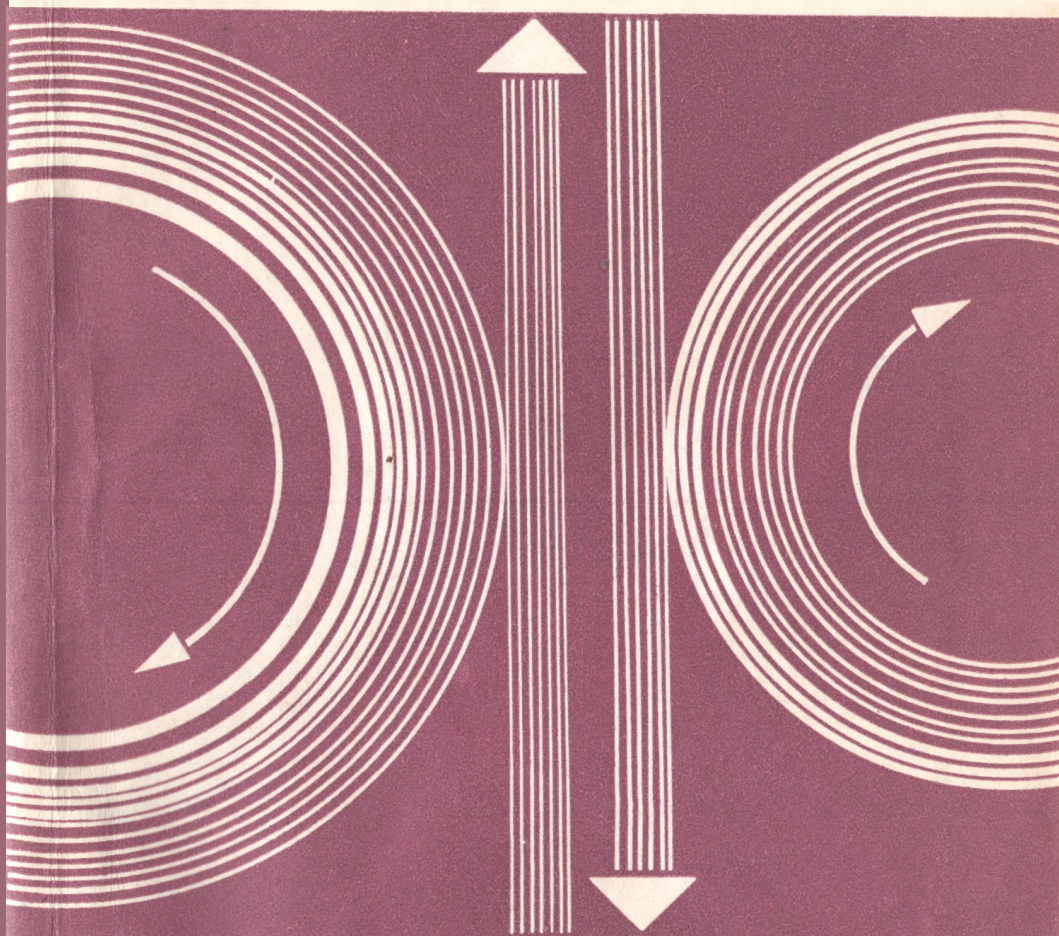


531
Т33

ISSN 0134—9635

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА



Издательство «Вышэйшая школа»

Министерство высшего и среднего специального образования БССР

Белорусский ордена Трудового Красного Знамени
политехнический институт

РЕСПУБЛИКАНСКИЕ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЕ СБОРНИКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ВЫПУСК 7

Минск „Вышэйшая школа”, 1980

5.0.

531
733

Главный редактор
А.Х. Ким, доктор технических наук

Редакционный совет:

А.Е. Крушевский, Е.Н. Ламбина, М.А. Левин, С.А. Пахуто, И.А. Прусов,
Л.А. Ротт, Г.К. Татур

Т 20302 - 096 28-80
М304 (05) - 80

170310000

© Издательство "Высшая школа", 1980.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГАШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ АМОРТИЗАЦИИ ПРИБОРОВ

Упругое сопротивление нелинейного осциллятора аппроксимируется линейно-квадратичной зависимостью от его смещения и квадратичной от его скорости. Для оценки полученных теоретических результатов производились испытания амортизаторов на специально изготовленном стенде [1]. Был установлен маятниковый копер, дающий возможность производить удар с начальными скоростями в пределах от 3,06 м/с до 6,50 м/с. Амортизаторы находились на приспособлениях, обеспечивающих жесткость их установки и позволяющих производить удар в трех направлениях. Каждый из испытуемых амортизаторов подвергался трехкратному удару с различными начальными скоростями, процесс хода амортизатора снимался на киноплентку. Для обеспечения наиболее оптимального режима съемки при ударах с различной начальной скоростью применялось реле времени. Ход амортизатора определялся по смещению полированного шарика, вмонтированного в головку болта, точечное изображение которого четко фиксировалось на киноплентке. Масштаб изображения определялся по размерам масштабного элемента. Испытаниям подвергались амортизаторы типов АКСС-40, АКСС-15, АКСС-60, АКСС-25. Материалы каждого эксперимента оформлялись в виде протокола и приложений к нему, содержащих результаты расшифровки киноплентки. Расшифровка киноплентки производилась при помощи микроскопа, измеряющего видимые смещения точечного изображения шарика на киноплентке с точностью до 0,1 мм. Для того чтобы определить промежуток времени между соседними кадрами, следует разделить интервал, образованный временными отметками через каждые 0,1 с, на число кадров. По этим данным построены кривые хода амортизаторов. Кривые хода амортизатора АКСС-15 приведены на рис. 1.

Если предположить, что амортизация является линейной, то по экспериментально полученному ходу амортизатора и начальной скорости удара можно получить линеаризованную ударную жесткость амортизатора в зависимости от начальной скорости удара [2]. Уравнение, описывающее движение маятника, в этом случае будет

$$\ddot{\xi} + \frac{c R^2}{I} \xi = 0 ,$$

где ξ — ход амортизатора; c — его ударная жесткость; I — момент инерции маятника копра; R — радиус удара.

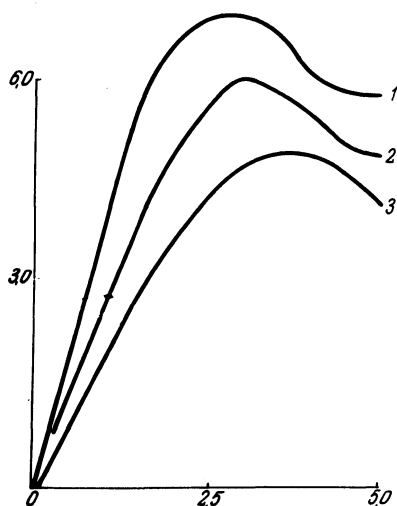


Рис. 1. Экспериментальные кривые хода амортизатора АКСС-15М 2180290РТИ:

1 - $\Delta_3^Z = 6,96$; $\tau = 2,55 \cdot 10^{-3}$; 2 - $\Delta_2^Z = 6,0$; $\tau_2 = 3 \cdot 10^{-3}$; 3 - $\Delta_1^Z = 5,05$; $\tau_1 = 3,66 \cdot 10^{-3}$.

Т а б л и ц а 1. Зависимости коэффициентов ударной жесткости от начальной скорости удара (10^3 Н/м)

Тип амортизатора	Начальная скорость						
	3,06	3,90	4,55	5,20	5,60	6,05	6,35
АКСС-60		1730			2250		2660
АКСС-40		2200		3000			2900
АКСС-25	3230		5840			8630	
АКСС-15	3480		5460			7150	

Т а б л и ц а 2. Экспериментальные значения параметра динамической нелинейности (10^7 Н·с/м³)

Тип амортизатора	АКСС-60	АКСС-40	АКСС-25	АКСС-15
Параметр динамической нелинейности	0,017	0,024	0,102	0,106

При начальных условиях

$$t = 0; \quad \xi_0 = 0; \quad \dot{\xi}_0 = V_0,$$

где V_0 — начальная скорость удара.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = -\frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{I}{c}} \sin R \sqrt{\frac{c}{I}} t.$$

По экспериментально замеренному максимальному ходу получаем значение, соответствующее ударной жесткости

$$c = \frac{I V_0^2}{R^2 \Delta^2}; \quad \Delta = \frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{I}{c}}.$$

Результаты полученных значений ударной жесткости амортизаторов приведены в табл. 1.

Статические испытания резиново-металлических амортизаторов на разрывной машине показали, что статическая нелинейность практически отсутствует, поэтому при вычислении коэффициентов динамической нелинейности c_2 можно положить $c_1 = 0$ или $k_1 = 0$.

Для определения k_2 по экспериментальным данным V_0 и $\xi_{\max}$ решаем уравнение

$$k_1^2 - k_0^2 k_2^2 - k_1^2 k_2^2 \xi_{\max}^2 + (V_0^2 k_2^4 - k_1^2 + k_0^2 k_2^2 + k_1^2 k_2^2 \xi_0^2) \times \\ \times \exp(-k_2^2 [\xi_{\max}^2 - \xi_0^2]) = 0.$$

При $\xi_0 = 0$ и $k_1 = 0$ это уравнение принимает вид

$$-k_0^2 k_2^2 + (V_0^2 k_2^4 + k_0^2 k_2^2) \exp(-k_2^2 \xi_{\max}^2) = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) представим так:

$$\exp(k_2^2 \xi_{\max}^2) = \frac{V_0^2}{k_0^2 \xi_{\max}^2} \cdot \varphi + 1. \quad (2)$$

Решение (2) в координатах $\varphi = k_2^2 \xi^2$ получаем пересечением кривых

$$y_1 = \exp \varphi; \quad y_2 = -\frac{V_0^2}{k_0^2 \xi_{\max}^2} \cdot \varphi + 1.$$

Т а б л и ц а 3. Сравнение максимальных ускорений (м/с^2), полученных обработкой экспериментальных данных по линейной и нелинейной теориям при различных начальных скоростях удара (м/с)

АКСС-60	Начальная скорость удара	3,90	5,60	6,35
Максимальное ускорение	Линейная теория	940	1460	1920
	Нелинейная теория	530	670	700
АКСС-40	Начальная скорость удара	3,90	5,20	6,35
Максимальное ускорение	Линейная теория	1060	1630	2000
	Нелинейная теория	600	680	850
АКСС-25	Начальная скорость удара	3,06	4,55	6,05
Максимальное ускорение	Линейная теория	1010	2000	3000
	Нелинейная теория	300	340	370
АКСС-15	Начальная скорость удара	3,06	4,55	6,05
Максимальное ускорение	Линейная теория	1050	1950	2960
	Нелинейная теория	220	260	300

Отбрасывая нулевой корень, получим

$$k_2^2 = \frac{\varphi}{\xi_{\max}^2}.$$

Параметр динамической нелинейности амортизатора равен

$$c_2 = -\frac{I}{R^2} k_2^2.$$

Полученные значения сведены в табл. 2.

Для оценки этих результатов целесообразно сравнить эффективность амортизации, вычисленной по линейной и нелинейной теориям. При этом максимум ускорения по формулам линейной теории будет определять соотношение

$$\ddot{\xi}_{\max}^* = \frac{V_0^2}{\xi_{\max}}.$$

Нелинейная теория дает формулу максимального ускорения

$$\ddot{\xi}_{\max}^{**} = k_0^2 \xi_{\max},$$

где $\xi_{\max}^*$, $\xi_{\max}^{**}$ — максимум ускорений, полученных по линейной и нелинейной теориям.

Результаты расчета для сравнения максимальных ускорений, полученных обработкой экспериментальных данных, приведены в табл. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Залесов В.Н., Шультман В.Х., Филиппова Н.Н. К оценке влияния нелинейности антиударной амортизации на ее эффективность и энергоемкость. — Изв. АН БССР. Сер. физико-энергетических наук, 1973, № 3. 2. Найденко С.К., Петров П.П. Амортизация судовых двигателей. — Л., 1962.

УДК 531.3

Л.А.БОРИСЕНКО, А.А.ЮРЕВИЧ

ДИНАМИКА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассмотрим систему, включающую электродвигатель, маховик и рабочую машину, установленные соосно и кинематически связанные дифференциальным механизмом (рис. 1).

Введем обобщенные координаты θ и ξ . Координата η задается уравнением

$$\eta = (\xi + \theta (u - 1))u^{-1},$$

где u — передаточное отношение обращенного механизма.

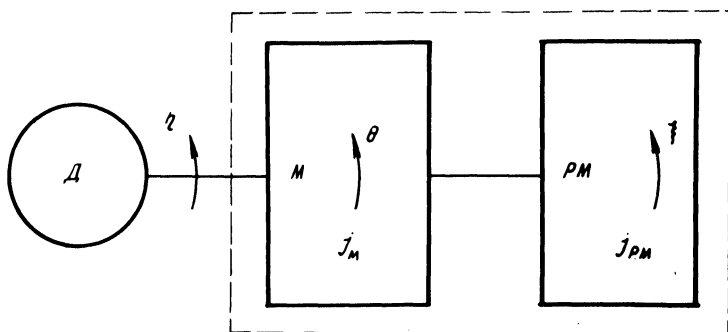


Рис. 1. Динамическая система.

Допустим, что момент инерции двигателя I_D мал по сравнению с моментом инерции маховика I_M и моментом инерции $I_{р.м}$ рабочей машины, приведенным к координате ξ .

Кинетическая энергия такой системы

$$T = 0,5 I_M \dot{\theta}^2 + 0,5 I_{p.m} \dot{\xi}^2,$$

а уравнения Лагранжа второго рода имеют простой вид

$$\left. \begin{aligned} I_M \ddot{\theta} &= Q_\theta; \\ I_{p.m} \ddot{\xi} &= Q_\xi. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Определим обобщенные силы Q_θ и Q_ξ , предполагая, что пуск осуществляется без рабочей нагрузки $M_c = 0$, а характеристика электродвигателя представлена линейной зависимостью

$$M_d = M_0 - f_{\dot{\eta}} = M_0 - f(\dot{\xi} + \dot{\theta}(u-1))u^{-1}.$$

Тогда получим

$$Q_\xi = M_0 u^{-1} - f \xi u^{-2} - f \dot{\theta} (u-1) u^{-2};$$

$$Q_\theta = M_0 (u-1) u^{-1} - f \xi (u-1) u^{-2} - f \dot{\theta} (u-1)^2 u^{-2}.$$

Движение системы описывается неоднородными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Перепишем систему (1) в виде системы первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + b_1 y + d_1; \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 x + b_2 y + d_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь обозначено

$$\frac{dx}{dt} = \ddot{\theta}, \quad x = \theta, \quad \frac{dy}{dt} = \ddot{\xi}, \quad y = \xi;$$

$$a_1 = -f(u-1)^2 u^{-2} I_M^{-1};$$

$$b_1 = -f(u-1) u^{-2} I_M^{-1};$$

$$d_1 = M_0 (u-1) u^{-1} I_M^{-1};$$

$$a_2 = -f(u-1) u^{-2} I_{p.m}^{-1};$$

$$b_2 = -f u^{-2} I_{p.m}^{-1};$$

$$d_2 = M_0 u^{-1} I_{p.m}^{-1}.$$

Рассмотрим соответствующую однородную систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + b_1 y ; \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 x + b_2 y . \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Определитель системы $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. В таком случае систему (3) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + b_1 y ; \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda (a_1 x + b_1 y) . \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Общее решение такой системы, как известно, дается уравнениями

$$\begin{aligned} x' &= b_1 C_1 + C_2 e^{rt} ; \\ y' &= -a_1 C_1 + \lambda C_2 e^{rt} , \end{aligned} \quad (5)$$

где C_1, C_2 — неизвестные постоянные; $r = a_1 + \lambda b_1$; $\lambda = a_2/a_1$.

Общее решение исходной неоднородной системы (2) представляется суммой найденного общего решения однородной системы и частного решения неоднородной, которое, как известно, представляется в данном случае уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{X}} &= b_1 r^{-1} (d_1 \lambda - d_2) t - r^{-2} (a_1 d_1 + b_1 d_2) ; \\ \bar{y} &= \lambda \bar{x} + (d_2 - \lambda d_1) t . \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Таким образом, общее решение системы (2) имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= b_1 C_1 + C_2 e^{rt} + b_1 r^{-1} (d_1 \lambda - d_2) t - r^{-2} (a_1 d_1 + b_1 d_2) ; \\ y &= -a_1 C_1 + \lambda C_2 e^{rt} + \lambda b_1 r^{-1} (d_1 \lambda - d_2) t - \\ &\quad - \lambda r^{-2} (a_1 d_1 + b_1 d_2) + (d_2 - \lambda d_1) t . \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из начальных условий $t = 0, x = 0, y = 0$ отыщем C_1 и C_2

$$\begin{aligned} b_1 C_1 + C_2 &= r^{-2} (a_1 d_1 + b_1 d_2) ; \\ -a_1 C_1 + \lambda C_2 &= \lambda r^{-2} (a_1 d_1 + b_1 d_2) ; \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{\lambda r^{-2}(a_1 d_1 + b_1 d_2) - \lambda r^{-2}(a_1 d_1 + b_1 d_2)}{b_1 \lambda + a_1} = 0;$$

$$C_2 = \frac{b_1 \lambda r^{-2}(a_1 d_1 + b_1 d_2) + a_1 r^{-2}(a_1 d_1 + b_1 d_2)}{b_1 \lambda + a_1} =$$

$$= (a_1 d_1 + b_1 d_2) r^{-2}.$$

Подставим найденные значения C_1 и C_2 в систему (7)

$$x = r^{-2}(a_1 d_1 + b_1 d_2) e^{rt} + b_1 r^{-1}(d_1 \lambda - d_2) t -$$

$$- r^{-2}(a_1 d_1 + b_1 d_2);$$

$$y = \lambda r^{-2}(a_1 d_1 + b_1 d_2) e^{rt} + \lambda b_1 r^{-1}(d_1 \lambda - d_2) t -$$

$$- \lambda r^{-2}(a_1 d_1 + b_1 d_2) + (d_2 - \lambda d_1).$$
(8)

Вычислим постоянные коэффициенты в уравнениях (8):

$$\lambda = a_2 \quad a_1 = I_M (u - 1)^{-1} I_{p.M}^{-1};$$

$$d_2 - \lambda d_1 = 0;$$

$$r = a_1 + \lambda b_1 = -f u^{-2} ((u - 1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1});$$

$$a_1 d_1 + b_1 d_2 = -f (u - 1) M_0 u^{-3} I_M^{-1} ((u - 1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1});$$

$$r^{-2}(a_1 d_1 + b_1 d_2) = -f^{-1} (u - 1) u M_0 I_M^{-1} ((u - 1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1})^{-1};$$

$$\lambda r^{-2}(a_1 d_1 + b_1 d_2) = -u M_0 f^{-1} I_{p.M}^{-1} ((u - 1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1})^{-1}.$$

Произведя подстановку и преобразовав уравнения (8), получим решение в окончательном виде

$$\theta = \frac{(u-1) u M_0}{f I_M ((u-1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1})} (1 - e^{-f u^{-2} ((u-1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1}) t})$$

$$\xi = \frac{u M_0}{f I_{p.M} ((u-1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1})} (1 - e^{-f u^{-2} ((u-1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1}) t})$$
(9)

Из анализа уравнений (9) следует, что после переходного периода по координатам θ и ξ устанавливается движение с параметрами

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{u(u-1)M_0}{fI_M((u-1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1})}; \\ \dot{\xi} &= \frac{uM_0}{fI_{p.M}((u-1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1})}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В течение всего переходного периода соотношение скоростей $\dot{\theta}$ и $\dot{\xi}$ сохраняется постоянным

$$\dot{\theta} / \dot{\xi} = (u-1)I_{p.M}I_M^{-1} = \text{const.}$$

Движение по координате η происходит в соответствии с уравнением

$$\dot{\eta} = M_0 f^{-1} (1 - e^{-fu^{-2}((u-1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1})t}). \quad (11)$$

Здесь выражение $I_{\text{пр}} = -fu^{-2}((u-1)^2 I_M^{-1} + I_{p.M}^{-1})$ является моментом инерции системы, приведенным к координате η , причем $I_{\text{пр}} = \text{const.}$

Таким образом, в переходный период рассматриваемая система эквивалентна системе с одной степенью свободы.

УДК 629.78

В.Е. МАРКОВ

ПАРАМЕТРЫ РАЗГОНА ГРАВИЛЕТА ПРИ РАДИАЛЬНОМ И КАСАТЕЛЬНОМ УСКОРЕНИИ

В работах [1...4], рассматривающих задачу разгона космического аппарата /КА/ по гравилетному принципу, управление геометрией масс КА осуществляется таким образом, что гравилетное ускорение является радиальным. В этом случае в процессе разгона КА перицентрическое расстояние непрерывно уменьшается. Это накладывает ограничения на параметры исходной орбиты. Представляет интерес рассмотреть такое управление, при котором не происходит уменьшение высоты перицентра. Одним из таких управлений является разгон КА при касательном гравилетном ускорении.

В дальнейшем использованы следующие обозначения: M, A, B, C — масса и главные центральные моменты инерции КА; ψ — угол, определяющий поло-

жение КА в плоскости орбиты относительно радиус-вектора $\vec{r}$ его центра масс; ν — истинная аномалия; ω — аргумент перицентра; φ — полярный угол; e — эксцентриситет орбиты центра масс КА; ρ — безразмерное расстояние центра масс КА до притягивающего центра; p, V, h — безразмерные параметр орбиты, скорость и механическая энергия центра масс; τ — безразмерное

время, определяемое по формуле $\tau = \left(\frac{\mu}{3r_0}\right)^{1/2} t$, в которой μ — гравитацион-

ный параметр. Безразмерная величина определяется как отношение размерной величины к ее начальному значению. Схема КА принята плоской ($B = A + C = I$). Оси с моментами инерции A и C лежат в плоскости орбиты КА. Угол ψ отсчитывается против часовой стрелки от радиус-вектора r до оси с моментом инерции C .

Рассмотренные в [1...4] программы изменения моментов инерции и углового положения КА близки по интенсивности разгона. Параметры раскручивающейся спирали достаточно точно определяются по формулам

$$\rho = \frac{1}{1 + e \cos(\varphi - \omega)}; \quad e = -\frac{\varepsilon_0}{2} \sqrt{1 + \varphi^2}; \quad \operatorname{tg} \omega = -\frac{1}{\varphi}; \quad \varepsilon_0 = \frac{3I_0}{2Mr_0^2}.$$

Если спираль разгона заменить соответствующими эллипсами с постоянным эксцентриситетом, то время прохождения n витков может быть определено по следующей асимптотической формуле ($e_0 \approx 0$):

$$\tau_n = -\frac{2\pi n}{\sqrt{1 - (\pi \varepsilon_0 n)^2}}, \quad n = \frac{e}{\pi \varepsilon_0}. \quad (1)$$

В табл. 1 представлены численные результаты по формулам (1) для степени удаления апоцентра $\rho = 1,5$ при движении КА вокруг Земли и Луны. Протяженность КА характеризуется полудлиной l . Учтено, что в процессе разгона аппарат должен находиться вне пределов практически учитываемой атмосферы. Для Земли $H_{\text{атм}} \approx 200$ км, для Луны $H_{\text{атм}} = 0$.

Рассмотрим случай, когда гравилетное ускорение является касательным к орбите КА. Величина безразмерного ускорения f и программа изменения угла ψ могут быть определены следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{3}{2\rho^4} \frac{A-C}{Mr_0^2} \frac{(1+2e\cos\nu + e^2)^{1/2}}{1+e\cos\nu} \sin^2 \psi; \\ \psi = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1}{2-\beta} \left[\sqrt{(1+\beta)(2-\beta) + \left(\frac{e\sin\nu}{1+e\cos\nu}\right)^2} + \frac{e\sin\nu}{1+e\cos\nu} \right] \right\}; \\ \beta = \frac{A}{A-C}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Т а б л и ц а 1.

	Земля			Луна		
l, км	600	300	10	600	300	10
r ₀ , км	9,70·10 ³	9,30·10 ³	8,91·10 ³	3,25·10 ³	2,85·10 ³	2,46·10 ³
ε ₀	5,74·10 ⁻³	1,56·10 ⁻³	1,89·10 ⁻⁶	5,11·10 ⁻²	1,66·10 ⁻²	2,47·10 ⁻⁵
n	18,5	67,9	5,61·10 ⁴	2,08	6,39	4,29·10 ³
t, сутки	2,16	7,44	5,77·10 ³	0,425	1,07	5,80·10 ²

Т а б л и ц а 2.

	Земля			Луна		
l, км	600	300	10	600	300	10
n	9,18	33,8	2,79·10 ⁴	1,03	3,17	2,14·10 ³
t, сутки	1,45	5,00	3,88·10 ³	0,286	0,721	3,91·10 ²

Формула (2) получена в [5] для предельного случая $C=0$, $A=Ml^2$. Имея в виду этот случай, (2) перепишем в виде

$$f = \frac{\varepsilon}{\rho^4} \Phi(e, \nu); \quad \varepsilon = \frac{3}{2} \frac{l_0^2}{r_0^2}; \quad \Phi(e, \nu) = \frac{(1+2e \cos \nu + e^2)^{1/2}}{1+e \cos \nu} \sin 2\nu. \quad (3)$$

При $e \leq 1$, $0,89 < \Phi(e, \nu) \leq 2$. Учитывая, что нижняя граница для $\Phi(e, \nu)$ близка к единице, примем следующую программу для l :

$$l^2 = \frac{l_0^2}{\Phi(e, \nu)}.$$

Тогда из (3) следует, что

$$f = \frac{\varepsilon_0}{\rho^4}; \quad \varepsilon_0 = \frac{3}{2} \frac{l_0^2}{r_0^2}. \quad (4)$$

Для определения параметров разгона воспользуемся известными результатами для постоянного касательного ускорения [4]. Запишем уравнение движения центра масс КА в проекции на касательную

$$\frac{dV}{d\tau} = f - \frac{\cos \alpha}{\rho^2}, \quad (5)$$

в котором α — угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и скоростью движения центра масс КА. Запишем также уравнения для оскулирующих безразмерных переменных h и p :

$$\frac{dh}{d\tau} = fV; \quad \frac{dp}{d\tau} = \frac{2fp}{V}; \quad h = \frac{V^2}{2} - \frac{1}{\rho}. \quad (6)$$

Как следует из указанных результатов, при достижении параболической скорости $(\frac{dV}{d\tau})_* = 0$. Тогда из (5) с учетом (4) получаем, что в конце разгона $\cos \alpha_* = \frac{\epsilon_0}{2\rho_*}$, т.е. при начальной орбите, близкой к круговой, разгон КА происходит практически по раскручивающейся круговой спирали. В этом случае можно принять $\rho \approx \rho_*$; $V^2 \approx \frac{1}{\rho}$. Тогда из (6) можно получить формулы для τ_n и n в зависимости от ρ :

$$\tau_n = \frac{\rho^{7/2} - 1}{7\epsilon_0}; \quad n = \frac{\rho^2 - 1}{8\pi\epsilon_0}. \quad (7)$$

В табл. 2 приводятся результаты расчета по формулам (7) для $\rho = 1,5$ и при тех же исходных данных, что и в табл. 1.

Из сравнения табл. 1 и 2 видно, что разгон КА для одного и того же ϵ_0 при касательном способе происходит интенсивнее, чем при радиальном примерно в 1,5 раза. Отметим, что полученные численные результаты соответствуют случаю, когда вся масса КА используется для создания гравилетного ускорения. В реальном случае необходимо учитывать поправочный коэффициент. Например, в [2] этот коэффициент равен 0,45. Можно показать, что при $\epsilon_0 \neq 0$ при касательном способе эксцентриситет монотонно увеличивается, т.е. возможно достижение параболической скорости. Однако соответствующее время разгона, так же как и для радиального случая, очень велико. По-видимому, гравилетный способ будет использоваться для относительно небольших радиальных перемещений крупногабаритных КА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В.В., Гиверц М.Е. О движении пульсирующей системы в гравитационном поле. — Космические исследования, 1967, № 6, т. 5. 2. Донов А.Е. Теория полета гравитолета. — Космические исследования, 1971, № 3, т. 9. 3. Марков В.Е. О выборе программы изменения геометрии масс гравитолета. — В сб.: Проблемы механики управляемого движения. Пермь, 1974, вып. 6. 4. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. Изд. 2-е. — М., 1977. 5. Холшевников К.В., Марков В.Е. О стабилизации высоты перицентра. — Космические исследования, 1975, № 2, т. 13.

К ВОПРОСУ САМОУСТАНОВЛИВАЕМОСТИ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОМ КУЛИСНО-ТАНГЕНСНОМ МЕХАНИЗМЕ

Кулисно-тангенсный механизм получил широкое распространение в устройствах, где необходимо получить максимальный момент на кулисе в крайних положениях при постоянном усилии на ползуне. Механизм, выполненный по плоской схеме, состоит из четырех звеньев, соединенных между собой двумя вращательными и двумя поступательными кинематическими парами. Такая схема обладает тремя избыточными связями ($q = 3$). Для устранения их применяют схему с одной вращательной и тремя цилиндрическими парами [1].

На рис. 1 представлена схема статически определенного механизма, в которой за счет дополнительных подвижностей цилиндрических пар избыточные связи равны 0.

В плоском варианте механизма дополнительные подвижности цилиндрических пар являются как бы резервными на случай неточности изготовления звеньев и погрешностей, появляющихся при эксплуатации механизма.

Погрешности относительного расположения кинематических пар превращают механизм в пространственный, в результате чего в направлении устраненных избыточных связей появятся дополнительные движения, которые называются движениями самоустанавливаемости, а весь механизм будет называться квазиплоским [2].

Рассмотрим влияние погрешности относительного расположения осей вращательной А и цилиндрической D пар на движения самоустанавливаемости.

Из рис. 1 следует, что неизвестными кинематическими параметрами являются: линейные — l_{AB}, l_{BC}, l_{CD} ; угловые — $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{34}$. Параметры $l_{BC}, \varphi_{12}, \varphi_{34}$ характеризуют движения самоустанавливаемости звеньев в цилиндрических парах В, С, D.

Для определения как основных, так и дополнительных кинематических параметров механизма воспользуемся матричным методом [3]. Представим механизм в виде замкнутого пространственного контура OABCO. Положение произвольной точки М в системе координат $X x_1 y_1 z_1$, связанной со стойкой, определяется матричным уравнением вида

$$\begin{aligned} r_{m8} A_{87} A_{65} A_{43} A_{21} + \{ (r_{76} A_{65} + r_{54}) A_{43} + r_{32} \} A_{21} = \\ = r_{m3'} A_{3'2'} + r_{2'1'} + r_{1'1}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $r_{m8}, r_{m3'}$ — матрицы радиус-вектора точки М в системе координат $C x_8 y_8 z_8$ и $C x_{3'} y_{3'} z_{3'}$;

$r_{76} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ – матрица радиус-вектора точки С в системе В $x_6 y_6 z_6$;
 $r_{54} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ – матрица радиус-вектора точки В в системе А $x_4 y_4 z_4$;
 $r_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ – матрица радиус-вектора точка А в системе О $x_2 y_2 z_2$;
 $r_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ – матрица радиус-вектора точки С в системе D $x_1 y_1 z_1$;

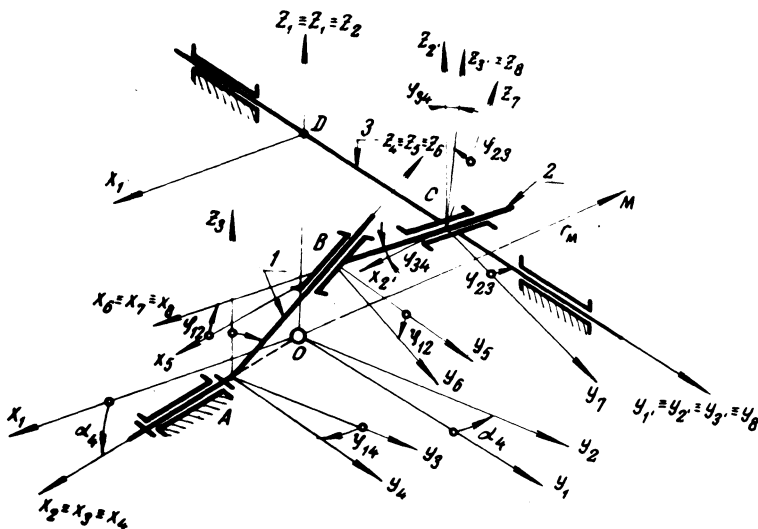


Рис. 1. Расчетная схема квазиплоского кулисно-тангенсного механизма.

$$A_{21} = \begin{vmatrix} \cos \alpha_4 & \sin \alpha_4 & 0 \\ -\sin \alpha_4 & \cos \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ – матрица перехода от системы О } x_1 y_1 z_1 \text{ к системе А } x_2 y_2 z_2;$$

$$A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{14} & -\sin \varphi_{14} \\ 0 & \sin \varphi_{14} & \cos \varphi_{14} \end{vmatrix} \text{ – матрица перехода от системы А } x_3 y_3 z_3 \text{ к системе А } x_4 y_4 z_4;$$

$$A_{65} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{12} & -\sin \varphi_{12} & 0 \\ \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ – матрица перехода от системы В } x_5 y_5 z_5 \text{ к системе В } x_6 y_6 z_6;$$

$$A_{87} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{23} & \sin\varphi_{23} \\ 0 & -\sin\varphi_{23} & \cos\varphi_{23} \end{vmatrix} - \text{матрица перехода от системы } C_{x_7y_7z_7} \text{ к системе } C_{x_8y_8z_8};$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{34} & 0 & \sin\varphi_{34} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_{34} & 0 & \cos\varphi_{34} \end{vmatrix} - \text{матрица перехода от системы } C_{x_2'y_2'z_2'} \text{ к системе } C_{x_3y_3z_3}.$$

Воспользуемся теоремой о матричном тождестве [3], тогда уравнение (1) при $r_{m8} = r_{m3'}$ распадается на два:

$$\begin{cases} A_{87}A_{65}A_{43}A_{21} = A_{3'2'}; \\ \left\{ (r_{76}A_{65} + r_{54})A_{43} + r_{32} \right\} A_{21} = r_{2'1} + r_{1'1}. \end{cases} \quad (2)$$

Подставив в уравнение системы (2) значения соответствующих матриц, получим 12 скалярных уравнений, из которых 6 независимы. Из этих 6 уравнений определяем:

углы относительного поворота и линейные перемещения звеньев в цилиндрических парах B, C, D:

$$\varphi_{12} = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_4}{\cos \varphi_{14}} \right); \quad (3)$$

$$l_{AB} = (l_{OA} - l_{OD} \operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \varphi_{14}) \sin^2 \varphi_{12} \operatorname{tg} \varphi_{14} + \frac{l_{OD}}{\cos \varphi_{14}} \quad (4)$$

и линейное перемещение звеньев в цилиндрической паре C и D

$$\varphi_{23} = \arctg \left(\frac{\sin \varphi_{12} \sin \varphi_{14}}{\operatorname{tg} \alpha_4} \right); \quad (5)$$

$$l_{BC} = (l_{OA} - l_{OD} \operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \varphi_{14}) \cos \varphi_{12}; \quad (6)$$

$$\varphi_{34} = \arctg (\sin \alpha_4 \operatorname{tg} \varphi_{14}); \quad (7)$$

$$l_{DC} = (l_{OA} - l_{OD} \operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \varphi_{14}) \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_{12}}{2 \cos \varphi_{14}} - \operatorname{tg} \alpha_4 \right) \cos \alpha_4 \cos^2 \varphi_{12} + l_{OA} \sin \alpha_4 + l_{OD} \cos \alpha_4 \operatorname{tg} \varphi_{14}. \quad (8)$$

Скорости и ускорения в направлении движений самоустанавливаемости определяем двукратным дифференцированием уравнений (3), (6) и (7):

$$\omega_{12} = \omega_{14} \frac{\operatorname{tg} \alpha_4 \sin \varphi_{14}}{\cos^2 \varphi_{14} + \operatorname{tg}^2 \alpha_4}; \quad (9)$$

$$v_{BC} = \omega_{14} \cos \varphi_{12} \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \varphi_{14}}{\cos^2 \varphi_{14} + \operatorname{tg}^2 \alpha_4} (l_{OD} \operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \varphi_{14} - l_{OA}) - l_{OD} \frac{\operatorname{tg} \alpha_4}{\cos^2 \varphi_{14}} \right]; \quad (10)$$

$$\omega_{34} = \frac{\omega_{14} \sin \alpha_4}{\sin^2 \alpha_4 + \cos^2 \alpha_4 \cos^2 \varphi_{14}}; \quad (11)$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{14} \frac{\operatorname{tg} \alpha_4 \sin \varphi_{14}}{\cos^2 \varphi_{14} + \operatorname{tg}^2 \alpha_4} + \omega_{14}^2 \operatorname{tg} \alpha_4 \cos \varphi_{14} \frac{1 + \sin^2 \varphi_{14} \operatorname{tg}^2 \alpha_4}{(\cos^2 \varphi_{14} + \operatorname{tg}^2 \alpha_4)^2}; \quad (12)$$

$$a_{BC} = \omega_{12}^2 \cos \varphi_{12} (l_{OD} \operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \varphi_{14} - l_{OA}) + \epsilon_{12} \sin \varphi_{12} (l_{OD} \operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \varphi_{14} - l_{OA}) + 2\omega_{14} \omega_{12} l_{OD} \frac{\sin \varphi_{12} \operatorname{tg} \alpha_4}{\cos^2 \varphi_{14}} - \epsilon_{14} \frac{\cos \varphi_{12}}{\cos^2 \varphi_{14}} l_{OD} \operatorname{tg} \alpha_4 - l_{OD} \operatorname{tg} \alpha_4 \omega_{14} \frac{\cos \varphi_{12} \sin^2 \varphi_{14}}{\cos^2 \varphi_{14}}; \quad (13)$$

$$\epsilon_{34} = \epsilon_{14} \frac{\sin \alpha_4}{\cos^2 \varphi_{14} \cos^2 \alpha_4 + \sin^2 \alpha_4} + \omega_{14}^2 \frac{\sin^2 \varphi_{14} \sin \alpha_4 \cos^2 \alpha_4}{(\cos^2 \varphi_{14} \cos^2 \alpha_4 + \sin^2 \alpha_4)^2}. \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда угол $\alpha_4 = 0$; $\varphi_{12} = 0$; $\varphi_{23} = \varphi_{14}$; $\varphi_{34} = 0$; $l_{BC} = l_{OA}$:

$$l_{AB} = l_{OD} / \cos \varphi_{14}; \quad (15)$$

$$l_{DC} = l_{OD} \operatorname{tg} \varphi_{14}. \quad (16)$$

Этот случай характерен для плоской схемы кулисно-тангенсного механизма, для которого движения самоустанавливаемости (φ_{12} , φ_{34} и l_{BC}) отсутствуют.

В квазиплоской схеме кулисно-синусного механизма, для которой погрешности относительного расположения осей не выходят за пределы полей допусков, можно принять $\operatorname{tg} \alpha_4 \approx \sin \alpha_4 \approx \alpha_4$; $\cos \alpha_4 \approx 1,0$. Тогда уравнения (3), (4), ..., (8) по определению кинематических параметров квазиплоского механизма перепишем в виде:

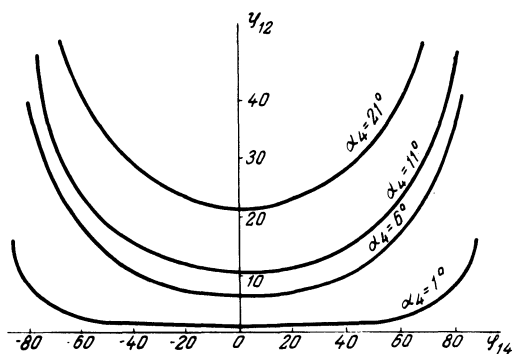


Рис. 2. График зависимости φ_{12} от φ_{14} в цилиндрической паре В.

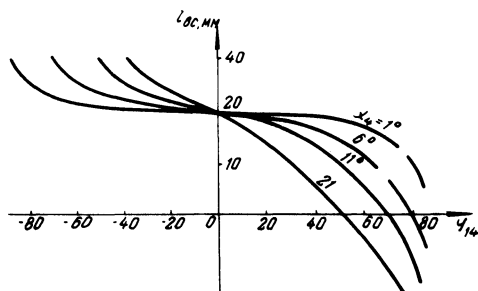


Рис. 3. График зависимости l_{BC} от φ_{14} в цилиндрической паре В.

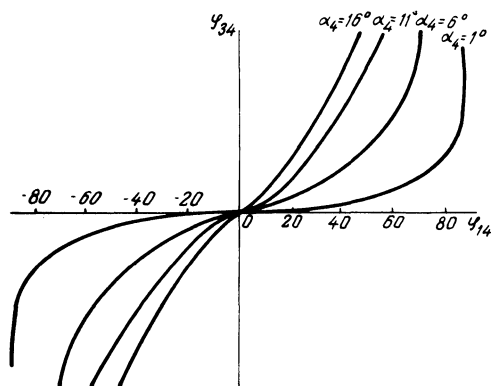


Рис. 4. График зависимости φ_{34} от φ_{14} в цилиндрической паре D.

$$\varphi_{12} = \arctg \left(\frac{\alpha_4}{\cos \varphi_{14}} \right); \quad (17)$$

$$l_{AB} = l_{BC} \sin \varphi_{12} \operatorname{tg} \varphi_{14} + \frac{l_{OD}}{\cos \varphi_{14}}; \quad (18)$$

$$\varphi_{23} = \varphi_{14};$$

$$l_{BC} = l_{OA} - l_{OD} \alpha_4 \operatorname{tg} \varphi_{14}; \quad (19)$$

$$\varphi_{34} = \arctg (\alpha_4 \operatorname{tg} \varphi_{14}); \quad (20)$$

$$l_{DC} = l_{AB} \sin \varphi_{14} - l_{BC} (\alpha_4 \cos \varphi_{14} - \sin \varphi_{12} \cos \varphi_{14}) + \alpha_4 l_{OA}. \quad (21)$$

Выведенные аналитически зависимости использованы при исследовании влияния конструктивных параметров на функцию положения ведомого звена и движения самоустанавливаемости в цилиндрических парах.

Задача решена с применением ЭЦВМ "Наири".

При составлении автокодовой программы предусмотрено варьирование постоянными параметрами, как, например, α_4 , l_{OD} и l_{OA} . Угол φ_{14} вращения кулисы изменялся с интервалом 10° в пределах $\pm 80^\circ$.

Некоторые результаты расчетов на ЭЦВМ представлены в виде графиков на рис. 2, 3, 4, на которых изображены зависимости движений самоустанавливаемости от угла поворота кулисы при различных значениях угла α_4 .

Анализ проведенных исследований показал, что значительное увеличение угла α_4 ведет к резкому возрастанию движений самоустанавливаемости φ_{12} , l_{BC} , φ_{34} и вероятной потере статической определимости механизма за счет заклинивания в направлении самоустанавливаемости.

Изменение угла α_4 в пределах $\pm (2^\circ \dots 4^\circ)$ практически не влияет на основные параметры механизма (l_{AB} , l_{DC}). Поэтому рекомендуется эти параметры определять по плоской схеме механизма, так как погрешность расчетов не превышает допустимых значений, а параметры движений самоустанавливаемости — из квазиплоской схемы механизма. Из условий самоустанавливаемости звеньев угол поворота кулисы рекомендуется выбирать в пределах $\pm 60^\circ$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Решетов Л.Н. Конструирование рациональных механизмов. Издание второе. — М., 1972.
2. Кудин В.В. Некоторые особенности решения задачи по нахождению функций положения звеньев статически определимых механизмов. — Изв. вузов. Машиностроение, 1972, № 3.
3. Брат В. Матричный метод исследования точности пространственных механизмов с низшими кинематическими параметрами. — В сб.: Анализ и синтез механизмов. М., 1969.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ КАТЯЩЕГОСЯ САМОУСТАНАВЛИВАЮЩЕГОСЯ КОЛЕСА

В работе рассматривается вопрос о затухании колебаний или аperiodического движения самоустанавливающегося колеса в зависимости от коэффициента увода по стабилизирующему моменту, ширины области контакта и других параметров деформируемой периферии колеса, а также скорости поступательного движения и параметров установки колеса. В отличие от известных работ и работы [1] ниже учитывается ширина области контакта. При этом задача заключается не в нахождении границ областей устойчивости в пространстве параметров, а в определении быстроты затухания динамического процесса в функции конкретных заданных значений параметров системы.

Воспользуемся известной схемой системы самоустанавливающегося колеса, приведенной, например, в [1]. Обозначим θ — угол поворота колеса; e — вынос колеса назад; I — момент инерции системы с колесом относительно оси вращения, совпадающей с вертикальной осью шарнира; k — параметр демпфирования; P_2 и M_3 — соответственно боковая составляющая и момент реакции связи; $2b$ — приведенная ширина области контакта; v — скорость поступательного движения системы с колесом.

Как известно, в таком случае уравнение динамики системы принимает вид

$$I\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + P_2e - M_3 = 0. \quad (1)$$

В данном случае с использованием работы [2] и принятых в ней обозначений по второму варианту имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= -f_2 \varphi_2; \\ M_3 &= -f_{10} \varphi_0 + f_{11} \vartheta_2; \\ \frac{d}{rd\varphi} (u_2 - \varphi_2) &= \vartheta_2 + \theta; \\ \frac{d}{rd\varphi} (\vartheta_2 + \theta) &= s_4 \varphi_2 - s_5 \vartheta_2; \\ \frac{d}{rd\varphi} (b\theta - \varphi_0) &= \vartheta_0; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{rd\varphi} \vartheta_0 = s_1 \overline{\sigma}_0 - s_2 \vartheta_0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При этом

$$\frac{d}{dt} = \frac{v}{r} \frac{d}{d\varphi}; \quad u_2 = -\theta e.$$

После перехода к изображениям по Лапласу с учетом нулевых начальных условий система уравнений (1) – (2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} I p^2 \overline{\theta} + k p \overline{\theta} - f_{11} \overline{\vartheta}_2 - f_2 e \overline{\sigma}_2 + f_{10} \overline{\sigma}_0 &= 0; \\ -p(e \overline{\theta} + \overline{\sigma}_2) &= v(\overline{\vartheta}_2 + \overline{\theta}); \\ p(\overline{\vartheta}_2 + \overline{\theta}) &= v(s_4 \overline{\sigma}_2 - s_5 \overline{\vartheta}_2); \\ p(b \overline{\theta} - \overline{\sigma}_0) &= v \overline{\vartheta}_0; \\ p \overline{\vartheta}_0 &= v(s_1 \overline{\sigma}_0 - s_2 \overline{\vartheta}_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Характеристическое уравнение системы (3) может быть легко найдено и преобразовано к виду

$$PL_1 \cdot PL_2 \cdot PL_5 + PL_2 \cdot PL_3 + PL_4 \cdot PL_1 = 0, \quad (4)$$

где полиномы $PL_1, \dots, PL_5$ определяются по выражениям

$$\begin{aligned} PL_1 &= p^2 + p v s_5 + v^2 s_4; \\ PL_2 &= p^2 + p v s_2 + v^2 s_1; \\ PL_3 &= p^2 (f_{11} + f_2 e^2)/I + p e v (f_{11} s_4 + f_2 e s_5)/I + v^2 (f_{11} s_4 + f_2 e s_5)/I; \\ PL_4 &= p^2 f_{10} b/I + p f_{10} b s_2 v/I; \\ PL_5 &= p^2 + p k/I. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет шестую степень.

Алгоритм решения поставленной задачи строился из следующих соображений. Определение затухания приводит к необходимости нахождения конкретных значений действительных частей всех корней характеристического уравнения шестой степени в функции от конкретных значений параметров системы, например, f_{11} , b , f_1 , ... и т.д. Таким образом, решение этой задачи возможно лишь с помощью вычислительной машины. Алгоритм счета был реализован в виде программы на "ФОРТРАНе" для ЭВМ Минск-32.

После ввода данных с помощью специально организованных подпрограмм умножения и сложения полиномов производится формирование массива коэффициентов характеристического полинома (4). После этого производится обращение к стандартной подпрограмме SPBHN нахождения всех корней полинома по методу Берстоу—Хичкока. Далее из всех найденных корней выбирается один корень или пара комплексных корней с наибольшей действительной частью h , которой соответствует наиболее слабое затухание. Затем на печать выводятся параметры системы и соответствующее значение h вместе с мнимой частью корня, если таковая имеется.

Так как в уравнение движения входит слагаемое с множителем e^{ht} , то очевидно, что затухание имеет место, если $h < 0$. Если $h > 0$, то происходит экспоненциальное нарастание угла поворота, что свидетельствует о неустойчивости состояния $\theta = 0$.

Конкретные расчеты динамики системы самоустанавливающегося колеса были проведены на ЭВМ "Минск-32" при следующих данных в системе МКГСС: $f_1 = 48000$; $f_2 = 40000$; $f_{11} = 100 \dots 1000$; $b = 0 \dots 0,1$; $s_1 = 20,5$; $s_2 = 9,44$; $s_4 = 30,1$; $s_5 = 10,6$; $I = 2,137$; $k = 0 \dots 13,9$; e ; $0 \dots 0,1$; $v = 0 \dots 20$.

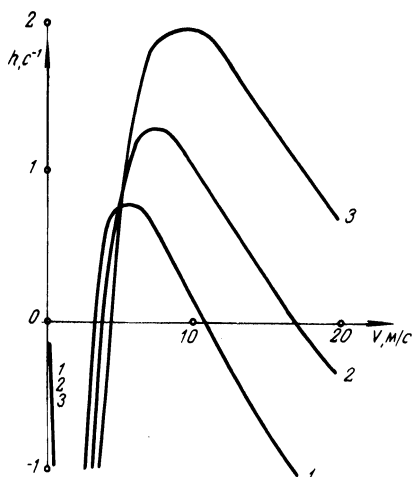


Рис. 1. Зависимость $h(f_{11}, v)$: $e = 0,1$; $b = 0,1$; 1-при $f_{11} = 100$; 2 — 500; 3 — 1000 кгм; остальные параметры системы указаны в тексте.

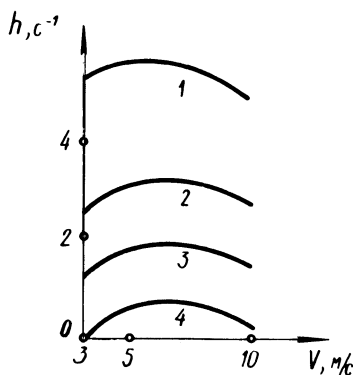


Рис. 2. Зависимость $h(b, k, v)$: $e = 0,1$ 1-при $b = 0$; $k = 0$; 2 — $b = 0,1$; $k = 0$; 3 — $b = 0,1$; $k = 6,95$; 4 — $b = 0,1$; $k = 13,9$; остальные параметры указаны в тексте.

На рис. 1 представлены значения h в функции f_{11} и v . При этом видно, что с возрастанием коэффициента увода по стабилизирующему моменту f_{11} при сохранении остальных параметров неизменными условия работы само-

устанавливающегося колеса ухудшаются и, следовательно, необходим более мощный демпфер.

На рис. 2 представлены значения h в функции b , k и v . Графики на этом рисунке показывают, что увеличение ширины области контакта дает возможность снизить дополнительное потребное демпфирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М.А. Примеры определения условий самовозбуждения автоколебаний в системах с деформируемым колесом. — В сб.: Мат-лы секции теоретической и прикладной механики. 26 научн.-техн. конф. Мн., 1970. 2. Левин М.А. Понижение порядка зависимостей для реакций связей катящегося деформируемого колеса. — ДАН БССР, 1974, № 6.

УДК 539.3

А.Е. КРУШЕВСКИЙ, О.Н. СКЛЯР

СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

В статье [1] рассмотрен изгиб консоли в форме параллелепипеда. Идея метода, изложенного в статье, заключается в приведении решения задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В предлагаемой статье, задача изгиба упругого параллелепипеда решается при условии точного выполнения отсутствия нагрузки на четырех боковых гранях.

Ряды аппроксимирующих функций

$$U = \sum_{m=n=0}^{m+n \leq 4} x^{2m} y^{2n} U_{2m, 2n}(z);$$

$$V = \sum_{m=n=0}^{m+n \leq 4} x^{2m+1} y^{2n+1} V_{2m+1, 2n+1}(z);$$

$$W = \sum_{m=n=0}^{m+n \leq 4} x^{2m+1} y^{2n} W_{2m+1, 2n}(z).$$

Исходя из условия отсутствия нагрузки на боковой поверхности ($\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ при $x = \pm \frac{a}{2}$, $\tau_{yx} = \sigma_y = \tau_{yz} = 0$ при $y = \pm \frac{b}{2}$) составляем уравнения связей. Далее исключаем из уравнений связей следующие обобщенные перемещения: $U_{02}, U_{22}, U_{08}, V_{11}, V_{13}, V_{15}, V_{17}, V_{19}, V_{35}, V_{37}, V_{51}, V_{71}, V_{73}, V_{91}, W_{12}, W_{30}, W_{14}, W_{16}, W_{52}, W_{18}, W_{17}, W_{90}$. Тогда вместо двадцати восьми уравнений связей получим лишь шесть уравнений неинтегрируемых связей:

$$\begin{aligned}
& -\frac{3b^6}{4a^2}(C_1z - C_3) - 12\gamma_2U_{04} - \frac{60a^4\gamma_2^2 + 3b^4\gamma^2 + 20a^2b^2\gamma_2}{20a^2\gamma_2}U_{24} + \\
& + a^2\gamma U_{42} + \frac{9b^4}{4a^2}U_{06} - \frac{3(10a^4\gamma_2^2 + b^4\gamma^2)}{40\gamma_2}U_{44} + \frac{3b^4\gamma(7a^2\gamma_2 - b^2\gamma)}{1670^2\gamma_2}U_{26} - \\
& - \frac{3a^4(3a^2\gamma_2 - 7b^2\gamma)}{56b^2}U_{62} + \frac{9a^6\gamma_2^2}{2b^2\gamma}U_{80} - 3\gamma V_{31} - \frac{3}{4}(2a^2\gamma_2 + b^2\gamma)V_{33} - \\
& - \frac{3a^4\gamma_2}{4}V_{53} + \frac{3a^2b^4\gamma}{32}V_{55} - \frac{a^2\gamma_2}{2}W'_{32} + \frac{3b^4\gamma}{80}W'_{34} + \frac{9a^6\gamma_2^2}{16b^2\gamma}W'_{70} + \\
& + \frac{3b^6\gamma}{64\cdot 7}W'_{36} + \frac{a^2b^2(20a^2\gamma_2 + 3b^2\gamma)}{160}W'_{54} - \gamma U''_{20} - \frac{a^2\gamma}{2}U''_{40} + \\
& + \frac{3b^4\gamma}{40a^2}U''_{04} + \frac{3b^4\gamma}{160}U''_{24} - \frac{a^4\gamma_2}{10}U''_{42} + \frac{3b^6\gamma}{327a^2}U''_{06} - \frac{3a^4\gamma}{16}U''_{60} + \\
& + \frac{3b^6\gamma}{128\cdot 7}U''_{26} - \frac{3a^6\gamma_2(\gamma+3)}{16\cdot 14\gamma}U''_{62} - \frac{a^2b^2(32a^2\gamma_2 - 3b^2\gamma)}{640}U''_{44} + \\
& + \frac{a^6(\gamma^2 - 6\gamma + 6)}{8\gamma}U''_{80} + \frac{a^2\gamma_2}{4}V_{31} - \frac{a^4b^2\gamma_2}{32}V''_{53} - \frac{a^4b^2\gamma_2}{128}V''_{55} - \\
& - \frac{\gamma_2}{3}W'''_{10} + \frac{a^4\gamma_2}{48}W'''_{50} + \frac{a^6\gamma_2(5\gamma+6)}{2563\gamma}W'''_{70} + \frac{\gamma_2}{6}U^{IV}_{00} + \frac{a^2\gamma_2}{24}U^{IV}_{20} + \\
& + \frac{a^4\gamma_2}{96}U^{IV}_{40} + \frac{a^6\gamma_2}{192\cdot 2}U^{IV}_{60} + \frac{a^8\gamma_2}{256\cdot 6}U^{IV}_{80} + \frac{3a^6b^2\gamma_2^2}{64\cdot 56\gamma}U^{IV}_{62} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\gamma}{5}U_{42} + 6\gamma_2U_{60} - \frac{b^2\gamma}{5}U_{44} + \frac{3b^2\gamma_2}{2}U_{62} + \frac{b^2\gamma}{2}V_{53} + \frac{b^4\gamma}{4}V_{55} + \\
& + \gamma_2W'_{50} - \frac{b^4\gamma_2}{16}W'_{54} + \frac{b^2\gamma_2}{20}U''_{42} + \frac{b^4\gamma_2}{40}U''_{44} = 0;
\end{aligned}$$

$$\frac{7b^6}{4a^2}(C_1z - C_3) + 4\gamma_2U_{40} + b^2\gamma_2U_{42} + \frac{b^4\gamma^2}{5a^2\gamma_2}U_{24} - \frac{15b^4\gamma}{4a^2}U_{06} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b^4(3\gamma^2 - 8\gamma + 4)}{8\gamma_2} U_{44} - \frac{b^4\gamma(15a^2\gamma_2 - b^2\gamma)}{16a^2\gamma_2} U_{26} + \gamma V_{31} + \\
& + \frac{3b^2\gamma V_{33}}{4} - \frac{5a^2b^4\gamma}{32} V_{55} - \frac{4\gamma_2}{3a^2} W'_{10} - \frac{5a^2\gamma_2}{12} W'_{50} + \frac{b^2\gamma_2}{4} W'_{32} - \\
& - \frac{7a^4\gamma_2}{48} W'_{70} - \frac{b^4}{8} W'_{34} - \frac{b^6}{32} W'_{36} - \frac{a^2b^4\gamma}{32} W'_{54} - \frac{4\gamma_2}{3a^2} U''_{00} - \\
& - \frac{\gamma_2}{3} U''_{20} - \frac{a^2\gamma_2}{12} U''_{40} - \frac{b^4\gamma}{8a^2} U''_{04} - \frac{a^4\gamma_2}{48} U''_{60} - \frac{b^4\gamma}{32} U''_{24} - \\
& - \frac{b^6\gamma}{32a^2} U''_{06} - \frac{a^6\gamma_2}{64\gamma_2} U''_{80} - \frac{a^2b^4\gamma}{128} U''_{44} - \frac{b^6\gamma}{128} U''_{26} = 0; \\
& - \frac{b^6(7a^2\gamma + 3b^2\gamma_2)}{16a^2} (C_1z - C_3) - \frac{8(\gamma-1)}{\gamma_2} U_{20} - \frac{a^2\gamma^2}{\gamma_2} U_{40} - \\
& - 3b^2\gamma U_{04} - \frac{3a^4\gamma^2}{8\gamma_2} U_{60} + \frac{a^4\gamma}{40} U_{42} + \frac{b^2[3\gamma\gamma_2(20a^4 - b^4) - 5a^2b^2(5\gamma^2 - 8\gamma + 8)]}{80a^2\gamma_2} U_{24} + \\
& + \frac{3b^4(5a^2\gamma + 3b^2\gamma_2)}{16a^2} U_{06} + \frac{a^6(9\gamma^2 - 40\gamma + 40)}{8\gamma_2} U_{80} - \\
& - \frac{b^2\gamma(28a^4\gamma_2 + 3b^4\gamma_2 + 15a^2b^2\gamma)}{160\gamma_2} U_{44} - \frac{9a^2\gamma}{224} U_{62} + \\
& + \frac{b^4[3\gamma\gamma_2(35a^4 - b^4) + 14a^2b^2(\gamma^2 - 10\gamma + 10)]}{64\cdot 7a^2\gamma_2} U_{26} - \frac{(a^2\gamma + 3b^2\gamma_2)}{4} V_{31} - \\
& - \frac{3b^2(3a^2 + b^2\gamma_2)}{16} V_{33} - \frac{7a^4b^2\gamma}{32} V_{53} + \frac{3a^2b^4(a^2\gamma + b^2\gamma_2)}{128} V_{55} + \\
& + \frac{(\gamma-6)}{3} W'_{10} + \frac{a^4\gamma}{24} W'_{50} - \frac{3a^2b^2\gamma_2}{16} W'_{32} + \frac{a^6(17\gamma-30)}{96} W'_{70} + \\
& + \frac{3b^4(10a^2 + b^2\gamma_2)}{320} W'_{34} + \frac{3b^6(14a^2 + b^2\gamma_2)}{128\cdot 14} W'_{36} + \\
& + \frac{a^2b^4[5a^2(\gamma+10) + 56b^2\gamma_2]}{256\cdot 5} W'_{54} + \frac{\gamma}{3} U''_{00} + \frac{\gamma(a^2 - 3b^2)}{12} U''_{20} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a^2 b^2 \gamma (a^2 - 6b^2)}{48} U_{40}'' + \frac{b^4 [5a^2 (\gamma + 4) + 3b^3 \gamma_2]}{160 a^2} U_{04}'' + \\
& + \frac{a^4 \gamma (a^2 - 9b^2)}{192} U_{60}'' + \frac{b^6 [7a^2 (\gamma + 4) + 3b^2 \gamma_2]}{128 \cdot 7a^2} U_{06}'' + \frac{b^4 [5a^2 (\gamma + 4) + \\
& + 3b^2 \gamma_2]}{256 \cdot 16} U_{24}'' - \frac{9a^4 b^2 \gamma_2}{320} U_{42}'' + \frac{a^6 [a^2 \gamma^2 + 24b^2 (\gamma^2 - 6\gamma + 6)]}{256 \cdot 3\gamma} U_{80}'' + \\
& + \frac{3a^6 b^2 \gamma_2}{56 \cdot 16} U_{62}'' + \frac{b^6 [7a^2 (\gamma + 4) + 3b^2 \gamma_2]}{64 \cdot 56} U_{26}'' - \frac{a^2 b^4 [a^2 (31\gamma - 92) - \\
& - 3b^2 \gamma_2]}{256 \cdot 16} U_{44}'' + \frac{a^2 b^2 \gamma_2}{16} V_{31}'' - \frac{a^4 b^4 \gamma_2}{128} V_{53}'' - \frac{a^4 b^6 \gamma_2}{128 \cdot 4} V_{55}'' - \\
& - \frac{b^2 \gamma_2}{12} W_{10}''' + \frac{a^4 b^2 \gamma_2}{192} W_{50}''' + \frac{a^6 b^2 \gamma_2 (5\gamma + 6)}{256 \cdot 12\gamma} W_{70}''' + \frac{b^2 \gamma_2}{24} U_{00}^{IV} + \\
& + \frac{a^2 b^2 \gamma_2}{96} U_{20}^{IV} + \frac{a^4 b^2 \gamma_2}{96 \cdot 4} U_{40}^{IV} + \frac{a^6 b^2 \gamma_2}{192 \cdot 8} U_{60}^{IV} + \frac{a^8 b^2 \gamma_2}{256 \cdot 24} U_{80}^{IV} + \\
& + \frac{3a^6 b^4 \gamma_2^2}{256 \cdot 56\gamma} U_{62}^{IV} = 0; \\
& + \frac{b^4}{4} C_1 - 3a^2 W_{34} - \frac{5a^4}{4} W_{54} - \frac{9a^2 b^2}{8} W_{36} - 8U_{04}' - \frac{40a^2 \gamma_2 + 36^2 \gamma}{20\gamma_2} U_{24}' - \\
& - \frac{3b^2}{4} U_{06}' - \frac{a^6}{16b^2} U_{62}' + \frac{7a^6 \gamma_2}{4b^2 \gamma} U_{80}' - \frac{a^2 (20a^2 \gamma_2 + 3b^2 \gamma)}{40\gamma_2} U_{44}' - \\
& - \frac{3b^2 (7a^2 \gamma_2 + b^2 \gamma)}{112\gamma_2} U_{26}' - \frac{3a^2}{4} V_{33}' - \frac{5a^4}{16} V_{53}' + \frac{a^4 b^2}{64} V_{55}' + \\
& + \frac{3a^2 b^2}{80} W_{34}'' + \frac{7a^6 \gamma_2}{32b^2 \gamma} W_{70}'' + \frac{3a^4 b^2}{160} W_{54}'' + \frac{3a^2 b^4}{448} W_{36}'' + \frac{3b^2}{40} U_{04}''' + \\
& + \frac{3b^4}{224} U_{06}''' + \frac{3a^2 b^2}{160} U_{24}''' + \frac{3a^4 b^2}{640} U_{44}''' + \frac{a^6 \gamma_2}{128\gamma} U_{62}''' + \frac{3a^2 b^4}{56 \cdot 16} U_{26}''' = 0; \\
& - \frac{b^8}{160a^2} C_1 - \frac{3a^2 - b^2}{2} W_{32} + \frac{b^4}{4} W_{34} + \frac{3b^6}{32} W_{36} + \frac{5a^4 b^2}{16} W_{54} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4\gamma}{\gamma_2} U'_{20} - \frac{2a^2\gamma}{\gamma_2} U'_{40} - \frac{3a^4\gamma}{4\gamma_2} U'_{60} - \frac{a^4}{5} U'_{42} + \frac{b^6\gamma}{80a^2\gamma_2} U'_{24} - \\
& - \frac{3b^6}{160a^2} U'_{06} + \frac{a^6(\gamma^2 - 20\gamma + 20)}{16\gamma\gamma_2} U'_{80} - \frac{b^2(16a^4\gamma_2 - b^4\gamma)}{16\gamma_2} U'_{44} - \\
& - \frac{29a^2}{64\gamma} U'_{62} - \frac{b^6(21a^2\gamma_2 - b^2\gamma)}{64\gamma a^2\gamma_2} U'_{26} + \frac{a^2+b^2}{4} V'_{31} + \frac{b^4}{16} V'_{33} - \\
& - \frac{3a^4b^2}{64} V'_{53} - \frac{a^2b^4(3a^2 + 2b^2)}{256} V'_{55} - \frac{4}{3} W''_{10} + \frac{a^4}{12} W''_{50} + \\
& + \frac{a^6(5\gamma + 6)}{192\gamma} W''_{70} - \frac{b^6}{320} W''_{34} - \frac{a^2b^6}{640} W''_{54} - \frac{b^8}{256\gamma} W''_{36} + \frac{2}{3} U'''_{00} + \\
& + \frac{a^2}{6} U'''_{20} + \frac{a^4}{24} U'''_{40} - \frac{b^6}{160a^2} U'''_{04} + \frac{a^6}{96} U'''_{60} - \frac{b^8}{128\gamma a^2} U'''_{06} - \frac{b^6}{640} U'''_{24} + \\
& + \frac{a^8}{128\gamma} U'''_{80} + \frac{5a^6b^2\gamma_2}{64\gamma_2} U'''_{62} - \frac{b^8}{256\gamma_2} U'''_{26} - \frac{a^2b^6}{2560} U'''_{44} = 0.
\end{aligned}$$

Анализ рядов аппроксимирующих функций в результате указанного исключения обобщенных перемещений показывает выполнение условий отсутствия нагрузки на боковой поверхности, т.е.

$$\sigma_x = G \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \sum_{i=1}^{i+j} \sum_{j=0}^{\leq 4} x^{2i-1} y^{2j} A_{2i-1, 2j};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \sum_{i=0}^{i+j} \sum_{j=1}^{\leq 3} x^{2i} y^{2j} A_{2i, 2j-1};$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \sum_{i=0}^{i+j} \sum_{j=0}^{\leq 3} x^{2i} y^{2j} A_{2i, 2j};$$

$$\sigma_y = G \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \sum_{i=1}^{i+j} \sum_{j=1}^{\leq 4} x^{2i-1} y^{2j} A_{2i-1, 2j};$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \sum_{i=1}^{i+j} \sum_{j=0}^{\leq 5} x^{2i-1} y^{2j-1} A_{2i-1, 2j-1}.$$

Данное решение задачи аналогично решению, предложенному в статье [2], с той лишь разницей, что здесь увеличено число членов ряда аппроксимирующих функций. Это сделано для того, чтобы, выполняя условия отсутствия нагрузки на цилиндрической поверхности, составить недостающие семнадцать уравнений связей для замкнутости системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нетребков В.П., Мальцев Л.Е., Матвеев Н.П. Напряженное состояние при изгибе консоли в форме параллелепипеда. — Прикладная механика, 1974, 10, № 9.
2. Крушевский А.Е., Скляр О.Н. Изгиб упругого параллелепипеда при точном выполнении условия отсутствия нагрузки на четырех боковых гранях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1979, вып. 6.

УДК 539.3

О.Н.СКЛЯР

ИЗГИБ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ЛИНЕЙНО-РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ И БИМОМЕНТОМ

В монографии [1] рассмотрен изгиб плиты равномерно-распределенной нагрузкой. Задача решается на основе вариационного принципа Кастилиано.

Задача изгиба параллелепипеда равномерно-распределенной нагрузкой на основе гипотезы плоских сечений решается в курсе "Сопротивление материалов".

В предлагаемой статье задача изгиба линейно-распределенной нагрузкой упругого параллелепипеда решается при условии точного выполнения краевых условий на боковой поверхности с использованием вариационного принципа Лагранжа [2]. Это позволит дать оценку гипотезе плоских сечений в сопротивлении материалов и построить решение задачи изгиба при действии бимомента, решение которой в сопротивлении материалов вообще невозможно.

Предлагаемые задачи решаются методом, указанным в статье [3]. Ряды аппроксимирующих функций:

$$U = \sum_{m=n=0}^{m+n \leq 4} x^{2m} y^{2n} U_{2m, 2n}(z);$$

$$V = \sum_{m=n=0}^{m+n \leq 6} x^{2m+1} y^{2n+1} V_{2m+1, 2n+1}(z);$$

$$W = \sum_{m=n=0}^{m+n \leq 5} x^{2m+1} y^{2n} W_{2m+1, 2n}(z).$$

Пример 1. Изгиб параллелепипеда линейно-распределенной нагрузкой (рис. 1, а,б).

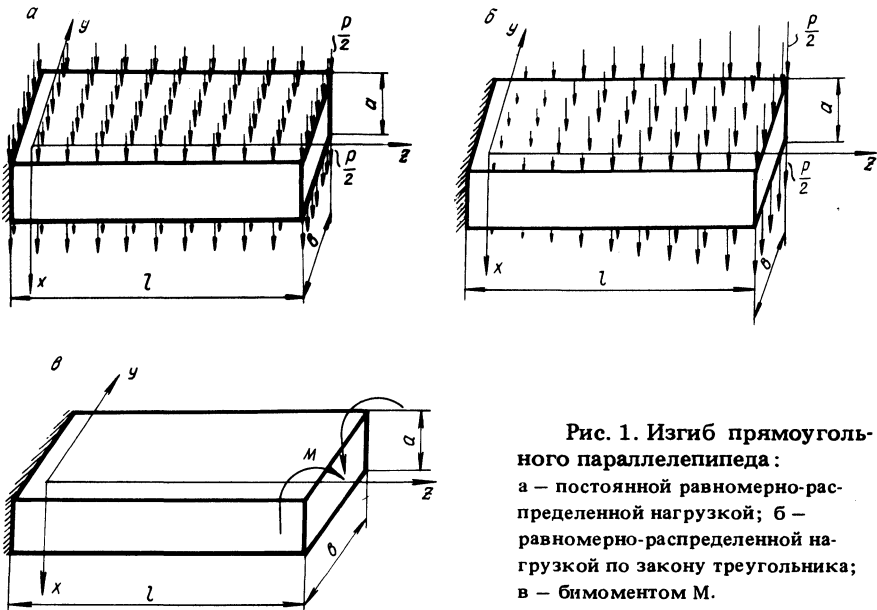


Рис. 1. Изгиб прямоугольного параллелепипеда :
а — постоянной равномерно-распределенной нагрузкой; б — равномерно-распределенной нагрузкой по закону треугольника; в — бимоментом М.

Уравнения связей

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^I &= \frac{p}{2}; \\ \sigma_x^{II} &= \frac{pz}{2l}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{xz} = 0; \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2}$$

$$\tau_{yx} = \sigma_y = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } y = \pm \frac{b}{2}.$$

Вариационные уравнения

$$\frac{d}{dz} \int_F \tau_{xz} dF = 0;$$

$$\frac{d}{dz} \int_F \sigma_z x dF - \int_F \tau_{xz} dF = 0.$$

Прodelав выкладки, аналогичные [3], ряды и искомые напряжения принимают вид:

$$U^I = U_0 + x^2 \frac{p}{4Ga}; \quad U^{II} = U_0 + x^2 \frac{pz}{4Gla};$$

$$V = xy(-\frac{3a^2}{4}V_{31} - b^2C_1z - C_4) + x^3yV_{31} + xy^3(4C_1z - C_3 - \frac{3a^2}{4}V_{33}) + x^3y^3V_{33};$$

$$W = xW_{10} + x^3W_{30} + xy^2(\frac{3a^2}{8}V'_{31} + \frac{3a^2b^2}{32}V'_{33} - \frac{b^2}{2}C_1) + xy^4C_1 + x^3y^2(-\frac{1}{2}V'_{31} - \frac{b^2}{8}V'_{33}) + x^5C_2;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 3Gy(\frac{a^2}{4} - x^2)(\frac{b^2}{4} - y^2)V_{33};$$

$$\tau_{yz} = Gxy(y^2 - \frac{b^2}{4})[(x^2 - \frac{3a^2}{4})V'_{33} + 8C_1];$$

$$\sigma_x^I = Gx(-\frac{p}{Ga} + \sigma_x^0); \quad \sigma_x^{II} = Gx(\frac{pz}{Gla} + \sigma_x^0);$$

$$\sigma_y = Gy(\frac{b^2}{4} - y^2)[3\gamma_2V_{31} + 3(\frac{3a^2\gamma}{4} + \frac{b^2\gamma_2}{4} - x^2\gamma)V_{33} + (-\frac{x^2\gamma_2}{2} - \frac{3a^2\gamma_2}{8})(V_{31}'' + \frac{b^2}{4}V_{33}'') - 12\gamma b^2(C_1z - C_3)];$$

$$\sigma_z^I = Gx(-\frac{p}{Ga} + \sigma_z^0); \quad \sigma_z^{II} = Gx(-\frac{pz}{Gla} + \sigma_z^0);$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = G(\frac{a^2}{4} - x^2) \left\{ \left[\frac{3\gamma_2b^2}{16} + \frac{a^2(\gamma-4)}{8\gamma_2} \right] V'_{31} + \frac{3b^2}{64\gamma_2} [2\gamma(\gamma-3)a^2 + \right. \\ \left. + b^2\gamma_2^2] V'_{33} - \frac{a^2b^2}{64} (\gamma-3)(V_{31}''' + \frac{b^2}{4}V_{33}''') - \frac{b^2(3\gamma-2)}{4}C_1 - \right. \\ \left. - 3W_{30} - \frac{a^2}{8}W_{30}'' + 3y^2(V_{31}' + \frac{b^2}{4}V_{33}') - (\frac{a^2}{16} + x^2)[\frac{b^2}{32}(V_{31}''' + \right. \\ \left. + \frac{b^2}{4}V_{33}''') - \frac{\gamma}{16\gamma_2}(4V_{31}' + 3b^2V_{33}') - \frac{1}{4}W_{30}'' + 5C_2] \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}
 U_0 = U_{00} + x^2 \left\{ - \left[\frac{3\gamma_2 b^2}{16} + \frac{a^2(\gamma-4)}{8\gamma_2} \right] V_{31} - \frac{3b^2}{64\gamma_2} [2\gamma(\gamma-3)a^2 + \right. \\
 \left. + b^2\gamma_2^2] V_{33} - \frac{a^2 b^2}{64} (\gamma-3) (V_{31}'' + \frac{b^2}{4} V_{33}'') + \frac{b^2(3\gamma-2)}{4} C_1 z - \right. \\
 \left. - \frac{3\gamma b^2}{4} C_3 - \frac{1}{2} C_2 + \frac{a^2}{8} W_{30}' \right\} + y^2 \left(\frac{3a^2}{8} V_{31} + \frac{3a^2 b^2}{32} V_{33} + \frac{b^2}{2} C_1 z + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} C_4 \right) + x^2 y^2 \left(-\frac{3}{2} V_{31} - \frac{3b^2}{8} V_{33} \right) + x^4 \left[-\frac{\gamma}{4\gamma_2} V_{31} - \frac{3\gamma b^2}{16\gamma_2} V_{33} - \right. \\
 \left. - \frac{1}{4} W_{30} + \frac{b^2}{16} \left(\frac{1}{2} V_{31}' + \frac{b^2}{8} V_{33}'' \right) \right] + y^4 (-C_z + C_3);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^0 = \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left[\frac{4(\gamma-1)}{\gamma_2} V_{31} + \left(\frac{3b^2\gamma^2}{4\gamma_2} - 3y^2\gamma_2 \right) V_{33} + \right. \\
 \left. + \left(\frac{\gamma_2 y^2}{2} - \frac{\gamma b^2}{8} \right) \cdot (V_{31}'' + \frac{b^2}{4} V_{33}'') + 2W_{30}' \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^0 = \left[\frac{a^2(7\gamma-10)}{2\gamma_2} + \frac{3b^2(\gamma-1)}{2} - 2x^2 - 3y^2\gamma_2 \right] V_{31} + \\
 + \left[\frac{3a^2 b^2 \gamma(5\gamma-6)}{16\gamma_2} + \frac{3b^4(\gamma-1)}{8} - \frac{3\gamma b^2}{4} x^2 - \frac{9\gamma_2 b^2}{4} y^2 + \right. \\
 \left. + 3\gamma_2 x^2 y^2 \right] V_{33} + \left[\frac{\gamma_2 b^2}{8} x^2 + \frac{3a^2 \gamma}{8} y^2 - \gamma_2 - x^2 y^2 - \frac{a^2 b^2(5\gamma-6)}{32} \right] \\
 (V_{31}'' + \frac{b^2}{4} V_{33}'') + (2x^2 - \frac{a^2}{2}) W_{30}' + [12\gamma_2 y^2 - \frac{2b^2}{\gamma_2} (3\gamma^2 - 6\gamma + \\
 + 4)] C_1 z + \left[\frac{6\gamma b^2}{\gamma_2} (\gamma-1) - 12\gamma_2 y^2 \right] C_3 + \frac{2(3\gamma-4)}{\gamma_2} C_4; \\
 V_{31}' = V_{31}^0 + \frac{5p\gamma\gamma_2(2\gamma_2 a^2 + \gamma b^2)}{2GK_{30}a^3}; \quad V_{31}'' = V_{31}^0 + \frac{5p\gamma\gamma_2(2\gamma_2 a^2 + \gamma b^2)z}{2GK_{30}a^3}
 \end{aligned}$$

$$V_{31}^0 = D_1 \sin \alpha_1 z + D_3 \sin \alpha_3 z - \frac{8\gamma_2}{K_{30}a^2} \left\{ \left[\frac{a^2 b^2}{2} (\gamma^2 + 14\gamma - 22) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{10b^4}{\gamma_2} (\gamma-1)^2 \right] C_1 z + \left[\frac{5b^4}{4\gamma_2} (11\gamma^2 - 20\gamma + 8) - \frac{a^2 b^2}{2} (\gamma^2 - \gamma - 2) \right] C_3 + \right. \\ \left. + \frac{5(3\gamma-4)}{4\gamma_2} (2\gamma_2 a^2 + \gamma b^2) C_4 \right\};$$

$$V_{33}^I = V_{33}^0 - \frac{10p\gamma_2\gamma^2}{GK_{30}a^3}; \quad V_{33}^{II} = V_{33}^0 - \frac{10p\gamma_2\nu^2 z}{GK_{30}a^3};$$

$$V_{33}^0 = - \frac{4(a^2\gamma_2\alpha_1^2 + 12\gamma)}{A_1} D_1 \sin \alpha_1 z - \frac{4(a^2\gamma_2\alpha_3^2 + 12\gamma)}{A_3} D_3 \sin \alpha_3 z - \\ - \frac{8\gamma_2}{K_{30}a^2} \left\{ \left[-4a^2(8\gamma - 11) + \frac{40b^2(\gamma-1)^2}{\gamma_2} \right] C_1 z + \left[4a^2(8\gamma-11) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5b^2}{\gamma_2} (11\gamma^2 - 20\gamma + 8) \right] C_3 - \frac{5\gamma(3\gamma-4)}{\gamma_2} C_4 \right\};$$

$$W_{30} = \frac{a^2 b^2 \gamma_2 (23\gamma - 26) \alpha_1^2 - 12K_{30}}{A_1 \gamma_2 \alpha_1} D_1 \cos \alpha_1 z + \\ + \frac{a^2 b^2 \gamma_2 (23\gamma - 26) \alpha_3^2 - 12K_{30}}{A_3 \gamma_2 \alpha_3} D_3 \cos \alpha_3 z + C_5;$$

$$A_1 = a^2 b^2 \gamma_2 \alpha_1^2 + 12(2\gamma_2 a^2 + \gamma b^2); \quad A_3 = a^2 b^2 \gamma_2 \alpha_3^2 + 12(2\gamma a^2 + \gamma b^2);$$

$$K_{30} = 4a^2 \gamma_2 (8\gamma - 11) - b^2 (\gamma^3 + 38\gamma^2 - 80\gamma + 40).$$

Выражения для V_{31}^0 , V_{33}^0 , W_{30}^0 отличаются от аналогичных перемещений в статье [3] лишь общим решением соответствующего однородного уравнения.

Построим графики σ_z и τ_{xz} при условии, что $a = 2$ см; $b = 4$ см; $z = 0$, $p = 0,5$ кг/см².

Для определения постоянных интегрирования составим следующую систему уравнений при $z = 1$:

Из вариационного уравнения следует, что

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} 1) \frac{b^2 \gamma}{60 K_{30}} [4a^2 \gamma_2 (2\gamma^2 + 7\gamma - 12) - 5b^2 (3\gamma^3 + 2\gamma^2 - 24\gamma + 26)] C_1 + \\ + \frac{a^2}{4} C_2 + \frac{1}{2} C_5 = 0; \\ 2) \sigma_z = \gamma G x^3 W_{30}' + \gamma_2 G (4x^3 U_{40} + x^3 V_{31}); \\ 3) \tau_{xz} = G (U_{00}' + W_{10}). \end{array} \right.$$

Решая I, получим следующие значения постоянных:

$$C_1 = 4,686 \frac{10^{-5}}{G}; \quad C_2 = 2,238 \frac{10^{-4}}{G}; \quad C_3 = 4,902 \frac{10^{-4}}{G} =$$

$$C_4 = 2,9 \frac{10^{-2}}{G}; \quad C_5 = -5,6199 \frac{10^{-4}}{G};$$

$$D_1 = 1,445 \frac{10^{-5}}{G}; \quad D_3 = -6,617 \frac{10^{-2}}{10^{10} G},$$

которые позволяют вычислить напряжения и построить графики их изменения. Графики τ_{xz}' , σ_z' , τ_{xz}'' , σ_z'' изображены на рис. 2а,б. Сравнительная табл. 1 значений напряжения τ_{xz} при $z = 0$ представлена следующим образом.

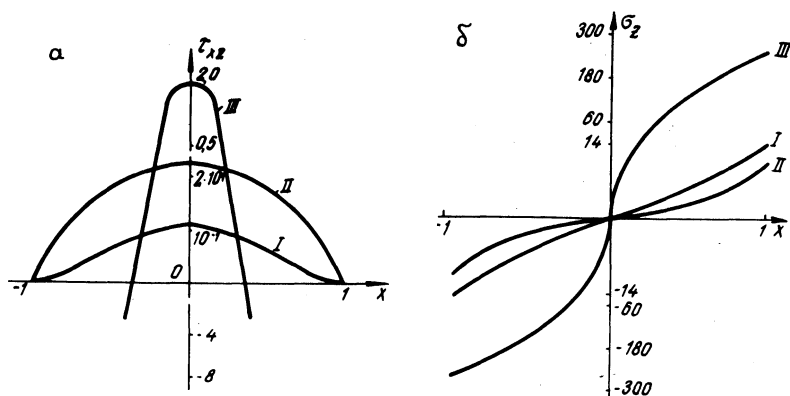


Рис. 2. Графики изменения напряжений:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a} - \text{I} - \tau_{xz}'(x) \\ \text{II} - \tau_{xz}''(x) \\ \text{III} - \tau_{xz}(x) \end{array} \right\} \text{при } y=1; \quad \left. \begin{array}{l} \text{б} - \text{I} - \sigma_z'(x) \\ \text{II} - \sigma_z''(x) \\ \text{III} - \sigma_z(x) \end{array} \right\} \text{при } y=1.$$

Т а б л и ц а 1.

Условия	Формула			
	$\tau'_{xz} : (1)$	$\tau''_{xz} : (1)$	$\tau' = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$	$\tau'' = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$
$x = y = 0$	0,016	0,02036	0,937	0,428
$x = 0$ $y = \frac{b}{2}$	0,6578	0,316	0,937	0,428

Пример 2. Изгиб параллелепипеда ($a = 2$; $b = 4$; $l = 10$) бимоментом $M = 5$ кг-см (рис. 1, в).

Ряды и напряжения получим, используя формулы примера 1, где члены, содержащие нагрузку p , приравняем к нулю, так как $\sigma_x = 0$ при $x = \pm \frac{a}{2}$.

Для определения постоянных интегрирования запишем систему уравнений:

$$(II) \begin{cases} 1) \frac{b^2 \gamma}{60 K_{30}} [4a^2 \gamma_2 (2\gamma^2 + 7\gamma - 12) - 5b^2 (3\gamma^3 + 2\gamma^2 - 24\gamma + 26)] C_1 + \\ \quad + \frac{a^2}{4} C_2 + \frac{1}{2} C_5 = 0; \\ 2) \int_F \tau_{yz} xy dF = M; \\ 3) \sigma_z = \gamma G x^3 W'_{30} + \gamma_2 G (4x^3 U_{40} + x^3 V_{31}); \\ 4) \tau_{xz} = G (U_{00} + x^2 U'_{20} + W_{10} + 3x^2 W_{30}). \end{cases}$$

Решив систему II, имеем

$$C_1 = -4,23 \frac{10^{-2}}{G}; \quad C_2 = 2,7 \frac{1}{G}; \quad C_3 = -4,06 \frac{10^{-1}}{G}; \quad C_4 = 3,72 \frac{1}{G}; \\ C_5 = -5,297 \frac{1}{G}; \quad D_1 = 4,77 \frac{10^{-1}}{G}; \quad D_3 = 1,929 \frac{10^{-1}}{10^{10} i G}.$$

Графики изменения τ_{xz} и σ_z изображены на рис. 2, а, б.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионов В.М., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. — М., 1972. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967. 3. Крушевский А.Е. Скляр О.Н. Изгиб упругого параллелепипеда при точном выполнении условия отсутствия нагрузки на четырех боковых гранях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика, Мн., 1979, вып. 6.

ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЖАТИЯ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ОТСУТСТВИИ НАГРУЗКИ НА ЧЕТЫРЕХ ЕГО ГРАНЯХ

В последнее время возрос интерес к решению пространственных задач теории упругости на основе различных вариационных методов [1,2]. При этом вопрос о выборе координатных функций решается по-разному. Одни авторы используют специальные ряды неортогональных функций, например, косинус-биномы [1], ряды функций с радикалами (R-функции) [3]. Однако для решения многих задач могут быть использованы известные стандартные степенные ряды [4]. Для этой цели на стандартные степенные ряды накладываются граничные условия и получаемые при этом зависимости рассматриваются как уравнения связей по отношению к вариационным уравнениям. Если исключить с помощью уравнений связей неизвестные обобщенные перемещения, то получим ряды для перемещений, удовлетворяющие краевым условиям.

Изложенное поясним на примере сжатия упругого параллелепипеда со свободными от нагрузки четырьмя гранями.

Ряды перемещений для данной задачи запишем в виде:

$$u = \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-1} y^{2n-2} U_{2m-1, 2n-2}(z);$$

$$v = \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-2} y^{2n-1} V_{2m-2, 2n-1}(z);$$

$$w = \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-2} y^{2n-2} W_{2m-2, 2n-2}(z).$$

На гранях $X = \pm \frac{a}{2}$ выполним условия $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$, а на гранях $Y = \pm \frac{b}{2}$ $\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$. В результате исключения уравнений связей мы получим структуру решения задачи сжатия упругого параллелепипеда со свободными от нагрузки четырьмя гранями. Напряженно-деформированное состояние параллелепипеда разбивается на четыре вида состояний.

Первое состояние описывается следующими рядами и двумя связями:

$$u = x \sum_{m=1} \left[\frac{1}{2m+1} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - x^{2m} \right) - \frac{2ma^{2m-2}}{4^{m-1}d_z^2} \right] d_z W_{2m,0}(z);$$

$$v = y \sum_{n=1} \left[\frac{1}{2n+1} \left(\frac{b^{2m}}{4^m} - y^{2m} \right) - \frac{2nb^{2n-2}}{4^{n-1}d_z^2} \right] d_z W_{0,2n}(z);$$

$$w = W_{00}(z) + \sum_{m=1} x^{2m} W_{2m,0}(z) + \sum_{n=1} y^{2n} W_{0,2n}(z).$$

Уравнения связей

$$\gamma_2 d_z W_{00}(z) + \sum_{m=1} \left[\frac{a^{2m}}{4^m} \left(\frac{\gamma}{2m+1} - 2 \right) - \frac{2\gamma m a^{2m-2}}{4^{m-1}d_z^2} \right] d_z W_{2m,0}(z) +$$

$$+ \gamma_2 \sum_{n=1} \left[\frac{b^{2n}}{4^n(2n+1)} - \frac{2n b^{2n-2}}{4^{n-1}d_z^2} \right] d_z W_{0,2n}(z) = 0;$$

$$\gamma_2 d_z W_{00}(z) + \gamma_2 \sum_{m=1} \left[\frac{a^{2m}}{4^m(2m+1)} - \frac{2ma^{2m-2}}{4^{m-1}d_z^2} \right] d_z W_{2m,0}(z) +$$

$$+ \sum_{n=1} \left[\frac{b^{2n}}{4^n} \left(\frac{\gamma}{2n+1} - 2 \right) - \frac{2\gamma n b^{2n-2}}{4^{n-1}d_z^2} \right] d_z W_{0,2n}(z) = 0,$$

где $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$; $\gamma_2 = \gamma - 2$.

Изучение полученных рядов показывает, что при такой деформации грани параллелепипеда $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$ преобразуются в цилиндрические поверхности, а грани $z = \pm \frac{c}{2}$ в поверхность, определяемую уравнением $w = W_{00} + \sum_{m=1} x^{2m} W_{2m,0} + \sum_{n=1} y^{2n} W_{0,2n}$.

Второе состояние определяется рядом $u = 0, v = 0$;

$$w = \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right)^2 \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right)^2 \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m} y^{2n} W_{2m+4, 2n+4}.$$

При этом состоянии грани $x = \pm \frac{a}{2}$ и $y = \pm \frac{b}{2}$ неподвижны, а грани $z = \pm \frac{c}{2}$ переходят в поверхность, проходящую через контур прямоугольника $z = \pm \frac{c}{2}$, $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$.

Третье состояние характеризуется рядом

$$u = 0, v = 0; w = x^2 y^2 \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - \frac{x^{2m}}{m+1} \right) \left(\frac{b^{2n}}{4^n} - \frac{y^{2n}}{n+1} \right) C_{2m+2, 2n+2}.$$

Это состояние показывает, что контур поперечного сечения деформируется лишь в продольном направлении, причем продольное перемещение w не зависит от координаты z .

Приведем ряды, которые описывают четвертое состояние параллелепипеда

$$\begin{aligned}
 u = & x \sum_{m=1} [y^{2m} - \frac{b^{2m}}{4^m} + \frac{\gamma m(2m-1)b^{2m-2}}{\gamma_2 4^{m-1}} (\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4})] U_{1,2m} + \\
 & + x \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ x^{2m} [y^{2n+2} - \frac{(n+1)b^{2n}y^2}{4^n} + \frac{nb^{2n+2}}{4^{n+1}}] + \right. \\
 & + \frac{2\gamma n(n+1)a^{2m}b^{2n}}{\gamma_2 4^{m+n}} (\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4}) U_{2m+1, 2n+2} + \\
 & + x \sum_{m=1} [(m+1)x^{2m} (\frac{b^2}{4} - y^2) + \frac{\gamma}{\gamma_2} (\frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} - \frac{x^{2m+2}}{2^{m+3}})] V_{2m+2, 1} + \\
 & + x \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \frac{(m+1)x^{2m}b^{2n}}{4^n} (\frac{b^2}{4} - y^2) + \frac{\gamma(2n+1)b^{2n}}{\gamma_2 4^n} [\frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} - \right. \\
 & - \frac{x^{2m+2}}{2^{m+3}} + \frac{2n(m+1)a^{2m}}{(2n+1)4^m} (\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4})] \Big\} V_{2m+2, 2n+1} ; \\
 v = & y \sum_{m=1} [x^{2m+2} - \frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} + \frac{\gamma(m+1)(2m+1)a^{2m}}{\gamma_2 4^m} (\frac{y^2}{3} - \frac{b^2}{4})] x \\
 & + V_{2m+2, 1} + y \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ y^{2n} [x^{2m+2} - \frac{(m+1)a^{2m}x^2}{4^m} + \frac{ma^{2m+2}}{4^{m+1}}] - \right. \\
 & - \frac{(m+1)a^{2m}b^{2n}}{4^{m+n}} (\frac{a^2}{4} - x^2) + \frac{\gamma(m+1)(2m+1)a^{2m}b^{2n}}{\gamma_2 4^{m+n}} x \\
 & + x (\frac{y^2}{3} - \frac{b^2}{4}) \Big\} V_{2m+2, 2n+1} + \\
 & + y \sum_{m=1} [my^{2m-2} (\frac{a^2}{4} - x^2) + \frac{\gamma}{\gamma_2} (\frac{b^{2m}}{4^m} - \frac{y^{2m}}{2^{m+1}})] U_{1, 2m} + \\
 & + y \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \frac{(n+1)a^{2m}}{4^m} (y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n}) (\frac{a^2}{4} - x^2) + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{(2m+1)\gamma a^{2m}}{\gamma_2 4^m} \left[\frac{b^{2n+2}}{4^{n+1}} - \frac{y^{2n+2}}{2^{n+3}} + \frac{(n+1)b^{2n}}{4^n} \left(\frac{y^2}{3} - \frac{b^2}{4} \right) \right] U_{2m+1, 2n+2} ; w = 0.$$

Четвертое состояние определяет плоскую деформацию упругого параллелепипеда. Первые три из указанных состояний характеризуют продольное напряженно-деформированное состояние параллелепипеда, а последнее — поперечное.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. — М., 1972. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967. 3. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. — Киев, 1967. 4. Крушевский А.Е., Севенюк А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 6.

УДК 539.3

В.Н. АПАНОВИЧ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ТРЕФФЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕМНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

В настоящее время для определения объемного напряженно-деформированного состояния деталей значительное развитие получили численные методы на основе вариационного уравнения Лагранжа [1...3]. Вариационное уравнение Лагранжа для конечного объема имеет вид

$$\int_V (\operatorname{div} T + \bar{K}) \delta \bar{u} dV - \int_S (\bar{n} T - F_n) \delta \bar{u} dS = 0, \quad (1)$$

где $\bar{K}$ — вектор объемных сил; $\delta \bar{u}$ — вектор возможных перемещений; dV — элемент объема; $\bar{F}_n$ — вектор поверхностных сил; dS — элемент поверхности тела; T — тензор напряжений; $\bar{n}$ — вектор направляющих косинусов. При реализации различных методов решения уравнения (1) важным вопросом является выбор системы координатных функций, аппроксимирующих компоненты вектора искомых и возможных перемещений упругого тела. От этого в значительной степени зависят сходимость, точность и численная устойчивость решения, а также простота алгоритмизации расчета. В работе [3] предложено два способа решения задачи теории упругости, удовлетворяющего уравнениям Ляме и граничным условиям, в виде напряжений и перемещений.

1. Ряды аппроксимирующих функций и возможных перемещений выбирают в классе стандартных степенных рядов и строят независимо. На постоянные коэффициенты при аппроксимирующих функциях накладываются дополнительные ограничения в виде уравнений внутренних связей, обеспечивающих удовлетворение рядами уравнений Ляме. Число возможных перемещений берется равным разности числа аппроксимирующих функций и числа уравнений связей. В этом случае достигается равенство нулю работы поверхностных сил на каждом возможном перемещении, но не обеспечивается минимум потенциальной энергии тела на всех возможных перемещениях, возникает некоторый произвол в выборе возможных перемещений, значительно сокращается число вариационных уравнений, обеспечивающих интегральное удовлетворение статическим граничным условиям, матрица несимметрична, главные элементы матрицы расположены хаотично.

2. Возможные перемещения выбирают такими же, как и ряды аппроксимирующих функций. Уравнения внутренних связей добавляют к системе с помощью неопределенных множителей Лагранжа. При таком подходе обеспечивается минимум потенциальной энергии тела на всех возможных перемещениях, но нарушается равенство нулю работы всех сил на возможных перемещениях и значительно возрастает число расчетных уравнений.

В настоящей работе рассмотрена возможность использования полной системы полиномиальных решений дифференциальных уравнений равновесия теории упругости [4] в качестве координатных функций при расчете объемного напряженно-деформированного состояния деталей машин методом Треффца. Вектор перемещений аппроксимируем рядом

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^k a_i \bar{\varphi}_i, \quad (2)$$

где a_i — произвольные коэффициенты; $\varphi_i = \{u_i, v_i, w_i\}$ — частные решения уравнений Ляме [4]; u_i, v_i, w_i — координатные функции.

При такой аппроксимации вектора перемещений объемный интеграл в уравнении (1) равен нулю. При использовании уравнения (1) необходимо вычислять поверхностные интегралы, более удобно вычисление объемных интегралов, поэтому, используя формулу Остроградского—Гаусса, уравнение (1) запишем в виде

$$\int_V T_{\delta} \delta E dV - \int_V \bar{K} \delta \bar{u} dV - \int_S \bar{F}_{\Pi} \delta \bar{u} dS = 0,$$

где δE — тензор возможных деформаций.

Для реализации метода применительно к расчету объемного напряженно-деформированного состояния деталей составлены программы на алгоритмическом языке "ФОРТРАН-IV" применительно к ЭВМ "ЕС-1030" и выполнено решение контрольной (тестовой) задачи. Программы позволяют произ-

водить: формирование гармонических полиномов; формирование полной системы полиномиальных решений уравнений теории упругости; формирование системы линейных алгебраических уравнений; решение системы; вычисление компонентов напряжений и перемещений в заданной точке детали. В качестве тестовой задачи выполнен расчет напряженно-деформированного состояния стального куба, сжимаемого двумя сосредоточенными силами (рис. 1). Исходные данные: размеры куба 20х20х20 мм; величина силы $P = 100$ кгс; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^4$ кгс/мм², коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

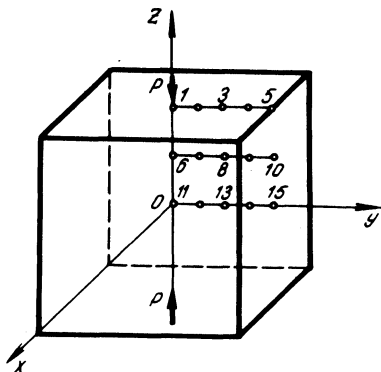


Рис. 1. Расчетная схема.

Таблица 1.

№ точек	Перемещения		Напряжения		
	$v \times 10^{-4}$, мм	$w \times 10^{-4}$, мм	σ_x , кгс/см ²	σ_y , кгс/см ²	σ_z , кгс/см ²
1	0,0	-28,3	-33,8	-33,8	-67,4
2	-0,69	-25,9	-32,8	-34,4	-62,4
3	-1,57	-21,1	-30,8	-35,3	-52,6
4	-3,05	-13,9	-27,9	-36,6	-37,8
5	-5,4	-4,45	-24	-38,3	-18
6	0,0	-15	2,3	2,3	-56,4
7	2,97	-13,8	3,28	1,68	-51,5
8	4,54	-11,4	5,24	0,813	-41,6
9	5,49	-7,88	8,18	-0,497	-26,8
10	5,59	-3,11	12,1	-2,24	-7,13
11	0,0	0,0	14,3	14,3	-52,8
12	4,19	0,0	15,3	13,7	-47,8
13	6,57	0,0	17,2	12,8	-38
14	8,34	0,0	20,2	11,5	-23,2
15	9,26	0,0	24,1	9,79	-3,48

При степени гармонических полиномов $n = 1$ система состоит из 9 линейных алгебраических уравнений. Результаты решения совпадают с результатами, получаемыми по формулам сопротивления материалов для центрально сжимаемых стержней. При $n = 3$ система состоит из 45 уравнений. Некоторые результаты расчета, время которого на ЭВМ "ЕС-1030" составило 1 мин, приведены в табл. 1. Из табл. 1 видно, что результаты решения тестовой задачи хорошо согласуются с физическим состоянием образца при данной схеме нагружения. Таким образом, при расчете объемного напряженно-деформированного состояния деталей методом Треффца можно использовать в качестве координатных функций полную систему полиномиальных решений уравнений теории упругости. Этот метод сочетает в себе лучшие стороны двух подходов, предложенных в работе [3], а именно: обеспечивается минимум потенциальной энергии тела на всех возможных перемещениях, дифференциальные уравнения равновесия внутри тела тождественно удовлетворяются, отсутствует произвол в выборе возможных состояний, матрица системы уравнений симметрична, главные элементы матрицы расположены на диагонали, что обеспечивает устойчивость решения при численной реализации метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. К р у ш е в с к и й А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967. 2. К о н д р а т ю к В.Ф., К р у ш е в с к и й А.Е. Некоторые вопросы расчета корпусных деталей машин на основе методов аналитической механики с применением ЭВМ. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1973. 3. К о н д р а т ю к В.Ф. Некоторые методы составления систем расчетных уравнений в задачах теории упругости. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1976, вып. 3. 4. Л у р ь е А.И. Полиномиальное представление решений уравнений теории упругости. — В сб.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л., 1970.

УДК 539.3

А.З.СЕВЕНЮК

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРИ ТОЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА ЕГО БОКОВЫХ ГРАНЯХ

Для расчета на прочность при динамической нагрузке необходимо знать собственные функции, которые зависят от собственных чисел (частот). Как следует из [2], точное определение спектра собственных частот колебаний упругих стержней встречает на своем пути большие математические трудности. На практике в технических расчетах для определения спектра собственных частот стержней постоянного сечения пользуются приближенной техни-

ческой теорией, основанной на решении следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 W_{00}}{\partial z^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 W_{00}}{\partial t^2}.$$

Техническая теория не учитывает при этом формы поперечного сечения, в ней не выполняются условия на боковых поверхностях стержня.

В [2] дается постановка задачи о нахождении спектра частот продольных колебаний упругого стержня прямоугольного сечения при точном выполнении краевых условий на его боковых гранях. Первое приближение задачи получалось при аппроксимации деформированного состояния поперечного сечения стержня с помощью полиномов 3-й степени.

Для получения более точного решения в данной статье дается второе приближение решения задачи при помощи полиномов 5-й степени, т.е. искомые упругие перемещения представляем в виде следующих конечных рядов:

$$\begin{aligned} u &= xU_{10} + xy^2U_{12} + x^3U_{30} + xy^4U_{14} + x^3y^2U_{32} + x^5U_{50}; \\ v &= yV_{01} + x^2yV_{21} + y^3V_{03} + x^4yV_{41} + x^2y^3V_{23} + y^5V_{05}; \\ w &= W_{00} + x^2W_{20} + y^2W_{02} + x^4W_{40} + y^4W_{04} + x^2y^2W_{22}. \end{aligned}$$

Для нахождения 18 неизвестных независимых обобщенных перемещений строим 15 дифференциальных уравнений из условия отсутствия нагрузки на боковых гранях стержня $x = \pm \frac{a}{2}$; $y = \pm \frac{b}{2}$ и три вариационных уравнения движения на основе вариационного уравнения равновесия элементарного слоя [3].

Указанную систему дифференциальных уравнений можно привести к следующей системе пяти обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & -\gamma_2 d_z^2 W_{00} + \left[\frac{(\gamma+2)a^2 d_z^2}{12} + 4(\gamma-1) \right] W_{20} - \frac{\gamma_2 b^2 d_z^2}{4} W_{02} + \\ & + \left[\frac{(3\gamma+2)a^2 d_z^2}{80} + 2(\gamma-1)a^2 W_{40} - \frac{\gamma_2 b^4 d_z^2}{16} W_{04} \right] = 0; \\ & -\gamma_2 d_z^2 W_{00} + \left[\frac{(\gamma+2)b^2 d_z^2}{12} + 4(\gamma-1) \right] W_{02} - \frac{\gamma_2 a^2 d_z^2}{4} W_{20} + \\ & + \left[\frac{(3\gamma+2)b^2 d_z^2}{80} + 2(\gamma-1)b^2 W_{04} - \frac{\gamma_2 a^4 d_z^2}{16} W_{40} \right] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(-\frac{a^2 d_z^2}{3} - 40)W_{20} + (-\frac{a^4 d_z^2}{14} - 16a^2)W_{40} = \\
& = -\frac{\rho\omega^2}{G} [(-\frac{a^2}{3} - \frac{2}{d_z^2})W_{20} + (\frac{a^4}{14} - \frac{10a^2}{d_z^2})W_{40}] ; \\
& [(-\frac{b^2 d_z^2}{3} - 40)W_{02} + (-\frac{b^4 d_z^2}{14} - 16b^2)W_{04}] = -\frac{\rho\omega^2}{G} [(\frac{b^2}{3} - \\
& - \frac{20}{d_z^2})W_{02} + (\frac{b^4}{14} - \frac{10b^2}{d_z^2})W_{04}] ; \\
& \gamma G d_z^2 W_{00} + 2G(-\frac{\gamma a^2 d_z^2}{24} - \gamma_2)W_{20} + 2G(-\frac{\gamma b^2 d_z^2}{24} - \gamma_2)W_{02} + \\
& + G(-\frac{\gamma a^4 d_z^2}{80} - \gamma_2 a^2)W_{40} + G(-\frac{\gamma b^4 d_z^2}{80} - \gamma_2 b^2)W_{04} = \\
& = -\rho\omega^2 (W_{00} + \frac{a^2}{12}W_{20} + \frac{b^2}{12}W_{02} + \frac{a^4}{80}W_{40} + \frac{b^4}{80}W_{04}) .
\end{aligned}$$

Для решения полученной системы дифференциальных уравнений запишем следующую форму решения для W_{20} при условии $w = 0$ для $z = 0$:

$$W_{20} = B_1 \text{sh} \alpha_1 z + B_2 \text{sh} \alpha_2 z + B_3 \text{sh} \alpha_3 z + B_4 \text{sh} \alpha_4 z + B_5 \text{sh} \alpha_5 z ,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ находятся из характеристического уравнения соответствующего системе дифференциальных уравнений.

Частотное уравнение получается в результате выполнения условий на свободном конце стержня, т.е. при $z = h$:

$$\tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0; \int \epsilon_z dF = 0 .$$

В качестве числового примера рассмотрен стержень из стали со следующими техническими характеристиками и размерами:

$$\begin{aligned}
G &= 7,848 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2 ; \quad \rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 ; \quad a = 1 \text{ м}, \quad b = 3 \text{ м}; \\
\gamma &= 3 ; \quad h = 10 \text{ м}; \quad 20 \text{ м}; \quad 30 \text{ м}.
\end{aligned}$$

Для нахождения искомых частот ω составлена программа в комплексной области чисел применительно к машинам "Минск-32" и ЕС. Полученные

значения частот и их сравнение с частотами 1-го приближения и технической теории приводятся в табл. 1.

Исследование приведенной таблицы показывает, что данная теория совпадает с технической только лишь для низших частот. Что касается высших частот, то здесь наблюдается отличие данной теории от технической и она позволяет определить уточненное значение частоты продольных колебаний прямоугольных стержней.

Т а б л и ц а 1.

h, м	ω	Номер частоты							
		1	2	3	4	5	6	7	8
h = 10	Техническая теория	785	2356	3926	5496	7067	8637	10208	11778
	1-е приближение	785	2343	3794	4284	6011	9077	10443	11851
	2-е приближение	785	2336	3180	3727	3784	4214	4684	5363
h = 20	Техническая теория	393	1178	1963	2748	3533	4319	5103	5889
	1-е приближение	393	1177	1956	2727	3480	4113	4317	4889
	2-е приближение	393	1176	1953	2714	3180	3440	3735	3930
h = 30	Техническая теория	262	785	1309	1832	2356	2879	3403	3926
	1-е приближение	262	785	1307	1827	2344	2855	3359	3845
	2-е приближение	262	785	1306	1824	2336	2838	3180	3323

1. И о н о в В.Н., О г и б а л о в П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. — М., 1972. 2. К р у ш е в с к и й А.Е., С е в е н ю к А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 5. 3. К р у ш е в с к и й А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967.

УДК 539.3

Н.Я.БОЙКО

**СЖАТИЕ ЖЕСТКИМ ШЕРОХОВАТЫМ ПЛОСКИМ ШТАМПОМ
УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА,
ЧЕТЫРЕ ГРАНИ КОТОРОГО НАХОДЯТСЯ В ЖЕСТКИХ
ШЕРОХОВАТЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ**

Имеем следующие краевые условия для рассматриваемого упругого параллелепипеда:

$$\begin{aligned} \text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad & \epsilon_0 = 0; \\ & \tau_{xz} = -H_1 x; \\ & \tau_{yz} = -H_2 y; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{при } y = \pm \frac{b}{2} \quad & v = 0; \\ & \tau_{zy} = B_2 z; \\ & \tau_{xy} = -B_1 x; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad & u = 0; \\ & \tau_{zx} = A_2 z; \\ & \tau_{yx} = -A_1 y. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Причем} \quad A_2 = -H_1 \frac{a}{h}; \quad A_1 = -B_1 \frac{a}{b}; \quad B_2 = -H_2 \frac{b}{h} \quad (4)$$

на основании закона парности касательных напряжений.

Как следует из [1], сформулированную краевую задачу можно решать при помощи рядов:

$$\begin{aligned} u = & U_{00} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) U_{02} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{0kc} \cos \left(\frac{2\pi k y}{b} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) U_2 + \sum_{i=1}^{\infty} [U_{ic0} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) U_{ic2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} U_{ickc} \cos\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right); \\
v = & \frac{2y}{b} V_{01} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{0ks} \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1\right) V_2 + \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2y}{b} V_{ic1} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{icks} \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right); \quad (5) \\
w = & \frac{2z}{h} W_1 + \sum_{i=1}^{\infty} [W_{is0} + \frac{1}{2} (12 \frac{y^2}{b^2} - 1) W_{is2} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} W_{iskc} \cos\left(\frac{2\pi ky}{b}\right)] \sin\left(\frac{2\pi iz}{h}\right).
\end{aligned}$$

Так же, как и в [2], для определения неизвестных функций от координаты x U_{00} , U_{0kc} , V_{0ks} , W_{is0} , U_{ic0} , U_{ickc} , V_{icks} , W_{iskc} составляют восемь дифференциальных уравнений равновесия внутри объема на основе вариационного уравнения равновесия элементарного столбика тела [3]. Пять неизвестных функций от координаты x V_{01} , U_{02} , U_{ic2} , V_{ic1} , W_{is2} определяются из условия равновесия на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$ (2). Из условия равновесия на гранях $z = \pm \frac{h}{2}$ (1) сразу определяются функции W_1 , V_2 , U_2 .

В результате решения вышеотмеченных шестнадцати уравнений и удовлетворения краевых условий (3) получаем следующие выражения для трех компонентов вектора упругих перемещений (1) – (3):

$$\begin{aligned}
u = & Cx + U_{00}^* + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) U_{02} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1\right) U_2 + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} [A_{0kc} \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi kx}{b}\right) + D_{0kc} x \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi kx}{b}\right)] \cos\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) - \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [B_{i0} - \frac{h(\gamma+1)}{2\pi i(\gamma-1)} C_{i0}] \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi ix}{h}\right) + C_{i0} x \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi ix}{h}\right) \right\} \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right); \\
v = & - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [A_{0kc} + \frac{(\gamma+1)b}{(\gamma-1)2\pi k} D_{0kc}] \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi kx}{b}\right) + D_{0kc} x \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi kx}{b}\right) - \right. \\
& \left. - V_{0ks}^* \right] \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} V_{icks}^* \sin\left(\frac{2\pi ky}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi iz}{h}\right); \\
w = & \frac{2z}{h} \left(-\frac{\varepsilon_0}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \frac{bB_2}{6G} z + \sum_{i=1}^{\infty} [B_{i0} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi ix}{h}\right) +
\end{aligned}$$

$$+ C_{i0} x \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi i x}{h}\right) + W_{is0}^* \sin\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} W_{iskc}^* \sin\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) \cos\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right),$$

где

$$C = -\left(\frac{B_1}{b} + \frac{H_1}{h}\right) \frac{a^2}{12\gamma G}; \quad U_{00}^* = \left(\frac{B_1}{b} + \frac{H_1}{h}\right) \frac{x^3}{3\gamma G};$$

$$U_{02} = -\frac{bB_1}{6G}x; \quad U_2 = -\frac{hH_1}{6G}x; \quad \Delta_1 = \operatorname{sh}\left(\frac{\pi \kappa a}{b}\right); \quad \Delta_2 = \operatorname{ch}\left(\frac{\pi \kappa a}{b}\right);$$

$$A_{0\kappa} = \left[\frac{2bB_1}{\pi \kappa} + \frac{(\gamma-1)bA_1\Delta_2}{\gamma\Delta_1} + \frac{(\gamma-1)aB_1\Delta_2}{\gamma\Delta_1} \right] \frac{a \cos(\pi \kappa)}{4G\pi \kappa \Delta_1};$$

$$D_{0\kappa} = -\frac{(\gamma-1) \cos(\pi \kappa)}{2\gamma G \pi \kappa \Delta_1} (bA_1 + aB_1); \quad \Delta_3 = \operatorname{sh}\left(\frac{\pi i a}{h}\right);$$

$$C_{i0} = \frac{(\gamma-1)(aH_1 - hA_2)}{2\gamma G \pi i \Delta_3} \cos(\pi i); \quad \Delta_4 = \operatorname{ch}\left(\frac{\pi i a}{h}\right);$$

$$B_{i0} = -\frac{h[aH_1(\gamma-1) + hA_2(\gamma+1)] \cos(\pi i)}{4\gamma G \pi^2 i^2 \Delta_3} - \frac{(\gamma-1)a\Delta_4(aH_1 - hA_2) \cos(\pi i)}{4\gamma G \pi i \Delta_3^2};$$

$$V_{0\kappa s}^* = \frac{b^2 \cos(\pi \kappa)}{2\gamma G \pi^3 \kappa^3} [(\gamma-1)B_1 + bH_2];$$

$$\Delta_5 = \frac{\pi^2 i^2}{h^2} + \frac{\pi^2 \kappa^2}{b^2}; \quad \Delta_6 = \frac{\pi^2 \kappa^2}{b^2} + \gamma \frac{\pi^2 i^2}{h^2};$$

$$V_{icks}^* = \left[\frac{(\gamma-1)\pi \kappa B_2}{b^2} + \frac{H_2 b \Delta_6}{\pi \kappa h} \right] \frac{\cos(\pi \kappa) \cos(\pi i)}{G \gamma \Delta_5^2};$$

$$W_{is0}^* = \frac{h^2 \cos(\pi i)}{2\gamma G \pi^3 i^3} \left[(\gamma-1)H_1 - \frac{hB_2}{b} \right];$$

$$W_{iskc}^* = -\frac{hbV_{icks}^*}{(\gamma-1)\pi i \pi \kappa} \left(\frac{\pi^2 i^2}{h^2} + \gamma \frac{\pi^2 \kappa^2}{b^2} \right) +$$

$$+ \left[hB_2 + \frac{H_2 b}{(\gamma-1)} \right] \frac{b \cos(\pi \kappa)}{G \pi i \pi^2 \kappa^2} \cos(\pi i),$$

$$\text{где } \gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}; \quad \gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu};$$

ν — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига.

Полученное решение удовлетворяет уравнениям Ламе.

Постоянные интегрирования A_{0k} , D_{0k} , B_{i0} , C_{i0} определены при удовлетворении краевых условий (3) методом ортогонализации.

Краевые условия (1) и (2) выполняются точно, а (3) — в интегральном виде.

Решение поставленной задачи может быть использовано при исследовании напряженно-деформированного состояния торфяного брикета в упругой стадии при следующих краевых условиях на гранях $z = +\frac{h}{2}$ и $z = 0$:

$$\begin{aligned} \text{при } z = +\frac{h}{2} \quad w = w_z^+ = -\frac{\epsilon_0}{2}; \quad \cdot \\ \tau_{xz} = X_z^+ = -H_1 x; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\tau_{yz} = Y_z^+ = -H_2 y,$$

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad w = 0; \\ \tau_{xz} = 0; \\ \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Краевые условия на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$ и $x = \pm \frac{a}{2}$ те же, т.е. (2) и (3) соответственно.

Наибольший интерес представляет собой изучение нормальных напряжений (боковых давлений) σ_x и σ_y .

Приведем формулы и графики изменения этих напряжений для краевой задачи (2), (3), (7), (8) в зависимости от координат точек и параметров параллелепипеда:

$$\begin{aligned} \sigma_x = G\gamma C - G\gamma_2 \frac{\epsilon_0}{h} + \left(\frac{B_1}{b} + \frac{H_1}{h} \right) x^2 - \frac{B_1 \gamma b}{12} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \\ + \gamma_2 \frac{B_2 b}{12} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) - \frac{H_1 \gamma h}{12} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) + 2G \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{2\pi k}{b} x \right. \\ \times A_{0k} \operatorname{ch} \left(\frac{2\pi k x}{b} \right) + D_{0k} \frac{1}{(\gamma-1)} \operatorname{ch} \left(\frac{2\pi k x}{b} \right) + D_{0k} \frac{2\pi k}{b} x \operatorname{sh} \left(\frac{2\pi k x}{b} \right) + \\ \left. + \gamma_2 \frac{\pi k}{b} V_{0ks}^* \right] \cos \left(\frac{2\pi k y}{b} \right) + 2G \sum_{i=1}^{\infty} \left[-B_{i0} \frac{2\pi i}{h} \operatorname{ch} \left(\frac{2\pi i x}{h} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma}{(\gamma-1)} C_{i0} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi i x}{h}\right) - C_{i0} \frac{2\pi i x}{h} \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi i x}{h}\right) + \gamma_2 \frac{\pi i}{h} W_{is0}^* \cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) + \\
& + G \gamma_2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi \kappa}{b} V_{icks}^* + \frac{2\pi i}{h} W_{iskc}^* \right) \cos\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right); \\
\sigma_y = & G \gamma_2 C - G \gamma_2 \frac{\epsilon_0}{h} + \frac{\gamma_2}{\gamma} \left(\frac{B_1}{b} + \frac{H_1}{h} \right) x^2 - \frac{B_1 \gamma_2 b}{12} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \\
& + \gamma_2 \frac{B_2 b}{12} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) - \frac{H_1 \gamma_2 h}{12} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) + 2G \sum_{\kappa=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right) x \\
& \times \left[-\frac{2\pi \kappa}{b} A_{0\kappa} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi \kappa x}{b}\right) - \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} D_{0\kappa} \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi \kappa x}{b}\right) - D_{0\kappa} \frac{2\pi \kappa x}{b} \times \right. \\
& \times \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi \kappa x}{b}\right) + \gamma \frac{\pi \kappa}{b} V_{0ks}^* \left. \right] + 2G \gamma_2 \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right) \left[\frac{1}{(\gamma-1)} C_{i0} x \right. \\
& \times \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi i x}{h}\right) + \frac{\pi i}{h} W_{is0}^* \left. \right] + G \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\gamma \frac{2\pi \kappa}{b} V_{icks}^* + \gamma_2 \frac{2\pi i}{h} W_{iskc}^* \right) x \\
& \times \cos\left(\frac{2\pi \kappa y}{b}\right) \cos\left(\frac{2\pi i z}{h}\right). \quad (9)
\end{aligned}$$

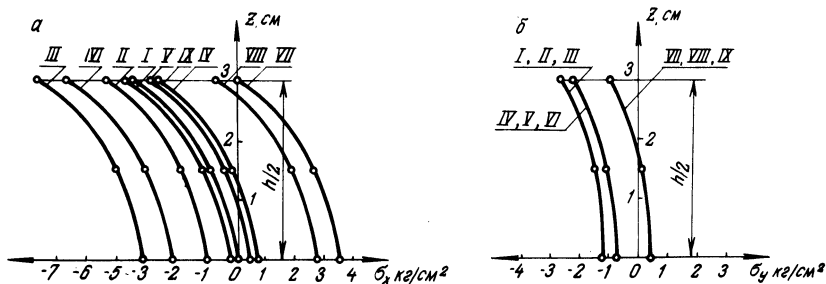


Рис. 1. Графики нормальных напряжений:

I — $x=0, y=0$; II — $x=0, y=\frac{b}{4}$; III — $x=0, y=\frac{b}{2}$; IV — $x=\frac{a}{4}, y=0$; V — $x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{4}$; VI — $x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{2}$ (a); VII — $x=\frac{a}{2}, y=0$; VIII — $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{4}$; IX — $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}$ (б).

Полагая в формулах (9) $\epsilon_0 = 0,1$ см; $\nu = 0,3$; $\gamma = 3,5$; $\gamma_2 = 1,5$; $H_1 = B_1 = B_2 = 1$ кг/см³; $a = b = 6$ см; $h = 4$ см; $G = 30,77$ кг/см² ($E = 80$ кг/см²); получая согласно (4) $A_1 = -1$ кг/см³; $H_2 = -2/3$ кг/см³; $A_2 = -1,5$ кг/см³,

можно построить графики напряжений (рис. 1), определяемые многочленом $i = k = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б о й к о Н.Я. К вопросу о равновесии упругого параллелепипеда при частных видах нагрузки. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1975, вып. 2.
2. Б о й к о Н.Я. Сжатие упругого параллелепипеда при действии на него полного и усеченного жесткого клинообразного штампа. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 5.
3. К р у ш е в с к и й А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967.

УДК 621.81:539.4

Л.А.ШИБАЕВА

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАМЫ АВТОМОБИЛЯ

Ранее была получена система дифференциальных уравнений колебаний рамы автомобиля на основе вариационного принципа Лагранжа [1] в виде 12 уравнений в частных производных.

Полагая, что центры тяжести всех сечений рамы располагаются на прямой (ось OZ), можно выделить независимую группу трех уравнений, описывающих ее деформации в вертикальной плоскости YOZ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \left(I_{22} \frac{\partial U_{11}}{\partial z} \right) - (\gamma I_{02} + I_{20}) U_{11} - \gamma_2 I_{02} \frac{\partial W_{01}}{\partial z} - \frac{\rho}{G} I_{22} \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial t^2} + \\ + \frac{P_4}{G} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(I_{00} \frac{\partial V_{00}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (I_{00} W_{01}) - \frac{\rho}{G} I_{00} \frac{\partial^2 V_{00}}{\partial t^2} + \frac{Q_1}{G} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma I_{02} \frac{\partial W_{01}}{\partial z} + \gamma_2 I_{02} U_{11} \right) - I_{00} \left(\frac{\partial V_{00}}{\partial z} + W_{01} \right) - \\ - \frac{\rho}{G} I_{02} \frac{\partial^2 W_{01}}{\partial t^2} + \frac{N_3}{G} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}; \quad \gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu}; \quad I_{20} = \int_F x^2 dF;$$

$$I_{00} = \int_F dF; \quad I_{02} = \int_F y^2 dF; \quad I_{22} = \int_F x^2 y^2 dF.$$

Здесь ρ — плотность материала рамы; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона.

Применяя метод Галеркина и представляя упругие перемещения вдоль осей координат в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= xyU_{11}(z, t); \\ v &= V_{02}(z, t); \\ w &= yW_{01}(z, t), \end{aligned} \right\} (2)$$

где $U_{11}(z, t)$, $V_{00}(z, t)$, $W_{01}(z, t)$ обобщенные перемещения (поперечная депланация), прогиб, угол поворота сечения в плоскости YOZ, можно получить уравнения собственных колебаний рамы автомобиля в вертикальной плоскости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} (I_{22} \frac{dU_{11}^*}{dz}) - [\gamma I_{02} + I_{20}] U_{11}^* - \gamma_2 I_{02} \frac{dW_{01}^*}{dz} &= 0; \\ \frac{d}{dz} [I_{00} (\frac{dV_{00}^*}{dz} + W_{01}^*)] + \frac{\rho}{G} I_{00} \omega^2 V_{00}^* &= 0; \\ \frac{d}{dz} [\gamma I_{02} (\frac{dW_{01}^*}{dz} + U_{11}^*)] - I_{00} \frac{dV_{00}^*}{dz} - (I_{00} - \frac{\rho}{G} I_{02} \omega^2) W_{01}^* &= 0, \end{aligned} \right\} (3)$$

если обобщенные перемещения представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} U_{11} &= U_{11}^*(z) \sin(\omega t + \alpha); \\ V_{00} &= V_{00}^*(z) \sin(\omega t + \alpha); \\ W_{01} &= W_{01}^*(z) \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \right\} (4)$$

При этом $U_{11}^*(z)$, $V_{00}^*(z)$, $W_{01}^*(z)$ будем подбирать так, чтобы они удовлетворяли условиям наложенных связей. Так, например, для лонжеронной рамы грузового автомобиля ГАЗ-53, выполненной из стали 25-ПС и состоящей из двух лонжеронов (рис. 1) с опорами в точках А и В (крепления передней и задней подвесок), допускающими свободный поворот сечения и депланацию при прогибе, равно нулю, функции $U_{11}^*(z)$, $V_{00}^*(z)$, $W_{01}^*(z)$ можно представить с помощью степенных рядов

$$\left. \begin{aligned} U_{11}^* &= A_1 + B_1 z + C_1 z^2 + \dots; \\ V_{00}^* &= (z - a)(z - b)(A_2 + B_2 z + C_2 z^2 + \dots); \\ W_{01}^* &= A_3 + B_3 z + C_3 z^2 + \dots \end{aligned} \right\} (5)$$

при выполнении статических условий для сечений, свободных от напряжений

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \quad \text{при } z=0 \text{ и } z=l; \quad (6)$$

$$a = 0,826 \text{ м}; b = 4,526 \text{ м}; l = 5,851 \text{ м}; h = 0,22 \text{ м};$$

$$d = 0,43 \text{ м}; c = 0,36 \text{ м}; \delta = 0,01 \text{ м};$$

$$I_{00} = 68 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; I_{20} = 1161 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4; I_{02} = 44,22 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$I_{22} = 7,24 \cdot 10^{-6} \text{ м}^6; \nu = 0,3; \gamma = 3,5; \gamma_2 = 1,5;$$

$$\rho = 783 \text{ кгс}^2/\text{м}^4; G = 8,34 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2.$$

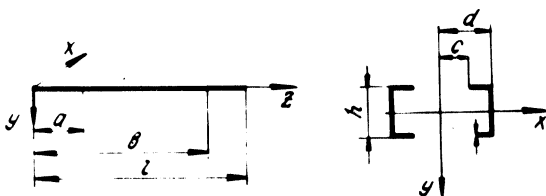


Рис. 1. Расчетная схема рамы автомобиля.

Представляя напряжения через компоненты перемещения

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = Gxy \frac{\partial U_{11}}{\partial z};$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \quad \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial V_{00}}{\partial z} + W_{01} \right);$$

$$\sigma_z = \gamma G \frac{\partial w}{\partial z} + \gamma_2 G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad \sigma_z = \gamma Gy \frac{\partial W_{01}}{\partial z} + \gamma_2 Gy U_{11}$$

и учитывая (6), будем иметь при $z=0$ и $z=l$:

$$\frac{dU_{11}^*}{dz} = 0; \quad (7) \quad \frac{dV_{00}^*}{dz} + W_{01}^* = 0; \quad (8) \quad \gamma \frac{dW_{01}^*}{dz} + \gamma_2 U_{11}^* = 0. \quad (9)$$

Подставляя (5) в (3), умножая последние соответственно на $\varphi(z), \psi(z)$ и $f(z)$ и интегрируя по длине с учетом (7), (8), (9), получим систему совместных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \dots$, допускающую решение, отличное от нуля, при равенстве определителя системы нулю.

Тогда получим уравнение частот собственных колебаний рассматриваемой рамы автомобиля.

Так, ограничиваясь первым приближением (5),

$$U_{11}^* = A_1, \quad V_{00}^* = (z-a)(z-b)A_2, \quad W_{01}^* = A_3,$$

полагая $\varphi = 1$, $\psi = (z-a)(z-b)$, $f = 1$ и произведя решение векового уравнения на ЭЦВМ М-22 по стандартной программе определения собственных значений матрицы, получим:

$$\omega_1 = 4200 \text{ 1/с}; \quad \omega_2 = 40500 \text{ 1/с}; \quad \omega_3 = 44000 \text{ 1/с}.$$

Ограничиваясь вторым приближением (5),

$$U_{11}^* = A_1 + B_1 z;$$

$$V_{00}^* = (z-a)(z-b)(A_2 + B_2 z);$$

$$W_{01}^* = A_3 + B_3 z.$$

Полагая $\varphi_1 = 1$, $\psi_1 = (z-a)(z-b)$, $f_1 = 1$; $\varphi_2 = z$, $\psi_2 = (z-a)(z-b)z$, $f_2 = z$, аналогично получаем: $\omega_1 = 400 \text{ 1/с}$; $\omega_2 = 5190 \text{ 1/с}$; $\omega_3 = 40550 \text{ 1/с}$; $\omega_4 = 40700 \text{ 1/с}$; $\omega_5 = 44050 \text{ 1/с}$; $\omega_6 = 44050 \text{ 1/с}$.

Ограничиваясь третьим приближением (5), полагая $\varphi_1 = 1$, $\psi_1 = (z-a)(z-b)$, $f_1 = 1$; $\varphi_2 = z$, $\psi_2 = (z-a)(z-b)z$, $f_2 = z$; $\varphi_3 = z^2$, $\psi_3 = (z-a)(z-b)z^2$, $f_3 = z^2$, аналогично получаем:

$$\omega_1 = 370 \text{ 1/с}; \quad \omega_2 = 1004 \text{ 1/с}; \quad \omega_3 = 5300 \text{ 1/с}; \quad \omega_4 = 4055 \text{ 1/с};$$

$$\omega_5 = 41269 \text{ 1/с}; \quad \omega_6 = 41453 \text{ 1/с}; \quad \omega_7 = 44028 \text{ 1/с}; \quad \omega_8 = 44179 \text{ 1/с};$$

$$\omega_9 = 44214 \text{ 1/с}.$$

В статье определены частоты изгибных колебаний рамы автомобиля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е., Шибанова Л.А. Составление дифференциальных уравнений колебаний рамы автомобиля. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1977, вып. 4.

УДК 624.072.2

Н.Ф.БОРИСЕНКО, Э.Г.КОСЫХ

К ВОПРОСУ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗАГРУЖЕНИЯ

Определение перемещений для тонких стержней в случае произвольного нагружения и переменной жесткости сводится к интегрированию нелинейно-

го интегро-дифференциального уравнения

$$EI(s) \frac{d(\theta - \theta_0)}{ds} = M + P \int_0^s \cos \theta \, ds + T \int_0^s \sin \theta \, ds + \int_0^s q(\xi) \int_\xi^s \cos \theta \, ds. \quad (1)$$

Здесь $EI(s)$ — изгибная жесткость. Остальные обозначения понятны из рис.1.

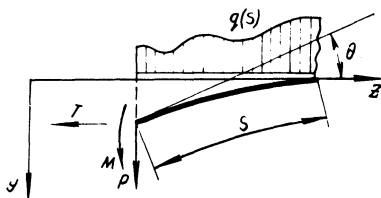


Рис. 1. Схема произвольно нагруженного стержня.

Практическая реализация решения (1) весьма затруднительна, так как уже при $EI = \text{const}$ и действии только сосредоточенной силы решение (1) выражается в эллиптических интегралах. В более общем случае решения в квадратурах не существует. Ниже излагается алгоритм решения, позволяющий достаточно просто реализовать поставленную задачу. Для сокращения выкладок проиллюстрируем методику на частном случае нагружения. Уравнение [1] после интегрирования левой и правой частей сводится в данном случае к виду

$$\theta = \nu_0 \int_0^s I_{s0} \int_1^s \cos \theta \, ds \, ds + \theta_0. \quad (2)$$

Здесь $\nu_0 = \frac{Pe^2}{EI(0)}$ — силовой безразмерный параметр; $I_{s0} = \frac{I(0)}{I(s)}$ — безразмерная геометрическая характеристика сечения; $\bar{s} = \frac{s}{e}$ — безразмерная координата, черта в (2) и далее опущена.

Введем функцию $\varphi_n(s - \xi)$ [1] такую, что

$$\varphi_1(s - \xi) = \begin{cases} 0 & , s \leq \xi ; \\ \frac{(s - \xi)^n}{n!} & , s > \xi , \end{cases}$$

обладающую свойством $\int_{-\infty}^s \varphi_n \, ds = \varphi_{n+1}$.

Тогда функция $\theta_0(s)$ при достаточно большом n может быть с любой степенью точности представлена так :

$$\theta_0(s) = \sum_{i=1}^n \theta_0^i [\varphi_0(s - (i-1)h) - \varphi_0(s - ih)] . \quad (3)$$

Здесь $h = \frac{1}{n}$ — шаг разбиения длины стержня на участки, θ_0^i — осредненное на i -м участке значение функции. Очевидно, из (3) следует, что для любой функции $\gamma[\theta_0(s)]$ будет иметь

$$\gamma[\theta_0(s)] = \Sigma \gamma(\theta_0^i) [\varphi_0(s-(i-1)h) - \varphi_0(s-ih)]. \quad (4)$$

Далее, используя идею последовательного нагружения и положив, что силовой параметр ν_0 получил небольшое приращение, например, начиная от нулевого значения, $\Delta\nu_0$, всегда возможно заменить в правой части $\theta(s)$ на $\theta_0(s)$, что с механической точки зрения соответствует расчету по недеформированному состоянию. Вычислив в (2) внутренний интеграл, где $\cos\theta$ представлен с помощью (4), получим

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta_0 + \Delta\nu_0 \int_0^s \left\{ \sum_j \cos\theta_0^j I_{j0} [\varphi_1(s-(j-1)h) - \varphi_1(s-jh)] - \right. \\ \left. - h \sum_j I_{j0} \sum_{i=1}^n \cos\theta_0^i [\varphi_0(s-(j-1)h) - \varphi_0(s-jh)] \right\} ds \end{aligned}$$

или, меняя порядок суммирования и интегрируя еще раз, получим

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta_0 + \Delta\nu_0 \sum_j \cos\theta_0^j \left\{ I_{j0} [\varphi_2(s-(j-1)h) - \varphi_2(s-jh)] \right\} - \\ - h \Delta\nu_0 \sum_{i=1}^n \cos\theta_0^i \left\{ \sum I_{j0} [\varphi_1(s-(j-1)h) - \varphi_1(s-jh)] \right\}. \end{aligned}$$

Осредняя величину θ_1 на каждом из участков, получим

$$\begin{aligned} \theta_1^j = \frac{1}{h} \Delta\nu_0 \int_{(j-1)h}^{jh} \theta_1 ds = \theta_0^j + \frac{1}{6} \Delta\nu_0 h^2 [I_{j0} \cos\theta_0^j + 6 \sum_{i=1}^{j-1} (j-i) I_{i0} \cos\theta_0^i] - \\ - \frac{1}{2} \Delta\nu_0 h^2 \left[\left(\sum_{i=1}^n \cos\theta_0^i \right) (I_{j0} + 2 \sum_{i=1}^{j-1} I_{i0}) \right]. \end{aligned}$$

В частном случае $EI = \text{const}$, т.е. $I_{j0} = 1$, получим

$$\begin{aligned} \theta_1^j = \theta_0^j + \frac{1}{6} \Delta\nu_0 h^2 [\cos\theta_0^j + 6 \sum_{i=1}^{j-1} (j-i) \cos\theta_0^i] - \frac{1}{2} \Delta\nu_0 h^2 [1 + 2(j-1)] \times \\ \times \sum_{i=1}^n \cos\theta_0^i. \end{aligned}$$

Значение θ_1 можно принять за исходное при очередном этапе нагружения. Принимая темп нагружения постоянным, т.е., полагая $\Delta\nu_0 = \text{const}$, получим рекуррентное соотношение

$$\theta_k^j = \theta_{k-1}^j + \frac{\Delta \nu_0 h^2}{6} [I_{j0} \cos \theta_{k-1}^j + 6 \sum_{i=1}^n (j-i) I_{i0} \cos \theta_{k-1}^i] - \frac{\Delta \nu_0 h^2}{2} [I_{j0} + 2 \sum_{i=1}^{j-1} I_{i0}] \sum_{i=1}^n \cos \theta_{k-1}^i, \quad (5)$$

которое решает задачу изгиба при произвольной начальной погиби и законе изменения жесткости. Действительно, учитывая, что

$$dy = \sin \theta ds \text{ и } dz = \cos \theta ds,$$

для перемещений узловых точек стержня получим

$$y_j = \sum_{i=1}^j \sin \theta_k^i [\varphi_1(d - (i-1)h) - \varphi_1(s - ih)];$$

$$y_j = \sum_{i=1}^j \cos \theta_k^i [\varphi_1(s - (i-1)h) - \varphi_1(s - ih)].$$

Для оценки точности решения согласно (5) были проведены прямые сопоставления с точным решением. Во-первых, сравним линейные решения. Пусть начальная форма погиби будет

$$\theta_0 = 0,3(s - \frac{1}{2}s^2),$$

что соответствует точному решению линейного дифференциального уравнения изгиба стержня постоянного сечения под действием сосредоточенной на конце стержня силы, действующей по оси y (рис. 2) и соответствующей зна-

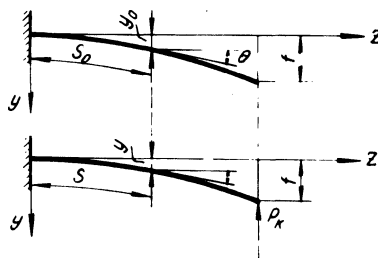


Рис. 2. Схема стержня, нагруженного сосредоточенной силой.

чению силового параметра $\nu_0 = 0,3$. Следовательно, если теперь приложить к торцу стержня силу, как указано на рис. 2, безразмерная величина которой будет равна $\nu_0 = 0,3$, то погибь должна исчезнуть. Действительно, положим в (5) $\Delta \nu_0 = 0,1$. Тогда $k = 3$. Примем $n = 3$. Для линейной задачи, полагая в (5), $\cos \theta_k^j = 1$, вместо (5), $\cos \theta_k^j = 1$, вместо (5) имеем

$$\theta_k^j = \theta_{k-1}^j + \frac{\Delta \nu_0 h^2}{6} [I_{j0} + 6 \sum_{i=1}^{j-1} (j-i) I_{i0}] - \frac{\Delta \nu_0 h^2}{2} [I_{j0} + 2 \sum_{i=1}^{j-1} I_{i0}] n. \quad (6)$$

Произведя подсчет, убедимся, что $\theta_3^1 = \theta_3^2 = \theta_3^3 = 0$, т.е. используемая в расчете модель работает эквивалентно сдвинутой. Сравнение значений θ_3^j с точным решением нелинейной задачи в данном случае дает совпадение пяти цифр после запятой $\theta_3^1 = 0,00002$, $\theta_3^2 = 0,00011$, $\theta_3^3 = 0,00028$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. — М., 1962.

УДК 624.072.21

И.Н.ЛИТВИНЕНКО, Е.Г.РОДЗЕВИЧ

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ СО СЛОЖНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИЛАМИ

При решении задачи устойчивости тонкостенной складчатой системы с привлечением метода членения ее на продольную и поперечную приходится решать вспомогательную задачу устойчивости стержня поперечной рамы [1]. Продольный изгиб стержня описывается уравнением [2]

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + \frac{N + \int_0^s q(\bar{s}) d\bar{s}}{EI} \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{q(s)}{EI} \frac{dw}{ds} = 0, \quad (1)$$

где $q(s) = \frac{p}{l} (b + 2c \frac{s}{l} + 3d \frac{s^2}{l^2})$; $N = pa$; a, b, c — постоянные коэффициенты; p — параметр нагрузки; l — длина стержня.

Предлагается решение этого уравнения двумя приближенными методами: в конечных разностях и разложением функции прогибов на основную и добавочную. В данной статье рассматривается подробно второй метод. Он может быть использован как самостоятельный, так и для контроля решения другими методами.

Записываем функцию прогибов в виде

$$w = w_0 + w_g. \quad (2)$$

Основную функцию подчиняем уравнению

$$\frac{d^4 w_0}{ds^4} + \frac{pa}{EI} \frac{d^2 w_0}{ds^2} + \frac{pb}{EI} \frac{dw_0}{ds} = 0, \quad (3)$$

которое является частью уравнения (1), с учетом выражения (2).

Решение уравнения (3) находим с помощью подстановки Эйлера

$$w_0 = \sum_{n=1}^{n=4} A_n e^{k_n s}, \quad (4)$$

где k_n — корни характеристического уравнения

$$\begin{cases} k^4 + \frac{p a}{EI} k^2 + \frac{p b}{EI} k = 0, \\ k_1 = 0; k_2 = 2\alpha; k_{3,4} = -\alpha \pm i\beta. \end{cases}$$

Запишем (4), привлекая гиперболотригонометрические функции и зависимости (5)

$$w_0 = A_1 + A_2(\operatorname{ch} 2\alpha s + \operatorname{sh} 2\alpha s) + A_3 \cos \beta s (\operatorname{ch} \alpha s - \operatorname{sh} \alpha s) + A_4 \sin \beta s (\operatorname{ch} \alpha s - \operatorname{sh} \alpha s). \quad (6)$$

Для нахождения w_g используем оставшуюся часть уравнения (1)

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 w_g}{ds^4} + \frac{p}{EI} \left(b \frac{s}{1} + c \frac{s^2}{1^2} + d \frac{s^3}{1^3} \right) \frac{d^2 w_0}{ds^2} + \frac{p}{EI} \left(a + b \frac{s}{1} + c \frac{s^2}{1^2} + \right. \\ & \left. + d \frac{s^3}{1^3} \right) \frac{d^2 w_g}{ds^2} + \frac{p}{EI} \left(2c \frac{s}{1} + 3d \frac{s^2}{1^2} \right) \frac{dw_0}{ds} + \frac{p}{EI} \left(b + 2c \frac{s}{1} + \right. \\ & \left. + 3d \frac{s^2}{1^2} \right) \frac{dw_g}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Содержащиеся в этом уравнении производные от w_0 раскладываем в ряды Маклорена, ограничившись тремя первыми членами. Исследования показали, что это число членов дает удовлетворительное приближение.

Добавочное решение ищем в виде алгебраического полинома

$$w_0 = \sum_{i=0}^{i=7} a_i s^i, \quad (8)$$

т.е. ограничиваемся восьмью первыми членами ряда, чтобы после подстановки производных w_0 и w_g в уравнение (7) получилось согласование высших степеней s .

Эта подстановка обращает дифференциальное уравнение (7) в алгебраическое уравнение с возрастающими от 0 до 8 степенями s , которое будет удовлетворяться в том случае, когда коэффициенты при всех степенях s равны нулю. Из этого условия получаем девять уравнений для определения a_i . Структура этих уравнений такова, что позволяет определять a_i последовательно.

Однако количество уравнений превосходит количество неизвестных на 2. Этого не случится в том случае, когда продольная нагрузка распределена равномерно. Для того чтобы избавиться от "лишних" уравнений и в то же время не лишиться полностью преимуществ последовательного нахождения неиз-

вестных a_1 , заменим первые два члена основного уравнения, содержащие s в нулевой и первой степени, функцией $F = k_1 s^2 + k_2 s^3$. Коэффициенты k_1 и k_2 определяем по методу минимума квадратичного отклонения и группируем с коэффициентами при соответствующих степенях s . При этом последовательность определения a_1 теряется в двух последних уравнениях, представляющих собой коэффициенты при s^2 и s^3 , так как в них содержатся одновременно два неизвестных a_1 и a_2 .

Таким образом зависимость между a_1 и A_n представляется в виде

$$a_1 = \sum_{n=2}^{n=4} f_{i,n} A_n, \text{ где } f = f(p, l, EI), \quad i = 1, \dots, 7. \quad (9)$$

Подставив (6) и (8) с учетом (9) в (2), получаем уравнение прогибов

$$\begin{aligned} w = & A_1 + [(ch2\alpha s + sh2\alpha s) + \sum_{i=1}^{i=7} f_{i,2} s^i] A_2 + \\ & + [\cos\beta s (ch\alpha s - sh\alpha s) + \sum_{i=1}^{i=7} f_{i,3} s^i] s A_3 + \\ & + [\sin\beta s (ch\alpha s - sh\alpha s) + \sum_{i=1}^{i=7} f_{i,4} s^i] A_4. \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения $A_1 - A_4$ привлекаем граничные условия в перемещениях и усилиях, а также дифференциальные зависимости между ними. Из этих условий получается система однородных алгебраических уравнений, коэффициенты которых зависят от параметра нагружения p , а также от размеров стержня. Условие равенства нулю детерминанта системы может быть использовано для анализа критического состояния стержня.

Пример. В целях иллюстрации метода и степени его точности рассмотрим следующую задачу. Стойка закреплена одним концом и нагружена собственным весом интенсивностью q и сосредоточенной силой P на свободном конце. Решение этой задачи дано в [3], где для $P_{кр}$ и q приводятся следующие значения:

$$P_{кр} = \frac{m EI}{l^2} \quad \text{и} \quad q = \frac{n \pi EI}{4l^3}, \quad (11)$$

где l — длина стойки; EI — жесткость поперечного сечения стойки.

Принимаем из ряда соотношений m и n , приведенных в табл. 7 [3], $m = 1,72$ и $n = 1$.

Поместим начало координат в защемленном сечении стержня. Тогда в уравнении (1) $N = pa = p + ql$; $q(s) = \frac{pb}{l} = -q$; $c = d = 0$ и уравнение (3) принимает вид

$$-\frac{d^4 w_0}{ds^4} + \frac{p + ql}{EI} \cdot \frac{d^2 w_0}{ds^2} - \frac{q}{EI} \frac{dw_0}{ds} = 0. \quad (13)$$

С учетом (11) и (12) w_0 получаем в виде (6), где

$$\alpha = \frac{0,274801}{1} ; \quad \beta = \frac{210094}{1} .$$

Добавочная функция должна удовлетворить уравнению

$$-\frac{d^4 w_g}{ds^4} - \frac{qs}{EI} \cdot \frac{d^2 w_0}{ds^2} + \frac{p+q l - qs}{EI} \frac{d^2 w_g}{ds^2} - \frac{q}{EI} \frac{dw_g}{ds} = 0 . \quad (14)$$

Найдя $\frac{d^2 w_0}{ds^2}$, раскладываем гиперболотригонометрические функции в ряды Маклорены, ограничившись пятой степенью переменной s . Поставив производные от основной и добавочной функций в виде степенных рядов в уравнение (14) с учетом зависимостей (11) и проведя алгебраические преобразования, получим:

$$\begin{aligned} & [24a_4 + \frac{8,3748}{1^2} a_2 - \frac{2,4674}{1^3} a_1] s^0 + [120a_5 - \frac{2,4674}{1^5} (0,302062A_2 - \\ & - 4,33843A_3 - 1,15468A_4) + \frac{25,1244}{1^2} a_3 - \frac{9,8696}{1^3} a_2] s + \\ & + [360a_6 - \frac{2,4674}{1^6} (0,166014A_2 + 3,61812A_3 - 8,79748A_4) + \\ & + \frac{50,2488}{1^2} a_4 - \frac{22,2066}{1^3} a_3] s^2 + [840a_7 - \frac{2,4674}{1^7} (0,045621A_2 + \\ & + 8,74436A_3 + 5,00951A_4) + \frac{83,748}{1^2} a_5 - \frac{39,4784}{1^3} a_4] s^3 + \\ & + [-\frac{2,4674}{1^8} (0,008358A_2 - 4,30921A_3 + 5,66492A_4) + \frac{125,622}{1^2} a_6 - \\ & - \frac{61,685}{1^3} a_5] s^4 + [-\frac{2,4674}{1^9} (0,001148A_2 - 2,67937A_3 - \\ & - 2,65253A_4) + \frac{175,871}{1^2} a_7 - \frac{88,8264}{1^3} a_6] s^5 + [-\frac{2,4674}{1^{10}} (0,000126A_2 + \\ & + 1,26182A_3 - 0,080055A_4 - \frac{120,903}{1^3} a_7] s^6 = 0 . \end{aligned} \quad (15)$$

Приравняв каждый из коэффициентов уравнения (15) нулю, начиная с коэффициента при высшей степени s , выражаем a_1 через A_n :

$$\begin{aligned} a_7 &= (-2,57609 \cdot 10^{-6} A_2 - 2,57514 \cdot 10^{-2} A_3 + 2,00011 \cdot 10^{-2} A_4) \frac{1}{l^7}; \\ a_6 &= (-3,69989 \cdot 10^{-5} A_2 + 2,34407 \cdot 10^{-2} A_3 + 0,113282 A_4) \frac{1}{l^6}; \\ a_5 &= (-4,09659 \cdot 10^{-4} A_2 + 0,220106 A_3 + 4,10372 \cdot 10^{-3} A_4) \frac{1}{l^5}; \\ a_4 &= (-3,77515 \cdot 10^{-3} A_2 - 0,627524 A_3 + 0,121184 A_4) \frac{1}{l^4}; \\ a_3 &= (-2,75882 \cdot 10^{-2} A_2 - 1,44196 A_3 + 3,08818 A_4) \frac{1}{l^3}; \\ a_2 &= (-0,150726 A_2 + 9,00689 \cdot 10^{-2} A_3 + 8,19994 A_4) \frac{1}{l^2}; \\ a_1 &= (-0,548311 A_2 - 5,79811 A_3 + 29,0108 A_4) \frac{1}{l}. \end{aligned} \quad (16)$$

Окончательная функция прогибов согласно (2) с учетом выражений (6), (8) и (16) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} w &= A_1 + A_2 \left(\operatorname{ch} 0,549602 \frac{s}{l} + \operatorname{sh} 0,549602 \frac{s}{l} - 0,548311 \frac{s}{l} - 0,150726 \frac{s^2}{l^2} - \right. \\ &\quad - 2,75882 \cdot 10^{-2} \frac{s^3}{l^3} - 3,77515 \cdot 10^{-3} \frac{s^4}{l^4} - 4,09659 \cdot 10^{-4} \frac{s^5}{l^5} - \\ &\quad - 3,69989 \cdot 10^{-5} \frac{s^6}{l^6} - 2,57609 \cdot 10^{-6} \frac{s^7}{l^7} \left. \right) + A_3 \left[\left(\operatorname{ch} 0,274801 \frac{s}{l} - \right. \right. \\ &\quad - \operatorname{sh} 0,274801 \frac{s}{l} \left. \right) \cos 2,10094 \frac{s}{l} - 5,79811 \frac{s}{l} + 9,00689 \cdot 10^{-2} \frac{s^2}{l^2} - \\ &\quad - 1,44196 \frac{s^3}{l^3} - 0,627524 \frac{s^4}{l^4} + 0,220106 \frac{s^5}{l^5} + 2,34407 \cdot 10^{-2} \frac{s^6}{l^6} - \\ &\quad - 2,57514 \cdot 10^{-2} \frac{s^7}{l^7} \left. \right] + A_4 \left[\left(\operatorname{ch} 0,274801 \frac{s}{l} - \operatorname{sh} 0,274801 \frac{s}{l} \right) \times \right. \\ &\quad \times \sin 2,10094 \frac{s}{l} + 29,0108 \frac{s}{l} + 29,0108 \frac{s}{l} + 8,19994 \frac{s^2}{l^2} + 3,08818 \frac{s^3}{l^3} + \\ &\quad + 0,121184 \frac{s^4}{l^4} + 4,10372 \cdot 10^{-3} \frac{s^5}{l^5} + 0,113282 \frac{s^6}{l^6} + 2,00011 \cdot 10^{-2} \frac{s^7}{l^7} \left. \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Для определения постоянных A_1, A_2, A_3, A_4 привлекаем граничные условия:

- 1) при $s = 0$ $w(0) = 0$;
- 2) при $s = 0$ $\theta(0) = 0$ или $\frac{dw}{ds}(0) = 0$;
- 3) при $s = 1$ $M(1) = 0$ или $\frac{d^2w}{ds^2}(1) = 0$;
- 4) при $s = 1$ $Q(1) = p \sin \theta(1)$ или $-EI \frac{dw^3}{ds^3}(1) = p \frac{dw}{ds}(1)$,

что с учетом (11) дает

$$\frac{d^3w}{ds^3}(1) + \frac{m}{l^2} \frac{dw}{ds}(1) = 0.$$

Используя выражение (17), получаем из граничных условий систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 0; \\ 0,001291A_2 - 6,07291A_3 + 31,1117A_4 &= 0; \\ 0,091447A_2 - 9,55468A_3 + 38,3038A_4 &= 0; \\ 0,005928A_2 - 28,5076A_3 + 139,851A_4 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Исследуем детерминант системы (18)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0,001291 & -6,07291 & 31,1117 \\ 0 & 0,091447 & -9,55468 & 38,3038 \\ 0 & 0,005928 & -28,5076 & 139,851 \end{vmatrix} = -84,21 + 80,8379.$$

Отношение $\frac{|D_4|}{|D|} = 0,96$. Расхождение по сравнению с единицей составляет 4%.

Такой результат подтверждает практически приемлемую точность результата, получаемого по методу представления функции в виде суммы двух функций, основной и добавочной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винокуров Л.П., Литвиненко И.Н. Устойчивость тонкостенных складчатых призматических систем, нагруженных поперечными силами. — Изв. вузов. Строительство и архитектура. Новосибирск, 1973, № 10. 2. Винокуров Л.П., Литвиненко И.Н. Решение задачи устойчивости равновесия плоских рам со стержнями, несущими сложно распределенные продольные силы. — В сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев, 1975, вып. XXV. 3. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. — М., 1955.

К ВОПРОСУ ОБРАЗОВАНИЯ ВМЯТИН В СЖАТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Вопросы об устойчивости цилиндрических оболочек в "малом" при осевом сжатии сводится к решению системы уравнений [1]

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 W &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{q_z}{h}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \end{aligned} \quad (1)$$

при соответствующих граничных условиях.

Здесь W , Φ — соответственно функция прогиба и напряжения.

Известно, что характер выпучивания реальных оболочек не соответствует формам равновесия при исследовании потери устойчивости в "малом". И прежде всего потому, что вмятины при реальном выпучивании занимают не всю поверхность оболочки, как это должно следовать из решения [1, 2].

В настоящей работе на основании представления оболочки как совокупности полосок на упругом основании показано, что потеря устойчивости в "малом" происходит с образованием отдельных вмятин, которые затем развиваются самопроизвольно, т.е. при падающей кривой равновесных состояний, что соответствует возможности потери устойчивости в "большом".

Итак, пусть цилиндрическая оболочка сжата вдоль образующей — сжимающее напряжение — p . Пусть на некоторой части цилиндрической поверхности образовалась круговая полоса вмятин, а на остальной части они отсутствуют. Естественно предположить, что на этой части поверхности функции W и Φ не зависят от дуговой координаты y . Тогда система (1) сводится к одному разрешающему уравнению, соответствующему балочке на упругом основании

$$\frac{D}{h} \frac{d^4 W}{dz^4} + p \frac{d^2 W}{dz^2} + \frac{E}{R^2} W = 0. \quad (2)$$

В поясе, где образовались вмятины, используя обычную процедуру отыскания функции напряжений [1], придем к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W(z,y)}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 W(z,y)}{\partial z^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(z,y)}{\partial y^4} = -\frac{h}{D} \left[\frac{1}{R} \frac{a}{c} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \Phi(z) \frac{a}{c} + \right. \\ \left. + \Phi^{IV}(z) \frac{b}{c} \right] \varphi(y) - p \frac{\partial^2 W(z,y)}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее, принимая в качестве решения функцию

$$W(z, y) = W(z) \sin \frac{my}{R}$$

и интегрируя по координате y , например, методом Бубнова-Голеркина, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W(z)}{dz^4} + \left(p \frac{h}{D} - 2 \frac{m^2}{R^2} + \frac{haE}{\pi DR^2 c_0} \int_0^{2\pi R} \varphi(y) \sin \frac{my}{R} dy \right) \frac{d^2 W(z)}{dz^2} + \\ + \frac{m^4}{R^4} W(z) = - \frac{h}{D} \left[\Phi(z) \frac{a}{c} + \Phi^{IV}(z) \frac{b}{c} \right] \int_0^{2\pi R} \varphi(y) \sin \frac{my}{R} dy, \end{aligned} \quad (3)$$

т.е. и в этом случае имеем уравнение, соответствующее балке на упругом основании, но с правой частью, смысл которой будет обсужден ниже. Итак, фактически задача свелась к совместному решению двух уравнений при выполнении граничных условий и условий сопряжения.

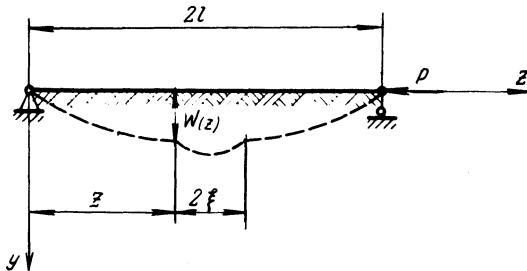


Рис. 1. Балка на упругом основании.

Для большей ясности вместо оболочки будем рассматривать качественно эквивалентную балку длины $2l$ на упругом основании (рис. 1). Однако основание наделим свойством обладать двумя значениями коэффициента постели c и ϵc ($\epsilon < 1$), причем основание работает с коэффициентом постели ϵc лишь тогда, когда погонное усилие на основание достигает некоторой величины c_0 . Положим, что балочка, сжатая продольной силой P , выпучивается. Возможно предположить две формы выпучивания:

первая, когда основание работает только с коэффициентом постели c , в этом случае балка изогнется по одной полуволне, что соответствует осесимметричной потере устойчивости оболочки;

вторая — с образованием в некоторой зоне 2ξ вмятин, где основание будет работать с коэффициентом постели ϵc , а в остальной части — в соответствии с первым случаем. Будем считать, что вмятина образовалась в середине балки, тогда форма прогиба опишется двумя уравнениями:

$$W^{IV} + \frac{pl^2}{EI} W'' + \frac{cl^4}{EI} W = 0, \quad \begin{cases} 0 \leq z < 1 - \xi, \\ 1 + \xi, < z \leq 2l; \end{cases}$$

$$W^{IV} + \frac{pl^2}{EI} W'' + \epsilon \frac{cl^4}{EI} W = -\frac{c_0 l^3}{EI}; \quad 1 - \xi; \quad z \leq 1 + \xi, \quad (4)$$

Граничные условия и условия сопряжения понятны из рис. 1. Очевидно, что задача (4) качественно эквивалентна (2) и (3). Вводя обозначения

$$K^2 = \frac{pl^2}{EI}; \quad r = \frac{cl^4}{EI} \quad \alpha = \sqrt{\frac{K^2}{2} + \sqrt{\frac{K^4}{4} - r}};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{K^2}{2} - \sqrt{\frac{K^4}{4} - r}}; \quad \lambda = \sqrt{\frac{K^2}{2} + \sqrt{\frac{K^4}{4} - \epsilon r}};$$

$$\mu = \sqrt{\frac{K^2}{2} - \sqrt{\frac{K^4}{4} - \epsilon r}}.$$

С учетом граничных условий и симметрии получим

$$W = A_2 \sin \alpha z + A_4 \sin \beta z \quad \begin{cases} 0 \leq z < 1 - \xi; \\ 1 + \xi, < z \leq 2l; \end{cases}$$

$$W = B_2 \frac{\cos \lambda (1-z)}{\sin \lambda} + B_4 \frac{\cos \lambda (1-z)}{\sin \mu} \quad \begin{cases} 1 - \xi, \leq z \leq 1 + \xi \end{cases}$$

и учитывая, что при нулевой длине зоны вмятины ($\xi = 0$) коэффициент $A_4 = 0$, примем в силу непрерывности, для малых ξ , $A_4 \equiv 0$. Введем обозначение $A_2 = f$. Тогда из условий гладкости и непрерывности для коэффициентов B_i получим

$$\left\{ \begin{aligned} B_2 &= f \sin \lambda \sin \alpha \frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \lambda^2} + \frac{c_0}{\epsilon cl} \sin \alpha \frac{\mu^2}{\mu^2 - \lambda^2}; \\ B_4 &= f \sin \mu \sin \alpha \frac{\alpha^2 - \lambda^2}{\mu^2 - \lambda^2} - \frac{c_0}{\epsilon cl} \sin \mu \frac{\lambda^2}{\mu^2 - \lambda^2}. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Удовлетворим условию равновесия изогнутой балки $-\sum Y = 0$, получим уравнение

$$f [K^2 \alpha - \alpha^3 + \frac{r}{\alpha} (\cos \alpha (1 - \xi) - 1)] - \epsilon r \left(\frac{B_2 \sin \lambda \xi}{\lambda \sin \lambda} + \frac{B_4 \sin \mu \xi}{\mu \sin \mu} \right) = 0. \quad (6)$$

Здесь V_2 и V_4 определяются по (5). Уравнение (6) с учетом (2) связывает три величины: амплитуду прогиба f , полудлину зоны вмятины ξ и силовой параметр. Поэтому необходимо еще одно уравнение. Его получим из условия минимума энергии деформирования

$$\Xi = \int_0^{1-\xi} EI W''^2 dz + \int_0^{1-\xi} c W^2 dz + \int_{1-\xi}^1 \epsilon c W^2 dz + 2 \int_{1-\xi}^1 c_0 W dz - P \int_0^1 W^2 dz.$$

Минимизируя энергию, получим уравнение

$$\xi r \frac{c_0}{cl} = -f \frac{\pi^4 g}{16}.$$

Подставляя (7) в (6) с учетом (5), получим уравнение

$$f \left[3(1-a) + \frac{b^2}{1+a} + 2\pi \right] g + 2\pi \left(\frac{b}{1+a} \right)^2 (1-\epsilon) \xi = 0. \quad (8)$$

Здесь a и b — безразмерные положительные величины, связанные с жесткостью основания;

$$g = \frac{P - P_{кр}}{P_3} \quad \text{— безразмерное приращение силового параметра,}$$

отсчитываемого от уровня, соответствующего критической нагрузке при потере устойчивости без вмятины, т.е. верхней критической нагрузке для оболочки.

Анализ уравнения (8) позволяет сделать следующие выводы:

1. Положим, что $\epsilon = 1$. Это будет соответствовать классическому линейному упругому основанию. В этом случае последнее слагаемое в (8) равно нулю. Тогда получим

$$f \left[3(1-a) \frac{b^2}{1+a} + 2\pi \right] g = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при $f = 0$, что соответствует неизогнутой форме равновесия; и при $f \neq 0$, но $g = 0$. Условие, что $g = 0$, соответствует классическому значению критической нагрузки для балки на упругом основании или оболочки в указанном в начале смысле.

2. Пусть $\epsilon < 1$, тогда по-прежнему возможно выпучивание при $g = 0$, но тогда необходимо, чтобы и $\xi = 0$, т.е. выпучивание происходит без образования вмятины.

3. Кроме того, очевидно, возможен еще один случай выпучивания $f \neq 0$, когда $\xi \neq 0$, но для этого необходимо, чтобы

$$\left[3(1-a) + \frac{b^2}{1+a} + 2\pi \right] g + 2\pi \left(\frac{b}{1+a} \right)^2 (1-\epsilon) \xi = 0.$$

Откуда следует, что выпучивание с вмятиной происходит с уменьшением сжимающего усилия (т.е. при достигнутом уровне критической нагрузки согласно п.2) самопроизвольно.

Действительно, увеличение зоны вмятины ξ связано с отрицательным приращением силового параметра g

$$g = - \frac{2\pi b^2(1-\epsilon)}{(1+a)[3(1-a^2)+b^2+2\pi(1+a)]} \xi.$$

4. Таким образом, полученные результаты вполне согласуются с тем, что одной и той же критической (для оболочки — верхней) нагрузке соответствуют различные формы выпучивания, однако в соответствии с п. 3 выпучивание будет происходить с появлением вмятин в узкой полосе поверхности оболочки, а затем — стремительному нарастанию количества и размеров вмятин.

ЛИТЕРАТУРА

1. В о л ь м и р А.С. Устойчивость упругих систем. — М., 1963. 2. Упругие оболочки/ Под ред. Э.И.Григolyuka. — М., 1963.

УДК 621.721 + 621.035

Н.Н.БУТКЕВИЧ, И.Д.БУШИЛО

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

Изучение температурных напряжений с помощью оптически-чувствительных материалов осуществляется путем моделирования. Основная задача моделирования — установление области подобия, подбор и выполнение для этой области соответствующих критериев подобия. Постановка модельных экспериментов должна удовлетворять критериям подобия, полученным на основе теории подобия и анализа размерностей, а в случае использования оптически-чувствительных материалов дополнительным условием, состоящим в подборе материала модели с необходимыми физико-механическими и оптическими свойствами.

Для моделирования температурных напряжений в однородных материалах при учете подобия граничных условий и геометрии необходимо выполнение следующих критериев подобия:

I. При стационарном тепловом режиме

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = \text{idem} \quad (Bi - \text{критерий Био});$$

$$\alpha E \Delta T = \text{idem} \quad (\text{деформационный критерий}).$$

II. При нестационарном тепловом режиме

$$\frac{a\Delta\tau}{l^2} = \text{idem} \text{ (Fo — критерий Фурье)};$$

$$\alpha E \Delta T = \text{idem} \text{ (деформационный критерий)}.$$

Здесь α — коэффициент теплового расширения; E — модуль упругости; λ — коэффициент теплопроводности; a — коэффициент температуропроводности; l — характерный размер; $\Delta\tau$ — промежуток времени протекания процесса; ΔT — период температур во времени.

При моделировании температурных напряжений в композиционных материалах, кроме условий I и II, необходим правильный подбор пары контактирующих слоев. Особенность моделирования напряжений в композиционных материалах состоит в том, что на границе слоев композита возникает скачок напряжений из-за различия в физико-механических и теплофизических свойствах материалов [1].

Пусть композит модели (М) и натуре (Н) состоит из n разнородных слоев, отличающихся между собой физико-механическими и теплофизическими характеристиками, входящими в состав критериев I и II

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 \dots \alpha_n & & \alpha_1 \dots \alpha_n \\ E_1 \dots E_n & & E_1 \dots E_n \\ \lambda_1 \dots \lambda_n & \text{и} & \lambda_1 \dots \lambda_n \\ a_1 \dots a_n & \text{М} & a_1 \dots a_n \text{ Н} \end{array}$$

Условия подобия теплового и деформационного процесса в i -м слое для стационарного и нестационарного режима соответственно будут

$$\begin{aligned} \text{III. } \left(\frac{\alpha l}{\lambda}\right)_i &= \text{idem}; \\ (\alpha E \Delta T)_i &= \text{idem}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{IV. } \left(\frac{a \Delta \tau}{l^2}\right)_i = \text{idem};$$

$$(\alpha E \Delta T)_i = \text{idem}.$$

К (1) прибавляются условия, учитывающие взаимодействие соседних слоев (i -го и $i+1$ -го),

$$\text{V. } \frac{\left(\frac{\alpha l}{\lambda}\right)_i}{\left(\frac{\alpha l}{\lambda}\right)_{i+1}} = \text{idem}; \quad \frac{(\alpha E)_i}{(\alpha E)_{i+1}} = \text{idem};$$

$$\frac{\left(\frac{a\Delta\tau}{l^2}\right)_i}{\left(\frac{a\Delta\tau}{l^2}\right)_{i+1}} = \text{idem}; \quad \frac{(\alpha E)_i}{(\alpha E)_{i+1}} = \text{idem}.$$

Для упрощения дальнейших рассуждений воспользуемся теоремой о соотношении критериев подобия [2] и преобразуем выражения (1) и (2), разделив соответственно в режимах III и IV деформационный критерий на критерий Bi и Fo .

$$\text{Получим для условия V } \left(\frac{E\lambda\Delta T}{l}\right)_i = \text{idem};$$

$$\text{для условия VI } \left(\frac{\alpha E l^2}{a} V\right)_i = \text{idem}.$$

Здесь $V = \frac{\Delta T}{\Delta\tau}$ — скорость нагрева (охлаждения) в данном температурно-временном интервале.

Заменим отношения сходственных характеристик модели и природы индикаторами K

$$\frac{\alpha_M}{\alpha_H} = K_\alpha; \quad \frac{E_M}{E_H} = K_E; \quad \frac{\lambda_M}{\lambda_H} = K_\lambda; \quad \frac{a_M}{a_H} = K_a; \quad \frac{\Delta T_M}{\Delta T_H} = K_{\Delta T}; \quad \frac{V_M}{V_H} = K_V.$$

Тогда условия подобия в индикаторах в i -м слое запишутся в следующем виде

$$\text{VII. } \left(\frac{K_E K_\lambda K_{\Delta T}}{K_l}\right)_i = 1; \quad (3)$$

$$\text{VIII. } \left(\frac{K_E K_\alpha K_l^2}{K_a} K_V\right)_i = 1.$$

При соблюдении условий (3) условия (2) выполняются автоматически.

Выражения (3) дают условия моделирования температурных напряжений при стационарном и нестационарном тепловых режимах. Рассмотрим возможность выполнения этих условий при заданных K_E , K_λ , K_α и K_a .

Пусть материал модели — эпоксидный компаунд на основе ЭД-20М, материал природы — среднелегированная сталь.

Тогда

$$K_E = 5 \cdot 10^{-3}; \quad K_\lambda = 0,36 \cdot 10^{-2};$$

$$K_\alpha = 10; \quad K_a = 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Индикаторы K_E , K_λ , K_α , K_a вычислены по данным [3, 4], усредненным по интервалам 20...100°C для ЭД-20 и 200...700°C для стали.

Подставляя численные значения K в VII, получим

$$(K_E K_\lambda \frac{K_{\Delta T}}{K_l})_i = (5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,36 \cdot 10^{-2}) \frac{K_{\Delta T_i}}{K_{l_i}} = 1.$$

При $K_{l_i} = 1$

$$K_{\Delta T_i} = (\frac{\Delta T_M}{\Delta T_H})_i = 6 \cdot 10^6.$$

Это условие невыполнимо при оптическом моделировании, ибо

$$K_{\Delta T} \leq 0,3. \quad (4)$$

При $K_{\Delta T} = 0,3$

$$K_l = \frac{l_M}{l_H} = 5 \cdot 0,36 \cdot 0,3 \cdot 10^{-5} = 5,4 \cdot 10^{-6},$$

т.е. размеры модели должны быть в миллион раз меньше натурального объема, что также трудно выполнимо вследствие влияния масштабного фактора.

Подставляя значения соответствующих индикаторов в VIII, получим

$$\frac{K_E K_\alpha}{K_a} K_V = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{0,5 \cdot 10^{-2}} K_V = 1; \quad K_V = \frac{V_M}{V_H} = \frac{1}{10},$$

т.е. скорость нагрева (охлаждения) модели при $K_l = 1$ должна быть в 10 раз меньше скорости нагрева (охлаждения) натуре, что выполнимо для эпоксидных моделей и натуральных стальных изделий. Это подтверждается опытами, приведенными в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Буткевич Н.Н., Бушило И.Д., Шатерник А.И. О возможности моделирования температурных и остаточных напряжений в композиционных материалах. — В сб.: Порошковая металлургия. Мн., 1978, вып. 2.
2. Киричев М.В. Теория подобия. — М., 1953.
3. Таблицы физических величин. Справочник/ Под ред. И.К.Кикоина. — М., 1976.
4. Буткевич Н.Н. Исследование напряженного состояния ковочных штампов с неоднородным термическим упрочнением. Автореф. канд. дис. Мн., 1972.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ ОДНОСВЯЗНОГО И МНОГОСВЯЗНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В конструировании машин важное место занимают расчеты их элементов на кручение. Методы теории упругости: вариационные [1,2], конечных разностей [2], конечных элементов [3], конформного отображения [4], интегральных уравнений [5,6,7,8] апробировались на задаче кручения. Несмотря на это, до последнего времени отсутствовало общее решение для многосвязных и односвязных стержней сложного поперечного сечения [9].

В статье сделана попытка восполнить этот пробел, представив решение задачи нестесненного кручения стержней с помощью метода интегральных уравнений. Достоинством метода является снижение размерности задачи, что позволяет при численном решении выполнять дискретизацию не всей области, а только ее границы.

Рассмотрим вывод интегрального уравнения Фредгольма второго рода задачи кручения, отличный от работы [6], особенности многосвязных сечений и предложим соответствующее решение. Возможности и область применения программы "СЕН-ВЕНАН", предназначенной для решения задачи кручения стержней односвязного и многосвязного поперечного сечений сложной конфигурации, иллюстрируются на примере расчета хвостовика вала отбора мощности трактора МТЗ-82К.

1. Дифференциальные уравнения равновесия и совместности в декартовых координатах

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 2Gc, \quad (1)$$

где τ_x, τ_y — касательные напряжения, действующие в направлениях x и y в плоскости поперечного сечения; c — угол закрутки на единицу длины стержня; G — модуль сдвига материала стержня.

В комплексных переменных $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ два уравнения могут быть заменены одним

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\tau_y + i\tau_x) = Gc. \quad (2)$$

Из (2) легко найти общее решение

$$\tau_y + i\tau_x = Gc\bar{z} + \varphi(z), \quad (3)$$

где $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция.

По интегральной формуле Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t) dt}{t-z}, \quad (4)$$

где Γ — граница области; $\varphi(t)$ — граничное значение функции $\varphi(z)$, $t = x + iy$ — координаты точек границы, $dt = dx + i dy = i e^{i\beta} ds$ (ds — элемент длины; β — угол наклона внешней нормали в точке t к оси x).

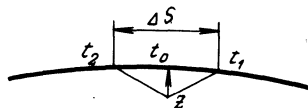
Из (3) выразим $\varphi(z)$ и подставим в (4):

$$\tau_y + i\tau_x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau_y + i\tau_x - Gc(\bar{t} - \bar{z})}{t-z} dt. \quad (5)$$

Формула (5) выражает напряжения в области Ω через напряжения на контуре Γ .

Выполним предельный переход от точки z , лежащей внутри области, к точке t_0 контура (рис. 1). Для этого выделим элемент Δs граничной кривой достаточно малый, чтобы его можно было считать прямым, а напряжение τ_s вдоль него — постоянным. Вычислим

Рис. 1. Предельный переход от точки z , лежащей внутри контура, к точке t_0 контура.



$$\lim_{z \rightarrow t_0} \int_{\Delta s} \frac{\omega dt}{t-z} = \omega_0 \lim_{z \rightarrow t_0} \int_{\Delta s} \frac{dt}{t-z} = \omega_0 \lim_{z \rightarrow t_0} \ln \frac{t_2 - z}{t_1 - z} = \pi i \omega_0. \quad (6)$$

Здесь $\omega = \omega(t)$ — функция, заданная на границе контура; $\omega_0 = \omega(t_0)$. Участок Δs симметричен относительно точки t_0 .

После выполнения предельного перехода интеграл понимается в смысле главного значения

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \int_{\Gamma} \frac{\omega dt}{t-z} = \pi i \omega_0 + \int_{\Gamma} \frac{\omega dt}{t-t_0}. \quad (7)$$

Применяя выражение (7) к интегралу (5), получим

$$\frac{1}{2} (\tau_y + i\tau_x) \Big|_{z=t_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau_y + i\tau_x - Gc(\bar{t} - \bar{t}_0)}{t-t_0} dt. \quad (8)$$

Напряжения на контуре

$$\tau_y + i\tau_x = (\tau_s + i\tau_n) e^{-i\beta}, \quad \tau_n = 0, \quad (9)$$

где β — угол наклона внешней нормали в точке t к оси x ; τ_s, τ_n — составляющие касательного напряжения вдоль и поперек внешней нормали к контуру.

Подставляя (9) в (8), получим

$$\tau_{s0} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau_s e^{-i(\beta-\beta_0)}}{t-t_0} dt = -Gc \frac{e^{i\beta_0}}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} dt, \quad (10)$$

где τ_{s0} — значение напряжения τ_s в точке t_0 ; β_0 — угол наклона внешней нормали в точке t_0 к оси x (рис. 2).

С учетом $t-t_0 = \rho e^{i(\beta_0+\gamma)}$, $dt = i e^{i\beta} ds$,

а также $\beta_0 + \gamma = \beta + \alpha$ преобразуем (10) к виду

$$\tau_{s0} - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\gamma}}{\rho} \tau_s ds = -\frac{Gc}{\pi} \int_{\Gamma} e^{-i(\gamma+\alpha)} ds, \quad (11)$$

где ρ — радиус (исчисляется от точки t_0 к текущей точке t); γ — угол между внешней нормалью в точке t_0 и радиусом ρ ; α — угол между внешней нормалью в текущей точке t и радиусом ρ (рис. 2).

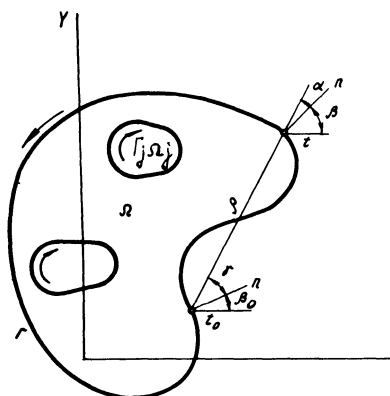


Рис. 2. Область Ω , контур границы Γ , геометрические параметры, входящие в интегральное уравнение.

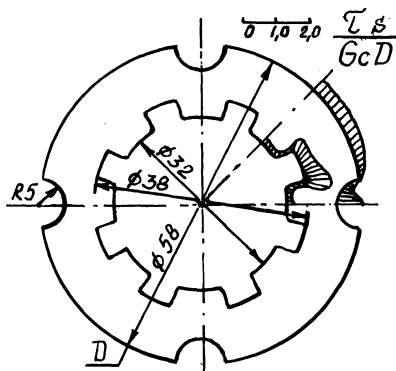


Рис. 3. Эпюра касательных напряжений при кручении хвостовика вала отбора мощности трактора МТЗ-82К.

Действительная часть последнего равенства и есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода для решения задачи кручения:

$$\tau_{s0} - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos \gamma}{\rho} \tau_s ds = -\frac{Gc}{\pi} \int_{\Gamma} \cos(\gamma+\alpha) ds. \quad (12)$$

Введем величину крутящего момента [6]:

$$M = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} r^2 \tau_s ds - Gc l_p,$$

где l_p — полярный момент инерции, $r^2 = x^2 + y^2$.

2. В стержнях многосвязного сечения при обходе внутренних контуров вводят условия однозначности осевых смещений по теореме Бредта о циркуляции касательного напряжения.

$$\int_{\Gamma_j} \tau_s ds = -2Gc \Omega_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

где Ω_j — площадь области, ограниченная контуром Γ_j ; n — количество контуров.

Для дальнейших выкладок вернемся к уравнению (12) и проанализируем его.

Будем множить интегральное уравнение (12) на ds_0 и интегрировать по контуру. Воспользуемся вспомогательной формулой (15), которая получается путем геометрической интерпретации $ds_0 \cos \gamma = \pm \rho d\alpha$, где α — полярный угол при точке t . Точка t в (12) является переменной, а при интегрировании по s_0 считается неподвижной

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos \gamma}{\rho} (t, s_0) ds_0 = \pm \frac{0}{2\pi}. \quad (15)$$

Нулевой результат соответствует положению точки t вне области, охваченной контуром; $\pm \pi$ — если точка t принадлежит контуру интегрирования, причем $+\pi$ — для внутреннего контура, а $-\pi$ — для наружного; -2π — если точка t находится внутри наружного контура интегрирования.

В случае односвязного сечения интегрирование (12) по наружному контуру приводит к (14), т.е. условие однозначности смещений вдоль оси стержня выполняется автоматически при решении интегрального уравнения.

В многосвязном случае интегрирование (12) по внутреннему контуру приводит к нулевому тождеству, что свидетельствует о наличии у интегрального уравнения (12) собственный функций.

Предложим следующее: при нулевой точке t_0 на наружном контуре оставим интегральное уравнение в прежней форме (12), а при t_0 на внутреннем контуре применим линейную комбинацию интегрального уравнения (12) и равенства (14):

$$-\pi \tau_{s0j} + \int_{\Gamma_j} \frac{\cos \gamma}{\rho} \tau_s ds + \frac{1}{\sqrt{\Omega_j}} \int_{\Gamma_j} \tau_s ds = 2Gc \int_{\Gamma_j} \cos \gamma \cos \alpha - 2Gc \sqrt{\Omega_j}. \quad (16)$$

Повторяя приведенные выкладки с использованием формулы (15), можно убедиться, что в случае многосвязного сечения интегральное уравнение (16) обеспечивает выполнение условий однозначности смещений вдоль оси стержня при обходе каждого контура и тем самым решает задачу. Коэффициент $1/\sqrt{\Omega_j}$ при дополнительных членах в (16) может быть заменен произвольной константой или функцией t_0 . Возможность варьирования коэффициента была проверена и подтверждена численно.

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода (16) в целом представляет собой бесконечную систему равенств с каждой точкой границы Γ в качестве нулевой. При численном решении интегралы заменяются суммами, например по квадратурной формуле Гаусса, а бесконечная система становится конечной. Дело сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений τ_s в узловых точках.

3. На основе метода интегральных уравнений разработана программа "СЕН-ВЕНАН", предназначенная для решения задачи нестесненного кручения стержней многосвязного и односвязного поперечного сечения сложной конфигурации. Программа составлена на алгоритмическом языке "ФОРТРАН IV" ДОС ЕС ЭВМ. Объем памяти, занимаемой программой, позволяет использовать простую однофазную структуру программы. Время счета зависит от количества узловых точек на контуре и для приведенного в заключение примера составляет 2 мин на ЭВМ ЕС 1030. Большое внимание уделено вопросам эффективной численной реализации и удобства программы "СЕН-ВЕНАН" для пользователя. Геометрическая подготовка задачи — построение системы узловых точек на контуре в значительной степени автоматизирована. Участки окружностей и прямых представляются координатами крайних точек отрезков и кривизной. Специальные кривые вводят с помощью подпрограммы — функции вычисления координат.

Интегральное уравнение заменяется системой линейных алгебраических уравнений с помощью квадратурной формулы Гаусса. Порядок квадратурной формулы — целое число от 1 до 15. Решение системы линейных алгебраических уравнений выполняется методом исключения неизвестных (методом Гаусса) с экономией памяти ЭВМ. При несимметричной матрице системы используется массив оперативной памяти размерностью не $N \times N$, а примерно вдвое меньший (N — число уравнений в системе).

4. Для оценки точности численного метода решения и проверки правильности работы алгоритма был выбран ряд тестовых задач: задача Вебера (кручение круглого стержня с полукруглой выточкой), задачи Сен-Венана (кручение стержня с поперечным сечением в форме равностороннего треугольника, кручение прямоугольного стержня). Сделано сравнение некоторых имеющихся численных решений задачи кручения стержней двухсвязного поперечного сечения с решениями, выполненными по программе "СЕН-ВЕНАН". Полученные результаты позволили сделать вывод о высокой точности предлага-

гаемого метода. Так, погрешность распределений безразмерного касательного напряжения τ_x по сечению стержня квадратного сечения не превышает сотых долей процента при числе точек на контуре, равном 48.

Программа на протяжении ряда лет использовалась для расчета на кручение шлицевых валов с зубьями эвольвентного и прямобочного профиля, для определения коэффициентов концентрации валов со шпоночными канавками, а также кручение многосвязных профилей сложной конфигурации (валы с несимметрично расположенными отверстиями разных диаметров, кручение стержня прокатного профиля с поперечным сечением в виде "креста", ослабленного отверстием и другие).

Типичное применение программы показано на примере расчета хвостовика вала отбора мощности трактора МТЗ-82К (рис. 3). Результаты расчета подтверждают предположение работы [8] о том, что коэффициент концентрации в наиболее опасной точке контура Вебера (окружность с полукруглой выточкой) не зависит от формы контура поперечного сечения, ослабляемого выточкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А р у т ю н я н Н.Х., А б р а м я н Б.Л. Кручение упругих тел. — М., 1963.
2. Б е з у х о в Н.И., Л у ж и н О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. — М., 1974.
3. Д а н к е р т Ю., К о ч и к З. Решение задачи кручения с помощью метода конечных элементов. — В сб.: Динамика и прочность машин. Харьков, 1977, № 25.
4. У г о д ч и к о в А.Г., Д л у г а ч М.И., С т е п а н о в А.Е. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. — М., 1970.
5. Ш е р м а н Д.И. Об одной задаче кручения. — ДАН СССР, 1948, 63, № 5.
6. Т а т у р Г.К., Р у б е н ч и к В.Я. Расчет напряжений при кручении упругих призматических стержней. — Изв. АН БССР, сер. физ.-техн. наук, 1973, № 2.
7. М е н д е л ь с о н А., А л б е р с Л. Применение метода граничных интегральных уравнений для решения упруго-пластических задач. — В сб.: Метод граничных интегральных уравнений. М., 1978, № 15.
8. М е л ь н и к о в Ю.А. Кручение упругих цилиндрических тел поперечного сечения сложной формы. — В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск, 1976, № 21.
9. С у с л о в В.П., К о ч а н о в Ю.П., С п и х т а р е н к о В.Н. Строительная механика корабля и основы теории упругости. — Л., 1972.

УДК 539.311

Ю.А.КАШИН, Л.Г.КРАВЧЕНКО

РАВНОВЕСИЕ СТЕРЖНЯ С ОСВОБОЖДАЮЩИМИСЯ СВЯЗЯМИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

Упругие стержни являются одними из основных элементов конструкций, применяемых в современной технике. В задачах устойчивости тонких стержней и при исследовании их движения обычно рассматриваются свободные стержни. Этому посвящены работы Е.Л.Николаи, Е.П.Попова и др. [1,2]. По-

ведение же стержней при наличии освобождающих связей представляет практический и теоретический интерес и ранее не рассматривалось. Примером такого рода стержней с освобождающими связями является бурильная колонна, работающая в скважине. В этом случае свобода перемещений элементов бурильной колонны ограничена. Подкрепляющие действия стенок существенно влияют на силовые параметры, воспринимаемые и принимаемые бурильной колонной.

В данной статье рассматривается прямой стержень длиной L , сжимаемый концевыми силами, по линии действия которых могут сближаться его концы, имеющие шарнирное закрепление. Как известно, при концевых осевых силах, превышающих первую критическую силу P_1^* , свободный стержень теряет устойчивость и искривляется в плоскости наименьшей изгибной жесткости. Положим, что на стержень наложены связи, ограничивающие его прогиб $w : w \leq h$. Такие связи можно осуществить, поместив, например, стержень в плоскую щель с зазором h между стенками стержня и опорными поверхностями. Зазор h будем считать достаточно малым для справедливости последующих рассуждений, опорные поверхности — гладкими и жесткими. Задачу исследования возможных форм равновесия стержня и определения реакций связей будем решать, сформулировав ее как краевую задачу для дифференциальных уравнений равновесия.

В качестве уравнений равновесия будем использовать соотношения балки Тимошенко, которые в локальной системе координат, связанной с естественным триэдром кривой, можно представить в виде:

$$P_\tau = G_1 \varepsilon ; \quad P_n = G_2 \gamma ; \quad M = G_3 \Omega ; \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_\tau}{dS} - P_n \frac{d\varphi}{dS} + q_\tau &= 0 ; \\ \frac{dP_n}{dS} + P_\tau \frac{d\varphi}{dS} + q_n &= 0 ; \\ \frac{dM}{dS} + P_n &= 0 ; \\ \frac{dx_1}{dS} = \cos \varphi ; \quad \frac{dx_2}{dS} = \sin \varphi ; \quad \frac{d(\varphi - \gamma)}{dS} &= \Omega . \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь G_1, G_2, G_3 — жесткости балки на растяжение, сдвиг и изгиб соответственно; $\varepsilon, \gamma, \Omega$ — относительное удлинение, сдвиг и кривизна стержня; P_τ, P_n — растягивающая и перерезывающая упругие силы; M — упругий изгибающий момент; q_τ, q_n — проекции вектора распределенной внешней силы $\vec{q}$ на касательную и главную нормаль упругой линии; $x_1(S), x_2(S)$ — ко-

ординаты точек упругой линии в инерциальной системе отсчета; S — дуга осевой линии стержня.

Положим, что упругая линия является плоской кривой $OABC$, состоящей из двух дуг OA и BC и прямолинейного отрезка AB непрерывного контакта стержня с опорной поверхностью (рис. 1). При идеальных связях $q_\tau = 0$; $q_n = q$ и уравнения (1), (2) можно записать в виде:

$$\varepsilon = \frac{P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi}{G_1}; \quad \gamma = \frac{-P_1 \sin \varphi + P_2 \cos \varphi}{G_2}; \quad M = G_3 \Omega; \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dS} + \frac{P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi}{G_2} \cdot \frac{d\varphi}{dS} + \frac{q}{G_2} &= 0; \\ \frac{d\Omega}{dS} + \frac{-P_1 \sin \varphi + P_2 \cos \varphi}{G_3} &= 0; \\ \frac{d(\varphi - \gamma)}{dS} = \Omega; \quad \frac{dx_1}{dS} = \cos \varphi; \quad \frac{dx_2}{dS} = \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где P_1, P_2 — проекции упругой силы P на оси координат в инерциальной системе отсчета.

Выберем начало координат O на неподвижном шарнире и направим ось Ox_1 вдоль оси недеформированного стержня. Тогда имеем ограничение

$$x_2 \leq h, \quad (5)$$

а краевые условия задаются соотношениями:

$$\text{при } S=0 \quad x_1 = x_2 = 0, \quad \Omega = 0; \quad \text{при } S=L \quad x_2 = 0, \quad \Omega = 0. \quad (6)$$

Таким образом, для получения результата необходимо решить систему дифференциальных уравнений (4) с краевыми условиями (6), ограничением (5) при соотношениях (3). Здесь величины P_1, h, G_1, G_2, G_3 являются параметрами.

Рассмотрим вначале равновесие стержня на участке OA при $S \in [0, l_1]$, где l_1 — искомая дуговая координата точки A . Здесь $\vec{q} = 0, \vec{P} = \text{const}$ и, следовательно, постоянны P_1 и P_2 . Пусть R_1 — заданная сжимающая сила ($R_1 > P_1^*$); $\vec{R} = R_1 \vec{e}_1 + R_2 \vec{e}_2$ — реакция шарнира O . Тогда при $S \in [0, l_1]$ упругая сила $\vec{P} = -\vec{R}$ и $P_1 = -R_1, P_2 = -R_2$. Обозначим θ — угол, образуемый силой $\vec{R}$ с осью Ox_1 и введем систему прямоугольных координат $Ox'_1 x'_2$, повернутую на угол θ относительно системы $Ox_1 x_2$. При этом

$$P'_2 = 0; \quad P'_1 = -\frac{R_1}{\cos \theta} \quad (\cos \theta \neq 0).$$

Полагая, что углы φ, γ определяются в системе $Ox_1^1 x_2^1$, и пренебрегая величиной $\epsilon \frac{G_1}{G_2}$ как малой сравнительно с единицей, уравнения (3), (4) можно привести к виду:

$$\epsilon = -\frac{R_1 \cos \varphi}{G_1 \cos \theta} ; \quad \gamma = \frac{R_1 \sin \varphi}{G_2 \cos \theta} ; \quad M = G_3 \Omega ; \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dS^2} + \frac{\omega^2}{\cos \theta} \sin \varphi &= 0 ; \\ \frac{dx_1^1}{dS} &= \cos \varphi ; \quad \frac{dx_2^1}{dS} = \sin \varphi , \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $\omega^2 = \frac{R_1}{G_3}$.

Краевые условия для этой системы задаются соотношениями:

при $S = 0 \quad x_1^1 = x_2^1 = 0 ; \quad \frac{d\varphi}{dS} = 0 ;$ при $S = l_1 \quad \varphi = -\theta$. (9)

Кроме того, поскольку при $S = l_1 \quad x_2 = h$, то

$$x_1^1 \sin \theta + x_2^1 \cos \theta = h \quad (\text{при } S = l_1). \quad (10)$$

Понижая порядок первого уравнения системы (8) и интегрируя его, находим

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dS} = \frac{-2\omega}{\sqrt{\cos \theta}} \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} , \quad (11)$$

где $\kappa = \sin \frac{\varphi_0}{2}$ — постоянная интегрирования. По формуле

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \kappa \sin \Psi \quad (12)$$

вводим новую переменную Ψ . При $S = 0 \sin \Psi = 1$ и, следовательно, можно положить $\Psi_0 = \frac{\pi}{2}$, Равенство

$$\frac{\omega}{\sqrt{\cos \theta}} dS = - \frac{d\Psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Psi}} \quad (13)$$

показывает, что $\frac{d\Psi}{dS} < 0$, т.е. функция $\Psi = \Psi(S)$ является убывающей. Интегрируя (13), находим

$$\frac{\omega S}{\sqrt{\cos\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Psi}} - \int_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Psi}}. \quad (14)$$

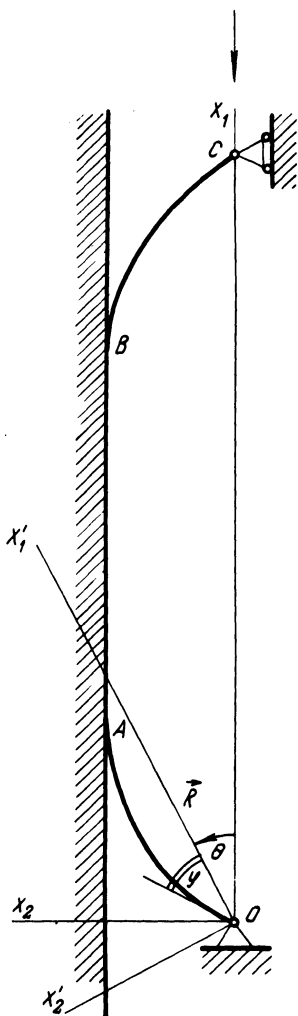


Рис. 1.

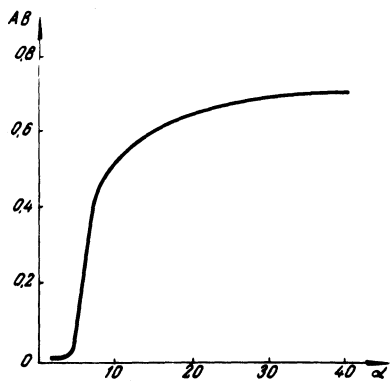


Рис. 2.

В последующем анализе будем использовать функции Якоби [4]. Обозначим

$$u = \int_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Psi}} = F(\Psi, \kappa); \quad F\left(\frac{\pi}{2}, \kappa\right) = F;$$

$$E(\Psi, \kappa) = \int_0^{\Psi} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Psi} d\Psi; \quad E\left(\frac{\pi}{2}, \kappa\right) = E;$$

$$\Psi = \operatorname{am} u; \quad \sin \Psi = \operatorname{sn} u; \quad \cos \Psi = \operatorname{cn} u; \quad \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Psi} = \operatorname{dn} u.$$

При этих обозначениях уравнение (14) примет вид

$$u = F - \frac{\omega S}{\sqrt{\cos \theta}}, \quad (15)$$

причем при $S = 0$ $u_0 = F$; при $S = l_1$ $u_1 = F - \frac{\omega l_1}{\sqrt{\cos \theta}}$. Используя известные соотношения для эллиптических функций [5], уравнение (10) приводим к виду

$$2\kappa \sqrt{1 - 2\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u_1} \left\{ (1 - 2\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u_1) \operatorname{cn} u_1 - \operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_1 [u_1 - F - 2E(\operatorname{am} u_1, \kappa) + 2E] \right\} - h \omega = 0. \quad (16)$$

При $Sc[l_1, l_2]$ упругая линия является отрезком прямой AB ($\varphi = 0$, $x_2 = h$) и уравнения (3), (4) преобразуются к виду:

$$\epsilon = \frac{P_1}{G_1}; \quad \gamma = \frac{P_2}{G_2}; \quad M = \Omega G_3; \quad (17)$$

$$\frac{d\gamma}{dS} + \frac{q}{G_2} = 0; \quad \frac{d\Omega}{dS} + \frac{P_2}{G_3} = 0; \quad \frac{d\gamma}{dS} + \Omega = 0. \quad (18)$$

После исключения P_2 , Ω последние два равенства дают

$$\frac{d^2 \gamma}{dS^2} - \lambda^2 \gamma = 0, \quad (19)$$

где $\lambda^2 = \frac{G_2}{G_3}$.

Начальные условия для этого уравнения следующие:

$$\text{при } S = l_1 \quad \gamma = \frac{\omega^2}{\lambda^2} \cdot \frac{2\kappa \operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_1}{1 - 2\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u_1} ; \quad \frac{d\gamma}{dS} = -\frac{2\kappa\omega \operatorname{cn} u_1}{\sqrt{1 - 2\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u_1}}.$$

Найдя решение уравнения (19), удовлетворяющего этим условиям, и из свойства симметрии принимая, что при $S = \frac{L}{2} \quad \gamma = 0$, получаем равенство

$$\operatorname{th} \left\{ \left[\frac{L}{2} - \frac{\sqrt{1 - 2\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u_1}}{\omega} (F - u_1) \right] \lambda \right\} + \frac{\omega}{\lambda} \frac{\operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_1}{\sqrt{1 - 2\kappa^2 \operatorname{sn}^2 u_1}} = 0.$$

Это равенство совместно с уравнением (16) образует систему двух уравнений относительно неизвестных κ, u_1 . Величины ω, h, λ, L являются в этих уравнениях параметрами. Возвращаясь к прежним переменным, эту систему приводим к виду

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\kappa, \beta, \omega, h) &= 2\kappa\sqrt{1 - 2\kappa^2 \sin^2 \beta} \left\{ (1 - 2\kappa^2 \sin^2 \beta) \cos \beta - \sin \beta \right. \\ &\quad \times \left. \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \beta} [F(\beta, \kappa) - F - 2E(\beta, \kappa) + 2E] \right\} - h\omega = 0 ; \\ \Phi_2(\kappa, \beta, \omega, \lambda, L) &= \operatorname{th} \left\{ \lambda \left[\frac{L}{2} - \frac{\sqrt{1 - 2\kappa^2 \sin^2 \beta}}{\omega} (F(\beta, \kappa) - F) \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{\omega}{\lambda} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \frac{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \beta}}{\sqrt{1 - 2\kappa^2 \sin^2 \beta}} = 0, \text{ где } \beta = \Psi \Big|_{S=l_1} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Эта система трансцендентных уравнений допускает лишь численное решение, которое будет приведено ниже для некоторых значений параметров. Определив значения κ и β по заданным значениям ω, λ, h, L из системы (20), находим реакцию в соответствии с первым уравнением системы (18):

$$q = -G_2 \frac{d\gamma}{dS} = -2G_2 \kappa \omega \left[\frac{\cos \beta \operatorname{ch} \lambda (S - l_1)}{\sqrt{1 - 2\kappa^2 \sin^2 \beta}} + \frac{\omega}{\lambda} \frac{\sin \beta \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \beta}}{1 - 2\kappa^2 \sin^2 \beta} \operatorname{sh} \lambda (S - l_1) \right]. \quad (21)$$

Распределенная реакция q имеет экстремальное значение q^* в точке, где

$$\frac{dq}{dS} = -G_2 \frac{d^2 \gamma}{dS^2} = -\lambda^2 G_2 \gamma = 0. \text{ Согласно принятому, } \gamma = 0 \text{ при } S = \frac{L}{2} \text{ и, сле-}$$

Таблица 1.

h	H	ω^*	κ	β
0,07	0,04	23,6280	0,42183	-1,13852
0,075	0,03	21,8023	0,41332	-1,25350
0,08	0,02	20,6280	0,40826	-1,36450
0,085	0,01	19,4968	0,40502	-1,47196
0,087	0,006	19,0659	0,40463	-1,51263
0,0895	0,001	18,5407	0,40475	-1,56608
0,08995	0,0001	18,4500	0,40484	-1,56986

довательно, здесь имеем экстремальное значение q^* . Выполнив необходимый анализ, имеем, что q^* есть максимум функции q . Методом от противного показывается, что реакция $q(S)$ на отрезке $[l_1, l_2]$ непрерывного контакта стержня с опорной поверхностью отрицательна и не меняет на нем свой знак, т.е. реакция всюду направлена только в сторону освобождения стержня от связи. Эта функция наибольшее по модулю значение имеет на границах отрезка $[l_1, l_2]$.

Для определения максимального значения внешней нагрузки $N_1 = \sup R_1$ в системе (20) наряду с κ и β считаем переменной и величину ω . Варьируя переменные, получаем равенство

$$\Phi_3(\kappa, \beta, \omega^*, \lambda, L, h) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \kappa} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \kappa}, \quad (22)$$

которое совместно с соотношениями (20) образует систему трех трансцендентных уравнений для нахождения экстремального (максимального) значения ω^* и соответствующих ему значений величин κ и β . Вычислив ω^* , находим $N_1 = \omega^{*2}$.

В заключение приведем некоторые результаты численных расчетов, которые были выполнены на ЭВМ по программам, составленным на языке ФОРТРАН для ЭВМ "Минск-32" и "ЕС". В табл. 1 приведены численные значения системы (20), (22), найденные методом Ньютона [6] для значений параметров $L = 1$ м, $\lambda = \frac{2\sqrt{2}}{H}$, H — толщина стержня.

На рис. 2 изображен график зависимости длины участка АВ непрерывного контакта стержня с опорной поверхностью от коэффициента $\alpha = R_1/P_1^*$ превышения критической нагрузки для значений параметров $h = 0,08$, $H = 0,02$ м, $L = 1$ м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ник о л а и Е.Л. Труды по механике. — М., 1955.
2. П о п о в Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. — Л., 1948.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

В настоящее время в гидродинамике жидких кристаллов используются различные варианты феноменологического подхода, детальное сопоставление которых проведено в обзоре [1]. Представляется важным сопоставить основные результаты недавно развитой статистической гидродинамики жидких кристаллов [2,3] и гидродинамики, основанной на феноменологическом рассмотрении [1].

Прежде всего отметим, что в статистической теории все параметры определены систематически и последовательно как средние значения соответствующих молекулярных величин и тем самым устанавливается связь макроскопических и микроскопических параметров.

В феноменологических теориях, учитывающих средние повороты молекул на основе понятия директора, имеются серьезные трудности в обосновании уравнения движения директора с помощью фундаментального закона сохранения момента импульса [4]. В статистической теории собственный момент импульса среды определяется в виде среднего значения плотности динамической величины момента импульса, которая выражается через моменты импульсов молекул, обусловленных их собственным вращением. Это позволяет строгим и естественным образом установить уравнение движения для собственного момента импульса среды. При этом отмеченные выше трудности феноменологического подхода автоматически исключаются.

В отличие от феноменологической теории Лесли-Эриксона в статистической теории учитываются все три вращательные степени свободы частиц, образующих жидкокристаллическую среды. Описание средних поворотов молекул осуществляется с помощью ортогональной матрицы поворота $\alpha_{ik}(\vec{x})$, содержащей три независимых параметра [2,3]. Матрица поворота определена как среднее значение соответствующей динамической величины, выражаемой через матрицы поворота отдельных молекул.

Описание средних поворотов с помощью матрицы поворота согласуется с описанием поворотов в феноменологической гидродинамике нематических жидких кристаллов, развитой Ли и Эрингеном [5]. Отметим имеющееся и здесь различие. В теории Ли-Эрингена матрица поворота определена как функция лагранжианов переменных, в то время как в статистической теории матрица $\alpha_{ik}(\vec{x})$ является функцией переменных Эйлера.

Небезынтересно сопоставить строгое и приближенное описание средних поворотов молекул. Для этого учтем, что матрицу поворота можно представить в виде [6]

$$\alpha_{ik} = \cos \varphi \delta_{ik} + (1 - \cos \varphi) n_i n_k - \sin \varphi e_{ikp} n_p, \quad (1)$$

где φ — средний угол поворота молекул вокруг единичного вектора n_i (директора), ориентированного по направлению упорядоченности длинных осей молекул; e_{ikp} — тензор Леви-Чивита.

Вычисляя на основе (1) тензор ориентационной деформации [2,3],

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{2} e_{msl} \alpha_{sk} (\partial \alpha_{lk} / \partial x_n), \quad (2)$$

получим

$$\gamma_{mn} = n_m (\partial \varphi / \partial x_n) + \sin \varphi (\partial n_m / \partial x_n) + (1 - \cos \varphi) \gamma_{mn}^A \quad (3)$$

При этом

$$\gamma_{mn}^A = e_{mst} n_s (\partial n_t / \partial x_n) \quad — \quad (4)$$

тензор ориентационной деформации, введенный в работе [7]. Тензор γ_{mn}^A характеризует ориентационные деформации при описании средних поворотов в рамках представления о директоре. Формулой (3) устанавливается соотношение между точным и приближенным описанием ориентационной деформации.

Тензор γ_{mn} совпадает с γ_{mn}^A в предположении, что $\sin \varphi = \cos \varphi = 0$, а также, что φ не зависит от $\vec{x}$. Непосредственное обоснование равенства $\sin \varphi = \cos \varphi = 0$ невозможно. Переход от γ_{mn} к γ_{mn}^A может быть оправдан, если считать, что угол φ распределен равновероятно, и провести дополнительное усреднение тензора γ_{mn} (3) по возможным значениям φ . Тогда, принимая снова, что φ не зависит от $\vec{x}$ и учитывая, что $\langle \sin \varphi \rangle = \langle \cos \varphi \rangle = 0$ ($\langle \dots \rangle$ — символ равновероятного усреднения), получим

$$\langle \gamma_{mn} \rangle = \gamma_{mn}^A.$$

Таким образом, переход от точного к приближенному описанию связан с привлечением дополнительных соображений.

В связи с широким распространением теорий, основанных на упрощенной кинематике средних поворотов, представляется важным самостоятельное построение статистической гидродинамики жидких кристаллов на основе упрощенного рассмотрения средних поворотов молекул [8,9]. Важность этой задачи обусловлена также практической необходимостью получить достаточно простые уравнения гидродинамики. Существенно, что и в этом случае статистическая теория обладает преимуществом последовательности как при обосновании уравнений движения параметров состояния среды, так и при выводе материальных уравнений [8,9].

Как в рамках полного и строгого описания [2,3], так и при использовании упрощенной кинематики поворотов [8,9] статистическая теория определяет все материальные коэффициенты через параметры, характеризующие движение и взаимодействие молекул. Все равновесные материальные коэффициенты выражены через статические, а неравновесные материальные коэффициенты через временные корреляционные функции. Отмеченная особенность статистической теории является важным ее преимуществом по сравнению с феноменологическими теориями, где определение материальных коэффициентов находится вне рамок теории и связано с обращением к опыту.

В статистической теории в отличие от феноменологического подхода изучается также в линейном приближении релаксация ориентационной упорядоченности, характеризуемой тензором второго ранга [2,3]. Для времен релаксации получены статистические выражения, из которых следует возрастание некоторых времен релаксации в области фазового перехода из нематической в изотропную фазу.

Исключение внутренних релаксирующих параметров из полной системы уравнений движения среды приводит к уравнениям, в которых коэффициенты вязкости и другие коэффициенты обладают частотной дисперсией. Эта дисперсия проявляется в распространении звука и в других явлениях.

Возможно описание релаксационных явлений в жидких кристаллах и на основе феноменологического подхода [10]. Можно отметить в этой связи, что статистическая теория релаксации ориентационной упорядоченности появилась ранее [2, 11] феноменологической теории.

Для определения независимых материальных коэффициентов, образующих соответствующие тензоры, используются соображения симметрии и соотношения взаимности Онсагера. Важно отметить, что соотношения взаимности непосредственно следуют из выражений для тензоров кинетических коэффициентов, если учесть четность потоков, входящих в определение временных корреляционных функций, относительно обращения времени. При феноменологическом же рассмотрении соотношения взаимности привлекаются в качестве дополнительных соображений.

Выражения для материальных тензоров в статистическом подходе записаны в общем виде. Учитывая соображения симметрии, можно получить выражения для независимых материальных коэффициентов. В итоге независимые материальные коэффициенты представляются в виде линейной комбинации компонент соответствующих материальных тензоров.

Так как иногда встречается непонимание процедуры перехода к независимым материальным коэффициентам [12], рассмотрим в заключение их определение. Ограничимся расчетом коэффициентов вязкости на основе статистического выражения для тензора коэффициентов вязкости a_{ijkl} .

Так как нематический жидкий кристалл обладает симметрией группы ∞/m , то с учетом соотношений взаимности $a_{ijkl} = a_{klij}$ тензор коэффициентов вязкости представляется в виде

$$a_{ijkl}=a_1 \delta_{ij} \delta_{kl}+a_2 \delta_{ik} \delta_{jl}+a_3 \delta_{il} \delta_{jk}+a_4 (\delta_{ij} e_k e_l + \delta_{kl} e_i e_j + \\ + a_5 \delta_{ik} e_j e_l + a_6 (\delta_{il} e_j e_k + \delta_{ik} e_l e_j) + a_7 \delta_{jl} e_i e_k + a_8 e_i e_j e_k e_l, \quad (5)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; e_i — единичный вектор, направленный вдоль оси симметрии однодоменного образца; a_i — коэффициенты вязкости.

Отметим, что без учета соотношений взаимности вид тензора четвертого ранга для среды, обладающей симметрией группы $\infty/m\bar{m}$, приведен в работе [13] и определяется десятью независимыми коэффициентами. Использование соотношений взаимности уменьшает число коэффициентов с 10 до 8.

Выразим комбинации компонентов тензора a_{ijkl} через коэффициенты вязкости с помощью соотношений:

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 &= a_{iikk} = 9a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 6a_4 + a_5 + 2a_6 + a_7 + a_8; \\ A_2 &= a_{kja j} = 3a_1 + 9a_2 + 3a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 2a_6 + 3a_7 + a_8; \\ A_3 &= a_{ijji} = 3a_1 + 3a_2 + 9a_3 + 2a_4 + a_5 + 6a_6 + a_7 + a_8; \\ A_4 &= a_{iikl} e_k e_l + a_{ijkk} e_i e_j = 6a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 8a_4 + 2a_5 + 4a_6 + 2a_7 + 2a_8; \\ A_5 &= a_{ijil} e_j e_l = a_1 + 3a_2 + a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 2a_6 + a_7 + a_8; \\ A_6 &= a_{ijk l} e_j e_k + a_{ijjl} e_i e_l = 2a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 2a_5 + 8a_6 + 2a_7 + 2a_8; \\ A_7 &= a_{ijkj} e_i e_k = a_1 + 3a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 + 2a_6 + 3a_7 + a_8; \\ A_8 &= a_{ijk l} e_i e_j e_k e_l = a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 + 2a_6 + a_7 + a_8. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Здесь для кратности через A_i обозначены соответствующие комбинации компонент тензора a_{ijkl} .

Решая систему уравнений (6) относительно a_i , получим искомые выражения коэффициентов вязкости через компоненты тензора a_{ijkl} , который определен статистически в виде интеграла по времени от временной корреляционной функции потоков импульса [2,3]. Упомянутые выражения таковы:

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{8} (3A_1 - A_2 - A_3 - 3A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8); \\ a_2 &= \frac{1}{8} (-A_1 + 3A_2 - A_3 + A_4 - 3A_5 + A_6 - 3A_7 + A_8); \\ a_3 &= \frac{1}{8} (-A_1 - A_2 + 3A_3 + A_4 + A_5 - 3A_6 + A_7 + A_8); \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{8} (-3A_1 + A_2 + A_3 + 5A_4 - A_5 - A_6 - A_7 - 5A_8); \\ a_5 &= \frac{1}{8} (A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4 + 7A_5 - A_6 + 3A_7 - 5A_8); \\ a_6 &= \frac{1}{8} (A_1 + A_2 - 3A_3 - A_4 - A_5 + 5A_6 - A_7 - 5A_8); \\ a_7 &= \frac{1}{8} (A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4 + 3A_5 - A_6 + 7A_7 - 5A_8); \\ a_8 &= \frac{1}{8} (A_1 + A_2 + A_3 - 5A_4 - 5A_5 - 5A_6 - 5A_7 + 35A_8). \end{aligned} \right. \quad (7)$$

В предельном случае изотропной среды $\langle e_i e_k \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ik}$, $A_4 = \frac{2}{3} A_1$, $A_5 = \frac{1}{3} A_2$; $A_6 = \frac{2}{3} A_3$; $A_7 = \frac{1}{3} A_2$; $A_8 = \frac{1}{15} (A_1 + A_2 + A_3)$.

Тогда

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{30} (4A_1 - A_2 - A_3); \quad a_2 = \frac{1}{30} (-A_1 + 4A_2 - A_3); \\ a_3 &= \frac{1}{30} (-A_1 - A_2 + 4A_3), \end{aligned} \right. \quad (8)$$

а все остальные коэффициенты вязкости обращаются в нуль.

Подобным на основе статистического определения тензора модулей ориентационной упругости K_{ijkl} получаются выражения для четырех констант Франка. При этом нужно учесть, что при упрощенном описании ориентации $e_{ik}^A = 0$. Тензор k_{ijlm} , содержащий константы Франка, представляется через тензор K_{njsm} [1]:

$$k_{ijlm} = K_{nksm} (\delta_{ni} - e_n e_i) (\delta_{sl} - e_s e_l), \quad (9)$$

причем тензор K_{nksm} имеет вид (6) и выражается через восемь независимых констант, для которых справедливы соотношения типа (8). Тензор k_{ijlm} включает четыре независимых комбинации k_{11} , k_{22} , k_{33} , k_{24} — константы Франка.

В данной работе ограничимся приведенными результатами сравнения двух типов теории, более детальное сопоставление является предметом последующих публикаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. А э р о Э.Л., Бу л ы г и н А.Н. Гидромеханика жидких кристаллов. — В сб.: Гидромеханика. М., 1973, т.7. 2. Н е м ц о в В.Б. Статистическая теория гидродинамических и кинетических процессов в жидких кристаллах. — ТМФ, 25, 1975, № 1.

3. N e m t s o v V.B. Statistical Hydrodynamics of cholesteric Liquid Crystals. —Physica, **86A**, 1977.
4. L e e J.D. and E r i n g e n A.C. Relations of Two Continuum Theories of Liquid Crystals. In: Liquid Crystals and Ordered Fluids, vol. 2, Plenum Press, N.Y.1973.
5. L e e J.D. and E r i n g e n A.C. Wave Propagation in Nematic Liquid Crystals. — J.Chem.Phys. **54**, N 12, 1971.
6. В а р ш а л о в и ч Д.А., М о с к а л е в А.Н., Х е р с о н с к и й В.К. Квантовая теория углового момента. —Л., 1975.
7. А з р о Э.Л., Б у л ы г и н А.Н. Кинематика нематических жидких кристаллов. — Прикладная механика, **8**, 1972, вып. 3.
8. Н е м ц о в В.Б. К статистическому обоснованию уравнений гидродинамики жидких кристаллов. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1977, вып. 4.
9. Н е м ц о в В.Б. Материальные уравнения для нематических и холестерических жидких кристаллов. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика, Минск, 1978, вып. 5.
10. H e s s S. Irreversible Thermodynamics of Nonequilibrium Alignment Phenomena in Molecular Liquid and in Liquid Crystal Z. Naturforsch, **30a**, 1975.
11. Н е м ц о в В.Б. К статистической теории параметров распространения звука в нематических жидких кристаллах. — Рефераты докладов VIII Всесоюзной акустической конференции. — М., 1973.
12. Л е в Б.И., Т о м ч у к П.М. О взаимосвязи феноменологического и микроскопического подходов в теории жидких кристаллов. — ТМФ, **32**, 1977, № 1.
13. Л о х и н В.А., С е д о в Л.И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. — ПММ, **27**, 1963, вып. 3.

УДК 532.135

Е.Н.ЛАМБИНА

О ПРИНЦИПЕ СООТВЕТСТВИЯ ДЛЯ МЕДЛЕННЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКО-УПРУГИХ ЛИНЕЙНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

В теории линейной вязко-упругости широко применяются принципы соответствия, позволяющие использовать решения задач теории упругости для получения соответствующих решений вязко-упругости [1...4]. Было замечено, что если применить к квазистатическим уравнениям вязко-упругости интегральное преобразование, то полученные при этом уравнения по форме будут совпадать с уравнениями теории упругости, если в последних заменить упругие постоянные изображениями некоторых зависящих от времени величин. Отсюда следовало, что если к решению статической задачи теории упругости применить интегральное преобразование, а затем в решении для изображений заменить упругие постоянные изображениями соответствующих величин вязко-упругой задачи, то решение вязко-упругой задачи может быть получено путем обратного преобразования, примененного к трансформированному таким образом уравнению для изображений. В дальнейшем принцип соответствия был сформулирован также для динамических задач теории вязко-упругости.

Упомянутые принципы соответствия применимы для задач деформируемого твердого тела и не вполне удобны для задач течения вязко-упругих жидкостей, поскольку постановка задач гидродинамики отлична от постановки задач теории упругости. Поэтому представляет интерес такая формулировка принципа соответствия, которая позволяла бы использовать решения задач течения вязкой жидкости.

Сформулируем в терминах преобразования Лапласа принцип соответствия для медленных течений вязко-упругих несжимаемых жидкостей с нулевыми начальными условиями (медленность течений позволяет линеаризовать задачи, пренебрегая квадратичными членами в выражениях для ускорений).

Уравнение состояния для вязко-упругой жидкости имеет вид

$$\mathbf{S} = 2 \int_0^t \mu(t - \tau) \dot{\mathbf{E}}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где $\mathbf{S}$ — девиатор напряжений; $\dot{\mathbf{E}}$ — девиатор скоростей деформации; $\mu(t)$ — функция релаксации.

Соответствующее уравнение для вязкой жидкости имеет вид

$$\mathbf{S} = 2\mu \dot{\mathbf{E}}, \quad (2)$$

где μ — коэффициент вязкости.

Линеаризованные уравнения движения и уравнение неразрывности одинаковы в обеих задачах.

Применим к (1) и (2) преобразование Лапласа.

Получим

$$\bar{\mathbf{S}} = 2\bar{\mu}(s) \cdot \bar{\dot{\mathbf{E}}} \quad (3)$$

для задачи течения вязко-упругой жидкости и

$$\bar{\mathbf{S}} = 2\mu \bar{\dot{\mathbf{E}}} \quad (4)$$

для задачи течения вязкой жидкости. Преобразованные уравнения движения и неразрывности будут одинаковыми в обеих задачах.

Уравнение (3) отличается от уравнения (4) заменой μ на $\bar{\mu}(s)$. Следовательно, решение для изображений вязко-упругой задачи будет отличаться от решения вязкой задачи также заменой μ на $\bar{\mu}(s)$. Поэтому принцип соответствия может быть сформулирован следующим образом.

Пусть известно решение A некоторой задачи медленного течения вязкой несжимаемой жидкости с нулевыми начальными условиями. Тогда для получения решения A' , соответствующей задаче вязко-упругой жидкости, следует:

1) применить к A преобразование Лапласа. При этом получим решение $\bar{A}$ для изображений;

2) применить преобразование Лапласа к функции релаксации $\mu(t)$. При этом получим изображение функции релаксации $\bar{\mu}(s)$;

3) заменить в $\bar{A}$ μ на $\bar{\mu}(s)$. При этом получим $\bar{A}'$;

4) применить к $\bar{A}'$ обратное преобразование Лапласа.

Для примера рассмотрим задачу погружения тонкой пластины в вязко-упругую максвелловскую жидкость. Пусть в момент времени $t=0$ в жид-

кость начинает опускаться с постоянной скоростью U неограниченная пластина. Требуется определить силу, действующую на пластину. Для вязкой жидкости [5]

$$F = \frac{4b}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mu \rho h U^3},$$

где b — ширина пластины; h — глубина погружения. Поскольку $h = Ut$, получим

$$F = \frac{4bU^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mu t}.$$

Используя таблицы обратных преобразований Лапласа [6], определяем:

$$\bar{F} = 2bU^2 \sqrt{\rho \mu} s^{-\frac{3}{2}},$$

$$\mu(t) = Ge^{-\frac{G}{\eta}t}$$

$$\bar{\mu}(s) = \frac{G}{s + \frac{G}{\eta}}$$

$$\bar{F}' = 2bU^2 \sqrt{\rho G} \cdot s^{-\frac{2}{2}} \left(s + \frac{G}{\eta}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

и окончательно

$$F' = 2bU^2 \sqrt{\rho G} \cdot t e^{-\frac{G}{2\eta}t} \left[I_0\left(\frac{G}{2\eta}t\right) + I_1\left(\frac{G}{2\eta}t\right) \right].$$

Аналогично определяются и скорости.

З а м е ч а н и е 1. Рассмотренным способом могут быть получены и многие точные решения тех задач течения вязко-упругих жидкостей, где нелинейные члены в уравнениях движения тождественно равны нулю.

З а м е ч а н и е 2. Если начальные условия (скорости и напряжения при $t=0$) не равны нулю, то решение может быть получено суперпозицией двух течений: 1) установившегося течения с краевыми условиями, соответствующими краевым условиям исходной задачи в начальный момент времени; 2) неустановившегося течения с нулевыми начальными условиями. Значения скоростей или напряжений в краевых условиях для этого неустановившегося течения определятся из краевых условий исходной задачи вычетом их значений в начальный момент времени. Для неустановившегося течения в этом разложении может быть применен принцип соответствия.

З а м е ч а н и е 3. Если уравнение состояния задано в дифференциальной форме

$$P(D) \cdot S = Q(D) \cdot \epsilon \quad ,$$

то

$$P(s) \cdot \bar{S} = Q(s) \cdot \bar{\epsilon} = \frac{Q(s)}{s} \cdot \dot{\bar{\epsilon}} ; \quad \bar{S} = \frac{Q(s)}{s P(s)} \cdot \dot{\bar{\epsilon}}$$

и можно положить

$$\bar{\mu}(s) = \frac{Q(s)}{s \cdot P(s)} \quad .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. — М., 1965. 2. Кристенсен Р. Введение в вязко-упругость. — М., 1974. 3. Белоконь А.В. Некоторые принципы соответствия для динамических задач вязко-упругости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 6. 4. Ильюшин А.А., Победря В.Е. Основы математической теории термо-вязко-упругости. — М., 1970. 5. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. — М.—Л., 1951. 6. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М., 1970.

УДК 532.135

Е.Н.ЛАМБИНА

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

В [1] рассмотрено течение вязкой жидкости в смазочном слое между наклоненными друг к другу плоскостями (рис. 1). Верхняя пластина остается неподвижной, к нижней пластине в момент времени $t = 0$ прикладывается постоянная сила Q . Уравнение неподвижной границы задается выражением

$$h = h_0 \left(1 + k \frac{x}{a} \right).$$

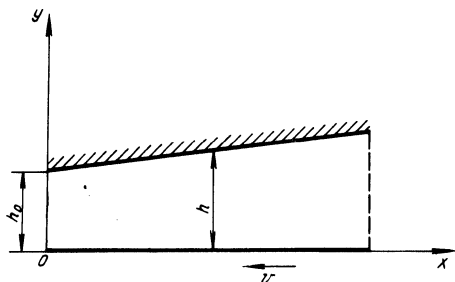


Рис. 1.

Задача решается в линейной постановке. Определяется давление P и касательное напряжение τ . Результаты (1) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 p - p_0 &= \frac{6ag}{k\alpha h_0} \left[\frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1} \left(1 - \frac{h_0^2}{h^2}\right) - 1 + \frac{h_0}{h} \right] W + \\
 &+ \frac{aq}{2k\alpha h_0} \left[b_2 \ln \frac{h}{h_0} - 6 \frac{b_2}{b_1} \left(1 - \frac{h_0^2}{h^2}\right) \right] W_1; \\
 \tau &= \frac{qh_0}{\alpha h} \left(4 - 3 \frac{b_2}{b_1} \frac{h_0}{h}\right) W + 3 \frac{b_2}{b_1} \frac{q}{\alpha} \frac{h_0^2}{h^2} W_1,
 \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}
 W &= 1 - \frac{\lambda + b - \alpha n}{2\lambda} e^{-\frac{(b-\lambda)\mu}{\rho h_0^2} t} - \frac{\lambda - b + \alpha n}{2\lambda} e^{-\frac{(b+\lambda)\mu}{\rho h_0^2} t} \\
 W_1 &= \frac{(\lambda + b - \alpha n)(b-\lambda)}{2\lambda} \left(e^{-\frac{(b-\lambda)\mu t}{\rho h_0^2}} - e^{-\frac{(b+\lambda)\mu t}{\rho h_0^2}} \right) + \\
 &+ \frac{(\lambda - b + \alpha n)(b+\lambda)}{2\lambda(b_1 - b - \lambda)} \left(e^{-\frac{(b-\lambda)\mu t}{\rho h_0^2}} - e^{-\frac{(b+\lambda)\mu t}{\rho h_0^2}} \right).
 \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (2)

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{4}{k} \ln(1+k) - \frac{6}{2+k}; & \beta &= \frac{4}{k} \ln(1+k); \\
 b_1 &= \frac{6(2k+k^2)}{(1+k)^2 \ln(1+k)}; & b_2 &= \frac{12k}{(1+k) \ln(1+k)}; \\
 b &= \frac{b_1}{2} + \frac{\beta n}{2}; & \lambda &= \sqrt{b^2 - b_1 \alpha n}; \\
 n &= \frac{\rho h_0 a H}{M},
 \end{aligned}$$

где H — ширина; M — масса пластины.

Перейдем к определению аналогичного течения вязко-упругой максвелловской жидкости с функцией релаксации

$$\mu(t) = G e^{-\frac{G}{\eta} t}$$

находим изображения по Лапласу $\bar{W}'$ и $\bar{W}_1'$ функций W' и W_1' :

$$\begin{aligned} \bar{W}' &= \frac{1}{s} - \frac{(\lambda + b - \alpha n)}{2\lambda} \frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{(b-\lambda)G}{\rho h_0^2}} - \\ &- \frac{(\lambda - b + n\lambda)}{2\lambda} \frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{(b+\lambda)G}{\rho h_0^2}}; \\ \bar{W}_1' &= \frac{(\lambda - b - \alpha n)(b - \lambda)}{2\lambda(b_1 - b + \lambda)} \cdot \left[\frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{(b-\lambda)G}{\rho h_0^2}} - \right. \\ &- \left. \frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{b_1 G}{\rho h_0^2}} \right] + \frac{(\lambda - b + n\alpha)(b + \alpha)}{2\lambda(b_1 - b - \lambda)} \times \\ &\times \left[\frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{(b+\lambda)G}{\rho h_0^2}} - \frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{b_1 G}{\rho h_0^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

К задаче применим принцип соответствия [2]. Отметим, что поскольку в формулах (2) коэффициенты при W и W_1 не зависят ни от t , ни от μ , определение $p-p_0$ и τ для вязко-упругой задачи сводится к определению функций W' и W_1' вязко-упругого течения, соответствующих функциям W и W_1 . Применив к (2) преобразование Лапласа и подставив в полученные выражения изображение функции релаксации

$$\bar{\mu}(s) = -\frac{G}{s + \frac{G}{\eta}}$$

Далее, используя таблицы обратных преобразований Лапласа для дробно-рациональных функций [3], определяем функции W' и W_1' . Получим

$$W' = 1 - \frac{(\lambda + b - \alpha n)}{2\lambda} e^{-\frac{G}{2\eta} t} \left(\operatorname{ch} \sqrt{d_{b-\lambda}} t + \frac{1}{\sqrt{d_{b-\lambda}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b-\lambda}} t \right) -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\lambda - b + \alpha n}{2\lambda} e^{-\frac{G}{2\eta} t} \times \left(\operatorname{ch} \sqrt{d_{b+\lambda}} t + \frac{1}{\sqrt{d_{b+\lambda}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b+\lambda}} t \right); \\
W'_1 = & \frac{(\lambda + b - \alpha n)(b - \lambda)}{2\lambda(b_1 - b + \lambda)} e^{-\frac{G}{2\eta} t} \times [\operatorname{ch} \sqrt{d_{b-\lambda}} t + \\
& + \frac{1}{\sqrt{d_{b-\lambda}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b-\lambda}} t - \operatorname{ch} \sqrt{d_{b_1}} t - \frac{1}{\sqrt{d_{b_1}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b_1}} t] + \\
& + \frac{(\lambda - b + \alpha n)(b + \lambda)}{2\lambda(b_1 - b - \lambda)} e^{-\frac{G}{2\eta} t} \times [\operatorname{ch} \sqrt{d_{b+\lambda}} t + \frac{1}{\sqrt{d_{b+\lambda}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b+\lambda}} t - \\
& - \operatorname{ch} \sqrt{d_{b_1}} t - \frac{1}{\sqrt{d_{b_1}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b_1}} t],
\end{aligned} \tag{4}$$

где
$$d_{b-\lambda} = 1 - \frac{4\eta^2(b-\lambda)}{\rho h_0^2 G};$$

$$d_{b+\lambda} = 1 - \frac{4\eta^2(b+\lambda)}{\rho h_0^2 G};$$

$$d_{b_1} = 1 - \frac{4\eta^2 b_1}{\rho h_0^2 G}.$$

Таким образом, давление p и касательное напряжение τ вычисляются по формулам (1): если в последних заменить W и W_1 на W' и W'_1 соответственно.

З а м е ч а н и я

1. Если величина $\frac{\rho h_0^2 G}{4\eta^2}$ больше какого-либо из чисел $b_1, b-\lambda, b+\lambda$,

то в формулах (4) соответствующие гиперболические функции заменяются тригонометрическими, например, при $d_{b_1} < 0$

$$\operatorname{ch} \sqrt{d_{b_1}} t + \frac{1}{\sqrt{d_{b_1}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b_1}} t = \cos \sqrt{-d_{b_1}} t + \frac{1}{\sqrt{-d_{b_1}}} \sin \sqrt{-d_{b_1}} t$$

и т.п. Следовательно, в вязко-упругой жидкости возможно возникновение затухающих колебаний.

2. При $t \rightarrow \infty$ распределение давления и касательного напряжения будет таким же, как в вязкой жидкости, поскольку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W' = \lim_{t \rightarrow \infty} W = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_1' = \lim_{t \rightarrow \infty} W_1 = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Т а р г С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. — М.—Л., 1951. 2. Л а м б и н а Е.Н. О принципе соответствия для медленных неустановившихся течений вязко-упругих линейных жидкостей (настоящий сборник). 3. К о р н Г. и К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М., 1970.

УДК 532.135

Б.И.ЛАПУШИНА

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ СБЛИЖАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ИЗМЕНЕНИИ СКОРОСТИ

Рассмотрим течение вязко-пластичной среды, описываемой реологическим уравнением

$$S = 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right) \dot{E}, \quad (1)$$

в тонком зазоре между круглыми параллельными дисками (рис. 1).

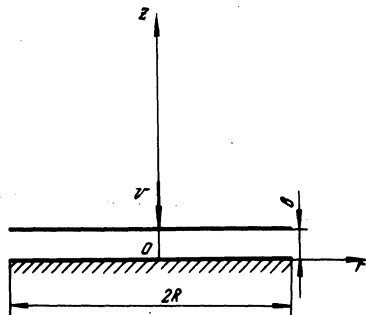


Рис. 1. Схема течения в зазоре.

Течение происходит за счет сообщения верхнему диску импульсного движения со скоростью v .

Уравнения движения запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{Div} S, \quad (2)$$

где S и E — девиаторы напряжений и скоростей деформации соответственно; η — пластическая вязкость; τ_0 — предельное напряжение сдвига; h — интенсивность скоростей деформации.

Конвективные члены не учитываем, массовыми силами пренебрегаем.

Уравнение неразрывности для несжимаемой среды

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (3)$$

Предполагается, что слой достаточно тонкий,

$$b \ll R. \quad (4)$$

Течение осесимметричное.

Граничными условиями для скоростей являются условия прилипания среды к поверхностям дисков:

$$\begin{aligned} v_r|_{z=0} = v_z|_{z=0} = v_r|_{z=b} = 0; \\ v_z|_{z=b} = -v \quad (t > 0). \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия для напряжений с учетом (4) можно записать в интегральной форме:

$$\int_0^b \sigma_r|_{r=R} \cdot dz = 0; \quad \int_0^b \sigma_z|_{r=R} dz = 0. \quad (6)$$

Начальные условия нулевые (в начальный момент времени скорости и напряжения равны нулю).

В [1] при рассмотрении стационарных течений вязко-пластичных сред показано, что в условиях сложного деформированного состояния сдвиг распространяется на всю область.

В настоящей задаче также делается предположение, что вязко-пластичное течение имеет место во всей области в зазоре.

Как и в случае течения вязко-упругой среды [2] учитывая, что $b \ll R$, и условие прилипания, полагаем

$$v_z = v_z(z), \quad (7)$$

что дает возможность ввести функцию тока в виде:

$$\psi = r^2 f, \text{ где } f = f(z, t). \quad (8)$$

Тогда компоненты скорости

$$v_r = rf'; \quad v_z = -2f. \quad (9)$$

Уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно.

Выражение для интенсивности скоростей деформации примет вид

$$h = \sqrt{12f'^2 + r^2 f''^2}. \quad (10)$$

Реологические соотношения (1) в цилиндрических координатах записываются в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma + 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right) f'; \\ \sigma_z &= \sigma - 4\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right) f'; \\ \sigma_\varphi &= \sigma_r; \\ \sigma_{rz} &= \left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right) rf''. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение с функцией тока в виде (8) является для модели Шведова-Бингама приближенным.

Рассмотрим область среды, значительно удаленную от оси по сравнению с толщиной зазора между дисками (так как $b \ll R$, этим исключается из рассмотрения небольшая часть области течения). Тогда слагаемые с множителем τ_0 в уравнениях движения будут малы и их можно отбросить. Обоснованность линеаризации утрачивается на срединной плоскости. Однако и здесь, а также в области, близкой к оси симметрии, из физических соображений и с учетом малой толщины слоя и условий прилипания слагаемые с множителем τ_0 , нарушающие совместность уравнений, полученных в предположении, что осевые скорости не зависят от r , можно не учитывать.

В результате линеаризации получаем приближенные уравнения, которые после преобразований примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial r} &= r\left(\rho \frac{\partial f'}{\partial t} - \eta f'''\right); \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 2(\eta f''' - \rho \frac{\partial f}{\partial t}). \end{aligned} \quad (12)$$

Составив условие совместности уравнений (12), получаем дифференциальное уравнение в частных производных

$$f'''' - \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial f''}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Применяя к этому уравнению интегральное преобразование Лапласа по переменной t и учитывая начальные условия

$$f|_{t=0} = f'|_{t=0} = f''|_{t=0} = f'''|_{t=0} = f''''|_{t=0} = 0, \quad (14)$$

получим для изображений дифференциальное уравнение

$$\bar{f}'''' - \frac{\rho s}{\eta} \bar{f}'' = 0 \quad (15)$$

с граничными условиями

$$\bar{f}'|_{z=0} = 0; \bar{f}'|_{z=b} = 0; \bar{f}|_{z=0} = 0; \bar{f}|_{z=b} = \frac{v}{2s}. \quad (16)$$

Решая и осуществляя обращение, получаем

$$f' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}' e^{st} ds.$$

Для вычисления интеграла определяем полюсы подынтегральной функции

$$\Phi(s) = \frac{v\kappa}{4s} \frac{[\operatorname{ch} \frac{\kappa b}{2} - \operatorname{ch} \kappa (z - \frac{b}{2})]}{\frac{\kappa b}{2} \operatorname{ch} \frac{\kappa b}{2} - \operatorname{sh} \frac{\kappa b}{2}} e^{st},$$

где $\kappa = \sqrt{\frac{\rho s}{\eta}}$.

При $s = 0$ будем иметь полюс первого порядка; вычет, соответствующий этому полюсу

$$A_0 = -\frac{3vz(b-z)}{b^3}. \quad (17)$$

Для определения остальных полюсов получаем уравнение

$$-\frac{\rho s_m b^2}{4\eta} + \xi_m^2 = 0.$$

Вычеты, соответствующие полюсам s_m , окончательно запишутся в виде

$$A_m = \frac{2v \sin \frac{z}{b} \xi_m \sin[(1 - \frac{z}{b}) \xi_m]}{b \xi_m \sin \xi_m} e^{-\frac{4\eta \xi_m^2 t}{\rho b^2}}. \quad (18)$$

Здесь ξ_m — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \xi = \xi$; $f'(z, t)$ определяем как сумму вычетов, а затем, проинтегрировав f' от нуля до z , находим $f(z, t)$:

$$\begin{cases} f'(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} f'_m(z, t); \\ f(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z, t), \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\begin{cases} f'_0(z, t) = \frac{3v(b-z)}{b^3}; \quad f_0(z, t) = v[\frac{3}{2} (\frac{z}{b})^2 - (\frac{z}{b})^3]; \\ f'_m(z, t) = \frac{2v \sin \frac{z}{b} \xi_m \sin(1 - \frac{z}{b}) \xi_m}{b \xi_m \sin \xi_m} e^{-\frac{4\eta \xi_m^2 t}{\rho b^2}} \\ f_m(z, t) = \frac{v}{2\xi_m^2} [1 - \frac{2z}{b} - \frac{\sin(1 - \frac{2z}{b}) \xi_m}{\sin \xi_m}] e^{-\frac{4\eta \xi_m^2 t}{\rho b^2}} \end{cases} \quad (20)$$

Формулы (19) справедливы при $t > 0$. При $t = 0$ с учетом начальных условий $f = 0$ и $f' = 0$.

Разрывность функции $f'(z, t)$ обусловлена импульсивной спецификой задачи. Подставляя найденные значения $f'(z, t)$ и $f(z, t)$ в (9), получаем формулы, определяющие поле скоростей.

Из решения следует, что интенсивность скоростей деформации найденного течения обращается в ноль только в двух точках: $r=0, z=0$ и $r=0, z=b$.

Среднее нормальное напряжение определим из уравнений (12), принимая во внимание близость нормальных компонент тензора напряжений к среднему нормальному напряжению.

Перепишем уравнения (12) в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = r \sum_{m=0}^{\infty} D'_m; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -2 \sum_{m=0}^{\infty} D_m,$$

где

$$D_m = \frac{\partial f_m}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} f_m'',$$

Проведя соответствующие вычисления, получаем

$$\sigma = -\frac{\rho}{6} (3R^2 - 3r^2 - 6bz + 6z^2 + b^2) \cdot K(t),$$

где

$$K(t) = \sum_{m=0}^{\infty} D'_m.$$

С учетом условия (4) приближенно получаем

$$\sigma = -\frac{\rho}{2} (R^2 - r^2) K(t). \quad (21)$$

Касательное напряжение определяем из соотношения

$$\sigma_{rz} = \left(\eta + \frac{\tau_0}{h} \right) r f'.$$

Для этого вычисляем интенсивность скоростей деформации по формуле (10), учитывая, что

$$f' = \sum_{m=0}^{\infty} f'_m(z, t); \quad f'' = \sum_{m=0}^{\infty} f''_m(z, t);$$

f'_m определяется из (20), а

$$f''_m = \frac{2v \sin \left(1 - \frac{2z}{b} \right) \xi_m}{b^2 \sin \xi_m} e^{-\frac{4\eta \xi_m^2 t}{\rho b^2}} -$$

Силу, действующую на подвижный диск, определяем по формуле

$$F = -2\pi \int_0^R r \sigma_{z|z=b} \cdot dr.$$

С учетом (21)

$$F = -\frac{1}{4} \pi \rho R^4 K(t). \quad (22)$$

Из полученного решения видно, что пластические свойства среды существенно влияют на касательные напряжения и в меньшей мере их влияние сказывается на распределении скоростей.

Если для вязко-упругих сред, рассмотренных в (2), предположение о независимости осевых скоростей от расстояния до оси совместно со всеми уравнениями задачи, то для вязко-пластичной среды это предположение выполняется приближенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. К и м А.Х. Некоторые вопросы реологии вязко-пластичных дисперсных систем. — Мн., 1960. 2. Л а м б и н а Е.Н., Л а п у ш и н а Б.И. Течение вязко-упругой среды наследственного типа между параллельными дисками при импульсном нагружении. — Весті: АН БССР, сер. фізика-энергетычных навук, 1978, № 1.

УДК 532.135:621.822

Ю.М.ПИКУС

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНОЙ СМАЗОЧНОЙ СРЕДЫ В КАПИЛЛЯРЕ

В настоящей статье в приближениях теории смазки рассматривается не-изотермическое течение нелинейно-вязко-пластичной жидкости Балкли-Гершеля в цилиндрическом капилляре со значительным отношением длины L_K к диаметру $2R_K$. Задача представляет интерес, в частности для расчета и исследования систем питания узлов трения с жидкостной смазкой, где используются дросселирующие элементы подобного типа.

Принятая реологическая модель

$$\tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}^n \quad (1)$$

описывает поведение при сдвиге широкого круга смазочных сред (пластичные смазки, масла с полимерными присадками, промышленные и другие ньютоновские масла, водные эмульсии) и соответственно обобщает ряд частных реологических моделей Шведова-Бингама (при $n=1$), Оствальда-де Вилля (при $\tau_0 = 0$), Ньютона (при $\tau_0 = 0, n = 1, k = \mu$). В уравнении (1) τ_0 — предел текучести; k — аналог вязкости; n — показатель ньютоновского поведения.

Учитывая соотношение $R_K/L_K \ll 1$ и используя безразмерный анализ, приведем уравнение неразрывности и движения в цилиндрической системе координат к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_r}{\partial z}; \\ \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}); \\ \tau_{rz} = \left(\frac{\tau_0}{l} + kl^{n-1}\right) \frac{\partial v_r}{\partial z}; \quad l = \frac{\partial v_r}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Уравнение энергии дополнительно представим в интегральной форме, положив, что температура изменяется только по длине капилляра, и, принимая во внимание, что диссипативное тепловыделение происходит только в области сдвигового течения, а другие источники тепла в потоке отсутствуют. Будем пренебрегать также теплопередачей в окружающую среду и осевой растечкой тепла, обусловленной теплопроводностью. В результате для стационарного процесса теплообмена получим

$$c_p \rho \frac{dT}{dz} \int_0^R v_z r dr = \int_0^R \left(\tau_{rz} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) r dr. \quad (3)$$

Условия на входе в капилляр при $z = 0$ — давление $p = p_H$, температура $T = T_H$, на выходе из капилляра при $z = L_K$ давление $p = p_K$.

Переменность реологических свойств среды учтем наиболее существенной пьезо-температурной зависимостью параметра k в форме

$$k = k_H \exp \left[\left(-\frac{T_H - T}{m} \right) + bp \right], \quad (4)$$

где k_H — значение k при $T = T_H$, $p = 0$; m и b — соответственно температурный и пьезо-коэффициенты.

При принятых допущениях $p = f(z)$, $T = f(z)$ можно использовать выражения для профиля скоростей v_z , полученные из изотермического решения [1], учитывая, что в них $k = f(z)$.

Подстановка v_z в интегральное уравнение неразрывности, выражающее расход Q смазочной среды, и в уравнение (3) и последующие преобразования с применением справедливого для практически реализуемых β ($\beta = \frac{2\tau_0}{R dp/dz}$) — приближения

$$\frac{(1-\beta)^{n+1} [(n+1)(1+2n+2n\beta) + 2n\beta^2]^n}{(n+1)^n (2n+1)^n} \approx 1 - \beta \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right)$$

дают выражения для градиентов давления и температуры

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{2(3n+1)\tau_o}{(2n+1)R_K} + \frac{2kQ^n(3n+1)}{(\pi n)^n R_K^{3n+1}}, \quad (5)$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{1}{c_p \rho} \frac{dp}{dz}. \quad (6)$$

Принимая во внимание, что $T = T_H$ при $p = p_H$, после интегрирования (6) найдем

$$T - T_H = \frac{1}{c_p \rho} (p_H - p). \quad (7)$$

Из совместного рассмотрения (4) — (6) с учетом (7) получим

$$\frac{dk}{dz} = \frac{2(3n+1)}{R_K} \left(b + \frac{1}{c_p \rho m} \right) \left[\frac{Q^n (3n+1)^{n-1} k^2}{(\pi n)^n R_K^{3n}} + \frac{\tau_o k}{(2n+1)} \right]. \quad (8)$$

Интегрирование (8) при граничном условии $k|_{z=0} = k|_{T=T_H, p=p_H} = k_H \exp(bp_H)$ приводит к следующей закономерности:

$$k = \frac{k_H \exp(bp_H)}{B_1 Q^H k_H [\exp(B_2 z) - 1] \exp(bp_H) + \exp(B_2 z)}, \quad (9)$$

где

$$B_1 = \frac{(3n+1)^{n-1} (2n+1)}{(\pi n)^n \tau_o R_K^{3n}}; \quad B_2 = \frac{2(3n+1)\tau_o}{(2n+1)R_K} \left(b + \frac{1}{c_p \rho m} \right).$$

Распределение давления $p = f(z)$ и зависимость расхода от давления на торцах определяются из уравнения (5) после введения (9). Решение его при граничных условиях $p = p_H$ при $z=0$; $p = p_K$ при $z = L_K$ и последующие преобразования дают

$$p = p_H - \frac{1}{\left(b + \frac{1}{c_p \rho m} \right)} \ln \left\{ \frac{\exp[(p_H - p_K) \left(b + \frac{1}{c_p \rho m} \right)] - \exp(B_2 L_K)}{\exp(B_2 L_K) - 1} x \right. \\ \left. x [\exp(B_2 z) - 1] + \exp(B_2 z) \right\}; \quad (10)$$

$$Q = \frac{1}{[B_1 k_H \exp(bp_H)]^{\frac{1}{n}}} \frac{1}{\left\{ \frac{\exp[(p_H - p_K) \left(b + \frac{1}{c_p \rho m} \right)] - \exp(B_2 L_K)}{\exp(B_2 L_K) - 1} \right\}^{\frac{1}{n}}} \quad (11)$$

Распределение температуры $T = f(z)$ находится подстановкой (10) в уравнение (7).

Нагрев жидкости при движении в капилляре равен

$$\Delta T = T|_{z=L_K} - T_H = \frac{P_H - P_K}{c_p \rho m} \quad (12)$$

Полученные выражения обобщают случаи течения линейно-вязко-пластичных ($n=1$), нелинейно-вязких ($\tau_0=0$) и ньютоновских ($\tau_0=0$, $n=1$, $k=\mu$) сред. Подобная задача с аналогичными допущениями для ньютоновской жидкости рассмотрена в работе [2], но при этом выбрана другая форма пьезотемпературной зависимости вязкости. Найденная авторами формула для гидравлического сопротивления капилляров получила экспериментальное подтверждение в опытах с ньютоновскими маслами. Уравнения (5), (7) при $k=\mu$, $n=1$, $\tau_0=0$ и аналогичные выражения из [2] совпадают. Хотя прямое сопоставление окончательных результатов невозможно из-за различной принятой формы зависимости вязкости, указанное согласование свидетельствует о непрерывной экспериментальной приемлемости исходных приближений, введенных при постановке задачи.

Представленные выше соотношения могут быть использованы для расчета с учетом любой из частных зависимостей реологических свойств (при пренебрежимой малости другой) — температурной (при $b \rightarrow 0$) или от давления (при $m \rightarrow \infty$). Они также совпадают (при $m \rightarrow \infty$, $b \rightarrow 0$) с известными формулами для расчета течения жидкостей с постоянными физическими свойствами [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. С м о л ь с к и й Б.М., Ш у л ь м а н З.И., Г о р и с л а в е ц В.М. Реодинамика и теплообмен нелинейно вязко-пластичных материалов. — Мн., 1970. 2. Т о д е р И.А. Т а р а б а е в Н.И. Крупногабаритные гидростатодинамические подшипники. — М., 1976.

УДК 532.135

А.Х.КИМ, Т.Ф.БОГИНСКАЯ

ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ЦИЛИНДРАХ НЕКРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

В работах [1,2] было получено уравнение течения вязко-пластичной системы в цилиндрах некруглого сечения в виде

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{(\pm \tau_0 + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial n})}{\rho} + \eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь τ_0 — предельное напряжение сдвига; η — пластическая вязкость; $\varphi(n) = V_z$ — скорость течения внутри цилиндра; n — внешняя нормаль к изолинии скорости $\varphi = \text{const}$. Было доказано, что если главная нормаль N и внешняя нормаль n по направлению совпадают, то $\rho > 0$. Если эти нормали направлены в противоположные стороны, то $\rho < 0$ (рис. 1); $\frac{\partial P}{\partial z}$ — градиент давления по длине трубы. Если начало координат $OXYZ$ взять при входе в трубу, а ось OZ направить параллельно оси трубы в сторону движения системы, то

$$\frac{\partial P}{\partial z} < 0.$$

Кроме того, доказано, что P является линейной функцией только от z

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -i.$$

Знак перед τ_0 должен совпадать со знаком нормальной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Если рассматривать течение в сплошном цилиндре, то $\frac{\partial \varphi}{\partial n} < 0$ и перед τ_0 нужно взять знак минус.

С помощью уравнения (1) А.Х.Кимом был разработан так называемый обратный метод решения задачи, сущность которого заключается в том, что задаются формой и размерами ядра сечения и находится соответствующий этому ядру контур поперечного сечения трубы. Неудобство этого метода заключается в том, что точность решения задачи зависит от первоначального выбора ядра сечения.

В нашей работе предлагается прямой метод решения задачи с помощью уравнения (1). Для этого направим нормаль n во внутрь изолинии скорости. Тогда уравнение (1) переписется в виде

$$i + \frac{(\tau_0 + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial n})}{\rho} + \eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} = 0. \quad (2)$$

Взяв точку, лежащую на контуре поперечного сечения трубы, за начало отсчета, разложим функцию $\varphi(n)$ в ряд по степеням Δn , полагая, что вследствие прилипания системы к твердой стенке $\varphi|_{n=0} = 0$

$$\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 \Delta n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}\right)_0 \Delta n^2 + \dots \quad (3)$$

Обозначим для краткости $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 = P_0$.

Величина P_0 является функцией от длины дуги нулевой изолинии S , т.е. в каждой точке контура имеется своя производная $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Из уравнения (2) найдем

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \right)_{n=0} = -\frac{i}{\eta} - \frac{(\tau_0 + \eta P_0)}{\eta \rho} \dots \quad (4)$$

Для определения P_0 исходим из того, что на контуре сечения трубы касательное напряжение достигает экстремально-максимального значения, т.е.

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial n} \right|_{n=0} = 0.$$

Так как $\tau = \tau_0 + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, то $\left. \frac{\partial \tau}{\partial n} \right|_{n=0} = \eta \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \right|_{n=0} = 0$. Подставляя это значение

в (4), имеем

$$P_0 = -\frac{1}{\eta} (\tau_0 + i\rho). \quad (5)$$

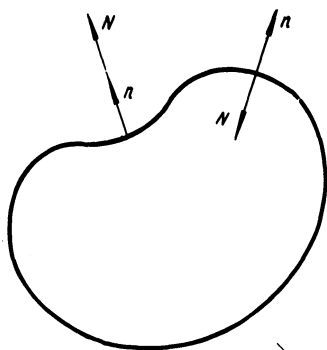


Рис. 1. Сечение некруглого цилиндра:
n — внешняя нормаль; N — главная.
нормаль.

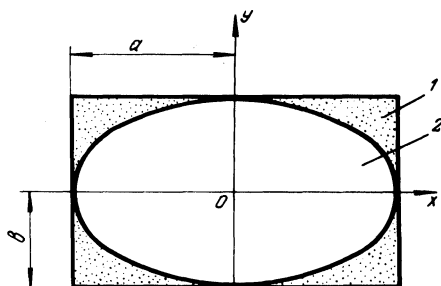


Рис. 2. Прямоугольное сечение цилиндра:
1 — застойная зона; 2 — зона вязко-
пластического течения.

Отсюда получаем минимальный радиус кривизны для участка, где $\rho < 0$

$$\left| \rho_{\min} \right| = -\frac{\tau_0}{i}.$$

Так как радиус кривизны является функцией от S , то и P_0 согласно (5) будет функцией от S . Теперь из (3) можно найти расстояние до первой изолинии скорости $\varphi = C_1$, (нулевой изолинией является контур поперечного сечения)

$$C_1 = P_0 \Delta n \quad \text{и} \quad \Delta n = \frac{C_1}{P_0},$$

Δn является функцией от S .

Если $y = f(x)$ есть уравнение контура, то уравнение изолинии $\varphi = C_1$ будет

$$y_1 = y + \Delta n \sin(nx);$$

$$x_1 = x + \Delta n \cos(nx).$$

Пользуясь этими уравнениями, можно найти радиус кривизны в каждой точке изолинии $\varphi = C_1$:

$$\rho_1 = \frac{(1 + y_1'^2)^{3/2}}{y_1''}.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}\right)_1 = -\frac{i}{\eta} \frac{(\tau_0 + \eta P_0)}{\eta \rho_1} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 = P_0 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}\right)_1 \Delta n$$

и разложив функцию в окрестности точки, лежащей на изолинии C_1 , получаем

$$C_2 = C_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 \Delta n_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}\right)_1 \Delta n_1^2.$$

Определив отсюда Δn_1 , найдем расстояние до второй изолинии и т.д. Этот

процесс должен продолжаться до тех пор, пока $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_s = 0$ или производная

$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ станет меньше 0. В качестве примера рассмотрим течение в цилиндре

прямоугольного сечения со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 2).

Допустим, что зона вязко-пластичного течения имеет вид эллипса $y = \sqrt{\alpha x^2 + \beta}$, $\alpha < 0$. При $x = a$ $y = 0$; $\beta = -\alpha a^2$;

$$y = \sqrt{\alpha(x^2 - a^2)}; \quad y' = \frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha(x^2 - a^2)}}; \quad y'(0) = 0;$$

$$y'' = \frac{\frac{\alpha^2 x^2}{\alpha \sqrt{\alpha(x^2 - a^2)}} - \sqrt{\alpha(x^2 - a^2)}}{\alpha(x^2 - a^2)} = \frac{\alpha^2(x^2 - a^2) - \alpha^2 x^2}{[\alpha(x^2 - a^2)]^{3/2}} =$$

$$= - \frac{\alpha^2 a^2}{[\alpha(x^2 - a^2)]^{3/2}} ;$$

$$\rho = \frac{[1 + y'^2]^{3/2}}{y''} = \frac{[x^2(\alpha^2 + \alpha) - \alpha a^2]^{3/2}}{-\alpha^2 a^2} ;$$

$$\rho_{\min} = - \frac{\tau_0}{i} = \frac{[a^2(\alpha^2 + \alpha) - \alpha a^2]^{3/2}}{\alpha^2 a^2} = \frac{a^3 \alpha^3}{\alpha^2 a^2} = \alpha a < 0,$$

$$\text{откуда } \alpha = - \frac{\tau_0}{i a} ; \quad y = \sqrt{\frac{\tau_0}{i a} (x^2 - a^2)} ; \quad y' = \frac{1}{y} = - \frac{\sqrt{\alpha(x^2 - a^2)}}{\alpha x} .$$

Зная y'_1 , можно найти уравнение нормали к эллипсу в каждой точке, радиус кривизны, а затем расстояние Δn до изолинии $\varphi = C_1$. Когда все изолинии построены и найдена изолиния $\varphi = V_{\max}$, являющаяся границей ядра сечения, то можно найти расход Q :

$$Q = V_{\max} F_d + \sum_{n=1}^m (F_{n-1} - F_n) \left(- \frac{C_n + C_{n-1}}{2} \right),$$

где F_d — площадь ядра сечения; F_0 — площадь, ограниченная нулевой изолинией; $C_m = V_{\max}$ — скорость ядра сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. К и м А.Х. Некоторые вопросы реологии вязко-пластичных дисперсных систем. — Минск, 1960. 2. К и м А.Х. Стационарное течение вязко-пластичного торфа в различных устройствах торфяных машин. Автореф. докт. дис. — Минск, 1966.

УДК 532.135.552.577

А.Х.КИМ, Э.А.ОРЕШКО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ У ТВЕРДЫХ СТЕНОК ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

В данной работе дается теоретическое определение линии скольжения у твердых стенок при движении вязко-пластичной системы в консуподобных резервуарах. Движущаяся масса предполагается несжимаемой, т.е. удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Вводим функцию тока $\psi(x,y)$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad V_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Линия $\psi(x,y)$ есть линия тока. При стационарном потоке абсолютная скорость в любой точке направлена по касательной к линии тока

$$\vec{V} \cdot \text{grad } \psi = 0.$$

Представим функцию тока в виде

$$\psi(x,y) = Cy[f(x,y)]^m, \quad (1)$$

где $f(x,y)$ — уравнение кривой (рис. 1); m — четный неизвестный коэффициент ($m = 2$).

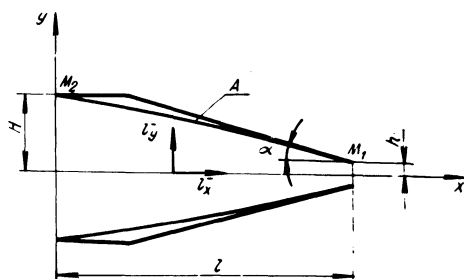


Рис. 1. Схема исследуемого насадка.

Представим $f(x,y)$ в виде

$$f(x,y) = y - H + \sum_{k=2}^n D_k x^k.$$

Кривую

$$y = H - \sum_{k=2}^n D_k x^k \quad (2)$$

представим таким образом, чтобы она проходила через точки M_1 и M_2 по касательной к стенкам сосуда:

1) при $x = 0, y = H$;

2) при $x = l, y = h$;

$$h = H - \sum_{k=2}^n D_k l^k. \quad (3)$$

Из (2)

$$\frac{dy}{dx} = - \sum_{k=2}^n D_k k x^{k-1};$$

$$3) \text{ при } x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$4) \text{ при } x = l, \quad y = h;$$

$$\frac{dy}{dx} = - \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\sum_{k=2}^n D_k k l^{k-1} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

При любых коэффициентах D_k , если они удовлетворяют условиям (3), (4), кривая A должна пройти через точки M_1 и M_2 по касательной к твердым стенкам. Необходимо, чтобы функция тока $\psi(x, y)$ удовлетворяла граничным условиям

$$V_x = V_y = 0 \quad (\text{вдоль кривой } A) \quad (5)$$

$$V_y = 0 \quad \text{при } y = 0.$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = C[f(x, y)]^m + C_{ym}[f(x, y)]^{m-1} \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

Так как вдоль кривой A $f(x, y) = 0$, то условие (5) по отношению к V_x выполняется

$$V_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = - C_{ym}[f(x, y)]^{m-1} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Условие (5) по отношению к V_y и условие $V_y = 0$ при $y = 0$ также удовлетворяются. Таким образом функция тока (1) удовлетворяет условиям (5).

В данной задаче физически известно не распределение скоростей при входе и выходе, а распределение давлений, поэтому в дальнейшем примем, что давления при входе и выходе соответствуют известным заранее значениям. Зависимость между компонентами напряжения и скорости деформации

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= -P + 2 \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \frac{\partial V_x}{\partial x} = -P + 2 \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}; \\ P_{yy} &= -P + 2 \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \frac{\partial V_y}{\partial y} = -P + 2 \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}; \\ P_{xy} &= \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти компоненты напряжения должны удовлетворять уравнениям Навье

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \rho_0 g &= 0; \\ \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Силами инерции в данном случае пренебрегаем.

$$\text{В уравнениях (6) } h = \sqrt{4\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2}$$

$$\text{или } h = \sqrt{4\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)^2}. \quad (8)$$

Однако точное решение уравнений (7) с учетом зависимостей (6) и (8) вообще невозможно. Для приближенного решения задачи воспользуемся следующими двумя, с точки зрения физических условий, достаточно обоснованными условиями:

1) в приосевой области (вблизи оси Ox) преобладают линейные деформации, угловые деформации малы, т.е.

$$\left| \frac{\partial V_x}{\partial x} \right| \gg \left| \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right| \quad (\text{зона I})$$

2) в пристеночной области (вблизи кривой A), наоборот, преобладают угловые деформации, линейные деформации малы, т.е.

$$\left| \frac{\partial V_x}{\partial x} \right| \ll \left| \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right| \quad (\text{зона II})$$

В соответствии с этим имеем:

$$\text{для зоны I } h = 2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right|$$

$$P_{xx} = -P + \tau_0 + 2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y};$$

$$P_{yy} = -P - \tau_0 - 2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}; \quad P_{xy} = 0.$$

Уравнения (7) примут вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \rho_0 g &= 0; \\ \frac{\partial P}{\partial y} + 2\eta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Исключив из этих уравнений функцию $\psi(x, y)$, получаем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 0.$$

Положим

$$P = \beta x; \quad \beta = \frac{P_{\text{ВХ}} - P_{\text{ВЫХ}}}{l},$$

где $P_{\text{ВХ}}$ — давление на входе; $P_{\text{ВЫХ}}$ — давление на выходе.

Полагаем $P_{\text{ВХ}} = \text{const}$, $P_{\text{ВЫХ}} = \text{const}$.

Из (9) для зоны I имеем

$$2\eta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} = \beta - \rho_0 g.$$

Или $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \epsilon x + D$, где $\epsilon = \frac{\beta - \rho_0 g}{2\eta}$,

принимая $D = 0$, получаем

$$\psi(x, y) = \frac{\epsilon x^2 y}{2} + U_1(y) + U_2(x),$$

где $U_1(y)$, $U_2(x)$ — произвольные функции.

Тогда для зоны I имеем:

$$C_y [f(x, y)]^m = \frac{\epsilon x^2 y}{2} + U_1(y) + U_2(x);$$

$$C_y [y - n + \sum_{k=2}^n D_k x^k]^2 = \frac{\epsilon x^2 y}{2} + U_1(y) + U_2(x). \quad (10)$$

Для зоны II

$$P_{xx} \approx -P; P_{yy} \approx -P$$

$$P_{xy} = -\tau_0 + \eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right).$$

Из (7) получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (P = xy).$$

Решение данного уравнения второго порядка представим широко применяемым в математической физике методом Фурье. Тогда получим

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k y (e_k \sin \lambda_k x + C_k \cos \lambda_k x);$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{H} \quad \text{при } x=0; y=H; P = P_{Bx}.$$

Положим $e_k = 0$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k y \cos \lambda_k x; \quad (11)$$

$$P_{Bx} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k y; \quad \int_0^H P_{Bx} \sin \frac{\pi k}{H} y dy = C_k \frac{H}{2};$$

$$C_k = \frac{2P_{Bx}}{H} \int_0^H \sin \frac{\pi k}{H} y dy; \quad C_k = \frac{2P_{Bx}}{\pi k} (1 - \cos \pi k). \quad (12)$$

Из (7) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda_k \sin \lambda_k y \sin \lambda_k x + \eta \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right) + \rho_0 g = 0.$$

Отсюда

$$\eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k y \cos \lambda_k x - \rho_0 g y + W(x).$$

Положим $W(x)$ произвольная функция, зависящая от x . Для первого приближения считаем $W(x) = 0$.

$$\eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k y \cos \lambda_k x - \rho_0 g y. \quad (13)$$

Подставив в (13) выражения $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, получим уравнения относительно неизвестных коэффициентов D_k . Найдем вид функций $U_1(y)$ и $U_2(x)$ в (10).

Для зоны I имеем

$$V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\epsilon xy + U_2'(x).$$

Отсюда $U_2'(x) = 0$, так как $V_y = 0$ при $y = 0$;

$U_2(x) = \text{const}$ (будем считать $U_2(x) = 0$)

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\epsilon x^2}{2} + U_1'(y).$$

При $y=0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0; \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0 \right).$$

или $U_1''(y) - \epsilon y = 0$, $U_1''(y) = \epsilon y$;

$$U_1'(y) = -\frac{\epsilon y^2}{2} + D; \quad U_1(y) = -\frac{\epsilon y^3}{6} + Dy + D_1.$$

Принимая D и D_1 равными нулю, уравнение (10) примет вид

$$C_y (y - H + \sum_{k=2}^n D_k x^k)^2 = -\frac{\epsilon x^2 y}{2} + \frac{\epsilon y^3}{6};$$

$$C(y - H + \sum_{k=2}^n D_k x^k)^2 = \frac{\epsilon}{6} (3x^2 + y^2). \quad (14)$$

Используя полученные зависимости (3), (4), (13), (14) и задаваясь необходимыми данными можно построить теоретически линию скольжения при движении вязко-пластичной системы в конусоподобных конструкциях.

ЛИТЕРАТУРА

1. К и м А.Х. Некоторые вопросы реологии вязко-пластичных дисперсных систем. — Мн., 1960. 2. Р е й н е р М. Реология. — М., 1965.

РАСЧЕТ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ В НАСАДКЕ ЦИЛИНДР–КОНУС

Изучению вопроса движения вязко-пластичных систем в насадках с различными сечениями посвящено ряд работ [1...4]. Определены линии тока в трубах сложного сечения, бесконечных конусах с различными углами растворов и т.д. Однако для выяснения картины движения наибольший интерес представляет определение линии скольжения у твердых стенок насадка в области перехода цилиндра в конус.

Цель данной работы: рассчитать линию скольжения у стенок насадка цилиндр–конус при движении вязко-пластичной среды.

В основу расчета положены уравнения, полученные автором, характеризующие движение данной реологической системы в вышеуказанном насадке:

$$h = H - \sum_{k=2}^n D_k l^k; \quad (1)$$

$$\sum_{k=2}^n D_k k l^{k-1} = \operatorname{tg} \alpha; \quad (2)$$

$$\eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k y \cos \lambda_k x - \rho_0 g y; \quad (3)$$

$$\psi(x, y) = C y [f(x, y)]^2; \quad (4)$$

$$f(x, y) = y - H + \sum_{k=2}^n D_k x^k; \quad (5)$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{H}; \quad C_k = \frac{2}{\pi k} P_{\text{вх}} (1 - \cos \pi k), \quad (6)$$

где H, h, l, α – параметры насадка цилиндр–конус (H – радиус входного отверстия, h – радиус выходного отверстия, l – длина насадка, α – угол раствора конуса); η – вязкость системы; ρ_0 – плотность.

Для выполнения расчета должны быть известны конструктивные параметры насадка, реологические характеристики (η, ρ_0) системы и давление на входе ($P_{\text{вх}}$) и выходе ($P_{\text{вых}}$).

Для определения коэффициентов ряда Фурье C_k при нечетном k воспользуемся уравнением (6).

Решим совместно уравнения (3) и (4)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = C[f(x,y)]^2 + 2Cy[f(x,y)] \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 2C[f(x,y)] \frac{\partial f}{\partial y} + 2C[f(x,y)] + 2Cy \frac{\partial f}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 4C[f(x,y)] + 2Cy.$$

Величина $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ представляет собой $-\frac{\partial V_y}{\partial x}$. Принимая во внимание, что V_y (поперечная скорость) мала и незначительно изменяется по x , то можно в первом приближении допустить $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx 0$:

$$2C\eta[2(y - H + \sum_{k=2}^n D_k x^k) + y] = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k y \cos \lambda_k x - \rho_0 g y;$$

$$4C\eta(\frac{3}{2}y - H + \sum_{k=2}^n D_k x^k) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k y \cos \lambda_k x - \rho_0 g y;$$

$$\sum_{k=2}^n D_k x^k = H - \frac{3}{2}y + \epsilon_1 (\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k \cos \lambda_k x - \rho_0 g y), \quad (7)$$

где $\epsilon_1 = \frac{1}{4C\eta}$. (8)

Для определения неизвестных коэффициентов D_k и ϵ_1 решим систему уравнений (1), (2) и $(n-2)$ уравнений (7). Для этого выберем у стенки $(n-2)$ точек с координатами $x_1, y_1; x_2, y_2, \dots, x_{n-2}, y_{n-2}$ и для каждой из них составим уравнение (7).

Для решения системы n уравнений по определению $(n-1)$ коэффициентов D_k и ϵ_1 составляется соответствующая матрица определителя. Для нахождения членов определителя автором разработана программа для ЭВМ "Минск-22".

После подстановки в уравнение (5) полученных значений коэффициентов D_k и ϵ_1 , определяются точки, характеризующие положение линии скольжения.

Основную трудоемкость представляет решение сравнительно большого числа уравнений, что с появлением нового поколения ЭВМ не является принципиальной.

1. К и м А.Х. Некоторые вопросы реологии вязко-пластичных дисперсных систем.— Мн., 1960.
2. К и м А.Х. Некоторые осесимметричные задачи движения вязко-пластичного торфа. Автореф. докт. дис. — Мн., 1966.
3. К о з е в М.П. Приближенное решение задачи нестационарного движения вязко-пластичных систем в круглой цилиндрической трубе. — В сб.: Физико-химическая механика дисперсных материалов. Мн., 1969.
4. К о з е в М.П. Пристенное скольжение в торфяных машинах. — Промышленность Белоруссии, 1969, № 9.

УДК 532.135

В.И.ГЛУБОКИЙ

ВЛИЯНИЕ СТЕПЕНИ СТАБИЛИЗАЦИИ НА РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

Наполненные дисперсные системы в широком диапазоне скоростей деформации в зависимости от особенностей структурообразования могут являться сложными реологическими системами. Исследование наполненных кремнийорганических полимеров показало, что реологические свойства кремнийорганических вазелинов существенно зависят от времени воздействия на дисперсную систему определенной скорости деформации, т.е. являются функцией степени стабилизации. Влияние степени стабилизации на изменение характера кривых течения и реологические параметры уравнений состояния зависит от особенностей структуры дисперсной системы различных типов кремнийорганических вазелинов. Объектами исследований являлись кремнийорганические вазелины KB-3 (МРТУ6-02-303-64) и KB-Э/16 (ТУП-92-67), представляющие собой смеси полиорганосилоксановых жидкостей с мелкодисперсным наполнителем и имеющие различные особенности строения структуры дисперсной системы. Исследуемые нестабилизированные дисперсные системы указанных кремнийорганических вазелинов в зависимости от их структурных особенностей имеют тиксотропно-псевдопластический (KB-3) или тиксотропно-дилатантный (KB-Э/16) характер течения. Тиксотропно-псевдопластическая нестабилизированная дисперсная система имеет свойства структурированной жидкости в широком диапазоне скоростей сдвига, а тиксотропно-дилатантная имеет при сравнительно малых скоростях сдвига неньютоновский псевдо-пластический характер течения, переходящий в более высоком диапазоне скоростей в дилатантный.

В процессе стабилизации, как отмечалось в работе [1], при деформировании дисперсной системы проявляются, с одной стороны, эффект разрыва тиксотропных связей и разрушение коагуляционных структур, и это ведет к понижению вязкости, с другой — эффект переупаковки частиц и перераспределение жидкой фазы, что способствует усилению межчастичного взаимодействия, и, следовательно, вязкость возрастает. В зависимости от особенности

строения структуры дисперсной системы, а также величины скорости сдвига и времени ее воздействия проявляется в большей степени один из указанных эффектов и стабилизированная система имеет вполне определенное состояние и характер течения. Кремнийорганический вазелин КВ-3 является дисперсной системой, имеющей менее прочную структуру и слабую способность восстанавливать ее при действии скорости сдвига. В процессе стабилизации с увеличением времени деформации степень неньютоновского поведения уменьшается (рис. 1, а) и с выходом на установившийся режим наступает ньютоновский характер течения. При этом наступает равновесное состояние, и оба описанные выше эффекта проявляются в одинаковой степени. Более прочной структурой и хорошо выраженной способностью восстанавливать ее обладает кремнийорганический вазелин КВ-Э/16. Стабилизация системы продолжается в течение большего времени (рис. 1, б), но достигнуть ньютоновского течения при выходе на установившийся режим при низких скоростях сдвига не удастся из-за восстановления структуры.

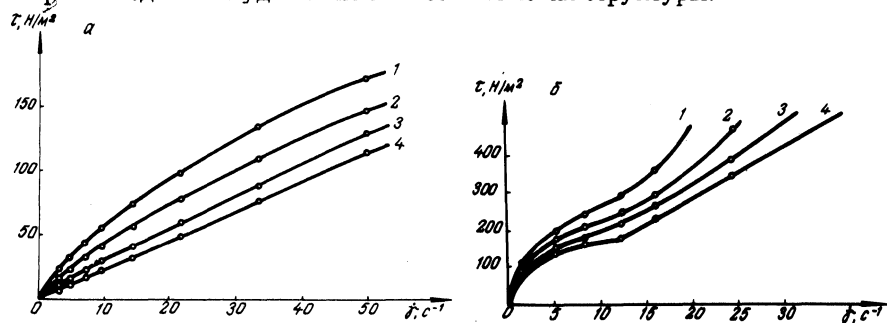


Рис. 1. Кривые течения кремнийорганических вазелинов:

а — КВ-3; б — КВ — Э/16 в зависимости от времени стабилизации: 1 — 0 мин; 2 — 20 мин; 3 — 40 мин; 4 — 60 мин.

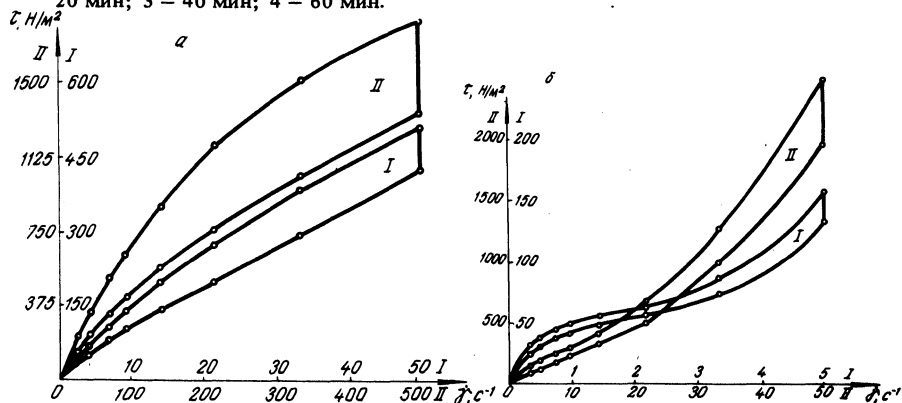


Рис. 2. Кривые течения кремнийорганических вазелинов:

а — КВ-3; б — КВ-Э/16 в зависимости от значения выходной скорости сдвига (время выдержки при выходной скорости 30 мин).

Исследовался также характер кривых течения при ступенчатом выходе до определенных значений скоростей сдвига, выдержке при этой скорости в течение определенного момента времени и уменьшении скорости до нуля с последующим повторением цикла только с выходом до больших значений скоростей сдвига.

Для тиксотропно-псевдопластической дисперсной системы (КВ-3) характерно (рис. 2, а) при выходе до сравнительно небольших скоростей сдвига, наличие ньютоновского течения в связи с разрушением сплошной структурной сетки и не восстановлением ее при уменьшении скорости до нуля. Однако при выходе на большие скорости сдвига происходит разрушение отдельных агрегатов частиц и обломков сплошной сетки, которые при уменьшении скорости при разгрузке начинают взаимодействовать и образовывать новую структуру. В связи с этим вязкость системы увеличивается и псевдопластический характер течения сохраняется. Тиксотропно-дилатантная система (КВ-3/16) характеризуется сохранением дилатантного течения при выходе до небольших скоростей сдвига (рис. 2, б) и только после больших скоростей при разгрузке наблюдаются участки ньютоновского течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г л у б о к и й В.И. Неньютоновское течение кремнийорганических полимеров. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. — Мн., 1977, вып. 4.

УДК 539.215 + 622.331

В.И.БЕЗМЕН

ВЛИЯНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ БУНКЕРА НА ЯВЛЕНИЕ СВОДООБРАЗОВАНИЯ

Образование сводов, т.е. зависаний сыпучего материала над выгрузочным отверстием, нарушает работоспособность отдельных бункеров или бункерных установок в целом. Поэтому при проектировании бункеров необходимо знать, как влияют основные физико-механические постоянные сыпучих материалов и конструктивные параметры бункера на свободное истечение материала. Наиболее важное значение при этом имеет исследование сводообразований в бункерах сравнительно больших размеров, высотой десять и более метров.

Цель данной работы: установить влияние физико-механических свойств сыпучих материалов и конструктивных параметров бункера на явление сводообразования. Конструкция бункера призматической формы представлена на рис. 1, а его размеры следующие:

$R_1, \text{ м}$	$R, \text{ м}$	$H, \text{ м}$	$\alpha, \text{ град}$	$b, \text{ м}$
1,4	7,2	5	20	1

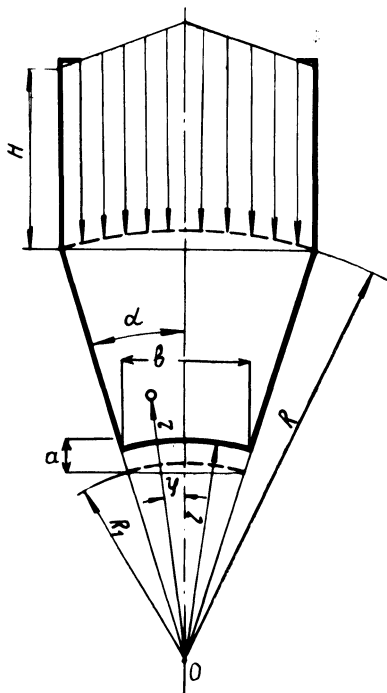


Рис. 1. Схема исследуемого бункера.

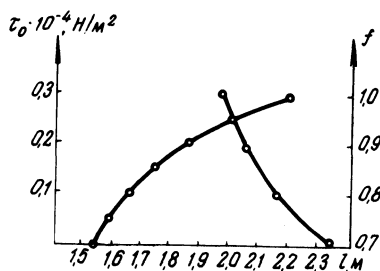


Рис. 2. Зависимость радиуса l образования свода от начального напряжения сдвигу τ_0 и коэффициента трения f .

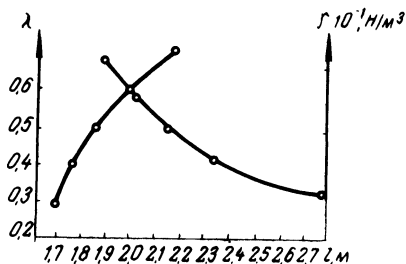


Рис. 3. Зависимость радиуса l образования свода от коэффициента бокового распора λ и насыпной плотности γ .

В основу исследований положена полученная ранее автором зависимость

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma f}{\beta+1} l^3 - \tau_0 l^2 + [\gamma H f R^\beta - \frac{\gamma f R^{(\beta+1)}}{\beta+1}] l^{(2-\beta)} = \\ & = \frac{[\gamma R_1^{(\beta+1)} + \gamma H R^\beta (\beta+1) - \gamma R^{(\beta+1)}] f}{(\beta+1) (R_1^{(\beta-2)} - R^{(\beta-2)})} (1 - R^{(\beta-2)}) l^{(2-\beta)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где γ — насыпная плотность материала; f — коэффициент трения; l — радиус образования свода; τ_0 — начальное сопротивление сдвигу; $\beta = 1 - \lambda$ — параметр уравнения, зависящий от коэффициента бокового распора λ ; H — толщина слоя сыпучего материала, расположенного в верхней части бункера с вертикальными стенками; R — радиус входного отверстия нижней части бункера; R_1 — радиус выходного отверстия нижней части бункера.

Для определения радиуса сводообразования необходимо уравнение (1) решить относительно l . Однако, прежде чем решать данное уравнение, его возможно несколько упростить.

Разделив левую и правую части уравнения (1) на $\frac{\gamma f}{\beta+1}$ и подставив значение $\beta = 1 - \lambda$, получим

$$\begin{aligned} & l^3 - \frac{\tau_0 (2-\lambda)}{\gamma f} l^2 + [\frac{H R^2 (2-\lambda) - R^3 + R_1^3}{R (1+\lambda) - R_1 (1+\lambda)}] l^{(1+\lambda)} = \\ & = \frac{R_1^{(1+\lambda)} [H R^2 (2-\lambda) - R^3] + R_1^3 R (1+\lambda)}{R (1+\lambda) - R_1 (1+\lambda)}. \end{aligned}$$

Выполнив простейшие математические преобразования, уравнение (2) примет вид

$$l^3 - \frac{\tau_0 (2-\lambda)}{\gamma f} l^2 + \frac{H R^2 (2-\lambda) - R^3 + R_1^3}{R (1+\lambda) - R_1 (1+\lambda)} (l^{(1+\lambda)} - R_1^{(1+\lambda)}) - R_1^3 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) по сравнению с (1) значительно проще, что позволит его шире использовать в практических расчетах.

Для исследования сводообразования в вышеуказанном бункере разработана программа для ЭВМ "Минск-22". В основу программы положен подбор такого значения l , при котором с выбранной точностью уравнение (3) превращается в тождество. В качестве сыпучего материала выбран фрезерный торф с относительной влажностью 35...45% со следующими физико-механическими данными: $\gamma = 3 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$, $f = 0,8$, $\lambda = 0,7$, $\tau_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$. Результаты исследований представлены в виде графиков (рис. 2,3).

Анализ полученных зависимостей показал, что возрастание коэффициента трения и насыпной плотности фрезерного торфа способствуют образованию сводов. С увеличением коэффициента трения от 0,7 до 1 и насыпной

плотности от 2000 до 4000 Н/м³ радиус сводообразования для рассматриваемого бункера изменяется соответственно от 2,35 до 1,9 м и от 2,8 до 1,9 м. Таким образом, с ростом значений f и γ уменьшается объем торфа, вытекающего из бункера. Вместе с тем увеличение коэффициента бокового распора способствует выгрузке торфа из бункера.

Выполнены исследования зависимости сводообразования от ширины выгрузочного отверстия и угла наклона боковых стенок.

Изменение ширины выгрузочного отверстия b и угла α достигалось путем поворота наклонных стенок относительно точек Е и К (рис. 1.).

Результаты исследований сведены в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что с увеличением ширины b выгрузочного отверстия и одновременным уменьшением угла α положение линии сводообразования мало изменяется. Так, при увеличении ширины выгрузочного отверстия от одного до трех метров высота образования свода изменяется в пределах 0,25...0,70 м. Таким образом, для бункеров большой высоты (десять и более метров) увеличение ширины выгрузочного отверстия незначительно влияет на изменение радиуса образования свода. Однако следует заметить, что с изменением конструктивных параметров бункера и, в частности уменьшением его размеров, влияние ширины выгрузочного отверстия здесь увеличивается.

Проведены исследования влияния высоты H вертикальной части бункера на процесс сводообразования.

Результаты исследований сведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 1. Результаты определения радиуса ρ образования свода

$b, м$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
R_1	1,40	1,80	2,25	2,73	3,26	3,86	4,55	5,35	6,28	7,38	8,70
R	7,20	7,60	8,05	8,53	9,08	9,66	10,35	11,15	12,08	13,18	14,50
l	1,65	2,15	2,70	3,20	3,80	4,45	5,15	6,00	6,95	8,05	9,40
a	0,25	0,35	0,45	0,47	0,54	0,59	0,60	0,65	0,67	0,68	0,70

Т а б л и ц а 2. Зависимость радиуса ρ образования свода от высоты H вертикальной части бункера

$H, м$	6	5	4	3	2	1	0
$\rho, м$	1,65	2,10	3,30	4,65	5,85	7,00	∞

Как видно из табл. 2, с уменьшением высоты вертикальной части радиус образования свода увеличивается и при $H = 0$ уходит за пределы конической части, т.е. в бункере такой конструкции сводов не наблюдается. Таким образом, результаты исследований зависимости сводообразований от физико-механических свойств сыпучих материалов и конструктивных параметров бункера показывают, что наибольшее влияние на процесс свободного истечения материала из бункера оказывает высота его вертикальной части. Поэтому при проектировании бункера расчеты должны сводиться не только к нахождению необходимого размера выпускного отверстия, как это принято на практике, а к определению размеров и конструкции бункера в целом, что обеспечивает равномерное истечение материала с заданными физико-механическими свойствами. Такой комплексный подход к решению поставленной задачи дает результаты гораздо более полно соответствующие реальной физической картине рассматриваемого процесса.

УДК 621.81.002.3:678–192

В.П.КУЗНЕЦОВ, Н.Б.ЛЕМБОВИЧ

ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ПОЛИМЕРНЫХ ДЕТАЛЕЙ МАШИН И ПРИБОРОВ

При использовании полимеров для изготовления деталей машин и приборов необходимо учитывать специфические свойства этих материалов с точки зрения прочности и долговечности. Так, прочность полимеров ниже прочности металлов, механические характеристики полимеров значительно изменяются во времени, изменение температуры в пределах от $-50...+100^{\circ}\text{C}$ отражаются на полимерах в большей степени, чем на металлах. В литературе имеется достаточно большое количество сведений о показателях прочности полимеров при различных условиях технологической обработки и эксплуатации. Однако необходимо оценить действие эксплуатационных и технологических факторов не только на прочность, но и на долговечность материала. Расчет долговечности дает возможность оценить работоспособность детали, выбрать материал и обосновать гарантийные сроки работы изделия.

В настоящей статье на нескольких примерах показано, как можно оценить долговечность полимерных деталей.

Для определения долговечности материала при действии известного постоянного во времени напряжения можно воспользоваться выражением [1]

$$t = A \exp(-\alpha \sigma),$$

где A и α постоянные, зависящие от природы материала (для полистирола $A = 6,4 \cdot 10^9 \text{ C}$, $\alpha = 3,1 \text{ мм}^2/\text{кгс}$).

Совместное действие нагрузки и температуры T учитывается уравнением Журкова

$$t = t_0 \exp \frac{u_0 - \gamma \sigma}{KT},$$

где t_0 , u_0 , γ – коэффициенты, определяющие прочностные свойства любого материала; K – постоянная Больцмана.

В качестве примера рассмотрим расчет долговечности полимерной детали прямоугольной формы при условии, что она получила деформацию под действием распределенной равномерно нагрузки. Деталь относится к гибким пластинам, имеющим прогиб от 0,25...5 толщин h . Края пластины закреплены.

Тогда максимальное нормальное напряжение изгиба, которое совпадает с направлением ширины пластины b , будет [2]

$$\sigma_y = \alpha E \frac{4bf}{b^2}.$$

Нормальное напряжение в срединной поверхности в том же направлении будет

$$\sigma_y^0 = \delta E \left(\frac{2f}{b^2} \right)^2,$$

где f – прогиб пластины в центре; α и δ – коэффициенты, зависящие от отношения длины пластины a к ширине b :

a/b	α	δ
1,0	1,645	0,615
1,2	1,544	0,592
1,5	1,462	0,574
2,0	1,398	0,566

Полное напряжение равно

$$(\sigma_y)_n = \sigma_y + \sigma_y^0 = 4E \frac{f}{b^2} (\alpha h + \delta f).$$

Долговечность пластины составит

$$t = A \exp \left[-4\alpha E \frac{f}{b^2} (\alpha h + \delta f) \right].$$

В рассмотренном случае нагрузка действует непрерывно до момента разрушения через время t .

Если время действия нагрузки P на деталь периодическое и изменяется по известному закону, то оценить долговечность можно при помощи критерия Бейли [1], который может быть представлен в интегральной форме

$$\int_0^{t_p} \frac{dt}{t[\sigma(t)T(t)]} \leq 1,$$

где $t[\sigma(t), T(t)]$ — долговечность полимера при постоянных напряжении σ и температуре T ; t_p — время действия напряжения на полимер, или в виде суммы

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta t_i}{t_i[\sigma_i(t), T_i(t)]} \leq 1,$$

где Δt_i — время действия напряжения; t_i — долговечность полимера при действии напряжения σ_i и температуре T_i .

Разрушение детали происходит в том случае, если критерий становится равным единице, или, если сумма критериев от действия разных усилий или температурных напряжений также становится равной единице. Возможность такого суммирования действия усилий определяется тем, что для полимеров применим принцип суперпозиции [1].

В качестве примера использования критерия Бейли для оценки долговечности полимерной детали рассмотрим случай, когда напряжения возникают при действии переменного температурного поля. Тогда напряжение σ_T при изменении температуры на величину T будет

$$\sigma_T = \alpha_T \cdot T \cdot E, \quad (1)$$

где α_T — температурный коэффициент линейного расширения (для полистирола $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$ град).

Если значение α изменяется в разных направлениях, т.е. имеет место анизотропность теплофизических, а также и механических свойств, то

$$\sigma_T = T(E_x \alpha_{Tx} \cos^2 \beta + E_y \alpha_{Ty} \cos^2 \gamma),$$

где $E_x, E_y, \alpha_{Tx}, \alpha_{Ty}$ — значения параметров, относящиеся к главным направлениям.

Определим долговечность t_T , принимая значение σ_T в соответствии с уравнением (1):

$$t_T = A \exp(-\alpha \cdot \alpha_T T \cdot E).$$

Это значение долговечности при условии, что температурные напряжения действуют постоянно. В действительности температурные напряжения переменны и время действия их составляет некоторую сумму времен $\sum \Delta t_i$. Критерий в этом случае определяется

$$\frac{\sum \Delta t_i}{A \exp(-\alpha \alpha_T T E)} \leq 1.$$

В случае, если полимерные детали подвержены действию напряжений от вибраций, то долговечность можно определить

$$t_j [\sigma(t)] = A \exp(-\alpha \sigma_j) = A \exp(-\alpha B_j \omega_j \frac{E}{C} \cos \omega_j t),$$

где B_j — амплитуда колебаний j -й частоты; ω_j — j -я угловая частота; C — скорость распространения звука в материале.

Индекс j соответствует определенной составляющей из спектра вибраций. Для расчета необходимо знать амплитудно-частотную характеристику машины или прибора. Из этой характеристики выбираются амплитуды и частоты наиболее существенных составляющих, для каждой из которых определяется критерий и подсчитывается сумма интегралов

$$\sum_j \int_0^{t_B} \frac{dt}{A \exp(-\alpha B_j \omega_j \frac{E}{C} \cos \omega_j t)} \leq 1, \quad (2)$$

где t_B — время действия вибраций на деталь.

Решение интеграла I_j (2) возможно по формуле (полное решение интеграла приведено в [3])

$$I_j = 2\pi \left[\frac{1}{A\omega_j} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha B_j \omega_j C \rho)^{2m}}{(2m!!)^2} \right],$$

где ρ — плотность материала детали.

Так как ряд быстро сходится, то достаточно брать $m = 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Р.Д., Шленский О.Ф. Введение в механику полимеров. — Саратов, 1975.
2. Справочник машиностроителя. — М., 1955, т. 3.
3. Кузнецов В.П., Лембович Н.Б. Долговечность деталей из полимеров при действии вибрационных нагрузок. — В сб.: Приборостроение. — Мн., 1979, вып. 2.

УДК 532.135

А.К.ПАНОВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЙ ПРИ ТЕЧЕНИИ РАСПЛАВА ПОЛИЭТИЛЕНА В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ КАНАЛАХ

Целью настоящей работы является представление экспериментальных данных по потерям давления на начальном участке и по всей длине призматических каналов при течении расплава полиэтилена.

Полученные экспериментальные данные по потерям давления на начальном участке и по всей длине сложного профиля позволяют решить вопрос о длине начального участка, установить длину участка развитого течения и определить величину потерь давления непосредственно на выходе из канала.

Определение потерь на начальном участке даст возможность получить соотношения между реологическими свойствами расплавов полимеров и геометрическими параметрами резервуара, а также формирующего канала.

Опыты проводились на призматических каналах: с поперечным сечением в виде треугольника с углом при вершине 15° ; 45° ; 60° ; 90° ; с-квадратным, крестообразным поперечными сечениями, для которых постоянной величиной были $d_3 = 4,2$ мм и $L/d_3 = 38$. Кроме того, в опытах использовали канал круглого поперечного сечения диаметром 4,2 мм с соотношением $L/d = 38$.

Экспериментальное определение потерь давления на начальном участке и по длине основывалось на измерении нормальных напряжений, возникающих от деформации стенки канала тензометрическим методом, сущность которого заключалась в следующем: предварительно на исследуемый канал наклеивались тензометрические датчики типа 2ПК-5-100ГБ, сопротивление которых составляет 10100–10124 Ом. Для торирования тензометрических датчиков была разработана экспериментальная установка, показанная на рис. 1, основными элементами которой являются: тензометрическая станция ИД–70 1, поршневой манометр давления МП–250 3, тензометрические датчики 8, рабочий цилиндр 5 с вентилями 4 и канал 6.

Исследуемый канал с наклеенными тензометрическими датчиками устанавливался в рабочий цилиндр и закреплялся герметично с помощью гайки 9, после чего заглушался торцевой гайкой 7. Торирование производилось моторным маслом М–16 при давлении от 0 до 250 кгс/см^2 , создаваемым поршневым манометром давления МП–250. Регистрация показаний давления осуществлялась с помощью двух образцовых манометров 2. С помощью тензометрической станции ИД–70 измерялись статические деформации, возникающие в стенке канала.

Полученные данные были обработаны в виде торировочных графиков в координатах давления (кгс/см^2) и напряжения (мВ), что позволяло быстро определить потери давления по длине канала.

Экспериментальные исследования распределения давлений при течении расплавов полимеров в призматических каналах проводились на опытной установке, состоящей из экструдера с червяком диаметром 40 мм и длиной 640 мм. Схема соединения исследуемого канала с тензометрическими датчиками к экструдеру показана на рис. 2.

Материалом исследования служил отечественный полиэтилен высокого давления марки 15802–020 ГОСТ 16337–70 с индексом текучести расплава 1,5...2,0/10 мин. Опыты проводились в широком диапазоне давлений от 20 до 140 кгс/см^2 при температуре 130° и 150°C .

Канал 6 устанавливался в соединительную головку 4 и закреплялся гайкой 5. Включались нагревательные элементы 3 материального цилиндра 2 и соединительной головки 4. Температура расплава перед входом в резервуар и выходом из канала измерялась термопарами 8 (хромель-копель), регулировалась и регистрировалась потенциометром ЭПР-09МЗ. Скорость нагрева каждого нагревательного элемента регулировалась автотрансформаторами, а сила тока контролировалась амперметрами. При достижении заданной температуры она поддерживалась с точностью $\pm 0,5^{\circ}\text{C}$, включался в работу нагнетательный червяк 1, с помощью которого расплав полиэтилена подавался в исследуемый канал. Регистрация давления перед входом в канал осуществлялась образцовым манометром 10. Манометр подсоединялся через датчик поршневого типа, заполненный силиконовым маслом.

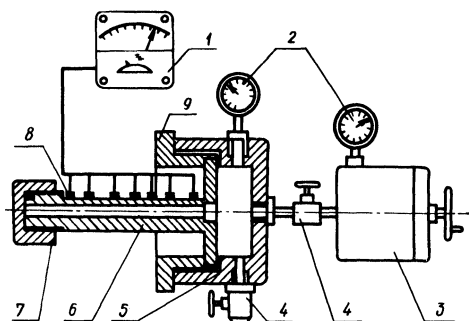


Рис. 1. Установка торирования тензометрических датчиков.

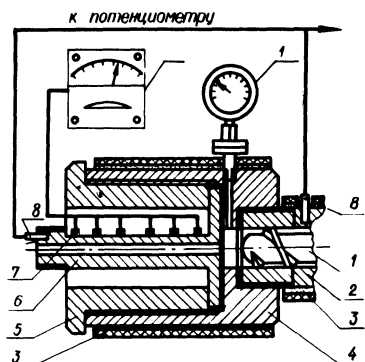


Рис. 2. Экспериментальная установка для исследования распределения давлений.

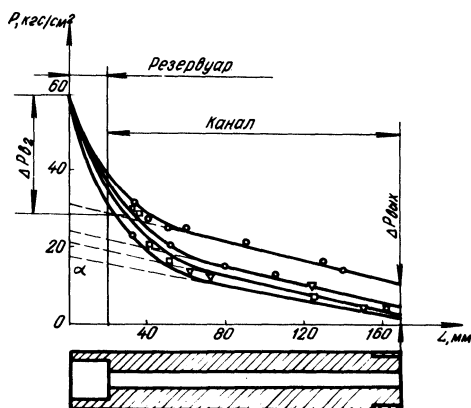


Рис. 3. Графики распределения давления в каналах при течении расплава полиэтилена при температуре 150°C :

1 — канал кругового сечения; 2 — канал квадратного сечения; 3 — канал крестообразного сечения; 4 — канал треугольного сечения с углом при вершине 90° .

При достижении ламинарного установившегося изотермического режима течения снимались показания потерь давления по длине канала, отградуированные в мВ, и регистрировались с помощью тензометрических датчиков 7 и тензометрической станции 9.

На рис. 3 представлены графики распределения осевого давления для расплава полиэтилена при $T=150^{\circ}\text{C}$ в каналах круглого, треугольного, квадратного и крестообразного сечений.

Анализ результатов исследований показал, что основными факторами, влияющими на потери давления в начальном участке, являются давление, создаваемое перед входом в канал, и геометрическая форма сечения канала.

Полученные экспериментальные данные по потерям давления на начальном участке круглого канала хорошо согласуются с теорией [1].

$$\Delta P_{\text{вх}} = C \dot{\gamma}^d,$$

где C, d — характеристики материалов; $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига.

Из рис. 3 видно, что если прямолинейную часть распределения давлений по длине канала экстраполировать до входа в канал и выхода из него, то, очевидно, что графическим способом можно определить потери давления на начальном участке и остаточное давление на выходе из канала.

Так, для приведенных случаев потери давления на входе составляют: для круглого канала $\Delta P_{\text{вх}}=31 \text{ кгс/см}^2$; для канала крестообразного сечения $\Delta P_{\text{вх}}=37,5 \text{ кгс/см}^2$; для канала квадратного сечения $\Delta P_{\text{вх}}=41 \text{ кгс/см}^2$; для канала треугольного сечения с учетом при вершине $90^{\circ} \Delta P_{\text{вх}}=45 \text{ кгс/см}^2$, при этом созданное давление перед входом в канал было $P = 60 \text{ кгс/см}^2$.

Остаточное давление на выходе указанных выше каналов соответственно равнялось $p_{\text{вых}}=10,5 \text{ кгс/см}^2$; 5 кгс/см^2 ; 3 кгс/см^2 ; $1,5 \text{ кгс/см}^2$. Эти данные наглядно показывают, что потери на входе в призматических каналах значительно больше, чем в каналах поперечного сечения, а соответственно остаточное давление на выходе меньше.

В табл. 1 приведены данные по распределению давления на начальном участке и по длине каналов круглого и треугольного сечений при течении расплава полиэтилена при температуре 130°C и 150°C .

Приведенные опытные данные по распределению давления по длине канала показывают, что температура оказывает влияние на распределение давлений по длине и на начальном участке и на выходе из формирующей головки.

Анализ полученных данных свидетельствует о том, что потери на начальном участке и распределение давлений по всей длине призматических каналов имеет более сложный характер по сравнению с распределением давления в канале круглого сечения. Поэтому целесообразно изучать распределение давлений на начальном участке и по длине в призматических каналах при течении расплавов полимеров.

Таблица 1

Полиэтилен, T = 130°C							
P*, кгс/см ²	L ₁ = = 10мм	L ₂ = = 20мм	L ₃ = = 30мм	L ₄ = = 40мм	L ₅ = = 70мм	L ₆ = = 110мм	L ₇ = = 120мм
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
20	18	17	15	14,2	13	12,6	12
40	45	24	22	20,5	19	18	16,5
60	32	30	28	26	24	20	19
80	45	42	39	37	31	26,5	25,5
100	55	48	39	35	31	29,5	28
120	74	64	50	42,5	39	37	34
130	80	67	61	56	50,5	45	39

P*, кгс/см ²	L ₁ = 11 мм	L ₂ = 21 мм	L ₃ = 40 мм	L ₄ = 50 мм	L ₅ = 103 мм
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
20	15	13,5	12	11	10
40	21	18	14	12,5	11,5
60	32	20	14,8	14	13
80	44	27	19,5	15	14
100	57	35	28,5	17	15
120	71	41	21	19	16
140	86	47	29,5	25	18

*P — общее давление перед входом в канал.

Полученные экспериментальные данные имеют практический интерес для проектирования формующего инструмента сложного профиля с учетом давления на входе и выходе из канала, а также дают возможность точно определить длину начального участка формующей части мундштука.

ЛИТЕРАТУРА

1. Han C. Entrance Region Flow of Polymer Melts. — AIChE Journal, 1971, v. 17, N 6.

Полиэтилен, T = 150°C						
L ₁ = = 10мм	L ₂ = = 20мм	L ₃ = = 30мм	L ₄ = = 40мм	L ₅ = = 70мм	L ₆ = = 110мм	L ₇ = = 120мм
P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇
16	15	14	13,5	13	12	11
23	22	21	19	17	16	13,0
31	28	27	26	23	18	14,5
36	34	33,5	32	30	27	23
44	40	39	34	30,5	28	25
50	47	45	40	36	32,5	29
57	54	51	50	47	43	41

L ₁ = 11 мм	L ₂ = 21 мм	L ₃ = 40 мм	L ₄ = 50 мм	L ₅ = 103 мм
P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
12	9	8	7	6
20	17	11	10	9
29	19	13,5	12	10
42	24	15	14	12
54	32	20	16	14
63	39	20	18	15
80	42	23	20	17

Канал круглого сечения
d = 4,2 мм

Канал треугольного сечения
с углом при вершине 90°

УДК 531.3+629.11.012.5

М.А.ЛЕВИН

ПО ПОВОДУ СТАТЬИ Ю.А.ГУРВИЧА "ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО
МОМЕНТА ПРИ БОКОВОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА".
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА. МИНСК, 1978. ВЫП. 5

В процессе редактирования сборника автор статьи [1] Ю.А.Гурвич без ведома редакционной коллегии и по недосмотру редакции включил дополнение, содержащее ряд ошибок.

Цель экспериментальной работы, к которой Ю.А.Гурвич был привлечен, заключалась в получении экспериментальных частотных характеристик катящегося пневматика и сравнения их с теоретическими, которые вытекают из различных теорий качения. Существенным для понимания такого подхода является доклад [3] и его сокращенное изложение в [4], основывающееся на сравнении частотных характеристик среди прочего и по минимуму квадратического отклонения.

Первая задача, которая решалась при создании экспериментальной установки и отработке методики эксперимента, заключалась в определении качественного характера частотных характеристик катящегося деформируемого колеса. Эта задача была решена, так как оказалось, что во многих случаях даже при проскальзывании в области контакта порядка 20...30% сохраняется ряд качественных особенностей, типичных для случая пренебрежимо малого проскальзывания, и таким образом, по виду частотных характеристик сразу появляется возможность судить о применении различных теорий качения. Следовательно, в этом случае экспериментальная установка и методика оказались достаточно эффективными.

Что касается количественного анализа на основе эксперимента, т.е. определения коэффициентов, входящих в теорию качения по экспериментальным частотным характеристикам, то эта задача может быть решена с использованием указанной установки только в случае тщательного выбора шины и соблюдения ряда условий. Последнее, в частности, в большинстве случаев не было сделано в работе [1]. Укажем на одно из этих условий. Например, шина 7,5—20, упомянутая в [1], имеет наружный диаметр 0,91 м, а диаметр бегового барабана равен 0,60 м. В результате в пересчете на плоскую поверхность качения расчетный диаметр шины составил $1/(1/0,6 + 1/0,91) = 0,36$ м, что существенно отличается от 0,91 м. Таким образом, при этих условиях в опыте участвует как бы другая шина, для которой контактный угол изменяется в пределах (см. табл. 1 в [1]) от $2 \arcsin(0,125/0,36) = 40^\circ$ до $2 \arcsin(0,23/0,36) = 80^\circ$. Если учесть осадку шины, то контактные углы окажутся в действительности еще большими.

Контактный угол 80° чрезвычайно велик; немалым является и угол в 40° . В случае больших контактных углов даже при отсутствии боковых сил имеет место существенное проскальзывание в области контакта. Это очень хорошо видно во время опыта, который сопровождается шумным выпрыгиванием элементов протектора на границе области контакта. Проскальзывание еще более возрастает при наличии боковых сил на поверхности гладкого стального барабана. Казалось, в случае меньшего угла в 40° при давлении $2,4 \text{ кг/см}^2$ и нагрузке 500 кг положение в смысле проскальзывания должно быть лучше, однако это не так. По условиям в [1] при амплитуде бокового перемещения, равной 0,01 м, амплитуда боковой силы достигает значения 192 кг, что составляет 55% от предельной по сносу $350 \text{ кг} = 500 \times 0,7$ при коэффициенте сцепления, равном 0,7. В этом случае, даже если не учитывать

зону проскальзывания, существующую при отсутствии боковой силы, зона проскальзывания в долях от длины области контакта только за счет боковой силы может изменяться в пределах от 30 до 50% в зависимости от жесткости протектора. Из сказанного следует, что эксперимент в [1] сопровождался значительным проскальзыванием в области контакта и соответствует нелинейной системе с сухим трением.

Теория М.В. Келдыша [2] является линейной и не учитывает эффекта скольжения. Поэтому обработка эксперимента в соответствии с теорией [2] не может в условиях такого опыта (см. [1]) привести к приемлемым количественным результатам. Вследствие проскальзывания в области контакта максимумы и минимумы на частотных характеристиках становятся менее характерными (заметными) в сравнении со случаем отсутствия проскальзывания. Подбор же теоретической зависимости по методу наименьших квадратов в значительной мере реагирует именно на экстремальные точки. Поэтому обеспечение минимума квадратического отклонения в [1] приводит к существенному изменению значений C_1 и C_2 в сравнении с теми, которые должны были иметь место, если бы условия эксперимента в точности соответствовали области применения теории [2].

Следовательно, большинство количественных результатов определения C_1 и C_2 (см. табл. 1 в [1]) нельзя считать приемлемыми из-за несовпадения области применения линейной теории и эксперимента, проведенного в нелинейной области при заметном проскальзывании.

Все сказанное относится и к остальным результатам в [1], на которые наложили отпечаток непонимание основных положений теории [2] и другие ошибки.

Хорошо известно, что в теории М.В.Келдыша [2] не существует соотношения иного, чем $C_2/C_1 = K/C_y$. Отказ от последнего, т.е. так называемый "свободный выбор" C_1 и C_2 при заданных K и C_y , неминуемо приводит к несоответствию и, в частности, к ошибке в определении такого важного параметра, как коэффициент увода. Например, для шины 7,5–20 из табл. 1 в [1] с использованием значений $C_1^{(2)}$ и $C_2^{(2)}$ находим по формуле $K = C_y C_2^{(2)} / C_1^{(2)}$ в соответствии с тремя первыми столбцами значения $K = 3640, 4600, 4500$, которые отличаются существенно от соответствующих экспериментальных значений $K_{cp} = 2430, 2510, 2680$ на 50, 83, 67%.

Таким образом, так называемый "второй вариант" в данной интерпретации не имеет смысла, так как противоречит теории, в соответствии с которой определяются коэффициенты. Конечно, подогнать эксперимент к теоретической кривой легче, если варьируется большее число параметров, так как в этом случае легче уменьшить минимум квадратического отклонения. При конечном числе экспериментальных замеров в принципе всегда можно подобрать такой полином, при котором квадратическое отклонение будет равно нулю. Однако такой полином ничего не будет говорить о возможности использования той или иной теории качения. Следовательно, в данном случае

"свободный выбор" C_1 и C_2 недопустим, так как противоречит теории [2] и, в частности, важнейшему соотношению, вытекающему из этой теории.

К чему это может привести становится еще более очевидно из результатов так называемого "третьего варианта", полученных в [1] для случая больших кинематических параметров. Уже из формул (7) – (10) в [1] следует, что результат зависит только от отношения C_1/C_2 . Тем не менее на стр. 125 подчеркивается необходимость "свободного выбора" C_1 и C_2 , что вызывает недоумение. Используя равенство (7), можно найти только отношение C_1/C_2 , которое, впрочем, и не нужно искать, так как оно заранее известно. Однако автор [1] нашел значения $C_1^{(3)}$ и $C_2^{(3)}$, что принципиально невозможно. Это показывает, что "созданный и отлаженный" им "комплекс программ на языке АКИ-Т" содержит ошибки.

Отметим, что важным для работы программы является вводимое значение $C_{\Sigma\Phi}$. Методика определения этого значения, использованная в [1], некорректна, так как была разработана для другого варианта теории. Заметим, что относительная разность между статической и эффективной жесткостями $C/C_{\Sigma\Phi} - 1$ тем больше, чем больше углы контакта, т.е. чем больше скольжение в области контакта даже при отсутствии боковой силы.

"Способы", упомянутые в [1] и связанные с определением C_1 и C_2 по частотной характеристике стабилизирующего момента при повороте, не эффективны для указанных в [1] шин в связи с сильным влиянием ширины области контакта на результат. Теория [2] предписывает одинаковые значения коэффициента увода по стабилизирующему моменту и угловой жесткости. В действительности для тракторных шин они отличаются в два и более раз. Для того чтобы связать экспериментальные данные с теорией М.В.Келдыша [2], необходимо в выражения теории вместо угловой жесткости подставить коэффициент увода по стабилизирующему моменту. Это обеспечивает совпадение с экспериментом при пренебрежимо малом проскальзывании в наиболее важной области изменения кинематической частоты.

В статье [1] имеются и методологические ошибки. Так, вызывает удивление и подтверждает ошибочность результатов то, что в табл. 1 помещены существенно различные значения одних и тех же коэффициентов, вытекающие из одних и тех же экспериментальных данных, для одной и той же шины при одинаковых давлениях и нагрузках.

Публикация [1] содержит и другие ошибки. В неаккуратно заимствованной формуле (6) ошибочным является знак "минус", а вместо квадратных скобок в числителе должны стоять прямые модульные скобки. Работа [4] существенная с точки зрения подхода, используемого в [1] упоминается лишь как использующая некоторое соотношение. Отметим, также, что добавленный материал не соответствует заголовку статьи.

В статье [1] приведены совершенно неправдоподобные результаты. Так, на стр. 129 по "третьему варианту" в двух предпоследних строках табл. 1 совпадает ряд значений $C_1^{(3)}$ и $C_2^{(3)}$. В одном случае результат определения ми-

нимума $F \cdot 10^{-5}$ равен 28,21 по этому заведомо неверному варианту. Последнее даже в четыре раза меньше того, что следует из первого варианта (98,87), который считается наиболее точным. Некоторые значения коэффициентов (например, C_1) для одной и той же шины в одних и тех же условиях отличаются в десять раз (в десятом столбце табл. 1 для последней шины имеем значения 84,9 и 882 при значениях минимума $F \cdot 10^{-5}$, равных 68,61 и 76,87).

Таким образом, добавления в публикации Ю.А.Гурвича не содержат новых результатов и являются некорректными с точки зрения теории качения и обработки экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г у р в и ч Ю.А. Экспериментальное определение частотных характеристик стабилизирующего момента при боковом перемещении деформируемого колеса. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 5. 2. К е л д ы ш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси — Труды ЦАГИ, М., 1945, № 564. 3. Л е в и н М.А. Определение параметров стационарного и нестационарного увода колеса. V и VI все-союзные научно-технические семинары "Опыт работы по улучшению устойчивости и управляемости автомобиля в соответствии с нормами безопасности движения", 18–20 ноября 1969, 27–29 октября 1970. Тез. докл. НАМИ. — М., 1972. 4. Л е в и н М.А. Стационарные и амплитудно-фазо-частотные характеристики для реакций колеса с пневматической шиной. — В сб.: Механизация лесоразработок и транспорт леса. Мн., 1972, вып. 2.

СОДЕРЖАНИЕ

Ш у л ь м а н В.Х. Исследование погашающей способности нелинейной амортизации приборов	3
Б о р и с е н к о Л.А., Ю р е в и ч А.А. Динамика переходного процесса в системе с двумя степенями свободы	7
М а р к о в В.Е. Параметры разгона гравилета при радиальном и касательном ускорении.	11
К у д и н В.В., Г р е б н е в А.А., М а р т и н о в и ч С.В. К вопросу самоустанавливаемости в статически определенном кулисно-тангенсном механизме.	15
Л е в и н М.А., В ы г о н н ы й А.Г. К исследованию динамики катящегося самоустанавливающегося колеса	22
К р у ш е в с к и й А.Е., С к л я р О.Н. Структура решения задачи изгиба упругого параллелепипеда.	24
С к л я р О.Н. Изгиб упругого параллелепипеда линейно-распределенной нагрузкой и бимоментом	29
К р у ш е в с к и й А.Е., С е в е н ю к А.З. Применение степенных рядов для построения структуры решения задачи сжатия упругого параллелепипеда при отсутствии нагрузки на четырех его гранях.	36
А п а н о в и ч В.Н. Использование метода Трефца для определения объемного напряженно-деформированного состояния деталей машин.	39
С е в е н ю к А.З. К вопросу об определении спектра собственных частот продольных колебаний упругих стержней с прямоугольным сечением при точном выполнении краевых условий на его боковых гранях	42
•	
Б о й к о Н.Я. Сжатие жестким шероховатым плоским штампом упругого прямоугольного параллелепипеда, четыре грани которого находятся в жестких шероховатых направляющих.	46
Ш и б а е в а Л.А. К вопросу определения частот собственных колебаний рамы автомобиля	51
Б о р и с е н к о Н.Ф., К о с ы х Э.Г. К вопросу нелинейного изгиба стержня переменной жесткости в случае произвольного нагружения	54
Л и т в и н е н к о И.Н., Р о д з е в и ч Е.Г. Продольный изгиб стержня со сложными распределенными силами	58
Б о р и с е н к о Н.Ф., Л е в к и н Д.Н., К о с ы х Э.Г. К вопросу образования вмятин в сжатых цилиндрических оболочках	64
Б у т к е в и ч Н.Н., Б у ш и л о И.Д. Моделирование температурных напряжений в композиционных материалах методом фотоупругости.	68

Р у б е н ч и к В.Я., С у п и н В.В. К решению задачи кручения стержней одно- связного и многосвязного поперечного сечения методом интегральных уравнений. . .	72
К а ш и н Ю.А., К р а в ч е н к о Л.Г. Равновесие стержня с освобождающимися связями при закритических нагрузках (плоская задача)	77
Н е м ц о в В.Б. Статистическая и феноменологическая гидродинамика нема- тических жидких кристаллов.	85
Л а м б и н а Е.Н. О принципе соответствия для медленных неустановившихся течений вязко-упругих линейных жидкостей	90
Л а м б и н а Е.Н. Неустановившееся течение вязко-упругой жидкости в зазоре между непараллельными плоскостями	93
Л а п у ш и н а Б.И. Течение вязко-пластичной среды между сближающимися дисками при импульсном изменении скорости	97
П и к у с Ю.М. Неизотермическое течение реологически сложной смазочной среды в капилляре	103
К и м А.Х., Б о г и н с к а я Т.Ф. Прямой метод решения задачи течения вяз- ко-пластичной системы в цилиндрах некруглого сечения.	106
К и м А.Х., О р е ш к о Э.А. Определение линии скольжения у твердых сте- нок при движении вязко-пластичной системы	110
О р е ш к о Э.А. Расчет линий скольжения при движении вязко-пластичной системы в насадке цилиндра — конус	117
Г л у б о к и й В.И. Влияние степени стабилизации на реологические свойства дисперсных систем	119
Б е з м е н В.И. Влияние физико-механических свойств сыпучих материалов и конструктивных параметров бункера на явление сводообразования	121
К у з н е ц о в В.П., Л е м б о в и ч Н.Б. Долговечность полимерных деталей ма- шин и приборов	125
П а н о в А.К. Экспериментальное исследование распределения давлений при те- чении расплава полиэтилена в призматических каналах.	128
Л е в и н М.А. По поводу статьи Ю.А.Гурвича "Экспериментальное определение частотных характеристик стабилизирующего момента при боковом перемещении дефор- мируемого колеса. — "Теоретическая и прикладная механика. Минск, "Высшая шко- ла", вып. 5, 1978.	133

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
Выпуск 7

Редактор *Г.В. Вагабова*
Мл. редактор *Т.И. Досаева*
Худож. редактор *Ю.С. Сергачев*
Техн. редактор *Л.И. Жук*
Корректоры *А.С. Берсудский, Н.И. Бондаренко*
Операторы *А.И. Маль, М.К. Борисова*

ИБ 988

Подписано к печати 18.9.79 г. АТ 11257. Формат 60х90 1/16. Бумага офсетная. Офсетная печать. Усл.-печ. л. 9,25. Уч.-изд. л. 8,42. Тираж 850 экз. Зак. 5809. Цена 1 руб. 10 коп.

Издательство "Вышэйшая школа" Государственного комитета БССР по делам печати, телерадиовещания, полиграфии и книжной торговли. 220048. Минск, Парковая улица, 11

Типография "Победа". Молодечно, Привокзальный переулок, 11

РЕФЕРАТЫ

УДК 531.3

Ш у л ь м а н В.Х. Исследование погашающей способности нелинейной амортизации приборов. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 3—7.

Даны результаты экспериментальных исследований погашающей способности резино-металлических амортизаторов типа АКСС. Вычислены коэффициенты, характеризующие нелинейность амортизации. Дано сравнение погашающей способности, полученной при линейной характеристике амортизаторов и с учетом их нелинейности. — Ил. 1. Табл. 3. Библиогр. 2.

УДК 531.3

Б о р и с е н к о Л.А., Ю р е в и ч А.А. Динамика переходного процесса в системе с двумя степенями свободы. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 7—11.

Приводятся результаты исследования переходного процесса системы с двумя степенями свободы, в которой уравнение связи и характеристика двигателя линейны. В качестве примера выбран дифференциальный зубчатый механизм с приводом от асинхронного электродвигателя. Благодаря линейности дифференциальных уравнений движения решение задачи доводится до конца. Анализ решения позволяет проследить аналогию с системой с одной степенью свободы. — Ил. 1.

УДК 629.78

М а р к о в В.Е. Параметры разгона гравилета при радиальном и касательном ускорении. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 11—14.

Определяются параметры разгона космического аппарата (КА) при радиальном и касательном гравилетном ускорениях в центральном поле тяготения. При радиальном ускорении имеет место непрерывное понижение высоты перицентра, тогда как при касательном и при начальной круговой орбите разгон происходит практически по раскручивающейся спирали с большей интенсивностью. — Табл. 2. Библиогр. 5.

УДК 621.01

К у д и н В.В., Г р е б н е в А.А., М а р т и н о в и ч С.В. К вопросу самоустанавливаемости в статическом определимом кулисно-тангенсном механизме. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 15—20.

Рассмотрен вопрос о влиянии конструктивных параметров одной схемы кулисно-тангенсного механизма на движения самоустанавливаемости в кинематических парах. Задача решена с применением теории матричного исчисления. Получены расчеты зависимости и даны рекомендации по выбору этих параметров. Исследованные расчеты выполнялись на ЭЦВМ "Наири". — Ил. 4. Библиогр. 3.

УДК 531.3

Л е в и н М.А., В ы г о н н ы й А.Г. К исследованию динамики катящегося самоустанавливающегося колеса. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 21—24.

Рассматривается вопрос о затухании колебаний или аperiodического движения самонавивающегося колеса в зависимости от коэффициента увода по стабилизирующему моменту, ширины области контакта и других параметров деформируемой периферии колеса, а также скорости поступательного движения и выноса колеса назад.

Алгоритм расчета реализован в виде программы на ФОРТРАНе для ЭВМ "Минск-32". — Ил. 2. Библиогр. 2.

УДК 539.3

К р у ш е в с к и й А.Е., С к л я р О.Н. Структура решения задачи изгиба упругого параллелепипеда. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7. с. 24—29.

Дается структура решения задачи изгиба прямоугольного параллелепипеда при условии выполнения отсутствия нагрузки на его боковой поверхности. — Библиогр.2.

УДК 539.3

С к л я р О.Н. Изгиб упругого параллелепипеда линейно-распределенной нагрузкой и бимоментом. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 29—35.

Дается приближенное решение задачи изгиба прямоугольного параллелепипеда линейно-распределенной нагрузкой и бимоментом с использованием вариационного уравнения Лагранжа при точном выполнении краевых условий на боковых поверхностях. — Ил. 2. Табл. 1. Библиогр. 3.

УДК 539.3

К р у ш е в с к и й А.Е., С е в е н ю к А.З. Применение степенных рядов для построения структуры решения задачи сжатия упругого параллелепипеда при отсутствии нагрузки на четырех его гранях. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 36—39.

Приводится структура решения задачи (растяжения) упругого параллелепипеда при отсутствии нагрузки на четырех его гранях в классе степенных рядов. Указаны четыре вида деформированных состояний параллелепипеда и дан их анализ. Структура построена при использовании полиномов произвольной степени. — Библиогр.4.

УДК 539.3

А п а н о в и ч В.Н. Использование метода Треффца для определения объемного напряженно-деформированного состояния деталей машин. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 39—42.

Изложена методика использования полной системы полиномиальных решений дифференциальных уравнений равновесия теории упругости в качестве координатных функций при расчете объемного напряженно-деформированного состояния деталей методом Треффца. Приведены результаты решения контрольной задачи на ЭЦВМ. — Ил. 1. Табл. 1. Библиогр. 4.

УДК 539.3

С е в е н ю к А.З. К вопросу об определении спектра собственных частот продольных колебаний упругих стержней с прямоугольным сечением при точном выполнении краевых условий на его боковых гранях. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7. с. 42—46.

Дается приближенный метод определения спектра частот продольных колебаний упругого стержня при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях.

Решение задачи рассматривается на основе вариационного уравнения Лагранжа, записанного для элементарного слоя упругого тела.

В качестве числового примера рассмотрен стержень прямоугольного сечения из стали. Для нахождения спектра частот составлена программа на языке ФОРТРАН применительно к ЭВМ "Минск-32" и "ЕС". — Табл. 1. Библиогр. 3.

УДК 539.3

Б о й к о Н.Я. Сжатие жестким шероховатым плоским штампом упругого прямоугольного параллелепипеда, четыре грани которого находятся в жестких шероховатых направляющих. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 46—51.

На основе вариационного принципа Лагранжа с помощью рядов Фурье с дополнительными членами дано решение задачи о сжатии упругого прямоугольного параллелепипеда, находящегося в жестких направляющих по четырём граням с учетом сил трения на всех поверхностях. Граничные условия на четырех гранях удовлетворяются точно, а на двух оставшихся — за счет сходимости построенных бесконечных рядов. Полученное решение удовлетворяет уравнениям Ламе. — Ил. 1. Библиогр. 3.

УДК 621.81:539.4

Ш и б а е в а Л.А. К вопросу определения частот собственных колебаний рамы автомобиля. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 51—54.

Определяются собственные частоты изгибных колебаний рамы автомобиля для трех приближений задачи расчета. Расчет произведен по методу Галеркина на основе полученных автором ранее дифференциальных уравнений, описывающих динамику рамы автомобиля. — Ил. 1. Библиогр. 1.

УДК 624.072.2

Б о р и с е н к о Н.Ф., К о с ы х Э.Г. К вопросу нелинейного изгиба стержня переменной жесткости в случае произвольного нагружения. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 54—58.

Определение перемещений для тонких стержней в случае произвольного нагружения и переменной жесткости сводится к интегрированию нелинейного интегродифференциального уравнения.

Практическая реализация решения такого уравнения весьма затруднительна. В статье излагается алгоритм решения, позволяющий достаточно просто реализовать поставленную задачу на частном случае нагружения стержня. — Ил. 2. Библиогр. 1.

УДК 624.072.21

Л и т в и н е н к о И.Н., Р о д з е в и ч Е.Г. Продольный изгиб стержня со сложными распределенными силами. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 58—63.

Рассматривается решение дифференциального уравнения устойчивости стержня, находящегося под действием продольных сил, распределенных по сложному закону. Это уравнение содержит переменные коэффициенты, которые не имеют точного решения.

Решение предлагается методом представления функции прогибов в виде суммы двух функций — основной и добавочной.

Показано определение критической нагрузки с привлечением статического критерия.

Метод иллюстрируется примером. — Библиогр. 3.

УДК 624.075.2

Б о р и с е н к о Н.Ф., Л е в к и н Д.Н., К о с ы х Э.Г. К вопросу образования вмятин в сжатых цилиндрических оболочках. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 64—68.

Рассмотрен вопрос об устойчивости цилиндрических оболочек в "малом" при осевом сжатии.

Оболочка представлена как совокупность полосок на упругом основании. Показано, что потеря устойчивости в "малом" происходит с образованием отдельных вмятин, которые затем развиваются самопроизвольно, т.е. при падающей кривой равновесных состояний, что соответствует возможности потери устойчивости в "большом". — Ил. 1. Библиогр. 2.

УДК 621.721 + 621.035

Б у т к е в и ч Н.Н., Б у ш и л о И.Д. Моделирование температурных напряжений в композиционных материалах методом фотоупругости. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 68—71.

Рассматривается вопрос о возможности моделирования температурных напряжений, возникающих в сплошных и композиционных материалах при стационарном и нестационарном тепловом режиме методом фотоупругости.

Показано, что изучение температурных напряжений в стальных изделиях с помощью оптически-чувствительных моделей типа эпоксидного компаунда ЭД-20М возможно при нестационарных и невозможно при стационарных тепловых режимах вследствие большого значения температурного индикатора. — Библиогр. 4.

УДК 539.385

Р у б е н ч и к В.Я., С у п и н В.В. К решению задачи кручения стержней односвязного и многосвязного поперечного сечения методом интегральных уравнений. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 72—77.

Задача нестесненного кручения стержней односвязного и многосвязного поперечного сечения сложной конфигурации сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Многосвязность стержня обуславливает некоторые особенности решения задачи, которые в статье преодолеваются путем линейной комбинации интегрального уравнения и условий однозначности смещений по теореме Бредта. Полученное уравнение, имеющее в качестве неизвестной функцию, непосредственно выражающую напряжения на контуре, заменяется системой линейных алгебраических уравнений. Численные результаты показывают возможности и область применения программы "СЕН-БЕНАН" для расчета напряжений при кручении упругих призматических стержней. — Ил.3. Библиогр. 9.

УДК 539.311

К а ш и н Ю.А., К р а в ч е н к о Л.Г. Равновесие стержня с освобождающимися связями при закритических нагрузках (плоская задача). "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 77—84.

Рассмотрено равновесие стержня в плоской щели под действием сжимающей силы, превышающей первую критическую силу. Получены система уравнений для нахождения предельных значений входящих величин, а также соотношения для определения реакции опорной поверхности, длины непрерывного контакта стержня с опорной поверхностью. — Ил. 2. Табл. 1. Библиогр. 2.

УДК 532.783

Н е м ц о в В.Б. Статистическая и феноменологическая гидродинамика нематических жидких кристаллов. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 85—90.

Сопоставлены основные результаты построения гидродинамики на основе статистического и феноменологического методов. Проанализированы предположения, используемые в феноменологических теориях при описании средних поворотов молекул на основе представления о директоре. Получены выражения для коэффициентов вязкос-

ти и констант Франка через компоненты статистически определяемых тензоров коэффициентов вязкости и модулей ориентационной упругости. — Библиогр. 13.

УДК 532.135

Л а м б и н а Е.Н. О принципе соответствия для медленных неустановившихся течений вязко-упругих линейных жидкостей. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 90—93.

Излагается вариант принципа соответствия, позволяющий использовать решения задач медленных неустановившихся течений вязкой несжимаемой жидкости для определения соответствующих течений вязко-упругих несжимаемых жидкостей. Рассмотрен пример (погружение тонкой пластинки в вязко-упругую максвелловскую жидкость). — Библиогр. 6.

УДК 532.135

Л а м б и н а Е.Н. Неустановившееся течение вязко-упругой жидкости в зазоре между непараллельными плоскостями. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 93—97.

Рассмотрено течение вязко-упругой максвелловской жидкости в смазочном слое между наклоненными друг к другу плоскостями, возникающее при мгновенном приложении к одной из границ постоянной силы. Определены давление и касательное напряжение. — Ил. 1. Библиогр. 3.

УДК 532.135

Л а п у ш и н а Б.И. Течение вязко-пластичной среды между сближающимися дисками при импульсном изменении скорости. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 97—103.

Рассмотрено течение вязко-пластичной среды, описываемой реологическим уравнением $S = 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right) \dot{E}$, в тонком зазоре между круглыми параллельными дисками, про-

исходящее за счет сообщения верхнему диску импульсивного движения со скоростью V .

Получено приближенное решение, основанное на предположении о независимости осевых скоростей от расстояния до оси симметрии и линеаризации дифференциальных уравнений движения. Определены поля скоростей и напряжений. — Ил. 1. Библиогр. 2.

УДК 532.135:621.822

П и к у с Ю.М. Неизотермическое течение реологически сложной смазочной среды в капилляре. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 103—106.

Рассмотрено ламинарное неизотермическое течение нелинейно-вязко-пластичной жидкости Балкли—Гершля в цилиндрическом капилляре при переменных реологических свойствах, изменение которых учтено введением пьезо-температурной зависимости аналога пластической вязкости. С использованием приближений теории смазки получены напорно-расходная характеристика и выражения для распределения температуры и давления. Результаты представляют интерес для расчета и исследования систем питания узлов трения с жидкостной смазкой. — Библиогр. 2.

УДК 532.135

К и м А.Х., Б о г и н с к а я Т.Ф. Прямой метод решения задачи течения вязко-пластичной системы в цилиндрах некруглого сечения. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 106—110.

Рассматривается метод решения задачи о движении вязко-пластичной системы в цилиндрах некруглого сечения. Предложенный метод позволяет вести расчет движения вязко-пластичной системы в цилиндрах некруглого сечения, найти застойные зоны в острых углах поперечного сечения, где нет течения. — Ил. 2. Библиогр. 2.

УДК 532.135.552.577

К и м А.Х., О р е ш к о Э.А.Определение линии скольжения у твердых стенок при движении вязко-пластичной системы. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 110—116.

Излагаются выводы уравнений, необходимых для теоретического определения линии скольжения у твердых стенок при движении вязко-пластичной системы в конусоподобных конструкциях. — Ил. 1. Библиогр. 2.

УДК 532.135.552.577

О р е ш к о Э.А. Расчет линий скольжения при движении вязко-пластичной системы в насадке цилиндр — конус. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 117—119.

Выполнен расчет линии скольжения у твердых стенок насадка в области перехода цилиндра в конус при движении вязко-пластичной системы. Полученный расчет возможно использовать для выбора конструктивных параметров емкостей с учетом максимальной выгрузки вязко-пластичных систем. — Библиогр. 4.

УДК 532.135

Г л у б о к и й В.И. Влияние степени стабилизации на реологические свойства дисперсных систем. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 119—121.

Приведены результаты исследования степени стабилизации на реологические свойства кремнийорганических вазелинов в зависимости от их особенностей строения структуры. — Ил. 2. Библиогр. 1.

УДК 539.215 +622.331

Б е з м е н В.И. Влияние физико-механических свойств сыпучих материалов и конструктивных параметров бункера на явление сводообразования. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 121—125.

Получена упрощенная формула для определения радиуса сводообразования и зависимости сводообразования от физико-механических свойств сыпучего материала и конструктивных параметров бункера. Использование полученных результатов позволит комплексно подходить к вопросу выбора соответствующей конструкции бункера. — Ил. 3. Табл. 2.

УДК 621.81.002.3:678—192

К у з н е ц о в В.П., Л е м б о в и ч Н.Б. Долговечность полимерных деталей машин и приборов. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 125—128.

Рассматриваются вопросы расчета полимерных деталей машин и приборов при действии различных нагрузок, возникающих при эксплуатации, транспортировании и изготовлении.

В качестве примеров приведены расчетные формулы для случая действия постоянных нагрузок, температурных напряжений и напряжений, возникающих при вибрациях и ударах.

Материалы статьи могут быть использованы при конструкторских расчетах полимерных деталей машин и приборов, а также исследовании физико-механических свойств материалов. — Библиогр. 3.

П а н о в А.К. Экспериментальное исследование распределения давлений при течении расплава полиэтилена в призматических каналах. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 128—133.

Предложен графический метод определения потерь давления на начальном участке и остаточное давление на выходе из канала.

Представлены экспериментальные данные по потерям давления на начальном участке и по всей длине призматических каналов при течении расплава полиэтилена. Ил. 3. Табл. 1. Библиогр. 1.

УДК 531.3+629.11.012.5

Л е в и н М.А. По поводу статьи Ю.А.Гурвича "Экспериментальное определение частотных характеристик стабилизирующего момента при боковом перемещении деформируемого колеса. Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1978, вып. 5. "Теоретическая и прикладная механика", 1980, вып. 7, с. 133—137.

Рассматриваются существенные особенности методики проведения эксперимента по определению частотных характеристик шины. Установлена связь между относительной разностью статической и эффективной жесткостей и величиной контактного угла. Подробно разобраны ошибки, допущенные в публикации Ю.А.Гурвича. — Библиогр. 4