рациональная дробь называется неправильной. К числу правильных дробей по определению относят многочлен (число) 0.

Теорема 7.10. Всякая неправильная рациональная дробь представима в виде многочлена и правильной дроби, т.е. при $m \geq n$ имеем [13]

$$\frac{P_m(z)}{P_n(z)} = P_{m-n}(z) + \frac{P_r(z)}{P_n(z)}, \text{ где } 0 \leq r < n \quad (7.16)$$

Соотношение (7.16) можно получить посредством процедуры деления $P_m(z)$ на $P_n(z)$.

Теорема 7.11. Пусть $\frac{P_m(z)}{P_n(z)}$ – правильная рациональная дробь и для $P_n(z)$ известно представление (7.13). Тогда справедливо равенство [13]

$$\begin{aligned} \frac{P_m(z)}{P_n(z)} = & \frac{A_{1,1}}{(z - z_{\alpha_1})^{k_1}} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{z - z_{\alpha_1}} + \frac{A_{2,1}}{(z - z_{\alpha_2})^{k_2}} + \dots + \frac{A_{2,k_2}}{z - z_{\alpha_2}} + \\ & \frac{A_{r,1}}{(z - z_{\alpha_r})^{k_r}} + \dots + \frac{A_{r,k_r}}{z - z_{\alpha_r}}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где $A_{1,1}, \dots, A_{1,k_1}, A_{2,1}, \dots, A_{2,k_2}, \dots, A_{r,1}, \dots, A_{r,k_r}$ – однозначно определенные комплексные числа.

Замечание 7.5. Коэффициенты $A_{i,j}$ в (7.17) можно найти, используя метод неопределенных коэффициентов суть которого сводится к следующему:

1. Дроби в правой части (7.17) надо привести к общему знаменателю;
2. В числителе полученной таким образом дроби следует привести подобные члены, т.е. объединить члены с одинаковыми степенями z (в итоге получится некоторый полином $P_m(z)$);
3. Посредством приравнивания коэффициентов, стоящих при одинаковых степенях в полиномах $P_m(z)$ и $P_n(z)$ надо найти систему уравнений для искоемых коэффициентов и

решить ее.

Замечание 7.6. Пусть $P_m(z)$ и $P_n(z)$ – полиномы с действительными коэффициентами, $0 \leq m < n$ и имеет место разложение (7.17). Тогда правильная рациональная дробь

$\frac{P_m(z)}{P_n(z)}$ может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(z)}{P_n(z)} = & \frac{A_{1,1}}{(z-z_{\beta_1})^{k_1}} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{z-z_{\beta_1}} + \dots + \frac{A_{s,1}}{(z-z_{\beta_s})^{k_s}} + \dots + \frac{A_{s,k_s}}{z-z_{\beta_s}} + \\ & + \frac{B_{1,1}z+C_{1,1}}{(z^2+p_1z+q_1)^{m_1}} + \dots + \frac{B_{1,m_1}z+C_{1,m_1}}{z^2+p_1z+q_1} + \dots + \frac{B_{l,1}z+C_{l,1}}{(z^2+p_lz+q_l)^{m_l}} + \dots + \frac{B_{l,m_l}z+C_{l,m_l}}{z^2+p_lz+q_l}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где $A_{i,j}, B_{p,w}, C_{v,w}$ – однозначно определенные действительные коэффициенты, которые, в частности, можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Опр. 7.10. Простейшими дробями будем называть дроби, которые имеют вид слагаемых в разложениях (7.17) и (7.18).

Упражнения 7.1. Разложить на суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} 1. \frac{1}{z^2-1}. \quad \text{Отв. } \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)}. \quad 2. \frac{z+1}{z^2-2}. \quad \text{Отв. } \frac{2+\sqrt{2}}{4(z-\sqrt{2})} + \frac{2-\sqrt{2}}{4(z+\sqrt{2})}. \\ 3. \frac{z^3-2}{z(z+1)(z-1)(z+2)(z-2)}. \quad \text{Отв. } -\frac{1}{2z} + \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{6(z-1)} - \frac{5}{12(z+2)} + \frac{1}{4(z-2)}. \end{aligned}$$

Упражнение 7.2. Разложить на сумму полинома и простейших дробей.

$$\frac{z^3}{(z-1)(z+2)}. \quad \text{Отв. } z-1 + \frac{1}{3(z-1)} + \frac{8}{3(z+2)}.$$

Пояснение. Предварительно надо разделить полином z^3 на полином $z^2+z-2=(z-1)(z+2)$ и найти частное и остаток.

Упражнение 7.3. Представить рациональную дробь $\frac{z}{z^2+1}$ в виде (7.17).

$$\text{Отв. } \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} \right].$$

РАЗДЕЛ II.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ЛЕКЦИЯ 8

Содержание лекции: “Матрицы, их классификация и свойства. Определители, простейшие способы их вычисления, обратная матрица. Трактовка множества квадратных невырожденных матриц одной размерности как группы”

В серии предыдущих лекций нами был рассмотрен целый ряд важных исходных положений теории множеств, логики, общей алгебры и введено понятие математической структуры (модели). Для расширения кругозора и подтверждения сложности творческого процесса были также сообщены некоторые сведения исторического характера. Следует отметить, что без предварительного ознакомления с этой информацией весьма затруднительно рассчитывать на глубокое понимание сути математического подхода к решению теоретических и прикладных проблем.

В данной и последующих лекциях мы сузим широту охвата рассматриваемых общих вопросов и перейдем к изучению математических свойств определенных классов множеств, “наделенных” некоторыми более конкретными наборами отношений, операций и т.д. В частности в лекциях 8-1 будут изложены базовые понятия линейной алгебры. Данный раздел математики является весьма разработанным, а информация, накопленная в нем, широко используется в других областях математики и ее многочисленных приложениях. Отметим, что смысл термина “линейная алгебра” будет раскрываться по мере изложения конкретных сведений из этой области математики.

8.1. Классификация, свойства матриц и алгебраических операций над ними

8.1.1. Опр. 8.1. Прямоугольную таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

где все a_{ij} - числа из поля вещественных или комплексных чисел ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$), будем называть матрицей. Если $m = n$, то матрица называется квадратной, а число m , равное n , ее порядком. В общем же случае матрица называется прямоугольной (размера, размерности $m \times n$) или $m \times n$ матрицей. Числа, составляющие матрицу называются ее элементами.

В (8.1) первый индекс в элементе a_{ij} обозначает номер строки, а второй индекс – номер столбца. Матрицы обычно обозначают прописными буквами какого-либо алфавита, а их элементы – строчными буквами.

Замечание 8.1. Для обозначения матриц кроме символа $\| \cdot \|$ используется также пары круглых или квадратных скобок. Для краткости матрицы зачастую записывают в следующих видах: $\|a_{ij}\|$, (a_{ij}) .

Опр. 8.2. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковую размерность $m \times n$ и $a_{ij} = b_{ij}$ для $\forall i = \overline{1, m}$ и $\forall j = \overline{1, n}$.

Опр. 8.3. Прямоугольную матрицу, состоящую из одного столбца, будем называть столбцовой или вектор-столбцом. Соответственно матрицу, состоящую из одной строки, будем называть строчной или вектор-строкой.

Опр. 8.4. Квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю будем называть диагональной. Если же $a_{ii} = 1$ для $\forall i = \overline{1, n}$, то диагональную матрицу будем называть единичной и обозначать символом E .

Опр. 8.5. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется верхней треугольной (нижней треугольной), если равны нулю все элементы матрицы, расположенные под главной диагональю (над главной диагональю).

Замечание 8.2. Диагональная матрица является частным случаем как верхней, так и нижней треугольной матрицы.

Опр. 8.6. Матрица A называется комплексной, если среди ее элементов существует хотя бы один элемент, не принадлежащий R . Если же все элементы матрицы A являются вещественными числами, то матрица называется вещественной.

Опр. 8.7. Квадратная матрица A называется симметричной, если равенство $a_{ij} = a_{ji}$ выполняется для $\forall i, j = \overline{1, n}$.

Опр. 8.8. Квадратная матрица A называется кососимметричной, если имеет место $a_{ij} = -a_{ji}$ для $\forall i, j = \overline{1, n}$.

Часто приходится пользоваться матрицами, разбитыми на прямоугольные части – “клетки” или “блоки”.

Опр. 8.9. Пусть дана прямоугольная матрица $A = (a_{ij})$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). Посредством горизонтальных и вертикальных линий рассечем матрицу A на прямоугольные блоки:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & n_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} \overbrace{A_{11}} & \overbrace{A_{12}} & \dots & \overbrace{A_{1t}} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{st} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \} m_1 \\ \} m_2 \\ \} m_3 \end{array} \end{array} \quad (8.2)$$

Матрицу (8.2) будем называть блочной, которая имеет st блоков $A_{\alpha\beta}$ размера $m_\alpha \times m_\beta$ ($\alpha = \overline{1, s}; \beta = \overline{1, t}$). Матрицу (8.2) сокращенно записывают в виде $A = (A_{\alpha\beta})$ ($\alpha = \overline{1, s}; \beta = \overline{1, t}$).

Опр. 8.10. Матрица A называется нулевой, если все ее элементы равны

нулю.

Опр. 8.11. Блочная матрица (8.2) называется квазидиагональной, если $s = t$ и $A_{\alpha\beta}$ - нулевая матрица для $\forall \alpha = \overline{1, s}$, $\forall \beta = \overline{1, t}$ и $\alpha \neq \beta$.

Опр. 8.12. Блочная матрица (8.2) называется верхней (нижней) квазитреугольной, если $s = t$ и все $A_{\alpha\beta}$ - нулевые матрицы при $\alpha > \beta$ (соответственно все $A_{\alpha\beta}$ - нулевые матрицы при $\alpha < \beta$). Частным случаем квазитреугольной матрицы является квазидиагональная матрица.

Приведенная выше классификация матриц является весьма не полной, ибо она основана только на учете самых простых внешних свойств матриц. Для более подробной классификации матриц надо использовать сведения о внутренних и внешних алгебраических операциях, определенных на множестве матриц.

8.1.2. Опр. 8.13. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ - матрицы размерности (размера) $m \times n$. Тогда под их суммой $C = A + B$ будем понимать матрицу $C = (c_{ij})$, которая имеет размерность $m \times n$. При этом для $\forall i = \overline{1, m}$ и $\forall j = \overline{1, n}$ должны выполняться равенства $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Теорема 8.1. Пусть A, B, C - произвольные матрицы размерности $m \times n$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$A + B = B + A \quad (8.3)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (8.4)$$

Формула (8.3) указывает на коммутативность операции сложения матриц, а выражение (8.4) констатирует ассоциативность этой же операции. Справедливость (8.3) и (8.4) непосредственно следует из коммутативности и ассоциативности операции сложения чисел и определения 8.13.

Опр. 8.14. Произведением $C = AB$ двух прямоугольных матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nq} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

у которой элемент c_{ij} , стоящий на пересечении i -ой строки и j -го столбца, равен “произведению” i -ой строки матрицы A на j -й столбец матрицы B , т.е.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, q}) \quad (8.7)$$

Операция нахождения произведения данных матриц называется умножением матриц.

Пример 8.1.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 & a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 & a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3 & b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 & b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 \end{pmatrix}$$

Замечание 8.3. Операция умножения двух прямоугольных матриц выполняется лишь в том случае, когда число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором. Умножение всегда выполнимо для квадратных матриц одной размерности.

Замечание 8.4. Умножение матриц не является коммутативным, т.е. в общем случае $AB \neq BA$.

Для доказательства этого замечания достаточно привести хотя бы один пример, для которого $AB \neq BA$.

Пример 8.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 18 & -4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Теорема 8.2. Операция умножения матриц является ассоциативной, т.е. для любых трех матриц A, B, C , для которых определены произведения AB , $(AB)C$, BC , $A(BC)$, имеет место неравенство

$$(AB)C = A(BC) \quad (8.8)$$

Справедливость (8.8) вытекает непосредственно из определения 8.14 и свойств умножения и сложения чисел.

Теорема 8.3. Если для матриц A, B, C имеют смысл матрицы $A+B$, $(A+B)C$, AC , BC , $AC+BC$ и $B+C$, $A(B+C)$, AB , $AB+AC$, то имеют место соответственно такие распределительные законы

$$\begin{aligned} (A+B)C &= AC + BC, \\ A(B+C) &= AB + AC \end{aligned} \quad (8.9)$$

Правильность данной теоремы следует из свойств операций над числами и определений 8.13 и 8.14.

Теорема 8.4. Множество M всех матриц одной и той же размерности $m \times n$ является абелевой (коммутативной) группой по отношению к операции сложения матриц. При этом в качестве единичного элемента группы выступает нулевая матрица, а в качестве обратного элемента к $A = (a_{ij}) \in M$ - матрица $A_1 = (\tilde{a}_{ij})$, где $\tilde{a}_{ij} = -a_{ij}$ для $\forall i = \overline{1, m}$ и $\forall j = \overline{1, n}$.

Данная теорема достаточно легко доказывается на основе определения группы (см. опр. 5.10) и свойств операций сложения матриц и чисел.

Опр. 8.15. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) на число α называется матрица $B = (b_{ij}) = \alpha A$, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением на число α , т.е.

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \text{ для } \forall i = \overline{1, m} \text{ и } \forall j = \overline{1, n} \quad (8.10)$$

Операция нахождения произведения матрицы на число называется умножением матрицы на число.

Теорема 8.5. Операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\alpha(A+B) &= \alpha A + \alpha B, & (\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A, \\ (\alpha\beta)A &= \alpha(\beta A), & 1A &= A\end{aligned}\tag{8.11}$$

При этом матрицы A и B должны иметь одну и ту же размерность.

Справедливость этой теоремы следует из определений 8.13 и 8.15.

Замечание 8.5. Операции сложения и умножения матриц являются внутренними бинарными алгебраическими операциями. Операция же умножения матрицы на число представляет собой внешнюю алгебраическую операцию.

Опр. 8.16. Матрицы A и B называются коммутирующими, если $AB = BA$.

Пример 8.3. Матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ коммутируют, так как $AB = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = BA = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Теорема 8.6. Для любой квадратной матрицы A имеет место равенство

$$AE = EA,\tag{8.12}$$

причем единичная матрица E имеет такую же размерность, что и матрица A .

Справедливость этой теоремы легко доказать, если использовать определение операции произведения матриц и обозначение $E = (\delta_{ij})$, где δ_{ij} - символ Кронекера, который равен 1 при $i = j$ и нулю при $i \neq j$.

Опр. 8.17. Пусть $A = (a_{ij})$ -матрица размерности $m \times n$ (т.е. $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$). Матрицу A' (или A^T) будем называть транспонированной к A , если она имеет размерность $n \times m$ и $A' = (a'_{rs})$, где $a'_{rs} = a_{sr}$ для $\forall r = \overline{1, n}$ и $\forall s = \overline{1, m}$. Матрицу же $A^* = (a^*_{rs})$ будем называть сопряженной к A , если она имеет размерность $n \times m$ и $a^*_{rs} = \overline{a_{sr}}$ для $\forall r = \overline{1, n}$ и $\forall s = \overline{1, m}$ (черта над символом a_{sr} означает операцию комплексного сопряжения).

Опр. 8.18. Квадратная матрица A называется эрмитовой, если $A^* = A$

Пример 8.4.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 8.5.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -1 & 0 \\ 1-i & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = A$$

8.2. Определители, их простейшие свойства и методы вычисления.

Трактовка определителя как функции $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ переменных

В пункте 8.1 данной лекции было введено понятие матрицы и определены алгебраические операции над множеством матриц (а также множествами матриц и чисел). Здесь же нами будет введено новое понятие (понятие определителя), которое имеет смысл функции, заданной на множестве квадратных матриц. При этом для каждой размерности таких матриц существует своя функция, причем данные функции, вообще говоря, связаны между собой. Заметим, что благодаря введению понятия определителя и изучению его простейших свойств, удастся несколько расширить круг операций, производимых над матрицами. Перейдем теперь к изложению конкретных сведений об определителях.

8.2.1. Рассмотрим систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \quad (8.13)$$

коэффициенты которой составляют матрицу
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из (8.13) несложно получить систему

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}. \quad (8.14)$$

Допустим, что $\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Тогда из (8.14) найдем

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (8.15)$$

Нетрудно убедиться, что (8.15) удовлетворяет системе (8.13). Знаменатель и числители в (8.15) по простому правилу выражаются через элементы матрицы A и матриц

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

Действительно знаменатель в (8.15) равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали матрицы A минус произведение элементов второй диагонали матрицы A . Это число называется *определителем второго порядка* и равно

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}, \quad (8.17)$$

С другой стороны числители в (8.15) можно соответственно представить в виде следующих определителей второго порядка:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \quad (8.18)$$

С учетом (8.15), (8.17), (8.18) решение системы (8.13) при $\Delta_2 \neq 0$ можно записать в такой форме

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (8.19)$$

Итак, решение системы (8.13) при $\Delta_2 \neq 0$ компактно представляется посредством отношений определителей 2-о порядка.

Аналогичным образом может быть получено решение системы из 3-х уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (8.20)$$

с матрицей коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

Если умножить обе части первого из уравнений (8.20) на число $(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$, обе части второго уравнения на $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$, обе части третьего на $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$, а затем сложить все три уравнения, то несложно убедиться в том, что коэффициенты при x_2 и x_3 окажутся равными нулю, т.е. данные неизвестные одновременно исключаются. В итоге получим равенство

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 = \\ & = \Delta_3 x_1 = b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - a_{13} a_{22} b_3 - a_{12} b_2 a_{33} - b_1 a_{23} a_{32} \end{aligned} \quad (8.22)$$

Коэффициент при x_1 в (8.22) называется *определителем третьего порядка*, соответствующим матрице (8.21). Он записывается в виде следующего символа:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned} \quad (8.23)$$

Правило вычисления определителя Δ_3 является достаточно простым и называется *правилом треугольника* или *правилом Саррюса*. Во-первых, в (8.23) входят произведения только тех элементов из матрицы (8.21), которые входят в различные строки и столбцы. Со знаком плюс берутся произведения тех элементов, которые соединены отрезками прямых, изображенных в левой части рис. 8.1. Соответствующие произведения элементов, которые берутся со знаком

минус, указаны в правой части рис. 8.1.

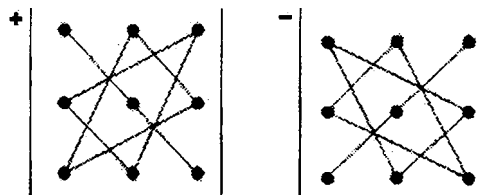


Рис. 8.1. Иллюстрация к правилу Саррюса.

Если $\Delta_3 \neq 0$, то решение системы (8.20) можно записать таким образом

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_3}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_3}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta_3}. \quad (8.23)^*$$

Впервые понятия об определителях указанных выше частных типов появилось в конце XVII в. в исследованиях Г.В. Лейбница (1646-1716 гг.; немецкий философ и ученый).

8.2.2. Введем теперь понятие *определителя произвольного порядка*. Для того чтобы пояснить, что представляют собой такие определители нужно ввести некоторые понятия и знать некоторые свойства конечных множеств.

Рассмотрим множество M , содержащее n элементов. Все элементы этого множества можно перенумеровать с помощью чисел $1, 2, \dots, n$, т.е. ввести биективное соответствие между множеством M и множеством $\{1, 2, \dots, n\}$. Если мы не интересуемся индивидуальными свойствами элементов, то изучение свойств конечного множества M можно свести к изучению свойств множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Следует отметить, что процедура нумерации элементов из M носит субъективный характер и ее можно произвести и иными способами. При построении теории определителей оказалось весьма важным выяснить степень этого произвола и исследовать взаимосвязи между различными способами нумерации элементов множества M . Изучение этого вопроса фактически сводится к различным вариантам упорядочения элементов множества M или различным способам

расположения чисел $1, 2, \dots, n$.

Опр. 8.19. Всякое расположение чисел $1, 2, \dots, n$ в виде n -и $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, где все числа $i_1, i_2, \dots, i_n$ попарно различны и принадлежат множеству $\{1, 2, \dots, n\}$, называется перестановкой из n чисел (или из n символов).

Опр. 8.20. Полное количество указанных в опр.8.19. n -к называется числом перестановок.

Теорема 8.7. Число различных перестановок из n символов равно $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$ ("эн-факториал").

Док-во. Первый символ i_1 в перестановке $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ можно выбрать из множества $\{1, 2, \dots, n\}$ n способами. После удаления этого символа из множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в нем останется $(n-1)$ -о число. Следовательно на место второго символа i_2 можно поставить любое из оставшихся чисел. Таких возможностей имеется $(n-1)$. Поэтому число способов выбора двух первых символов i_1 и i_2 равно $n(n-1)$. Данную процедуру выбора можно продолжить. В итоге получим искомое $n!$ способов построения перестановок из n символов (строгое доказательство этого факта проводится методом математической индукции).

Опр. 8.21. Будем говорить, что в перестановке $\{1, 2, \dots, n\}$ числа i_l и i_m ($l, m \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $l \neq m$) составляют *инверсию*, если $i_l > i_m$ и i_l стоит в этой перестановке ранее i_m . Перестановка называется *четной*, если ее символы составляют (в сумме) четное число инверсий, и *нечетной* – в противоположном случае.

Пример 8.6. Перестановка $(1, 2, \dots, n)$ будет четной при любом n , так как все элементы в ней расположены в порядке возрастания.

Пример 8.7. Перестановка (451326) содержит 7 инверсий и поэтому является нечетной.

Пример 8.8. Перестановка (83524671) содержит 16 инверсий и поэтому является четной.

Замечание 8.6. При $n \geq 2$ число четных перестановок из n равно числу нечетных, т.е. равно $\frac{1}{2}n![13]$.

Обобщением определителей второго и третьего порядков (см. формулы (8.17) и (8.23)) является понятие *определителя n -о порядка*.

Опр. 8.22. Определителем n -о порядка $|A| = \det A$, соответствующим квадратной матрице $A = (a_{ij})$, где $i, j = \overline{1, n}$, будем называть алгебраическую сумму

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}, \quad (8.24)$$

в которую входят всевозможные произведения n элементов матрицы A , взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. При этом под $t(i_1, i_2, \dots, i_n)$ понимается полное число инверсий, которое соответствует перестановке $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ ($i_1, i_2, \dots, i_n$ - попарно различные числа из множества $\{1, 2, \dots, n\}$). Каждое слагаемое в (8.24) называется членом определителя.

В соответствии с теоремой 8.7 и замечанием 8.6 сумма 8.24 содержит $n!$ членов, причем в ней величина $(-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_n)}$ в $\frac{n!}{2}$ случаях будет иметь знак плюс, а в $\frac{n!}{2}$ случаях - знак минус.

Замечание 8.7. При $n=2$ и $n=3$ выражение (8.24) совпадает соответственно с формулами (8.17) и (8.23).

Рассмотрим теперь множество B_n , составленное из всех квадратных матриц размерности $n \times n$. Тогда соотношение (8.24) сопоставляет каждой матрице $A \in B_n$ комплексное (или вещественное) число. Следовательно определитель n -о порядка можно трактовать как функцию, область определения которой есть множество B_n . При этом множество значений этой функции будет совпадать в общем случае с множеством комплексных чисел. Если рассматривается подмножество $\tilde{B}_n$ множества B_n , которое состоит только из всех вещественных квадратных матриц, то определитель n -о порядка будет представлять собой

вещественную функцию, причем областью ее определения будет являться $\tilde{B}_n$. При этом множество ее значений будет совпадать с множеством вещественных чисел.

На определитель n -о порядка можно так же смотреть как на функцию n^2 переменных, ибо матрица A размерности $n \times n$ содержит n^2 элементов, которые входят в сумму (8.24). Данная функция может быть вещественной или комплексной в зависимости от того каковы сами элементы матрицы A (т.е. они все вещественные или среди них есть комплексные числа).

8.2.3. Из опр.8.22 видно, что определитель n -о порядка представляет собой достаточно сложную математическую конструкцию. Кроме того непосредственное использование опр. 8.22 практически непригодно для непосредственного отыскания определителей даже при относительно небольших n (за исключением ситуаций когда $n=2$ или $n=3$). Поэтому будет весьма полезно сформулировать те общие свойства определителей, учет которых существенно упрощает их вычисление.

Теорема 8.8. Определитель n -о порядка для $\forall n \in N$ обладает следующими свойствами [13]:

1. Определители исходной квадратной матрицы A и транспонированной A^T к ней равны друг другу, т.е. $\det A = \det A^T$;
2. Если один определитель получен из другого перестановкой двух строк (или столбцов), то все члены первого определителя будут членами и во втором, но с обратными знаками, т.е. от перестановки двух строк (или столбцов) определитель меняет лишь знак;
3. Если одна из строк (или столбцов) состоит из одних нулей, то определитель равен нулю;
4. Определитель содержащий две одинаковые строки (или столбца) равен нулю;
5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на некоторое число α , то сам определитель умножится на α ;

6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю;
7. Если все элементы i -й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых: $a_{ij} = b_j + c_j$, $j = \overline{1, n}$, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i -й, - такие же, как и в заданном определителе, а i -я строка в одном из слагаемых состоит из элементов $b_1, \dots, b_n$, а в другом - из элементов $c_1, \dots, c_n$.
8. Если одна из строк определителя может быть получена посредством умножения некоторого набора других строк на некоторые числа и последующего сложения результатов этого умножения (сложение осуществляется только над числами, стоящими в одних и тех же столбцах), то определитель равен нулю;
9. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Поскольку величина $n!$ очень быстро растет при увеличении n (например, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$, $6!=720$), то формула (8.24) практически никогда не используется в процессе вычислений. Для вычисления определителей применяются специальные вычислительные процедуры, построенные с учетом общих или специфических свойств тех или иных определителей.

Одним из общих способов вычисления определителей является сведение определителей одного порядка к рассмотрению определителей более низкого порядка.

Опр. 8.23. Пусть дана квадратная матрица $A = (a_{ij})$. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A| = \det A$ будем называть определитель матрицы, полученной из A посредством удаления i -й строки и j -о столбца. Миноры M_{ij} это определители $(n-1)$ -о порядка.

Опр. 8.24. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя $\det A$ будем называть величину $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема 8.9. Определитель $\det A$ n -о порядка для $\forall i = \overline{1, n}$ можно представить в виде [13]

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is} \quad (8.25)$$

Представление (8.25) называется разложением определителя по i -й строке.

Формула (8.25) сводит вычисление определителя n -о порядка к отысканию n определителей $(n-1)$ -о порядка.

Замечание 8.8. Вычисление или упрощение определителя $\det A$ с помощью формулы (8.25) достигается в тех случаях, когда хотя бы часть элементов i -й строки определителя обращается в нуль.

Замечание 8.9. С помощью свойства 9 (см. теорему 8.8) можно в любой строке (или столбце) заменить нулями все элементы, кроме одного.

Замечание 8.10. Возможно разложить любой определитель n -о порядка по элементам j -о столбца ($j = \overline{1, n}$) с помощью формулы

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{sj}A_{sj} \quad (8.26)$$

Теорема 8.10. Если A и B - квадратные матрицы одной и той же размерности, то будет справедливо равенство $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ [13].

8.3. Обратная матрица. Теорема существования и единственности

Опр. 8.25. Квадратная матрица A называется невырожденной (неособенной), если $\det A \neq 0$. В противном случае матрица A называется вырожденной (особой).

Опр. 8.26. Квадратная матрица B называется обратной к квадратной матрице A , если выполняются равенства $BA = AB = E$, причем единичная матрица E имеет ту же размерность, что и матрица A .

Теорема 8.11. Если матрица A является невырожденной, то для нее существует единственная обратная матрица $B = A^{-1}$, которая дается выражением

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

где $\tilde{a}_{ji} = A_{ij}$ для $\forall i, j = \overline{1, n}$.

Док-во. Покажем, что для данной матрицы A может существовать только одна обратная матрица. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существуют две различные обратные матрицы B_1 и B_2 . По определению обратной матрицы должны при этом выполняться равенства $B_1 A = A B_1 = E$, $B_2 A = A B_2 = E$. Умножим, например, равенство $A B_1 = E$ слева на B_2 . Тогда получим $B_2 (A B_1) = B_2 E = B_2$. С другой стороны $B_2 (A B_1) = (B_2 A) B_1 = E B_1 = B_1$. Следовательно $B_1 = B_2$, что противоречит исходному предположению. Поэтому может существовать только одна обратная матрица.

Докажем теперь существование обратной матрицы A^{-1} для невырожденной матрицы A . Для этого достаточно показать, что матрица (8.27) удовлетворяет условиям $A^{-1} A = A A^{-1} = E$. Рассмотрим произведение $AB = C = (c_{ij})$, где $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{ij} \\ \Delta \end{pmatrix}$. Принимая во внимание опр. (8.14) и формулу (8.27) получим, что

$$c_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^n a_{is} \tilde{a}_{sj} \quad \text{для } \forall i, j = \overline{1, n}, \text{ где } \Delta = \det A. \text{ Если } i = j \text{ то сумма в этом}$$

выражении есть не что иное как разложение $\det A$ по элементам i -й строки. Следовательно

$c_{ii} = 1$ для $\forall i = \overline{1, n}$. Теперь нам надо найти значения этой суммы, когда $i \neq j$. Для этого построим матрицу A_1 , которая отличается от A только тем, что в ней i -я и j -я строки идентичны друг другу, причем они совпадают с i -й строкой матрицы A . В соответствии со свойством 4 (см. теорему 8.8) определитель матрицы A_1 равен нулю, т.е. $\det A_1 = 0$. С другой

стороны сумма $\sum_{s=1}^n a_{is} \tilde{a}_{sj}$ есть разложение этого определителя по элементам i -й строки.

Следовательно, $c_{ij} = 0$ для $\forall i \neq j$ и $i, j = \overline{1, n}$. С учетом сказанного выше приходим к вы-

воду, что матрица $C = (c_{ij})$ является единичной, т.е. $C = E = (\delta_{ij})$. Итак нами доказано, что матрица (8.27) действительно является обратной. Теорема доказана.

Замечание 8.11. Обратная матрица A^{-1} является невырожденной.

Справедливость замечания следует из равенств $\det(AA^{-1}) = \det E = \det A \det A^{-1} = 1$, в свою очередь, вытекающих из теоремы 8.10 и определения A^{-1} .

Рассмотрим теперь множество M всех невырожденных матриц размерности $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$). Это множество по отношению к операции умножения матриц (напомним, что она имеет смысл внутренней бинарной ассоциативной алгебраической операции) является группой. В этой группе роль единичного элемента играет единичная матрица E размерности $n \times n$, а роль обратного элемента для любой матрицы $A \in M$ - обратная матрица A^{-1} . Заметим, что, вообще говоря, эта группа не является абелевой (коммутативной).

Отметим еще некоторые полезные свойства операции перехода от исходных матриц из M к обратным матрицам (это унарная операция, имеющая смысл биективного отображения множества M на само себя), а также введем ряд обозначений.

Обозначим через A^p , где $p \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ и $\det A \neq 0$, матрицу, которая имеет следующий смысл: A^p - произведение p матриц A , если $p \in \mathbb{N}$; $A^0 = E$; A^p - произведение $|p|$ матриц A^{-1} , если $p \in \{\dots, -3, -2, -1\}$.

Теорема 8.12. Пусть $A, B \in M$, где M - множество невырожденных матриц размерности $n \times n$. Тогда справедливы такие равенства: $A^m A^r = A^{m+r}$, $(A^{-1})^m = A^{-m}$, $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, $(AB)^{-m} = ((AB)^{-1})^m = (B^{-1} A^{-1})^m$ для $\forall m, r \in \mathbb{Z}$.

Справедливость данной теоремы вытекает непосредственно из определений матриц A^p , обратной матрицы и теорем 8.10, 8.11. Докажем для примера верность равенства $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$. Во-первых, если $\det A \neq 0$ и $\det B \neq 0$, то из теоремы 8.10 следует, что $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$, т.е. матрица AB является невырожденной. Поэтому в силу теоремы 8.11 для матрицы AB существует единственная обратная матрица. Такой матрицей является матрица $B^{-1} A^{-1}$. В этом легко убедиться, исходя из равенств

$$(B^{-1} A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E,$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

В заключение этой лекции отметим, что основы теории матриц были заложены в XIX в. в работе “Мемуар по теории матриц”, написанном А. Кэли (1821-1895; англ. матем.).

ЛЕКЦИЯ 9

Содержание лекции: "Линейно-координатное пространство R_n . Понятия о линейно зависимых и независимых системах векторов, принадлежащих R_n . Ранги системы векторов и матриц. Теорема о базисном миноре. Системы из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными и матричный метод их решения. Правило Крамера"

9.1. Линейно-координатное пространство R_n .

Линейно зависимые и независимые системы векторов в R_n

Пусть P - поле действительных или комплексных чисел. Рассмотрим множество R_n , элементами которого являются всевозможные упорядоченные наборы из n чисел из P , т.е. все элементы, принадлежащие R_n , представляют собой n -и. Графически эти n -и можно записывать в виде векторов-строк или векторов-столбцов, которые являются соответственно матрицами размерности $1 \times n$ и $n \times 1$. Будем пока для определенности записывать указанные n -и только в виде векторов-строк и называть их векторами. Итак, рассмотрим множество всех $n-k$ (векторов) вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где все $x_i \in P$ для $\forall i = \overline{1, n}$ (для краткости $n-k$ обозначена символом x). На этом множестве введем внутреннюю бинарную алгебраическую операцию сложения любых двух $n-k$ в соответствии со следующим правилом: $x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ ($y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$). Это определение суммы $n-k$ идентично правилу сложения матриц размерности $1 \times n$ (см. опр.8.13).

Введем также внешнюю алгебраическую операцию умножения чисел из P на элементы из R_n . Эту операцию дадим посредством такого закона: $\alpha (x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$, где α - любое число из P , а x - любой элемент из

R_n . Данная операция является частным случаем операции умножения числа на матрицу (см. опр. 8.15).

Введенное выше множество R_n обладает целым рядом свойств, которые имеют весьма общий характер. Множество R_n представляет собой пример важной математической структуры. Используя определения введенных выше операций и свойства чисел из поля P можно доказать, что справедлива

Теорема 9.1. Множество R_n с введенными операциями сложения элементов из R_n и умножения чисел из P на элементы из R_n характеризуются следующим набором свойств:

1. $x + y = y + x$ для $\forall x, y \in R_n$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ для $\forall x, y, z \in R_n$; $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$;
3. существует единственный элемент $0 \in R_n$ такой, что $x + 0 = x$ для $\forall x \in R_n$; ($0 = (0, 0, \dots, 0)$ - n -а, состоящая из n нулей);
4. для $\forall x \in R_n$ существует единственный противоположный элемент $(-x) \in R_n$ такой, что $x + (-x) = 0$.
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для $\forall \alpha, \beta \in P$ и $\forall x \in R_n$;
6. $1x = x$ для $\forall x \in R_n$ (1 - единичный элемент поля P относительно операции умножения чисел);
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для $\forall \alpha, \beta \in P$ и $\forall x \in R_n$;
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для $\forall \alpha \in P$ и $\forall x, y \in R_n$.

Среди следствий этих свойств нужно отметить такие $(-x) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) = (-1)(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для $\forall x \in R_n$; $\alpha 0 = \alpha(0, 0, \dots, 0) = 0$ для $\forall \alpha \in P$; если $\alpha x = 0$, то либо $\alpha = 0 \in P$ либо $x = 0$. Кроме того множество R_n обладает еще целым рядом полезных свойств, связанных с понятием размерности. Для разъяснения смысла этого понятия введем некоторые определения.

Опр. 9.1. Под системой векторов будем понимать некоторое непустое упорядоченное множество $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, состоящее из векторов множества R_n . Эта система зачастую записывается просто в виде упорядоченного набора эле-

ментов (векторов) из R_n , т.е. в виде $a_1, a_2, \dots, a_s$.

Опр. 9.2. Система векторов $a_1, a_2, \dots, a_s$ называется линейно независимой, если соотношение $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s = 0$ может быть справедливым тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s \in P$. Если же данное равенство выполняется для некоторого набора чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, который содержит хотя бы одно ненулевое число из P , то система $a_1, a_2, \dots, a_s$ называется линейно зависимой.

Опр. 9.3. Подсистемой векторов системы $a_1, a_2, \dots, a_s$ будем называть любое упорядоченное подмножество векторов из этой системы.

Опр. 9.4. Будем говорить, что вектор $a \in P$ линейно выражается через систему векторов $a_1, a_2, \dots, a_s$, если его можно представить в виде $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in P$. Если система $a_1, a_2, \dots, a_s$ является линейно независимой, то числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ называются коэффициентами (компонентами) разложения вектора a по системе векторов $a_1, a_2, \dots, a_s$.

Опр. 9.5. Пусть дана система векторов $a_1, a_2, \dots, a_s$ из R_n . Рассмотрим ее всевозможные непустые упорядоченные линейно независимые подсистемы векторов. Выберем среди этих подсистем такие, которые содержат максимальное число векторов. Обозначим это число через r и будем называть рангом системы векторов $a_1, a_2, \dots, a_s$. При этом все векторы, входящие в какую-либо линейно независимую подсистему, содержащую r векторов будем называть системой базисных векторов (или базисом) системы $a_1, a_2, \dots, a_s$.

Замечание 9.1. Пусть непустая система векторов $a_1, a_2, \dots, a_s$ имеет ранг r , а $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_r$ - базис данной системы ($i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, s\}$). Тогда любой вектор системы $a_1, a_2, \dots, a_s$ может быть линейно выражен через базисные векторы.

Замечание 9.2. Множество R_n обычно называют линейно-координатным пространством. Если рассмотрение ограничивается только изучением подмножества векторов (векторов-строк или векторов-столбцов) вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где все $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$, то R_n называют и арифметическим пространством (при этом однако вводится еще и понятие "близости" между векторами). Кроме это-

го R_n называют пространством n измерений.

Интересен вопрос о максимальном ранге всевозможных систем векторов, взятых из R_n . Во-первых, легко проверить справедливость следующего равенства

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 l_1 + x_2 l_2 + \dots + x_n l_n \quad (9.1)$$

где

$$l_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, l_n = (0, 0, \dots, 1). \quad (9.2)$$

Для этого достаточно воспользоваться определением операций сложения векторов и умножения векторов на числа. Можно также строго доказать, что система векторов $l_1, l_2, \dots, l_n$ содержит максимальное число линейно независимых векторов из R_n . Это означает, что данная система будет базисом для всех векторов в R_n .

Опр. 9.6. Базисом пространства R_n будем называть линейно независимую систему векторов из R_n , через которую линейно выражается $\forall x \in R_n$.

Теорема 9.2. Система векторов $l_1, l_2, \dots, l_n$ является базисом в R_n . Число n является максимальным количеством векторов, входящих в произвольный базис пространства R_n . В силу теоремы 9.2 говорят, что пространство R_n n – мерно.

9.2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

Элементарные преобразования матриц

Доказательство справедливости теоремы 9.2 тесно связано с понятием ранга матрицы, составленной из чисел, входящих в n -и, определяющие элементы пространства R_n .

Опр. 9.7. Под рангом матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

понимается ранг системы векторов $a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $a_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, ..., $a_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$, т.е. ранг системы вектора-строки матрицы A .

Опр. 9.8. Выберем в прямоугольной матрице A размерности $m \times n$ произвольные k строк и k столбцов ($k \leq \min(m, n)$). Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, составляют квадратную матрицу k -го порядка, определитель которой называют минором k -го порядка матрицы A .

Теорема 9.3. Если все миноры k -го порядка матрицы A равны нулю, то равны нулю и все миноры высших порядков [13].

Теорема 9.4. (Теорема о ранге матрицы или теорема о базисном миноре). Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен рангу этой матрицы.

Док-во. Допустим, что наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен r . Заметим, что понятия линейной зависимости и независимости не зависят от порядка расположения векторов в системе векторов и чисел в n -х, задающих вектора. Поэтому, не нарушая общности, предположим, что минор r -го порядка D стоит в левом верхнем углу матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & D & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & a_{s,r+1} & \dots & a_{sn} \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

отличен от нуля, т.е. $D \neq 0$. Тогда первые r строк матрицы A будут образовывать линейно независимую систему векторов-строк. Если бы это было не так, то так как при сложении векторов (векторов-строк) складываются соответствующие компоненты (числа), входящие в n -и, между строчками минора D существовала бы та же линейная зависимость. Следовательно, реализовывалось бы равенство $D = 0$, что противоречит нашему предположению о том, что $D \neq 0$.

Докажем теперь, что любая m -я ($r < m \leq s$) строка матрицы A будет линейной комбинацией первых r строк. Возьмем любое $j = \overline{1, n}$ и построим вспомогательный определитель:

$$\Delta j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{mj} \end{vmatrix}, \quad (9.4)$$

который получен посредством "окаймления" минора D соответствующими элементами m -й строки и j -го столбца.

При $\forall j = \overline{1, n}$ определитель Δj равен нулю. Действительно, если $j > r$, то Δj будет минором $(r+1)$ -го порядка матрицы A и, следовательно, равен нулю ввиду выбора числа r . При $j = \overline{1, r}$ определитель $\Delta j = 0$, так как определитель (9.4) в данном случае имеет два одинаковых столбца.

Разложим теперь определитель (9.4) по элементам последнего столбца. С учетом того, что $\Delta j = 0$ для $\forall j = \overline{1, n}$ получим

$$a_{1r}A_1 + a_{2r}A_2 + \dots + a_{rr}A_r + a_{mr}D = 0, \quad (9.5)$$

где $A_1, \dots, A_r$ - алгебраические дополнения соответствующих элементов последнего столбца, стоящих в первых r строчках. При этом $A_1, \dots, A_r$ не зависят от j и, вообще говоря, зависят от m . Поскольку $D \neq 0$, то из (9.5) следует, что m -я строка матрицы A линейно выражается через первые r строк матрицы A . Итак, в системе всех строк матрицы A первые r ее строк образуют базис этой системы. Следовательно, r -ранг матрицы A в соответствии с определениями 9.5 и 9.7. Теорема доказана.

Теорема о базисном миноре указывает метод практического вычисления ранга системы векторов из R_n . Для вычисления этого ранга надо составить матрицу, для которой векторы системы служат векторами-строками, и найти ранг данной матрицы. Метод нахождения ранга матрицы, основанный на указанной теореме, требует в общем случае вычисления большого числа ее миноров. Для упрощения процедуры вычисления ранга матрицы можно поступить в соответствии со следующим правилом (метод окаймляющих миноров):

При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k -го порядка D , отличный от нуля, то требуется вычислить лишь миноры $(k+1)$ -го порядка, окаймляющие минор D . Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k . Если же среди миноров $(k+1)$ -го порядка есть не равный нулю минор D_1 , то процедуру следует продолжить, т.е. начать вычисление всех миноров порядка $(k+2)$, которые окаймляют минор D_1 . Если все они равны нулю, то ранг матрицы бу-

дет равен $(k+1)$. Когда же хотя бы один из миноров $(k+2)$ порядка будет не равен нулю, то процедуру нужно повторить и т.д.

Теорема 9.5. Максимальное число линейно независимых строк любой матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов, т.е. ранг исходной и транспонированной матрицы совпадают [13, 14].

Теорема 9.6. Определитель n -о порядка тогда и только тогда равен нулю, когда между его строками существует линейная зависимость, т.е. хотя бы одна строка линейно выражается через другие.

Док-во. Необходимость. Пусть определитель n -о порядка равен нулю. Это означает, что минор n -о порядка (это максимальный порядок минора) матрицы A размерности $n \times n$, на основе которой определен этот определитель, равен нулю. Отсюда следует, что наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы меньше n , т.е. ранг матрицы A меньше n . Поэтому в соответствии с теоремой 9.4 векторы-строки матрицы A являются линейно зависимыми. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть между векторами-строками матрицы A существует линейная зависимость, т.е. хотя бы одну строку можно линейно выразить через остальные строки. Но тогда согласно свойству 8 теоремы 8.8 определитель n -го порядка будет равен нулю. Достаточность доказана.

Для отыскания ранга матрицы удобен метод, который не связан с теоремой о ранге. При этом он не требует при своей реализации вычисления определителей. Однако в общем случае он применим только тогда, когда нам надо знать лишь ранг и не требуется найти сами строки (столбцы), которые составляют максимальную линейно независимую систему (сами эти строки, столбцы обычно называются базисными). Изложим суть этого метода.

Опр. 9.9. Элементарными преобразованиями матрицы A называются следующие преобразования этой матрицы:

1. Перемена мест двух строк или двух столбцов.
2. Умножение строки (или столбца) на произвольное отличное от нуля число.
3. Прибавление к одной строк (или столбцу) другой с троки (столбца), умноженной на некоторое число.

Теорема 9.7. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы [13, 14]. Ранг матрицы не изменяется при удалении из нее нулевых векторов-строк и векторов-столбцов.

Опр. 9.10. Будем говорить, что матрица A размерности $s \times n$ имеет диагональную форму, если все ее элементы равны нулю, кроме элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ (где $0 \leq r \leq \min(s, n)$), равных единице.

Замечание 9.3. Ранг матрицы, имеющей диагональную форму, равен r .

Справедливость этого замечания следует из теоремы о базисном миноре.

Теорема 9.8. Любую матрицу можно с помощью элементарных преобразований привести к диагональной форме [13].

Док-во. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

которая имеет хотя бы один отличный от нуля элемент. Посредством перестановки строк и столбцов всегда можно добиться того, чтобы элемент a_{11} отличен от нуля. Умножив затем первую строку на a_{11}^{-1} , превратим элемент a_{11} в единицу. Если теперь вычесть из j -го столбца ($1 < j \leq n$) первый столбец, умноженный на a_{1j} , то элемент a_{1j} будет заменен нулем. Производя такие преобразования со всеми столбцами и строками, мы придем к матрице вида:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{s2} & \dots & a'_{sn} \end{pmatrix}.$$

Прделав такого же рода преобразования с матрицей

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{s2} & \dots & a'_{sn} \end{pmatrix}$$

и т. д., можно с помощью конечного числа шагов привести исходную матрицу к диагональной матрице, имеющей тот же ранг, что и матрица A . Теорема доказана.

Замечание 9.4. Для нахождения ранга матрицы нужно посредством элементарных преобразований привести матрицу к диагональной форме и сосчитать число единиц, стоящих

на "главной" диагонали.

Пример 9.1.Отыскать ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переставив первый и второй столбец в этой матрице, а затем умножив первую строку на 1/2, придем к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прибавив к третьему столбцу этой матрицы удвоенный первый столбец, а затем прибавив некоторое кратное новой первой строки к каждой из остальных строк, получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Наконец, умножая вторую строку на (-1), вычитая из третьего столбца утроенный второй столбец, а затем вычитая из третьей и пятой строк некоторые кратные новой второй строки, придем к искомой диагональной форме матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг матрицы равен двум.

Док-во. Из того факта, что $\det A \neq 0$ следует существование обратной матрицы A^{-1} для матрицы A . Если теперь умножить (9.7) слева на A^{-1} и учесть равенство $A^{-1}A = E$, то придем к искомому решению (9.9).

Получение решения системы (9.6) посредством формулы (9.9) называется матричным способом решения этой системы. Для отыскания всех элементов (компонент) вектора-столбца x надо найти матрицу A^{-1} . Однако решение (9.9) можно переписать в иной форме, которая позволяет находить любую компоненту $x_1, x_2, \dots, x_n$ без отыскания всей обратной матрицы. Для вывода соответствующих формул запишем (9.9) в явной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

Если теперь воспользоваться правилами умножения матриц и умножения числа на матрицу, то несложно получить равенство

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n) \\ \frac{1}{\Delta}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n) \\ \dots \\ \frac{1}{\Delta}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n) \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

Из (9.11) с учетом определения равенства матриц и формулы разложения определителя по элементам столбца находим, что имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\Delta}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n) = \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Формулы (9.12) называются формулами Крамера (Г. Крамер, 1704-1752 г. г.; швейцар. матем.). Заметим, что Г. Крамером в 1750 г. было дано общее определение детерминанта (определителя). Следует подчеркнуть, что непосредственное использование матричного метода решения системы (9.6) и формул Крамера неудобно при достаточно больших n . Вследствие этого в линейной алгебре разработан целый ряд методов, позволяющих более эффективно решать системы линейных алгебраических уравнений. Надо еще обратить внимание на то, что с помощью формул Крамера можно находить при необходимости только отдельные компоненты вектора-столбца x , не отыскивая x целиком.

ЛЕКЦИЯ 10

Содержание лекции: “Решение произвольных конечных систем линейных алгебраических уравнений, нахождение определителей, рангов матриц, обратных матриц методом Гаусса. Понятие о методе прогонки”

10.1. Общие свойства произвольных систем линейных алгебраических уравнений

10.1.1. Опр. 10.1. Под произвольной системой линейных алгебраических уравнений будем понимать следующую систему:

[illegible]

где $s, n \in N$. При этом $x_1, x_2, \dots, x_n$ – искомые величины числа, а $b_1, b_2, \dots, b_n$ и a_{ij} для $\forall i = \overline{1, S}$ и $\forall j = \overline{1, n}$ считаются заданными числами.

Опр. 10.2. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

называются соответственно основной и расширенной матрицами системы

(10.1). Последний столбец в матрице $\tilde{A}$ называется столбцом свободных членов.

Опр. 10.3. Система (10.1) называется однородной, если $b_1 + b_2 + \dots + b_s$. Если же хотя бы одно из чисел $b_1, b_2, \dots, b_s$ отлично от нуля, то (10.1.) называется неоднородной системой.

Замечание 10.1. Ранг матрицы $\tilde{A}$ равен рангу матрицы A или на единицу больше последнего.

Док-во. Возьмем максимальную линейно независимую систему векторов-столбцов матрицы A . Она будет являться линейно независимой и в матрице $\tilde{A}$. Если столбец свободных членов через нее линейно выражается, то ранг матрицы A и $\tilde{A}$ равны. В противном случае, посредством присоединения к этой системе столбца свободных членов мы получим линейно независимую систему столбцов матрицы $\tilde{A}$, которая будет в ней максимальной (ее ранг на единицу больше ранга матрицы A).

Замечание 10.2. Система линейно алгебраических уравнений может быть записана в матричной форме

$$Ax = b, \quad (10.3)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$.

Опр. 10.4. Система (10.1.) называется разрешимой или совместной, если существует хотя бы один набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_s$, для которых все уравнения этой системы обращаются в истинные равенства. В противном случае говорят, что система (10.1.) является несовместной или неразрешимой.

Теорема 10.1. (Теорема Кронекера-Капелли). Система линейных алгебраических уравнений (10.1.) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной и расширенной матриц равны друг другу [13, 14].

Док-во. Допустим, что система (10.1.) совместна. При этом согласно теореме Кронекера-Капелли ранги матриц A и $\tilde{A}$ должны быть равны друг другу. Хотя эта теорема и не дает практического способа разыскания всех решений системы (10.1.), с ее помощью можно выяснить общие свойства и структуру множества решений данной системы.

$x_1, x_2, \dots, x_r$. Беря произвольные наборы *свободных неизвестных*, таким образом возможно получить все множество решений $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ системы (10.1). С другой стороны, если известно некоторое решение $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r, \tilde{x}_{r+1}, \dots, \tilde{x}_n$ системы (10.5), то его можно получить указанным образом. Для этого надо взять в качестве *свободных неизвестных* $x_{r+1} = \tilde{x}_{r+1}, \dots, x_n = \tilde{x}_n$ и решить (10.5) с помощью правила Крамера. Итак, любое решение системы (10.1) можно получить указанным образом.

Сформулируем теперь схему решения произвольной системы линейных алгебраических уравнений в виде следующего алгоритма.

Пусть дана совместная система линейных алгебраических уравнений (10.1) и пусть основная матрица A (10.1) имеет ранг r . Возьмем в A r линейно независимых строк и оставим в системе (10.1) только те уравнения коэффициенты которых вошли в выбранные базисные r строк. В данных уравнениях оставим в левых частях такие r неизвестных, для которых определитель из коэффициентов при них отличен от нуля. Остальные неизвестные назовем свободными и перенесем в правые части уравнений. Придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения и вычисляя значения остальных неизвестных (это можно сделать, в частности, с помощью правила Крамера), получим все решения системы (10.1).

Из данного метода отыскания решений системы (10.1) следует такая

Теорема 10.2. Система (10.1) совместна и имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен числу неизвестных.

10.1.2. Отметим сейчас некоторые свойства однородных систем линейных алгебраических уравнений

Пусть в системе (10.1) все $b_1, b_2, \dots, b_s$ равны нулю. Тогда из теоремы Кронекера – Капелли следует, что она будет совместной. Этот результат очевиден, так как однородная система, соответствующая (10.1), всегда имеет нулевое решение $(0, 0, \dots, 0)$.

Допустим теперь, что матрица A имеет ранг r . Если $r = n$, то нулевое ре-

и вектор-столбец $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ является решением этой системы. Тогда для любого числа k вектор-столбец $kx = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)^T$ также будет решением системы (10.6). Если $x = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ еще один вектор-столбец, являющийся решением (10.6), то и вектор-столбец $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)^T$, где α, β - произвольные числа, будет являться решением системы (10.6).

Справедливость теоремы непосредственно следует из однородности системы (10.6) и условий самой теоремы.

Опр. 10.5. Любая максимальная линейно независимая система решений (т. е. векторов-столбцов матриц размерности $n \times 1$) однородной системы (10.6) называется ее фундаментальной системой решений.

Замечание 10.3. Вектор-столбец (n -й) тогда и только тогда будет решением системы (10.6), когда он является линейной комбинацией векторов-столбцов, составляющих фундаментальную систему ее решений.

Теорема 10.5. Если ранг r матрицы коэффициентов однородной системы (10.6) меньше числа неизвестных n , то любая фундаментальная система ее решений состоит из $(n - r)$ решений [13-15].

Опр. 10.6. Однородная система линейных алгебраических уравнений, полученная из неоднородной системы (10.1) с помощью замены свободных членов (т.е. $b_1, b_2, \dots, b_s$) нулями, называется *приведенной системой* для (10.1).

Теорема 10.6. сумма любого решения системы (10.1) с любым решением приведенной системы для (10.1) снова будет решением системы (10.1). Кроме того, разность любых двух решений системы (10.1) будет являться решением приведенной системы для (10.1).

Замечание 10.4. Общее решение неоднородной системы (10.1) можно представить в виде [13-15]

$$x = x_0 + \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_{n-r} q_{n-r} \quad (10.7)$$

здесь x_0 - некоторое частное решение системы (10.1); $q_1, \dots, q_{n-r}$ - фундаментальная система решений приведенной системы для (10.1); $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$ - произ-

s и неизвестными называются *эквивалентными*, если они обе одновременно совместны или несовместны и обладают одним и тем же множеством решений.

Замечание 10.5. Если расширение матрицы систем (10.8) и (10.9) можно получить друг из друга посредством элементарных преобразований (см.опр.9.9), производимых только над их векторами-строками, то системы (10.8) и (10.9) будут эквивалентны.

Замечание 10.6. Если основные матрицы систем (10.8), (10.9) возможно получить друг из друга только посредством перестановки их векторов-столбцов, то между множествами их решений можно установить биективное соответствие, сводящееся к перестановке переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Пусть нам дана произвольная система линейных алгебраических уравнений (10.8) с n неизвестными, т. е. будем предполагать, что все векторы-столбцы основной матрицы системы (10.8) не являются нулевыми. Заметим сразу, если в (10.8) в каком либо из уравнений все коэффициенты левой части равны нулю, а его правая часть отлична от нуля, то система (10.8) будет несовместной. Это следует из того, что не может выполняться равенство $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b_i^{(0)}$, где $b_i^{(0)} \neq 0$.

Допустим, что в (10.8) отсутствует уравнение такого типа. В этом случае можно исключить из $(S-1)-0$ уравнения системы (10.8), (считаем, что $S \geq 2$; при $S=1$ имели бы только одно уравнение). Поскольку первый вектор-столбец основной матрицы системы (10.8) ненулевой, то с помощью перестановки уравнений системы (10.8) всегда можно добиться того, чтобы $a_{11}^{(0)} \neq 0$.

Итак, пусть в (10.8) $a_{11}^{(0)} \neq 0$. Исключим неизвестные x_1 из всех уравнений системы (10.8), кроме первого. Это можно сделать посредством умножения первого уравнения на $(a_{21}^{(0)} / a_{11}^{(0)})$ и вычитания результата из соответствующих частей второго уравнения. Затем обе части первого уравнения, умноженные на число $(a_{31}^{(0)} / a_{11}^{(0)})$, вычтем из соответствующих частей третьего уравнения. Данную процедуру следует применить и к другим уравнениям системы (10.8)

$$\begin{array}{l}
\boxed{
\begin{array}{l}
a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + \dots + a_{1k}^{(0)}x_s + a_{1,s+1}^{(0)}x_{s+1} + \dots + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)}, \\
a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2k}^{(1)}x_s + a_{2,s}^{(1)}x_{s+1} + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\
\vdots \\
a_{ss}^{(s-1)}x_s + a_{s,s+1}^{(s-1)}x_{s+1} + \dots + a_{sn}^{(s-1)}x_n = b_s^{(s-1)},
\end{array}
} \quad (10.12)
\end{array}$$

которая эквивалентна системе (10.8). Если же в процессе преобразований исходной системы (10.8) нам встретятся уравнения, удовлетворяющиеся тождественно, то система (10.12) будет состоять из меньшего, чем s , числа уравнений (формально это соответствует тому, что в (10.12) s надо заменить на число $s_1 < s$. Следует отметить, что для приведения исходной системы (10.8) к виду (10.11) может понадобиться также операция перестановки порядка символов (неизвестных) $x_1, x_2, \dots, x_n$.

В результате процедуры исключения неизвестных в предположении совместности системы (10.8) (т.е. когда метод исключения не приводит к появлению уравнений типа $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b \neq 0$) могут реализоваться следующие два случая: s или s_1 равно n ; s или s_1 меньше n .

Пусть s или s_1 равно n . Тогда последнее уравнение имеет вид $a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}$, где $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$. Из него получим $x_n = (b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)})$. Из предпоследнего уравнения находим x_{n-1} , затем из третьего от конца уравнения — x_{n-2} т.д. Переходя к уравнениям с меньшими номерами постепенно найдем все неизвестные вплоть до x_1 . Отсюда следует, что при $s = n$ система имеет единственное решение.

Допустим теперь, что s и s_1 меньше n . Тогда s или s_1 неизвестных будут базисными, а остальные $(n - s)$ или $n - s_1$ — свободными. В этом случае из последнего уравнения системы (10.12) выражаем x_s или x_{s_1} через $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n$ (или $x_{s_1+1}, x_{s_1+2}, \dots, x_n$). Затем из предпоследнего уравнения находим x_{s-1} (или x_{s_1-1}) через свободные переменные и т.д. В этом случае система имеет беско-

нечное множество решений. Для того, чтобы получить некоторое частное решение системы (10.8), надо придать определенные числовые значения свободным переменным.

Итак метод Гаусса (метод исключения неизвестных) позволяет установить совместность или несовместность системы линейных алгебраических уравнений, а также дает возможность найти ее решение, если оно существует. При этом, однако, надо подчеркнуть, что процесс отыскания решений может быть связан с выполнением большого числа арифметических операций, в процессе которых может происходить накопление ошибок. В силу этого, разработка корректных способов вычислений и качественный, количественный анализ, допускаемых при этом погрешностей весь важен для практических приложений математики.

Пример 10.1. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу этой системы и выполним элементарные преобразования над векторами-строками коэффициентов системы по схеме метода Гаусса (чертой отделен вектор-столбец свободных членов)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -11 & 10 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & 120 & 120 \end{array} \right]$$

Используя преобразованную расширенную матрицу, запишем систему, эквивалентную исходной

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 11x_2 - x_3 = 10 \\ 120x_3 = 120 \end{cases}$$

Следовательно, $x_3 = 1$, $x_2 = \frac{1}{11}(10 + x_3) = \frac{1}{11}(10 + 1) = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}(4 + x_2 + x_3) = 3$.

Пример 10.2. Решить систему

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Произведем элементарные преобразования над векторами-строками основной матрицы этой системы

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 9 & 5 & -13 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & -11 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right].$$

По виду преобразованной матрицы запишем систему эквивалентную исходной

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

В качестве свободного неизвестного можно принять любое из неизвестных x_2 и x_4 . Допустим, что $x_4 = \beta$. Тогда из первого уравнения имеем $x_2 = \beta$.

Из второго уравнения получим $x_3 = \frac{4}{5}\beta$. В свою очередь из третьего уравнения

находим $x_1 = \frac{3}{5}\beta$. Итак, вектор-столбец, определяющий все решения системы, имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\beta \\ \beta \\ \frac{4}{5}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \beta.$$

10.2.2. Сведения, изложенные в этой и предыдущей лекциях, предоставляют реальные возможности для вычисления рангов матриц, определителей и отыскания обратных матриц. Для того чтобы это сделать фактически, надо воспользоваться элементарными преобразованиями матриц и методом исключения неизвестных.

а. Опишем сначала способ вычисления определителей. Рассмотрим определитель

$$\det A_0 = \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & \dots & a_{3n}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1}^{(0)} & a_{s2}^{(0)} & a_{s3}^{(0)} & \dots & a_{sn}^{(0)} \end{vmatrix}. \quad (10.13)$$

Для того чтобы вычислить определитель, приведем матрицу $A_0 = (a_{ij}^{(0)})$, где $i, j = \overline{1, n}$ к треугольному виду. Будем считать, что в каждом векторе-столбце определителя отличен от нуля хотя бы один элемент. В противном случае определитель $\det A_0$ был бы равен нулю. Пусть для определенности $a_{11}^{(0)} \neq 0$. Если это было бы не так, то посредством перестановки векторов-строк определителя всегда можно преобразовать исходный определитель к определителю, для которого это условие выполнялось бы. При этом преобразованный определитель с точностью до знака совпадает с исходным (напомним, что при перестановке двух векторов-строк определитель меняет знак).

Вычтем теперь из i -й вектора-строки определителя ($i = \overline{2, n}$) первую вектор-строку, умноженную на $a_{i1}^{(0)} / a_{11}^{(0)}$. Определитель при таком преобразовании не изменяет своей величины, а на месте i -й строки и i -го столбца появится нуль. Таким образом, можно преобразовать исходный определитель к виду

$$\det A_0 = \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}. \quad (10.14)$$

Следующим шагом будет преобразование матрицы $A_1 = (a_{ij}^{(1)})$, где $i, j = \overline{1, n}$. Если $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то, вычитая из i -й вектора-строки ($i, j = \overline{3, n}$) определителя (10.14) вторую вектор-строку, умноженную на $(a_{i2}^{(0)} / a_{22}^{(0)})$, получим, что в i -й строке ($i, j = \overline{3, n}$) и 2-м столбце преобразованного определителя появится нуль. По аналогии можно получить нули на месте всех остальных элементов 2-го столбца при $i, j = \overline{3, n}$. Заметим, что если бы $a_{22}^{(1)} = 0$, то можно было бы посредством перестановки вектор-строк в определителе (10.14.) всегда сле-

дать так, чтобы в преобразованном определителе $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Однако, когда $a_{i2}^{(1)} = 0$ для $\forall i = \overline{2, n}$, определитель (10.14.) равен нулю, т.е. нами был бы уже вычислен исходный определитель. Справедливость данного утверждения вытекает из того, что определитель

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & 0 & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} \quad (10.15)$$

равен нулю в силу формулы разложения определителя по элементам столбца, поскольку

$$\det B = a_{11}^{(0)} \begin{vmatrix} 0 & a_{23}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} \\ 0 & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Если же $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то определитель (10.14) посредством указанных действий приводится к виду

$$\det A_0 = \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix}. \quad (10.16)$$

Определитель (10.16) опять можно преобразовать по описанной выше схеме, которая, однако, применяется только к векторам-строкам от 3-й до n -й. В конце концов исходный определитель $\det A_0$ можно привести к треугольному виду

$$\det A_0 = \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (10.17)$$

Определитель (10.17) равен произведению диагональных элементов, т.е.

$$\det A_0 = a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}.$$

Пример 10.3. Вычислить определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Производим преобразования исходного определителя по указанной схеме с использованием его простейших свойств

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{1}{4^3} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 13 \\ 0 & 10 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{4^3} \frac{1}{7^2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -32 & 92 \\ 0 & 0 & -16 & 60 \end{vmatrix} = \frac{1}{4^3} \frac{1}{7^2 (-32)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -32 & 92 \\ 0 & 0 & 0 & -448 \end{vmatrix} \\ &= \frac{4 \cdot 7 \cdot (-32) \cdot (-448)}{4^3 \cdot 7^2 \cdot (-32)} = -4. \end{aligned}$$

б. Используя преобразования, идентичные описанным в пункте **а.** и используемым фактически в методе Гаусса, удобно находить ранги матриц. Любую прямоугольную матрицу A размерности $m \times n$ можно привести к трапециевидальному виду (в частности, к треугольному), т.е. преобразовать матрицу A посредством операций, которые не изменяют ранг матрицы, к следующей форме

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}^{(0)} & \tilde{a}_{12}^{(0)} & \tilde{a}_{13}^{(0)} & \dots & \tilde{a}_{1l}^{(0)} & \dots & \tilde{a}_{1n}^{(0)} \\ 0 & \tilde{a}_{22}^{(0)} & \tilde{a}_{23}^{(0)} & \dots & \tilde{a}_{2l}^{(0)} & \dots & \tilde{a}_{2n}^{(0)} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \tilde{a}_{3l}^{(0)} & \dots & \tilde{a}_{3n}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{ll}^{(0)} & \dots & \tilde{a}_{ln}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Ранг этой матрицы будет равен числу r отличных от нуля элементов множества $\{\tilde{a}_{11}, \dots, \tilde{a}_{ll}\}$. Это следует из того, что максимального порядка минор, который может быть построен из элементов этой матрицы, обязательно будет содержать на главной диагонали именно эти элементы. Ранг r матрицы A может быть меньше, чем m , ибо в процессе ее преобразования можно удалять нулевые векторы-строки (напомним, что эта процедура ранга не меняет).

Пример 10.4. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 8 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен двум, т.е. $r = 2$.

с. Изложим метод нахождения обратной матрицы A^{-1} для невырожденной матрицы A . При этом используем метод Гаусса.

Итак, пусть дана матрица $A = (a_{ij})$, где $i, j = \overline{1, n}$. Заметим, что процедура отыскания обратной матрицы позволит сразу выяснить и вопрос о её существовании, т.е. дает возможность установить будет ли выполняться неравенство $\det A \neq 0$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(0)} x_j = y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.18)$$

Ее можно переписать в матричной форме

$$Ax = y, \quad (10.19)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Допустим, что система (10.19) решена. При этом предполагаем, что решение существует и ранг матрицы A равен n . Как было показано ранее, ранг матрицы A и решение системы (10.18) возможно получить методом Гаусса. Это решение будет иметь вид

$$x = By, \quad (10.20)$$

где B - квадратная матрица размерности $n \times n$. Данная матрица и будет являться обратной матрицей для матрицы A . Справедливость данного утверждения следует непосредственно из (10.19), (10.20). Действительно, подставляя (10.20) в (10.19), получим $ABu = y$. Следовательно $BA = E$. С другой стороны, подставив (10.19) в (10.20), найдем $x = BAx$. Итак,

[illegible]

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

10.3. Понятие о методе прогонки

При решении очень многих важных и разнообразных прикладных проблем приходится решать системы линейных алгебраических уравнений очень высокого порядка (они могут содержать сотни, тысячи и даже десятки тысяч уравнений). К счастью, многие из этих систем имеют специальную структуру, позволяющую создавать различные эффективные численные методы их решения. Ниже будет кратко рассмотрен один из таких методов, который представляет собой частный вариант метода исключения неизвестных и применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений, имеющих “ленточную” структуру основной матрицы системы.

Опр. 10.8. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ размерности $n \times n$ ($n > 0$), называется якобиевой (или матрицей Якоби), если $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$, где $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Введем следующие обозначения: $\tilde{c}_i = a_{ii}$ для $\forall i = \overline{1, n}$; $\tilde{b}_i = -a_{i, i+1}$ и $\tilde{a}_i = -a_{i+1, i}$ для $\forall i = \overline{1, n-1}$. Тогда якобиеву матрицу можно записать в виде

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & -\tilde{b}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\tilde{a}_1 & \tilde{c}_1 & -\tilde{b}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{a}_2 & \tilde{c}_2 & -\tilde{b}_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{c}_{n-1} & -\tilde{b}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\tilde{a}_{n-1} & \tilde{c}_n \end{bmatrix}. \quad (10.25)$$

Матрицы типа (10.25) называют также ленточными, ибо совокупность элементов, отличных от нуля, расположена на главной диагонали, под диагональю и над диагональю и имеет визуально ленточный вид.

Рассмотрим теперь систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_0 x_0 - b_0 x_1 = f_0, & i = 0, \\ -a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ -a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, & i = n \end{cases} \quad (10.26)$$

относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Остальные величины в (10.26) считаются известными. Основная матрица A данной системы является якобиевой матрицей и имеет размерность $(n+1) \times (n+1)$.

При больших n необходимо пользоваться экономичными методами решения систем (10.25), при реализации которых число необходимых действий было бы пропорционально числу неизвестных. Одним из таких методов является метод прогонки, к изложению которого и переходим. В этом методе используется идея метода исключения неизвестных. Итак, проведем исключение неизвестных в системе (10.26). Предварительно введем такие обозначения: $\alpha_1 = b_0 / c_0$, $\beta_1 = f_0 / c_0$. Перепишем теперь (10.26) в виде

$$\begin{cases} x_0 - \alpha_0 x_1 = \beta_1, & i = 0, \\ -a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ -a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, & i = n. \end{cases} \quad (10.27)$$

Возьмем первые два уравнения (10.27) $x_0 - \alpha_1 x_1 = \beta_1$, $-a_1 x_0 + c_1 x_1 - b_1 x_2 = f_1$.

Умножим первое уравнение на a_1 и сложим со вторым уравнением. Получим $(c_1 - a_1 \alpha_1) x_1 - b_1 x_2 = f_1 + a_1 \beta_1$ или после деления на $(c_1 - a_1 \alpha_1)$ $x_1 - \alpha_2 x_2 = \beta_2$,

$\alpha_2 = \frac{b_1}{c_1 - a_1 \alpha_1}$, $\beta_2 = \frac{f_1 + a_1 \beta_1}{c_1 - a_1 \alpha_1}$. Все остальные уравнения системы (10.27) x_0 не

содержат. Поэтому на этом первый шаг процесса исключения заканчивается. В результате получим новую “укороченную” систему

$$\begin{cases} x_1 - \alpha_2 x_2 = \beta_2, & i = 1, \\ -a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\ -a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, & i = n, \end{cases} \quad (10.28)$$

которая не содержит неизвестное x_0 и имеет аналогичную (10.27) форму (фактически эта форма не изменилась, т.е. осталась инвариантной по отношению к действию исключения неизвестной x_0).

Если система (10.28) будет решена, то неизвестное x_0 найдется по формуле $x_0 = \alpha_1 x_1 + \beta_1$. К системе (10.28) можно снова применить описанный способ исключения неизвестных. На втором шаге будет исключено неизвестное x_1 , на третьем x_2 и т. д. В результате l -го шага получим систему для неизвестных $x_l, x_{l+1}, \dots, x_n$

$$\begin{cases} x_l + \alpha_{l+1}x_{l+1} = \beta_{l+1}, & i = l, \\ -a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, & l+1 \leq i \leq n-1, \\ -a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, & i = n \end{cases} \quad (10.29)$$

и формулы для нахождения x_i с номерами $i \leq l-1$

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = l-1, l-2, \dots, 0. \quad (10.30)$$

При этом коэффициенты α_i и β_i находятся по формулам

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}, i = 1, 2, \dots, \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}. \quad (10.31)$$

Полагая в (10.29) $l = n-1$, получим систему для x_n и x_{n-1}

$$x_{n-1} - \alpha_n x_n = \beta_n, \quad -a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n,$$

из которой найдем $x_n = \beta_{n+1}$, $x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n$. Объединяя эти равенства с (10.30) ($l = n-1$), получим окончательные формулы для нахождения неизвестных

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0, \\ x_n &= \beta_{n+1}, \end{aligned} \quad (10.32)$$

где α_i и β_i находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \\ \beta_{i+1} &= \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Итак, формулы (10.32),(10.33) описывают метод Гаусса, который в применении (10.26) получил специальное название-*метод прогонки*. Коэффициенты α_i и β_i называют *прогоночными* коэффициентами. Формулы (10.33) описывают *прямой ход прогонки*, а (10.32) – *обратный ход*. Так как значения x_i находятся здесь последовательно при переходе от $i+1$ к i , то формулы (10.32), (10.33) называют иногда формулами *правой прогонки*.

В заключение укажем порядок счета по формулам метода прогонки. Начиная с α_1 и β_1 , по формулам (10.33) определяются и запоминаются прогоночные коэффициенты α_i и β_i . Затем по формулам (10.33) находится решение $x_0, x_1, \dots, x_n$ системы (10.26).

ЛЕКЦИЯ 11

Содержание лекции: «Определение линейного (векторного) пространства L. Сумма и пересечение подпространств. Базис линейного пространства, координаты вектора. Изменение контравариантных и ковариантных компонент вектора при переходе к другому базису. Связь между понятиями инварианта, отношения эквивалентности, вектора линейного пространства и одновалентного тензора. Евклидовы и унитарные пространства. Понятие о метрическом пространстве.»

11.1. Линейные пространства, подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Базис линейного пространства, координаты вектора

В данной лекции будет введено понятие линейного (векторного) пространства L , которое является примером одной из наиболее важных математических структур. В лекции 9 мы уже рассматривали линейно-координатные пространства R_n . Оно представляет собой частный случай линейного пространства. Поэтому общие свойства пространства R_n будут положены в основу определения линейного пространства L .

Опр. 11.1. Непустое множество L будем называть линейным (векторным) пространством над полем P , если выполняются следующие условия:

а. На множестве L определена внутренняя бинарная алгебраическая операция $+$ (сложение), подчиняющаяся таким аксиомам:

1) $x + y = y + x$ для $\forall x, y \in L$ (св-во коммутативности);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ для $\forall x, y, z \in L$ (св-во ассоциативности);

3) Существует единственный нулевой элемент $0 \in L$ такой, что $x + 0 = x$ для $\forall x \in L$;

4) Для каждого элемента (вектора) $x \in L$ существует единственный противоположный элемент $(-x)$ такой, что $x + (-x) = 0$.

б. Каждой паре $(\alpha, x) \in P \times L$ ($\alpha \in P, x \in L$) сопоставлен единственный элемент (вектор) $\alpha x \in L$ (т.е. задана внешняя алгебраическая операция), причём данное соответствие удовлетворяет такому набору аксиом :

5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для $\forall \alpha, \beta \in P, x \in L$ (св-во ассоциативности);

6) $1x = x$ для $\forall x \in L$, где 1 - единичный элемент поля P .

в. Операции сложения и умножения связаны между собой дистрибутивными законами (аксиомами):

7) Умножение на элементы из P дистрибутивно относительно сложения элементов из L , т.е. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любых $\alpha \in P, x, y \in L$;

8) Умножение на элементы из L дистрибутивно относительно сложения элементов из P , т.е. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для любых $\alpha, \beta \in P, x \in L$.

Опр. 11.2. Если P - поле вещественных чисел, то линейное пространство L над P называется вещественным линейным пространством. Если же P - поле комплексных чисел ($P = C$), то линейное пространство L над P называется комплексным линейным пространством.

Далее будут рассматриваться только вещественные или комплексные линейные (векторные) пространства, элементы которых мы будем называть просто векторами.

Замечание 11.1. Аксиомы, перечисленные в определении линейного пространства, не являются логически независимыми, т.е. линейное пространство можно определить посредством меньшего числа аксиом.

Замечание 11. 2. В любом линейном пространстве L имеют место такие соотношения: $(-x) = (-1)x$ для любых $x \in L$; $\alpha 0 = 0$ для любых $\alpha \in P$; если $\alpha x = 0$, то либо $\alpha = 0 \in P$, либо $x = 0$.

Пример 11.1. Пусть P - множество рациональных чисел, а L - множество вещественных чисел ($L = R$). Под сложением элементов из L будем понимать сложение вещественных чисел, а под умножением - умножение вещественных чисел из L на рациональные числа из P . Тогда L - линейное пространство.

Пример 11.2. Пусть выполняются такие условия: P - множество рациональных чисел, а L - множество всех элементов вида $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{5}$, где $a, b, c, d \in P$; под сложением понимается сложение чисел указанного вида; под умножением подразумевается умножение чисел из P на числа из L . Тогда L - линейное пространство над множеством рациональных чисел.

Пример 11.3. Множество R_n для любых $n \in N$ является линейным пространством.

Опр. 11.3. Рассмотрим систему векторов $b_1, b_2, \dots, b_s$ из линейного пространства L над полем P . Тогда множество всех векторов вида $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_s b_s$, где $s \in N$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in P$, называется линейной оболочкой векторов $b_1, b_2, \dots, b_s$.

Опр. 11.4. Любое подмножество линейного пространства L , которое само является линейным пространством относительно тех же алгебраических операций (сложения векторов и умножения их на числа из P), называется линейным подпространством пространства L .

Теорема 11.1. Линейная оболочка системы векторов $b_1, b_2, \dots, b_s$ из линейного пространства L является линейным подпространством пространства L .

Справедливость этой теоремы легко проверить непосредственно, ибо все аксиомы линейного пространства выполняются в линейной оболочке. В качестве пояснения отметим, что в линейной оболочке в качестве вектора 0 выступает вектор вида $0b_1 + 0b_2 + \dots + 0b_s$, а в качестве противоположного для вектора $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_s b_s$ - вектор $(-\alpha_1)b_1 + (-\alpha_2)b_2 + \dots + (-\alpha_s)b_s$.

Опр. 11.5. Пусть L_1 и L_2 - подпространства линейного пространства L . Под суммой $L_1 + L_2$ линейных подпространств L_1 и L_2 понимают множество всех векторов из L , которые

имеют вид $z=x+y$, где $x \in L_1$ и $y \in L_2$.

Опр. 11.6. Под пересечением $L_1 \cap L_2$ линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пространства L понимается множество всех векторов, одновременно принадлежащих как L_1 , так и L_2 .

Теорема 11.2. Сумма и пересечение подпространств L_1 и L_2 линейного пространства L над полем P являются подпространством пространства L .

Док-во. Возьмём два произвольных вектора z_1 и z_2 из суммы L_1+L_2 . Это означает, что $z_1 = x_1+y_1$, $z_2 = x_2+y_2$, где $x_1, x_2 \in L_1$ и $y_1, y_2 \in L_2$. Теперь рассмотрим произвольную линейную комбинацию $\alpha z_1 + \beta z_2$ где $\alpha, \beta \in P$. Имеем $\alpha z_1 + \beta z_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2)$. Поскольку $\alpha x_1 + \beta x_2 \in L_1$ и $\alpha y_1 + \beta y_2 \in L_2$, то $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L_1 + L_2$. Следовательно, $L_1 + L_2$ есть подпространство, т.к. при выполнении этого условия остальные аксиомы линейного пространства выполняются в силу того, что $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L$. Пусть теперь z_1 и $z_2 \in L_1 \cap L_2$, т.е. $z_1, z_2 \in L_1$, $z_1, z_2 \in L_2$. Ясно, что $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L_1$ и $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L_2$, т.е. $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L_1 \cap L_2$. Следовательно, $L_1 \cap L_2$ также является подпространством.

Замечание 11.3. Операции сложения подпространств и их пересечения являются алгебраическими, причём они коммутативны и ассоциативны [14].

Опр. 11.7. Пусть даны подпространства $L_1, L_2, \dots, L_m$ некоторого линейного пространства L . Обозначим через L_0 сумму подпространств $L_1, L_2, \dots, L_m$. Тогда, если любой вектор x из L_0 допускает единственное представление вида $x = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2, \dots, x_m \in L_m$, то будем говорить, что пространство L_0 является прямой суммой подпространств $L_1, L_2, \dots, L_m$.

Опр. 11.8. Базисом линейного пространства L называется любая линейно-независимая система векторов, через которые линейно выражается каждый вектор пространства L .

Замечание 11.4. Понятия линейной зависимости и независимости системы векторов в линейном пространстве определяется так же, как и в пространстве R_n (см. опр. 9.2).

Опр. 11.9. Если базис линейного пространства L содержит n векторов, то пространство L называется n -мерным. Линейное пространство L называют бесконечномерным, когда в L не существует базиса с конечным числом векторов.

Теорема 11.3. Количество векторов в линейно-независимых системах,

которые образуют различные базисы конечномерного линейного пространства L , *не зависит* от выбора базиса в L , т.е. является *инвариантом*.

Опр. 11.10. Число n векторов, входящих в линейно-независимую систему, образующую базис конечномерного линейного пространства L , называется размерностью этого пространства и обозначается символом $n = \dim L$.

Пусть дано n -мерное линейное пространство L , которое обозначим символом L_n . Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ - некоторый его базис. По определению базиса любой $x \in L_n$ можно разложить по векторам этого базиса, т.е. представить x в виде

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n \quad (11.1)$$

где $x^1, x^2, \dots, x^n$ - числа из поля P (вещественных или комплексных чисел; символы над x имеют смысл индексов, а не степеней).

Опр. 11.11. Набор чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$ в разложении (11.1) называется *контравариантными компонентами* (координатами) вектора относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$. При этом все векторы, принадлежащие L_n называют *контравариантными векторами*.

Теорема 11.4. Для любого вектора x линейного пространства L_n разложение (11.1) по заданному базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ единственно.

Док-во. Докажем теорему методом от противного. Предположим, что кроме разложения (11.1) существует другое разложение $x = y^1 e_1 + y^2 e_2 + \dots + y^n e_n$, причём $(x^1, x^2, \dots, x^n) \neq (y^1, y^2, \dots, y^n)$. Тогда вычитая друг из друга эти разложения, получим, что должно иметь место соотношение $(x^1 - y^1)e_1 + (x^2 - y^2)e_2 + \dots + (x^n - y^n)e_n = 0$. Но $e_1, e_2, \dots, e_n$ -- линейно-независимая система векторов, т.к. она является базисом. Следовательно, это равенство может выполняться тогда и только тогда, когда $x^1 = y^1, \dots, x^n = y^n$. Но это противоречит исходному предположению. Поэтому оно не верно, т.е. разложение (11.1) единственно. Теорема доказана.

11.2. Трансформационные свойства компонент векторов линейных пространств и их интерпретация

При изучении *инвариантных* (неизменных) свойств различных матери-

альных и абстрактных объектов, конструкций, рассматриваемых в науке и технике, пришлось ввести и исследовать целый ряд важных математических понятий, построенных на основе использования линейных пространств. Ниже будут отмечены только некоторые из этих понятий.

11.2.1. Опр. 11.12. Пусть L - линейное пространство над полем P (вещественных или комплексных чисел) и задано отображение (функция) $a: L \rightarrow P$. Если данное отображение (правило, закон, функция) удовлетворяет условиям $a(x+y) = a(x) + a(y)$, $a(\alpha x) = \alpha a(x)$ для любых $x, y \in L$, и любых $\alpha \in P$, то оно называется *линейной формой*.

Замечание 11.5. Понятия вектора и линейной формы не зависят от выбора базиса в линейном пространстве, т.е. вектор и линейная форма определены *инвариантным* образом.

Теорема 11.5. Сумма линейных форм и произведение числа из P на линейную форму тоже будет линейной формой.

Верность этой теоремы непосредственно следует из опр. 11.12.

Теорема 11.6. Множество L^* всех линейных форм, заданных на L , является линейным пространством.

Опр. 11.13. Множество L^* всех линейных форм, заданных на L , называется линейным пространством, *сопряжённым* линейному пространству L .

Замечание 11.6. Если линейное пространство L n -мерно, то сопряжённое ему линейное пространство L^* также n -мерно.

Пусть L n -мерное линейное пространство, т.е. $L = L_n$. Сопряжённое ему линейное пространство L^* также n -мерно ($L^* = L_n^*$). Обозначим через $e_1, e_2, \dots, e_n$ некоторый базис линейного пространства. Введём ещё базис $e^1, e^2, \dots, e^n$ сопряжённого ему линейного пространства L_n^* . Весьма полезно выбирать этот базис не произвольно, а связывать его определёнными условиями с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейного пространства L_n .

Опр. 11.14. Базис $e^1, e^2, \dots, e^n$ линейного пространства L_n^* , сопряжённого линейному пространству L_n , называется взаимным с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства L_n , если выполняются условия: $e^i(e_j) = \delta_j^i$ для $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$; (δ_j^i -

символ Кронекера, причём $\delta_i^i = 1$ для любых $i = \overline{1, n}$, $\delta_j^i = 0$ при $i \neq j$).

Любую линейную форму $a \in L_n^*$ можно разложить по взаимному базису $e^1, e^2, \dots, e^n$, т.е. представить в виде $a = a_1 e^1 + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n = \sum_{i=1}^n a_i e^i$, где $a_i \in P$ для любых $i = \overline{1, n}$. Результат действия линейной формы $a \in L_n^*$ на любой вектор $e_1, e_2, \dots, e_n$ из базиса пространства L_n равен a_i . Действительно, $a(e_i) = (\sum_{j=1}^n a_j e^j)(e_i) = \sum_{j=1}^n a_j e^j(e_i) = \sum_{j=1}^n a_j \delta_j^i = a_i$ ($i = \overline{1, n}$). При получении этого результата было учтено опр. 11.14.

Опр. 11.15. Величины $a_1 \dots a_n$, где $a_i = a(e_i)$ для любых $i = \overline{1, n}$, называются коэффициентами линейной формы $a \in L_n^*$ или *ковариантными компонентами* вектора a в базисе $e_1, \dots, e_n$. При этом все векторы $a \in L_n^*$ называют *ковариантными векторами*.

11.2.2. Перейдём теперь непосредственно к выявлению законов преобразования (т.е. трансформационных свойств) *контравариантных и ковариантных компонент* векторов. Знание этих законов и их всевозможных обобщений чрезвычайно важно для отыскания объективных свойств физических, математических и иных объектов, конструкций, которые не зависят от субъективного выбора базиса в линейных пространствах L_n и L_n^* .

Вясним сначала, как меняются *контравариантные* компоненты $x^1 \dots x^n$ вектора $x \in L_n$ при изменении базиса пространства L_n . Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ - старый (нештрихованный) базис пространства L_n , а $e_1', e_2', \dots, e_n'$ - другой (новый, штрихованный) базис пространства L_n . В силу определения базиса все векторы e_i' можно разложить по векторам старого базиса.

$$e_i' = \sum_{r=1}^n \gamma_r^i e_r = \gamma_1^i e_1 + \dots + \gamma_n^i e_n, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11.2)$$

Поскольку старый и новый базисы - линейно-независимые системы векторов, то квадратная матрица

$$\Gamma=(\gamma^i_r), \quad (11.3)$$

которая называется матрицей перехода от старого базиса к новому, является невырожденной (штрихованный индекс обозначает номер строки, а не штрихованный индекс обозначает номер столбца матрицы Γ). Заметим, что если бы $\det \Gamma$ равнялся 0, то система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ не могла бы быть линейно-независимой, т.е. она не была бы базисом в L_n (см. доказательство этого факта в [15]).

Разложим теперь *контравариантный* вектор $x \in L_n$ по новому базису, т.е. представим его в виде

$$x = x^{i'} e_{i'} + \dots + x^{n'} e_{n'} = \sum_{i'=1}^n x^{i'} e_{i'}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11.4)$$

Подставим в (11.4) выражение (11.2). Получим

$$x = \sum_{i'=1}^n x^{i'} e_{i'} = \sum_{i'=1}^n x^{i'} \sum_{r=1}^n \gamma^i_{r'} e_r = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{i'=1}^n \gamma^i_{r'} x^{i'} \right) e_r. \quad (11.5)$$

Сравнивая формулы (11.1) и (11.5), с учётом теоремы 11.4 получим соотношения

$$x^i = \sum_{i'=1}^n \gamma^i_{r'} x^{i'}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11.6)$$

Выражения (11.6) можно записать в матричной форме

$$X = \Gamma^T X', \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \dots \\ x^{n'} \end{pmatrix}, \quad (11.7)$$

где векторы-столбцы X и X' , которые сопоставляются одному и тому же контравариантному вектору $x \in L_n$.

Формула (11.6) связывает между собой новые контравариантные компоненты $x^{1'} \dots x^{n'}$ со старыми контравариантными компонентами вектора $x \in L_n$. Соотношения (11.6), (11.7) определяют закон преобразования новых контравариантных компонент вектора x в старые контравариантные компоненты того же вектора. Поскольку $\det \Gamma \neq 0$, $\det \Gamma = \det \Gamma^T$, то существует обратная матрица для

матрицы Γ^T . Обозначим её через $B=(\Gamma^T)^{-1}=(\beta_{i'}^i)$. Здесь опять штрихованный индекс обозначает номер строки, а нештрихованный - номер столбца:

$$B=\begin{pmatrix} \beta_1^{i'} & \beta_2^{i'} & \dots & \beta_n^{i'} \\ \beta_1^{j'} & \beta_2^{j'} & \dots & \beta_n^{j'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^{n'} & \beta_2^{n'} & \dots & \beta_n^{n'} \end{pmatrix}. \quad (11.8)$$

С учётом сказанного из (11.7) получим такой **закон преобразования** контравариантных компонент вектора $x \in L_n$ при переходе от старого базиса к новому:

$$x^{i'} = B_{i'}^i x^i, \quad i' = \overline{1, n}. \quad (11.9)$$

Принимая во внимание соотношения $\Gamma^T B = B \Gamma^T = E$, можно показать, что справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{j'}^i \beta_i^{i'} = \delta_{j'}^{i'}, \quad \sum_{i'=1}^n \gamma_{i'}^j \beta_{j'}^{i'} = \delta_{i'}^j, \quad (11.10)$$

справедливые для всех $i, j, i', j' = \overline{1, n}$.

Зная, как преобразуются базисы и контравариантные компоненты вектора $x \in L_n$, легко найти **закон преобразования** коэффициентов a_i (ковариантных компонент вектора $a \in L_n^*$) при переходе от одного базиса к другому. Пусть a_i и $a_{i'}$ -коэффициенты линейной формы (ковариантные компоненты) $a \in L_n^*$, которые соответствуют старому и новому базисам линейного пространства L_n . Напомним, что $a_i = a(e_i)$ и $a_{i'} = a(e_{i'})$ для всех $i, i' = \overline{1, n}$, причём a_i и $a_{i'}$ -- коэффициенты разложения линейной формы $a \in L_n^*$ по взаимным базисам, соответствующим $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}$. Из формулы 11.2. с учетом сказанного получим

$$a_{i'} = a(e_{i'}) = a\left(\sum_{i=1}^n \gamma_{i'}^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \gamma_{i'}^i a(e_i) = \sum_{i=1}^n \gamma_{i'}^i a_i, \quad \text{для } \forall i' = \overline{1, n}. \quad (11.11)$$

Выражения (11.11) и дают искомый **закон преобразования** коэффициентов a_i (ковариантных компонент вектора $a \in L_n^*$). К этому следует добавить,

что компоненты a_i являются коэффициентами разложения линейной формы $a \in L_n^*$ по базису $e^1, e^2, \dots, e^n$ который является взаимным к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Замечание 11.7. Базисные векторы $e^1, e^2, \dots, e^n$ в L_n^* связаны с базисом $e^1, e^2, \dots, e^n$ в том же пространстве соотношениями $e^i = \sum_{i'=1}^n \beta_{i'}^i e^{i'}$ для $\forall i' i = \overline{1, n}$.

Замечание 11.6. Закон преобразования новых компонент линейной формы в старые определяется соотношением $a_i = \sum_{i'=1}^n \beta_{i'}^i a_{i'}$ для $\forall i' i = \overline{1, n}$ [15].

11.3. Связь между понятиями отношения эквивалентности, инварианта, вектора линейного пространства и одновалентного тензора

Опр. 11.16. Пусть L_n – n -мерное линейное пространство и каждому его базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ биективным образом поставлена в соответствие упорядоченная совокупность чисел $\xi^1 \dots \xi^n$. Если все совокупности чисел, соответствующие всевозможным базисам пространства L_n , связаны между собой посредством **законов преобразования** (11.6) и (11.9), то будем говорить, что задан **одновалентный контравариантный тензор** над L_n . При этом числа $\xi^1 \dots \xi^n$ называются компонентами данного тензора в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Опр. 11.17. Пусть в линейном пространстве L_n каждому базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ биективным образом сопоставлена упорядоченная совокупность чисел $\xi^1 \dots \xi^n$. Если все совокупности чисел, которые соответствуют всевозможным базисам пространства L_n , связаны между собой с помощью **законов преобразования** (11.11) и закона, указанного в замечании 11.8, то будем говорить, что задан **одновалентный ковариантный тензор** над L_n . Числа $\xi^1 \dots \xi^n$ называются при этом компонентами данного тензора в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Следует отметить, что на основе опр.11.16. и 11.17. можно дать определения тензоров более высоких валентностей, которые широко используются при решении сложных научных и технических проблем.

Теперь обратим внимание на одно важное обстоятельство, которое лежит в основе определений ковариантных, контравариантных векторов (одновалентных тензоров). Суть его состоит в том, что **законы преобразования** совокупностей компонент тензоров (векторов) указанных выше типов, позволяет установить **соотношения эквивалентности между совокупностями**, которые сопоставляются всевозможным базисам в L_n или L_n^* .

Опр. 11.18. Пусть любому базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейного пространства L_n биективным образом сопоставлена упорядоченная совокупность чисел $\xi^1 \dots \xi^n$ из поля P . Будем говорить, что любые два таких набора $\xi^1 \dots \xi^n$ и $\xi^{1'} \dots \xi^{n'}$, которые сопоставлены базисам $e_1, \dots, e_n$ и $e_{1'}, \dots, e_{n'}$, связаны отношением σ , если данные наборы чисел выражаются друг через друга посредством *законов преобразования* (11.6) и (11.9), причём в этих выражениях $x^1 \dots x^n$ и $x^{1'} \dots x^{n'}$ надо заменить соответственно на $\xi^1 \dots \xi^n$ и $\xi^{1'} \dots \xi^{n'}$.

Теорема 11.7. Отношение σ , введённое согласно опр. 11.18, является *отношением эквивалентности*.

Док-во. Отношение σ рефлексивно, ибо при совпадении базисов $e_1, \dots, e_n$ и $e_{1'}, \dots, e_{n'}$ наборы компонент $\xi^1 \dots \xi^n$ и $\xi^{1'} \dots \xi^{n'}$ идентичны друг другу, т.е. они связаны законами (11.6) и (11.9), в которых матрицы $(\gamma_{i'}^{i'})$ и $B = (\Gamma^T)^{-1} = (\beta_i^{i'})$ совпадают с единичной матрицей размера $n \times n$.

Покажем, что отношение σ транзитивно. Для этого рассмотрим упорядоченные 3 совокупности чисел $\xi^1 \dots \xi^n$ и $\xi^{1'} \dots \xi^{n'}$ и $\xi^{1''} \dots \xi^{n''}$. Будем считать, что 1-я совокупность связана отношением σ со 2-й совокупностью, а 2-я совокупность связана отношением σ с 3-й совокупностью. Надо доказать, что из этих допущений следует наличие отношения σ между 1-й и 3-й совокупностями. С учётом сделанных предположений из (11.6) получим, что должны выполняться следующие равенства:

$$\xi^i = \sum_{i'=1}^n \gamma_{i'}^i \xi^{i'}, \quad \xi^{i'} = \sum_{i''=1}^n \gamma_{i''}^{i'} \xi^{i''}, \quad i, i' = \overline{1, n}. \quad (11.12)$$

Подставив 2-е равенство в первое, придём к выражениям

$$\xi^i = \sum_{i'=1}^n \gamma_{i'}^i \sum_{i''=1}^n \gamma_{i''}^{i'} \xi^{i''} = \sum_{i''=1}^n \left(\sum_{i'=1}^n \gamma_{i'}^i \gamma_{i''}^{i'} \right) \xi^{i''}, \quad i, i' = \overline{1, n}. \quad (11.13)$$

Они могут быть записаны в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix} = (\Gamma_1 \Gamma)^T \begin{pmatrix} \xi^{1''} \\ \dots \\ \xi^{n''} \end{pmatrix} = \Gamma_2^T \begin{pmatrix} \xi^{1''} \\ \dots \\ \xi^{n''} \end{pmatrix}, \quad (11.14)$$

где $\Gamma_1 = (\gamma_{i''}^{i'})$, $\Gamma = (\gamma_{i'}^i)$, $\Gamma_2 = \Gamma_1 \Gamma$.

Если принять во внимание определение матрицы перехода (см. формулы 11.2, 11.3), то придём к выводу, что матрица Γ_2 является матрицей перехода от базиса $e_1, \dots, e_n$ к $e_{1''}, \dots, e_{n''}$. Следовательно, закон преобразования упорядоченного набора чисел $\xi^{1'} \dots \xi^{n'}$ в упорядо-

ченный набор чисел $\xi^1 \dots \xi^n$ имеет *ту же самую форму*, что и закон (11.6). В свою очередь, из (11.14) следует, что упорядоченный набор $\xi^{1'} \dots \xi^{n'}$ связан с набором $\xi^1 \dots \xi^n$ посредством закона преобразования, совпадающего по форме с (11.9). Из этого вытекает, что отношение σ транзитивно.

Надо ещё доказать его симметричность. Итак, пусть набор $\xi^{1'} \dots \xi^{n'}$ связан отношением σ с набором $\xi^1 \dots \xi^n$, т.е. имеют место законы преобразования, идентичные (11.6) и (11.9).

Надо теперь показать, что, наоборот, набор $\xi^1 \dots \xi^n$ связан отношением σ с набором $\xi^{1'} \dots \xi^{n'}$.

Для доказательства воспользуемся первым из соотношений (11.12), определением матрицы перехода Γ (формулы 11.2. и 11.3) и соотношением $(\Gamma^T)^{-1} = (\Gamma^{-1})^T$, справедливость которого следует из опр. обратной матрицы. С учётом этого получим, что для всех $i' = \overline{1, n}$

$$\xi^{i'} = \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}^{i'}_{i'} \xi^i, \text{ где } \tilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma}^{i'}_{i'}) = \Gamma^{-1} - \text{матрица перехода от нового (штрихованного) базиса к}$$

старому базису линейного пространства L_n . При этом нумерация строк идёт с помощью индекса i , а не i' . Следовательно, законы преобразования (11.6) и (11.9) обладают свойством симметрии по отношению к замене штрихованной системы на нештрихованную и наоборот. Симметричность отношения σ доказана.

Итак, мы показали, что отношение σ обладает рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью, т.е. σ - *отношение эквивалентности*. Теорема доказана.

Из теоремы 11.7. следует, что все упорядоченные совокупности контравариантных компонент любого вектора из линейного пространства L_n , а также аналогичные совокупности для любого контравариантного одновалентного тензора над пространством L связаны друг с другом *отношениями эквивалентности*.

В лекции 4 было дано общее определение *инварианта* и показано, что оно тесно связано с *отношением эквивалентности*. В силу этого *классы эквивалентности*, к которым относятся соответствующие упорядоченные совокупности контравариантных компонент (векторов и одновалентных тензоров) определяют фактически некоторые общие инвариантные свойства и объекты, которые не зависят от выбора базиса в линейном пространстве L_n . Подчеркнём, например, что вектор из L_n представляет собой *инвариантный объект*.

Следует отметить, что сказанное о классах эквивалентности, инвариантах и контравариантных векторах справедливо и по отношению к ковариантным векторам.

Замечание 11.9. При решении конкретных задач, встречающихся в математике, механике, физике, и т. д., иногда удобно выбрать такой базис, в котором компоненты тензоров,

векторов принимают простые и удобные для вычислений значения.

11.4. Евклидовы и унитарные пространства

Из курса элементарной математики вы знаете, что в геометрии Эвклида важными понятиями являются понятия расстояния и угла. В рассмотренном выше материале эти понятия не использовались, т.е. фактически нами изучались более общие математические структуры, каковыми являются линейные пространства.

Теперь мы перейдём к определению евклидовых и унитарных пространств, которые являются более богатыми математическими структурами с точки зрения множества их свойств по сравнению с линейными пространствами.

Опр. 11.19. Вещественное линейное пространство L_e называется евклидовым, если любой паре $x, y \in L_e$ поставлено в соответствие вещественное число (x, y) , называемое скалярным произведением, причём выполнены следующие аксиомы:

1. $(x, y) = (y, x)$ для $\forall x, y \in L_e$;
2. $(x + y, z) = (x, z + y, z)$ для $\forall x, y, z \in L_e$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для $\forall x, y \in L_e$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;
4. $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$; $(0, 0) = 0$.

Пример 11.4. Рассмотрим пространство R_n . Это пространство станет евклидовым, если в нём ввести скалярное произведение с помощью формулы

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \text{ где } x = (x_1 \dots x_n) \text{ и } y = (y_1 \dots y_n) - \text{векторы-строки.}$$

Пример 11.5. Возьмём пространство R_n и в нём введём скалярное произведение с помощью формулы $(x, y) = \max_{i=1, n} |x_i - y_i|$, что означает максимальное из значений величин, стоящих под знаком $\max$. Тогда R_n станет евклидовым пространством.

Опр. 11.20. Вектор x евклидова пространства называется нормирован-

ным, если $(x, x)=1$.

Опр. 11.21. Система векторов, принадлежащих евклидову пространству, называется нормированной, если нормированы все её векторы.

Теорема 11.8. (Неравенство Коши-Буняковского).

Для любых двух векторов x, y евклидова пространства справедливо неравенство:

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (11.15)$$

Док-во. Если $y=0$, то неравенство выполняется автоматически. Пусть $y \neq 0$. Рассмотрим вектор $x-\lambda y$, где λ —любое вещественное число. Из определения скалярного произведения следует $(x-\lambda y, x-\lambda y) \geq 0$. Отсюда получим, что $(x, x)-2\lambda(x, y)+\lambda^2(y, y) \geq 0$, причём это неравенство будет справедливым для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Следовательно, дискриминант квадратного трёхчлена относительно λ будет неположительным, т.е. $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$, что и требовалось доказать.

Опр. 11.22. Два вектора x, y евклидова или линейного пространств, называются *коллинеарными*, если либо $x=\lambda y$, либо $y=\mu x$ для некоторых λ и $\mu \in \mathbb{R}$.

Замечание 11.10. Неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы x, y *коллинеарны*.

Пример 11.6. Если в $\mathbb{R}_n$ скалярное произведение введено с помощью формулы $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, то неравенство Коши-Буняковского примет вид:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right). \quad (11.16)$$

Опр. 11.23. Система векторов евклидова пространства называется *ортogonalной*, если либо она состоит из одного вектора, либо её векторы попарно ортогональны.

Опр. 11.24. Нормированная ортогональная система векторов евклидова пространства называется *ортонормированной*.

Замечание 11.11. Ортогональная система векторов является линейно-независимой.

Док-во. Пусть $x_1, \dots, x_n$ - ортогональная система ненулевых векторов. Предположим, что

эта система линейно-зависимая, т.е. $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = 0$, где среди λ_i есть ненулевые числа. Допустим, что $\lambda_m \neq 0$, где $m \in \{1, 2, \dots, k\}$. Покажем, что это предположение неверно. Для этого умножим скалярно выписанное равенство на $\mathbf{x}_m$. Тогда с учётом ортогональности системы векторов, получим равенство $\lambda_m (\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m) = 0$. Т.к. $(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m) \neq 0$, то $\lambda_m = 0$. Т.к. m - любое число из множества $\{1, 2, \dots, k\}$, то приходим к противоречию с исходным предположением. Следовательно, система $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ - линейно-независимая. Утверждение доказано.

Опр. 11.25. Если евклидово пространство является n -мерным, как линейное пространство, то оно называется также n -мерным.

Теорема 11.9. В любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис [14].

Опр. 11.26. Вектор $\mathbf{x}$ евклидова пространства L , называется ортогональным к подпространству $L^\perp$ евклидова пространства (евклидово пространство также является линейным пространством и может содержать подпространства), если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ для $\forall \mathbf{y} \in L^\perp$.

С помощью скалярного произведения в евклидовых пространствах можно ввести понятия длины вектора и угла между векторами.

Опр. 11.27. Длиной вектора $\mathbf{x}$ евклидова пространства будем называть неотрицательную величину $|\mathbf{x}| = +\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Опр. 11.28. Углом $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства будем называть угол, определяемый соотношениями

$$\cos \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) / |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|, \quad 0 \leq \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \leq \pi. \quad (11.17)$$

Если же среди векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ есть хотя бы один нулевой, то угол между такими векторами считается неопределённым.

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $|\cos \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}| \leq 1$.

Теорема 11.10. Для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ евклидова пространства справедливы следующие неравенства [14].

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &\leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|, \\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &\geq ||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}||. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Соотношения (11.18) являются аналогами таких известных геометриче-

ских свойств треугольника: длина стороны треугольника не превосходит суммы длин 2-х других, но не меньше модуля разности их длин.

Обобщением понятия евклидова пространства является понятие унитарного пространства.

Опр. 11.29. Комплексное линейное пространство L называется *унитарным*, если каждой паре векторов $x, y \in L$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y) , называемое скалярным произведением, причём выполняются следующие аксиомы:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для $\forall x, y \in L$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ для $\forall x, y, z \in L$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для $\forall x, y \in L$ и $\lambda \in \mathbb{C}$;
4. $(x, x) \geq 0$ при $x \neq 0$, $(0, 0) = 0$.

При этом под чертой в аксиоме 1 понимается операция комплексного сопряжения.

Замечание 11.12. В унитарном пространстве справедливо равенство $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$.

Опр. 11.30. Длиной вектора в унитарном пространстве называют неотрицательную величину $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Замечание 11.13. В унитарном пространстве справедливо равенство $|\lambda x| = |\lambda| |x|$ для любых $x \in L$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ и имеет место неравенство Коши-Буняковского.

В унитарном пространстве L , как правило, не вводят понятие угла между векторами, но используют понятие ортогональности. Говорят, что два вектора $x, y \in L$ ортогональны, если $(x, y) = 0$.

Пример 11.6. Унитарным пространством будет являться множество всех векторов-строк (векторов-столбцов) с операциями, определёнными таким же образом, как и в R_n , если скалярное произведение ввести с помощью формулы

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i, \text{ где } \mathbf{x} = (x_1 \dots x_n) \text{ и } \mathbf{y} = (y_1 \dots y_n) \text{ (компоненты этих векторов-}$$

строк могут быть комплексными числами).

11.5. Понятие о метрическом пространстве

Кроме рассмотренных нами ранее пространств в математике широко используются и другие пространства, среди которых обратим внимание на *метрическое пространство*. Это пространство наделено рядом общих свойств, присущих «расстоянию» $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ между векторами евклидова пространства L . Из определений длины вектора евклидова пространства и скалярного произведения в нем, а также из соотношений (11.18) следует, что функция $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обладает следующими свойствами:

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \text{ для } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L; \quad (11.19)$$

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0, \text{ если } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{x} = \mathbf{y}; \quad (11.20)$$

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + S(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \text{ для } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L. \quad (11.21)$$

Именно свойства (11.19) – (11.21) кладутся в основу определения метрического пространства.

Опр.11.31. Множество M называется метрическим пространством, если любой паре $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ элементов (точек) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ поставлено в соответствие неотрицательное число $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, называемое *расстоянием* (или метрикой пространства M) между этими элементами и справедливы такие аксиомы:

- а) $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ для $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ (аксиома симметрии);
- в) $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (аксиома тождества);
- с) $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + S(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq S(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ для $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in M$ (аксиома треугольника).

Замечание 11.14. Евклидово пространство L является метрическим пространством с метрикой $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = +\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})}$.

Замечание 11.15. В одном и том же множестве M можно вводить различные метрики, которые должны удовлетворять аксиомам симметрии, тождества, треугольника.

Понятие метрического пространства играет очень важную роль в математике и, в частности, в математическом анализе, основные положения которого также будут рассматриваться в курсе высшей математики.

ЛЕКЦИЯ 12

Содержание лекции: «Билинейные и квадратные формы. Линейные отображения (операторы). Композиция линейных операторов. Связь линейных операторов с двухвалентными смешанными тензорами. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Характеристический многочлен. Инварианты линейного оператора. Понятие об изоморфизме линейных и евклидовых пространств.»

В данной лекции будет введен ещё целый ряд важных понятий линейной алгебры. Кроме этого, в рамках рассмотрения линейных и евклидовых пространств будет кратко разъяснён смысл понятия **изоморфизм**, которое самым непосредственным образом связано с сутью математического подхода к изучению свойств тех или иных множеств объектов, систем, конструкций.

12.1. Билинейные и квадратичные формы

Понятие линейной формы, контравариантных и ковариантных векторов (тензоров) допускает ряд важных обобщений.

Опр. 12.1. Пусть даны два линейных пространства L и $\tilde{L}$. Отображение (правило, закон, функция) $a: L \times \tilde{L} \rightarrow R$ называется билинейным, если оно удовлетворяет следующим условиям: $a(x+y, z) = a(x, z) + a(y, z)$, $a(x, u+z) = a(x, u) + a(x, z)$, $a(\alpha x, z) = \alpha a(x, z)$, $a(x, \alpha z) = \alpha a(x, z)$, для $\forall x, y \in L, \forall u, z \in \tilde{L}, \forall \alpha \in R$.

12.1.1. Пусть теперь $L = \tilde{L}$, $L = L_n$ (n -мерное линейное пространство), а $e_1 \dots e_n$ - некоторый базис пространства L_n . Тогда из определения билинейного отображения следует

$$a(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i y^j, \quad (12.1)$$

где $a_{ij} = (e_i, e_j)$, $x^1, \dots, x^n$ и $y^1, \dots, y^n$ - контравариантные компоненты векторов $x, y \in L_n$ в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Опр. 12.2. Величина a_{ij} называются коэффициентами билинейной формы в базисе $e_1, \dots, e_n$ линейного пространства L_n .

Выпишем теперь закон преобразования коэффициентов билинейной формы при переходе от базиса $e_1, \dots, e_n$ к новому базису $e_{i'}, \dots, e_{n'}$, который связан со старым с помощью формулы (11.2), т.е. $e_{i'} = \sum_{i=1}^n \gamma_{i'}^i e_i$, где $i' = \overline{1, n}$.

Поскольку билинейная форма $a(x, y)$ инвариантна по отношению к выбору базиса, то её коэффициенты в новом базисе должны выражаться таким же образом через его базисные векторы, как это имеет место в старом базисе. Это означает, что $a_{i'j'} = a(e_{i'}, e_{j'})$, для $\forall i', j' = \overline{1, n}$. С учётом этого и связи между векторами нового и старого базисов, получим искомый закон преобразования:

$$\begin{aligned} a_{i'j'} &= a(e_{i'}, e_{j'}) = a\left(\sum_{i=1}^n \gamma_{i'}^i e_i, \sum_{j=1}^n \gamma_{j'}^j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{i'}^i \gamma_{j'}^j a(e_i, e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{i'}^i \gamma_{j'}^j a_{ij}, \quad i', j' = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (12.2)$$

Опр. 12.3. Пусть L_n - n -мерное линейное пространство и каждому его базису $e_1, \dots, e_n$, сопоставлена совокупность чисел ξ_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$. Если при этом совокупности ξ_{ij} и $\xi_{i'j'}$ ($i, j, i', j' = \overline{1, n}$), соответствующие базисам $e_1, \dots, e_n$ и $e_{i'}, \dots, e_{n'}$, связаны друг с другом посредством закона

$$\xi_{i'j'} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{i'}^i \gamma_{j'}^j a_{ij}, \quad i', j' = \overline{1, n} \quad (12.3)$$

аналогичного (12.2), то будем говорить, что задан двухвалентный ковариантный тензор над L . Совокупность чисел ξ_{ij} называют компонентами двухвалентного ковариантного тензора.

Замечание 12.1. Закон преобразования (12.3) компонент двухвалентного ковариантного тензора является обобщением закона преобразования (11.11) компонент одновалентного ковариантного тензора.

12.1.2. Пусть $L = L_n$ n -мерное линейное пространство, а $\tilde{L} = L_n^*$ - сопряжённое L_n линейное пространство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ - некоторый базис пространства L_n , а $e^1, \dots, e^n$ - некоторый базис пространства L_n^* (он является

взаимным по отношению к $e_1, \dots, e_n$). Распишем при данных предположениях билинейную форму $a(x, y)$, где $x \in L_n$, а $y \in L_n^*$. Принимая во внимание опр. 12.1., получим

$$\begin{aligned} a(x, y) &= a\left(\sum_{i=1}^n x^i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a(e^i, e_j) x^i y_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^j x^i y_j \end{aligned} \quad (12.4)$$

где $a_i^j = (e_i, e^j)$, а x^i - контравариантные компоненты вектора $x \in L$, y_j - ковариантные компоненты вектора $y \in L^*$.

Опр. 12.4. Величины a_i^j , $i, j = \overline{1, n}$, называются коэффициентами билинейной формы $a(x, y)$, определённой для $\forall x \in L_n, \forall y \in L_n^*$ (данные коэффициенты связаны биективным образом с базисом $e_1, \dots, e_n$).

Опять принимая во внимание *инвариантность* билинейной формы по отношению к выбору пары базисов, взаимных друг к другу, соответственно в L_n и L_n^* , приходим к выводу, что для новой (штрихованной) пары базисов $e_1', \dots, e_n', e^{1'}, \dots, e^{n'}$ коэффициенты билинейной формы $a(x, y)$ даются формулами $a_i^{j'} = a(e_i, e^{j'})$ для $\forall i', j' = \overline{1, n}$. С учётом этих выражений, соотношений (11.2) и равенств

$$e^{j'} = \sum_{i=1}^n \beta_i^{j'} e^i, \quad j' = \overline{1, n}, \quad (12.5)$$

справедливость которых можно установить с помощью определений матриц $\Gamma = (\gamma_i^{j'})$, $B = (\beta_i^{j'})$ и базисов $e^{1'}, \dots, e^{n'}$ и $e^1, \dots, e^n$, получим, что закон преобразования коэффициентов билинейной формы при переходе от старого базиса $e^1, \dots, e^n$ к новому $e^{1'}, \dots, e^{n'}$ выглядит таким образом:

$$a_i^{j'} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_i^{j'} \gamma_i^j a_i^j, \quad i', j' = \overline{1, n}. \quad (12.6)$$

Опр. 12.5. Пусть в n -мерном линейном пространстве L_n каждому его

базису $e_1, \dots, e_n$ сопоставлена совокупность чисел ξ_i^j , $i, j = \overline{1, n}$. Если при этом совокупности ξ_i^j и $\xi_{i'}^{j'}$ ($i, j, i', j' = \overline{1, n}$), соответствующие базисам $e_1, \dots, e_n$ и $e_1, \dots, e_n$, связаны друг с другом посредством закона

$$\xi_{i'}^{j'} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_j^{j'} \gamma_i^i \xi_i^j, \quad i', j' = \overline{1, n}, \quad (12.7)$$

то будем говорить, что задан двухвалентный смешанный тензор (один раз ковариантный и один раз контравариантный) над L_n . Совокупности чисел ξ_i^j , где $i, j = \overline{1, n}$ называют компонентами этого тензора в базисе $e_1, \dots, e_n$.

12.1.3. Выше мы ввели двухвалентный ковариантный тензор и двухвалентный смешанный тензор. Теперь же введём в рассмотрение двухвалентный контравариантный тензор. Для этого предположим, что задано n -мерное линейное пространство L_n и его сопряжённое пространство L_n^* . Допустим, что билинейная форма $a(x, y)$, представляет собой отображение $a: L_n^* \times L_n^* \rightarrow R$. Это означает, что $a(x, y)$ является вещественной функцией двух векторных аргументов $x, y \in L_n^*$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ - некоторый базис пространства L_n , а $e^1, \dots, e^n$ - взаимный к нему базис сопряженного пространства L_n^* . Разложим векторы $x, y \in L_n^*$ по векторам базиса $e^1, \dots, e^n$, т.е. представим их в виде $x = \sum_{i=1}^n x_i e^i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e^j$, где $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ - ковариантные компоненты векторов $x, y \in L_n^*$. Принимая во внимание сказанное, получим

$$a(x, y) = a\left(\sum_{i=1}^n x_i e^i, \sum_{j=1}^n y_j e^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a(e^i, e^j) x_i y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a^{ij} x_i y_j, \quad (12.8)$$

где $a^{ij} = a(e^i, e^j)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Опр. 12.6. Величины $a^{ij} = a(e^i, e^j)$, где $i, j = \overline{1, n}$, называются коэффициентами билинейной формы $a(x, y)$, заданной на $L_n^* \times L_n^*$ базисе $e_1, \dots, e_n$.

Опр. 12.7. Пусть в n -мерном линейном пространстве L_n каждому его базису $e_1, \dots, e_n$ сопоставлена совокупность чисел ξ^{ij} ($i, j = \overline{1, n}$). Если при этом совокупности ξ^{ij} и $\xi^{i'j'}$ ($i, j, i', j' = \overline{1, n}$), соответствующие базисам $e_1, \dots, e_n$ и $e_1, \dots, e_n$, связаны друг с другом посредством закона

$$\xi^{ij'} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i^{i'} \beta_j^{j'} \xi^{ij}, \quad i', j' = \overline{1, n}, \quad (12.9)$$

то будем говорить, что задан двухвалентный контравариантный тензор над L_n . Совокупности чисел ξ^{ij} называют при этом компонентами этого тензора в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Используя определение коэффициентов α^{ij} несложно доказать, что они в совокупности образуют двухвалентный контравариантный тензор над L_n . Это означает, что при переходе от базиса $e_1, \dots, e_n$ к $e_1', \dots, e_n'$ данная совокупность коэффициентов преобразуется по закону (12.9).

Выше мы рассмотрели одновалентные ковариантный и контравариантный тензоры, двухвалентные смешанный, ковариантный и контравариантный тензоры. В математике и её приложениях, механике, физике и других науках используются всевозможные тензоры и более высоких валентностей. Важно подчеркнуть, что очень многие законы физики имеют вид равенств тензоров одинаковых валентностей. Заметим, что в макроскопической физике только такие соотношения и имеют право на существование, ибо они позволяют исследовать *инвариантные свойства* реальных физических объектов, процессов и явлений, которые не зависят от субъективных факторов (например, выбора систем отсчёта и координат).

12.1.4. С понятием билинейной формы $a(x, y)$ тесно связано понятие квадратичной формы, являющееся одним из основных в линейной алгебре и аналитической геометрии, изучение которой будет начато в следующей лекции.

Опр. 12.8. Пусть L - линейное пространство и задано билинейное отображение $a: L \times L \rightarrow R$, которое является симметричным, т.е. $a(x, y) = a(y, x)$ для $\forall x, y \in L$. Тогда отображение (функция) $a(x, x)$, полученное посредством отождествления аргументов x, y ($x = y$), будем называть *квадратичной формой*, отвечающей данной симметричной форме $a(x, y)$.

Опр. 12.9. Исходная симметричная билинейная форма $a(x, y)$ называется *полярной* для квадратичной формы $a(x, x)$.

Допустим, что $L = L_n$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ - базис n -мерного линейного пространства L_n . Тогда $a(x, x) = a(\sum_{i=1}^n x^i e_i, \sum_{j=1}^n x^j e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a(e_i, e_j) x^i x^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i x^j$. Поскольку $a(e_i, e_j) = a(e_j, e_i)$ для $\forall i, j = \overline{1, n}$, то $a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall i, j = \overline{1, n}$.

Опр. 12.10. Симметричная матрица $A = (a_{ij})$ размерности $n \times n$ называется

для $\forall x, y \in L, \forall \alpha, \beta \in P$. При этом $A(x) = Ax = z \in \tilde{L}$, для $\forall x \in L$.

Нужно отметить, что понятие линейной формы является частным случаем понятия линейного оператора. Линейный оператор становится линейной формой, если $L = R$.

Пример 12.1. Поставим в соответствие любому вектору $x \in L$ нулевой вектор $0 \in \tilde{L}$, т.е. положим $A(x) = Ax = 0$. Этот оператор называется *нулевым оператором* 0 и обладает свойством линейности:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha 0 + \beta 0 = 0 \in \tilde{L},$$

для $\forall x, y \in L, \forall \alpha, \beta \in P$.

Пример 12.2. Поставим в соответствие любому вектору $x \in L$ этот же вектор в L . В итоге мы получаем линейный оператор E , действующий из L в L . Этот оператор называется *тождественным или единичным оператором*.

Пример 12.3. Зафиксируем некоторое число $\alpha \in P$ и каждому вектору $x \in L$ поставим в соответствие вектор $\alpha x \in L$. Данный оператор является линейным. Он называется *скалярным* оператором.

Теорема 12.1. Область значений $T_A \subset \tilde{L}$ линейного оператора A есть подпространство линейного пространства $\tilde{L}$.

Док-во. Пусть $Ax_1 = z_1$ и $Ax_2 = z_2$, где x_1 и x_2 - любые векторы из L . По определению области значений T_A линейного оператора A (оно идентично определению области определения области значений отображения; см. лекцию 4) векторы $z_1, z_2 \in T_A$. Поскольку $\alpha x_1 + \beta x_2 \in L$ (это следует из определения линейного пространства), то $A(\alpha x_1 + \beta x_2) \in T_A$ в силу определения области значений. С другой стороны, $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha z_1 + \beta z_2$, для $\forall \alpha, \beta \in P$. Т.к. множеству T_A принадлежат только те векторы из $\tilde{L}$, которые представимы в виде $z = Ax$, где $x \in L$, то данное свойство указывает на *замкнутость* операций сложения векторов из T_A и умножения их на число. *Замкнутость* означает, что $\alpha z_1 + \beta z_2 \in T_A$, для $\forall z_1, z_2 \in T_A$ и $\forall \alpha, \beta \in P$. Следовательно, T_A -линейное пространство, ибо остальные общие свойства, фигурирующие в определении линейного пространства, выполняются автоматически, т.к. все векторы из T_A принадлежат линейному пространству $\tilde{L}$. Теорема доказана.

Опр. 12.13. Размерность подпространства T_A называется *рангом* g_A оператора A . Наряду с T_A можно рассмотреть ещё множество N_A всех векторов из L , удовлетворяющим

равенству

$$Ax=0 \in \tilde{L}, \text{ где } x \in L. \quad (12.12)$$

Теорема 12.2. Множество N_A есть подпространство линейного пространства L и называется **ядром** линейного оператора A [14].

Опр. 12.14. Размерность $\dim N_A$ ядра называется **дефектом** оператора A .

Замечание 12.2. Пусть линейное пространство L имеет размерность m . Тогда будет справедливо равенство $\dim N_A + \dim R_A = m$ [14].

Рассмотрим два линейных пространства L и $\tilde{L}$ над полем P (вещественных или комплексных чисел) и множество всех линейных операторов, действующих из L в $\tilde{L}$. В этом множестве можно ввести операции сложения операторов и умножения их на числа из P . Это позволяет превратить W в линейное пространство.

Опр. 12.15. Два оператора A и B , действующие из L в $\tilde{L}$ называются равными, если справедливо равенство $Ax=Bx$ для $\forall x \in L$. При этом пишут $A=B$.

Опр. 12.16. Оператор C называется суммой операторов A и B , действующих из L в $\tilde{L}$, если справедливо равенство $Cx=Ax+Bx$ для $\forall x \in L$. При этом пишут $C=A+B$.

Замечание 12.3. Если A и B — линейные операторы, то их сумма $C=A+B$ также будет линейным оператором из W . Операция сложения операторов является ассоциативной и коммутативной бинарной алгебраической операцией.

Теорема 12.3. Множество W с введённой операцией сложения операторов является абелевой (коммутативной) группой.

Справедливость теоремы следует из замечания 12.3. и определения группы. Нулевым элементом в данной группе является нулевой оператор (см. пример 12.1.), а противоположным элементом для $\forall A \in W$ является противоположный оператор B , который определяется равенством $Bx=-Ax$ для $\forall x \in L$.

Опр. 12.17. Оператор C называется **произведением** оператора A , действующего из L в $\tilde{L}$, на число $\lambda \in P$, если выполняется равенство $Cx=\lambda Ax$ для $\forall x \in L$. При этом пишут $C=\lambda A$.

Замечание 12.4. Произведение оператора A , на число $\lambda \in P$ является линейным оператором.

Теорема 12.4. Множество W с введёнными операциями сложения линейных операторов, их умножения на число является линейным пространством.

Верность теоремы следует из теоремы 12.3., определения операции умножения линейных операторов на число и определения линейного пространства.

Опр. 12.18. Если $L = \tilde{L}$, то будем говорить, что линейные операторы действуют из L в L . Их будем называть линейными операторами в L .

Опр. 12.19. Пусть $L, \tilde{L}, \tilde{\tilde{L}}$ — три линейных пространства над полем P . Рассмотрим оператор A , отображающий векторы из L в векторы из $\tilde{L}$ (т.е. действующий из L в $\tilde{L}$), а также введём операторы B и C , действующие соответственно из $\tilde{L}$ в $\tilde{\tilde{L}}$ и из L в $\tilde{\tilde{L}}$. Тогда оператор C называется *произведением (композицией)* оператора B на оператор A , если $Cx = B(Ax)$ для $\forall x \in L$. При этом пишут $C = BA$.

Замечание 12.5. Произведение линейных операторов является линейным оператором.

Справедливость этого утверждения следует из цепочки равенств $C(\alpha x + \beta y) = B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha Ax + \beta Ay) = \alpha B(Ax) + \beta B(Ay) = \alpha Cx + \beta Cy$, для $\forall x, y \in L, \forall \alpha, \beta \in P$.

Замечание 12.6. Композиция операторов не всегда может быть определена и поэтому не является бинарной алгебраической операцией.

12.2.2. До сих пор операторы (в частности линейные) рассматривались без использования понятия базиса. Теперь изложим ряд сведений о линейных операторах, которые полезно описывать с учётом факта существования базисов в линейных пространствах. При этом мы будем вынуждены перейти от прямых абстрактных образцов и понятий к определённым упорядоченным совокупностям, наборам элементов, чисел из поля P . Заметим, что с одной стороны данное обстоятельство позволит проводить конкретные вычисления, и с другой может затушевывать некоторые *инвариантные, цельные свойства* линейных операторов. В силу этого, представляет интерес указать на связь линейных операторов с тензорами, ибо в тензорной алгебре (анализе) разработан целый ряд средств, позволяющих отыскивать искомые инвариантные свойства.

Ограничимся рассмотрением только тех линейных операторов, которые отображают линейное пространство L_n в само же это линейное пространство (т.е. они действуют из L_n в L_n). Итак, допустим, что в L_n задан некоторый базис

$e_1, \dots, e_n$. Тогда любой вектор можно разложить по этому базису. Пусть задан также линейный оператор A , который $\forall x \in L_n$ отображает в некоторый вектор $y \in L_n$, т.е. $y = Ax$. Действие этого линейного оператора можно представить и в более конкретной форме, если нам известно, как он воздействует на каждый вектор базиса $e_1, \dots, e_n$. Фактически, сказанное означает, что должны быть заданы следующие разложения:

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n a'_{ij} e_i, \quad j = \overline{1, n}, \quad (12.13)$$

где a'_{ij} - некоторые известные числа из поля P .

Разложим теперь векторы y и x по указанному базису, т.е. представим их в форме $y = \sum_{i=1}^n y^i e_i$, $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$. С учетом этих разложений и формул (12.13) получим цепочку равенств:

$$y = \sum_{i=1}^n y^i e_i = A \left(\sum_{j=1}^n x^j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x^j Ae_j = \sum_{j=1}^n x^j \sum_{i=1}^n a'_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a'_{ij} x^j \right) e_i. \quad (12.14)$$

Принимая во внимание теорему 11.4 (о единственности совокупности координат вектора в заданном базисе), из (12.14) получим, что

$$y^i = \sum_{j=1}^n a'_{ij} x^j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12.15)$$

Выражения (12.15) можно записать и в матричной форме

$$Y = AX, \quad A = (a'_{ij}), \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad (12.16)$$

где $A = (a'_{ij})$ - **матрица линейного оператора** (для дальнейшего удобно один из индексов записывать внизу, а другой сверху) в базисе $e_1, \dots, e_n$. При этом верхний индекс i нумерует строки этой матрицы, а j - столбцы. Отметим, что здесь символ A используется и для обозначения матрицы.

Из сказанного выше следует, что действие линейного оператора A в линейном пространстве L_n можно описать, задавая матрицу линейного

оператора в выбранном базисе.

Замечание 12.7. Суммам линейных операторов, произведениям линейных операторов на числа и композициям линейных операторов, действующих из L в L , соответствуют матрицы, которые получены посредством сложения их матриц, умножения матриц на числа и произведениям матриц этих операторов.

Ниже установлен **закон преобразования** матрицы линейного оператора при переходе от исходного (нестрихованного) базиса $e_1, \dots, e_n$ к новому стрихованному базису $e_{1'}, \dots, e_{n'}$. Это будет сделано с учётом **независимости (инвариантности)** линейного оператора A по отношению к выбору базиса. Однако это не означает, что его матрица должна быть неизменной при переходе к новому базису.

В новом стрихованном базисе $e_{1'}, \dots, e_{n'}$ соотношение (12.13) формально должно сохранить свою форму.

Поэтому

$$Ae_{j'} = \sum_{i'=1}^n a'_{ij'} e_{i'}, \quad j' = \overline{1, n'}, \quad (12.17)$$

где $A' = (a'_{ij'})$ - матрица линейного оператора A в новом базисе. В нём должны сохранить свой вид и формулы (12.15), (12.16), т.е.

$$y^{i'} = \sum_{j'=1}^n a'_{ij'} x^{j'}, \quad i' = \overline{1, n'}.. \quad (12.18)$$

$$Y' = A'X', \quad A' = (a'_{ij'}), \quad Y' = \begin{pmatrix} y^{1'} \\ \dots \\ y^{n'} \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \dots \\ x^{n'} \end{pmatrix}, \quad (12.19)$$

Для получения искомого закона преобразования матрицы линейного оператора, вспомним формулы (11.9). С их помощью перепишем соотношение (12.19) в виде:

$$BY = A^T B X, \quad \text{где } Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad (12.20)$$

а $B = (\Gamma^T)^{-1} = (\beta_i')$, $\Gamma = (\gamma_i')$ - матрица перехода от старого базиса к новому. В свою очередь, из (12.16) и (12.20) получим:

$$Y = B^{-1}A'BX = AX. \quad (12.21)$$

Поскольку это матричное равенство должно выполняться для любых векторов-столбцов X , то

$$A = B^{-1}A'B, \quad A' = B A B^{-1} = BA\Gamma^T. \quad (12.22)$$

Второе из соотношений в (12.22) и даёт искомый **закон преобразования** матрицы линейного оператора при переходе от исходного (нештрихованного) базиса $e_1, \dots, e_n$ к новому (штрихованному) базису $e'_1, \dots, e'_n$.

Этот закон возможно переписать и в координатной форме. С учётом определений матриц A' , B , B^{-1} , A , Γ^T и правила умножения матриц из (12.22), получим:

$$a'_{j'} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i^{j'} \gamma_j^i a_j^i, \quad i', j' = \overline{1, n}.. \quad (12.23)$$

Сравнивая формулы (12.23) с (12.6), приходим к выводу, что матрица линейного оператора, т.е. упорядоченная совокупность чисел a_j^i , представляет собой двухвалентный смешанный тензор (один раз ковариантный и один раз контравариантный). Итак, матрица линейного оператора при переходе к новому базису преобразуется по тензорному закону преобразования двухвалентного смешанного тензора.

Следует ещё отметить, что в тензорной алгебре и анализе обычно опускаются знаки сумм по индексам, которые встречаются дважды и стоят сверху и снизу компонент тензоров

12.3. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Инварианты линейного оператора

Ниже будут рассматриваться только линейные операторы, действующие из L в L .

Опр. 12.20. Число λ называется собственным значением, а ненулевой вектор x -собственным вектором линейного оператора A , если они связаны между собой соотношением $Ax = \lambda x$.

Замечание 12.8. Если вектор x - собственный вектор линейного оператора A , то любой вектор $y = \alpha x$, где α - ненулевое число из поля P , также будет собственным вектором линейного оператора A .

Теорема 12.5. Система собственных векторов $a_1, \dots, a_m$ линейного оператора A , соответствующих попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, линейно-независима [14].

Замечание 12.9. Если линейный оператор A , действующий из L_n в L_n имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то в базисе, состоящем из собственных векторов этого оператора, его матрица имеет такой вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.24)$$

Пусть линейный оператор A действует в L_n и выбран некоторый базис $e_1, \dots, e_n$ в L_n . Это позволяет разложить вектор x по векторам этого базиса и использовать матрицу данного оператора в данном же базисе. Тогда поиск собственных векторов и собственных значений оператора A сводится фактически к решению матричного уравнения

$$(A - \lambda E)X = 0, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12.25)$$

где E - единичная матрица размерности $n \times n$. Данное матричное уравнение представляет собой такую систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $x^1, \dots, x^n$:

$$\begin{cases} (a_1^1 - \lambda)x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = 0 \\ a_1^2 x^1 + (a_2^2 - \lambda)x^2 + \dots + a_n^2 x^n = 0 \\ \dots \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + (a_n^n - \lambda)x^n = 0. \end{cases} \quad (12.26)$$

Нам уже известно, что эта система будет иметь нетривиальное (т.е. ненулевое решение) тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (12.27)$$

Данное уравнение называется *характеристическим уравнением* линейного

оператора.

Следует отметить, что собственные значения и собственные векторы линейного оператора были определены инвариантным образом, т.е. независимо от выбора базиса. Но уравнение (12.27) и система (12.26) записаны в рамках использования конкретно выбранного базиса $e_1, \dots, e_n$. Поэтому надо убедиться в том, что решение уравнений (12.27) и (12.26) действительно приведёт к результатам, независимым от выбора базиса. Это легко сделать, если учесть закон преобразования матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

Если выбран другой базис $e'_1, \dots, e'_n$ в L_n , то характеристическое уравнение примет вид

$$\det(A' - \lambda E) = 0. \quad (12.28)$$

Докажем, что данное уравнение имеет ту же совокупность решений, что и уравнение (12.27). Для этого подставим в левую часть (12.28) вместо A' матрицу $BA\Gamma^T$, ибо согласно (12.22) $A' = BA\Gamma^T$. В итоге получим $\det(BA\Gamma^T - \lambda E)$. Принимая во внимание соотношение $B = (\Gamma^T)^{-1}$, преобразуем данный определитель к виду $\det(BA\Gamma^T - B(\lambda E)\Gamma^T)$. Очевидно, что данное выражение можно записать и так $\det(B(A - \lambda E)\Gamma^T)$. Используя равенство $\det(CD) = \det C \det D$, получим, что $\det(B(A - \lambda E)\Gamma^T) = \det B \det(A - \lambda E) \det \Gamma^T = \det(A - \lambda E) \det B \det \Gamma^T = \det(A - \lambda E) \det(B\Gamma^T) = \det(A - \lambda E) \det E = \det(A - \lambda E)$. Итак, мы фактически доказали, что для любых λ справедливо равенство

$$\det(A - \lambda E) = \det(A' - \lambda E). \quad (12.29)$$

Замечание 12.10. Характеристическое уравнение для линейного оператора A , действующего из L_n в L_n представляет собой алгебраическое уравнение n -о порядка, т.е.

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0.$$

Теорема 12.16. Все коэффициенты характеристического уравнения являются *инвариантами* по отношению к выбору базиса в L_n .

Справедливость теоремы следует из равенства (12.29) и того, что два полинома равны друг другу тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях λ . Поэтому $b_1 = b'_1, b_2 = b'_2, \dots, b_{n-1} = b'_{n-1}$, где коэффициенты со штрихами являются коэффициентами полинома $\det(A' - \lambda E)$.

Следует отметить, что важными *инвариантами* являются коэффициенты $b_n = (-1)^n \det A$ и $b_{n-1} = -\text{tr } A$, где $\text{tr } A = a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n$ — след матрицы A .

К сказанному следует добавить, что в результате решения характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ и систем (12.26) мы получим полную информацию о собственных значениях и собственных векторах линейного оператора, несмотря на частный выбор базиса

в пространстве L_n .

12.4. Классификация линейных операторов

Рассмотрим n -мерное унитарное пространство W_n и множество Φ линейных операторов, действующих из W_n в W_n .

Опр. 12.21. Линейный оператор $A^* \in \Phi$ называется *сопряженным* по отношению к линейному оператору $A \in \Phi$, если для $\forall x, y \in W_n$ выполняется равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Замечание 12.11. Если (a'_j) -матрица линейного оператора A , то матрица сопряженного к ней оператора $A^* = (b'_j)$ будет удовлетворять соотношениям $(b'_j) = (\overline{a'_i})$ для $\forall i, j = \overline{1, n}$ (черта над a'_i означает операцию комплексного сопряжения).

Замечание 12.12. Операция перехода от линейных операторов к сопряженным операторам удовлетворяет следующим свойствам [14]:

$$\begin{aligned}(A^*)^* &= A, (A+B)^* = A^* + B^*, \\ (\alpha A)^* &= \overline{\alpha} A^*, (AB)^* = B^* A^*, \\ (A^*)^{-1} &= (A^{-1})^*.\end{aligned}\tag{12.30}$$

Опр. 12.22. Линейный оператор $U \in \Phi$ называется *унитарным*, если $U^*U = UU^* = E$, т.е. $U^* = U^{-1}$ -обратный оператор к U , который удовлетворяет условиям $UU^{-1} = U^{-1}U = E$.

Теорема 12.17. Все собственные значения унитарного оператора по модулю равны единице.

Док-во. Пусть λ -собственное значение унитарного оператора U , т.е. $Ux = \lambda x$, где x -собственный вектор. Любой вектор $y = \alpha x$, где $\alpha \neq 0$, тоже является собственным вектором. Положим $\alpha = |x|^{-1}$. Тогда получим, что $|y| = 1$. Рассмотрим теперь цепочку равенств $1 = (y, y) = (y, U^*Uy) = (Uy, Uy) = (U(|x|^{-1}x), U(|x|^{-1}x)) = |x|^{-2}(Ux, Ux) = |x|^{-2}(\lambda x, \lambda x) = |x|^{-2}\lambda \overline{\lambda} (x, x) = \lambda \overline{\lambda} = |\lambda|^2$, которая получена с учетом определения унитарного оператора и определения собственного вектора. Следовательно, $|\lambda|^2 = 1$, что и требовалось доказать.

Опр. 12.23. Линейный оператор $H \in \Phi$ называется *эрмитовым* или

самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным, т.е. $H = H^*$.

Теорема 12.18. Все собственные значения самосопряженного оператора являются вещественными числами.

Док-во. Пусть λ -некоторое собственное значение, а x -соответствующий ему собственный вектор самосопряженного оператора H , т.е. $Hx = \lambda x$. Рассмотрим цепочку равенств $\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Hx, x) = (x, H^*x) = (x, Hx) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$. Поскольку собственный вектор по определению не является нулевым, то из этих равенств следует, что $\lambda = \bar{\lambda}$. Но это и означает, что λ -вещественное число. Теорема доказана.

Замечание 12.13. Если (a'_{ij}) - матрица эрмитового оператора, то она обладает следующими свойствами $a'_{ij} = \overline{a'_{ji}}$ для $\forall i, j = \overline{1, n}$, т.е. является эрмитовой матрицей.

Опр.12.23. Пусть W_n - n -мерное евклидово пространство, а B - линейный оператор, действующий из W_n в W_n . Данный оператор будем называть ортогональным, если он обладает свойством $(Bx, Bx) = (x, x)$ для $\forall x \in W_n$.

Опр.12.24. Квадратная матрица $U = (U^i_j)$ называется **унитарной**, если $U^* = U^{-1}$. При этом системы векторов-строк и векторов-столбцов этой матрицы являются ортонормированными, т.е. справедливы равенства

$$U^i_1 \overline{U^j_1} + \dots + U^i_n \overline{U^j_n} = \delta^{ij},$$

$$U^1_i \overline{U^1_j} + \dots + U^n_i \overline{U^n_j} = \delta_{ij},$$

для $\forall i, j = \overline{1, n}$, где $\delta^{ii} = \delta_{ii} = 1$ при $i = j$ и $\delta^{ij} = \delta_{ij} = 0$, когда $i \neq j$.

Опр.12.25. Вещественная квадратная матрица S размерности $n \times n$ называется ортогональной, если $S^T = S^{-1}$. При этом имеют место соотношения (12.31), в которых U^k_m надо заменить на S^k_m и убрать знак (черту) комплексного сопряжения.

Рассмотрим теперь n -мерное евклидово пространство и любые два ортонормированных базиса $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ в нем. Тогда матрица перехода $\Gamma = (\gamma'_{ij})$ от старого базиса к новому будет ортогональной [14,15], т.е. $\Gamma^{-1} = \Gamma^T$.

Следовательно, из-за того, что $B = (\Gamma^T)^{-1}$, получим равенство $B = \Gamma$. По этой причине законы преобразования ковариантных и контравариантных тензоров при рассмотрении только класса ортонормированных базисов в евклидовом пространстве совпадают. Вследствие этого изучение свойств тензоров в таких пространствах является существенно более простой задачей.

12.5. Понятие об изоморфизме линейных и евклидовых пространств

Понятие изоморфизма является одним из фундаментальных математических понятий, которое сформировалось в XIX-XX вв. Разъясним его смысл на примерах рассмотрения множеств линейных и евклидовых пространств.

Пусть M -множество всех линейных пространств над одним и тем же числовым полем P . Для понимания сути математического подхода весьма важно понять, чем отличается и в каком отношении схожи эти линейные пространства. Любое из линейных пространств из M может быть охарактеризовано конкретными свойствами своих элементов (объектов, векторов) и свойствами операций над этими конкретными элементами. В связи со сказанным можно интересоваться либо конкретной природой векторов и их свойствами, либо свойствами указанных операций *независимо* от конкретного смысла, который придается элементам линейных пространств. Если сделать акцент на изучение свойств операций, то некоторые из линейных пространств будут с математической точки зрения идентичными (изоморфными).

Опр.12.26. Пусть L и $\tilde{L}$ -линейные пространства над одним и тем же полем P (вещественных или комплексных чисел). Данные пространства будем называть *изоморфными*, если существует биективное отображение $f: L \rightarrow \tilde{L}$, которое обладает следующими свойствами: для $\forall x, y \in L$ и $\forall \alpha \in P$ справедливы равенства $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Изоморфные линейные пространства обладают многими общими свойствами. Перечислим некоторые из них. Во-первых, нулевому вектору линейного пространства L соответствует нулевой вектор пространства $\tilde{L}$ (т.е. отображение f переводит нулевой вектор из L в нулевой же вектор из $\tilde{L}$). Во-вторых, линейно независимой системе векторов из L соответствует линейно независимая система векторов из $\tilde{L}$ [14]. Это свойство указывает на то, что два изоморфных линейных пространства имеют *одинаковую* размерность. Верно и обратное утверждение. Справедлива:

Теорема 12.9. Любые два конечномерные линейные пространства, имеющие *одинаковую* размерность n и заданные над одним и тем же полем P изоморфны.

Док-во. Пусть L_n и $\tilde{L}_n$ - два линейных пространства, имеющие размерность n . Возьмём какой-то базис $e_1, \dots, e_n$ в L_n и базиса $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ в $\tilde{L}_n$. Изоморфизм f пространств L_n и $\tilde{L}_n$ построим таким образом. Любому вектору $x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n \in L_n$ поставим в соответствие вектор $f(x) = x^1 \tilde{e}_1 + \dots + x^n \tilde{e}_n \in \tilde{L}_n$. Это отображение биективно, т.к. разложение по базисам единственно. Пусть теперь $x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$ и $y = y^1 e_1 + \dots + y^n e_n$ - два вектора из L_n , а α - любое число из P . Тогда получим $f(x + y) = f((x^1 + y^1)e_1 + \dots + (x^n + y^n)e_n) = (x^1 + y^1)\tilde{e}_1 + \dots + (x^n + y^n)\tilde{e}_n = (x^1\tilde{e}_1 + \dots + x^n\tilde{e}_n) + (y^1\tilde{e}_1 + \dots + y^n\tilde{e}_n) = f(x) + (y)$, $f(\alpha x) = f(\alpha x^1 e_1 + \dots + \alpha x^n e_n) = \alpha x^1 \tilde{e}_1 + \dots + \alpha x^n \tilde{e}_n = \alpha(x^1 \tilde{e}_1 + \dots + x^n \tilde{e}_n) = \alpha f(x)$. Данные равенства и доказывают, что f -изоморфизм пространств L_n и $\tilde{L}_n$.

Согласно этой теореме, два линейных пространства одинаковой размерности и заданные над одним и тем же полем P *неразличимы* с точки зрения всех следствий и аксиом линейного пространства. Это позволяет изучать свойства n -мерных линейных пространств на основе рассмотрения пространства R_n .

Опр. 12.27. Пусть L_e и $\tilde{L}_e$ -евклидовы пространства, которые изоморфны, как линейные. Если биективное отображение $f: L_e \rightarrow \tilde{L}_e$, осуществляющее этот изоморфизм, удовлетворяет условию $(x, y) = (f(x), f(y))$ для $\forall x, y \in L_e$, то будем говорить, что пространства L_e и $\tilde{L}_e$ -евклидово изоморфны.

Теорема 12.10. Для того, чтобы два евклидовых пространства были евклидово изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы были равны их размерности [14].

Если интересоваться лишь теми свойствами евклидовых пространств, которые являются следствиями основных операций, действующих в них, то евклидовы изоморфные пространства будут иметь одинаковые свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Столл Р.Р. Множества, логика, аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968. 230 с.
2. Гонин Е.Г. Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз РСФСР, 1959. 232 с.
3. Кутасов А.Д. Элементы математической логики. Пособие для учащихся 9-10 классов. – М.: Просвещение, 1977. 64 с.
4. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. – М.: Изд-во Московского университета, 1982, 120 с.
5. Фрейденталь Х. Язык логики. – М.: Физматгиз, 1969. 134 с.
6. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика. – М.: Мир, 1962. 272 с.
7. Роговцов Н.Н. Свойства и принципы инвариантности. Приложение к решению задач математической физики. Ч. 1. – Мн.: БГПА, 1999. 384 с.
8. Соминский И.С. Метод математической индукции. – М.: Физматгиз, 1975. 56 с.
9. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Физматгиз, 1975. 362 с.
10. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973.
11. Проскуряков И.В. Числа и многочлены. – М.: Просвещение, 1965. 284 с.
12. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. – М.: Наука, 1979. 720 с.
13. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. 432 с.
14. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1980. 400 с.
15. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1970. 528 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
РАЗДЕЛ I. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, ЛОГИКИ И ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ. ПОНЯТИЕ О МАТЕМАТИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ И МОДЕЛЯХ.....	4
Лекция 1.....	4
1.1. Некоторые исторические сведения	4
1.2. Элементарные понятия интуитивной ("наивной") теории множеств. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера- Венна. Примеры множеств и доказательств тождеств теории множеств.....	6
Лекция 2.....	12
2.1. Декартовы произведения; отношения, их классификация, примеры отношений; применения отношения эквивалентности	12
2.2 Исходные понятия исчисления высказываний	16
Лекция 3.....	21
3.1. Элементы исчисления предикатов	22
3.2. Элементы теории вывода.....	25
3.3. Основные понятия аксиоматического подхода	28
3.4. Метод математической индукции	30
Лекция 4.....	32
4.1. Функциональные отношения, функции одного аргумента и их классификация. Обращение и композиция функций	32
4.2. Последовательности, семейства, функции многих переменных	35
4.3. Алгебраические операции, их классификация	36
4.4. Математические структуры (модели). Инварианты.....	39
Лекция 5.....	42
5.1. Отношение частичной упорядоченности, частично упорядоченные и упорядоченные множества	42

5.2. Множества натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел.....	44
5.3. Понятия группы и симметрии	46
5.4. Алгебра Буля	48
5.5. Приближенные числа. Основные положения интервальной арифметики.....	49
Лекция 6.....	54
6.1. Некоторые общие сведения о решениях алгебраических уравнений.....	54
6.2. Поле комплексных чисел.....	56
6.3. Геометрическая интерпретация множества комплексных чисел. Различные представления этих чисел	58
Лекция 7.....	64
7.1. Степенные функции. Формулы Муавра и Эйлера. Извлечение корней n -й степени из комплексных чисел.....	64
7.2. Полиномы и рациональные функции. Алгебраические уравнения....	68
РАЗДЕЛ II. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.....	77
Лекция 8.....	77
8.1. Классификация, свойства матриц и алгебраических операций над ними	77
8.2. Определители, их простейшие свойства и методы вычисления. Трактовка определителя как функции $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ переменных	84
8.3. Обратная матрица. Теорема существования и единственности	92
Лекция 9.....	95
9.1. Линейно-координатное пространство R_n . Линейно зависимые и независимые системы векторов в R_n	95
9.2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Элементарные преобразования матриц.....	98
9.3. Матричный метод решения систем n линейных алгебраических	

уравнений с n неизвестными. Формулы Крамера	104
Лекция 10	106
10.1. Общие свойства произвольных систем линейных алгебраических уравнений.....	106
10.2. Метод Гаусса (метод исключения неизвестных) и его некоторые применения	112
10.3. Понятие о методе прогонки	124
Лекция 11	127
11.1. Линейные пространства, подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Базис линейного пространства, координаты вектора.....	127
11.2. Трансформационные свойства компонент векторов линейных пространств и их интерпретация.....	131
11.3. Связь между понятиями отношения эквивалентности, инварианта, вектора линейного пространства и одновалентного тензора.....	136
11.4. Евклидовы и унитарные пространства	139
11.5. Понятие о метрическом пространстве	143
Лекция 12	144
12.1. Билинейные и квадратичные формы	144
12.2. Линейные отображения (операторы). Композиция линейных операторов. Связь линейных операторов с двухвалентными смешанными тензорами	149
12.3. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Инварианты линейного оператора	155
12.4. Классификация линейных операторов.....	157
12.5. Понятие об изоморфизме линейных и евклидовых пространств	160
ЛИТЕРАТУРА	162

Учебное издание

Роговцев Н. Н.

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
Для студентов специальностей Т.06.01, Т. 06.02, Т. 23.03, ...

Подписано в печать 25.04.00. Формат 60х84/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 9,63. Тираж 200. Заказ 183.

Издано на предприятии «Технопринт»
Лицензия ЛВ № 380

Отпечатано на предприятии «Технопринт»
Лицензия ЛП № 203
г. Минск., пр. Ф. Скорины, 65 корп. 14, оф. 209