

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОГО СЛОЯ И ПОЛОСЫ МЕТОДОМ ОПЕРАТОРНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Гончарова С. В.

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

В работах [1] и [2], насчитывающих, соответственно, более 130 и 200 литературных источников, проделан обзорный анализ приведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной. Особое внимание заслуживает символический метод А. И. Лурье [4], метод начальных функций В. В. Владова [5], а также работы по операторным методам Яна Микусинского [6], В. П. Маслова [7], В. А. Садовниченко [7], с которыми, в первую очередь, производилось сопоставление разрабатываемого авторами метода. В данной работе предлагается новый операторный подход решения задач равновесия упругого слоя и полосы. В прошлых работах одного из авторов [3] решение представлялось в виде разложения в тригонометрические ряды по одной из переменных с коэффициентами в виде функций от двух других переменных, а теперь в виде разложения в степенные ряды по одной из переменных и коэффициентами-функциями двух других переменных.

Запишем уравнения равновесия упругого слоя в декартовой пространственной системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено $\gamma = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu}$, где λ и μ – коэффициенты Ламе, а ν – коэффициент Пуассона упругой изотропной среды. Перепишем эти уравнения в более простом виде:

$$\nabla^2 u + \gamma \partial_1 \theta = 0 \quad \nabla^2 v + \gamma \partial_2 \theta = 0 \quad \nabla^2 w + \gamma \partial_3 \theta = 0. \quad (2)$$

Здесь обозначено:

$$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \Delta^2 + \partial_3^2; \Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2; \theta = \partial_1 u + \partial_2 v + \partial_3 w. \quad (3)$$

Для простоты изложения материала разобьем задачу на две: ЗАДАЧУ А (растяжение-сжатие упругого тела) и ЗАДАЧУ Б (изгиб упругого тела).

Решение ЗАДАЧИ А ищем в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_4 \frac{z^4}{4!} + u_6 \frac{z^6}{6!} + \dots + u_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \\ v &= v_0 + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_4 \frac{z^4}{4!} + v_6 \frac{z^6}{6!} + \dots + v_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \\ w &= w_1 z + w_3 \frac{z^3}{3!} + w_5 \frac{z^5}{5!} + w_7 \frac{z^7}{7!} + \dots + w_{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь коэффициенты перед переменной z являются функциями переменных x и y , то есть

$$u_{2k} = u_{2k}(x, y), \quad v_{2k} = v_{2k}(x, y), \quad w_{2k+1} = w_{2k+1}(x, y).$$

Подставляя (4) в (2), с учетом (3), получим:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_{2k} + u_{2k+2} + \gamma \partial_1 \theta_{2k} &= 0, \quad \Delta^2 v_{2k} + v_{2k+2} + \gamma \partial_2 \theta_{2k} = 0, \\ \Delta^2 w_{2k+1} + w_{2k+3} + \gamma \theta_{2k+2} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \theta_{2k} &= \partial_1 u_{2k} + \partial_2 v_{2k} + w_{2k+1}, \quad \Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta_0 = \partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_1; \\ u_{2k} &= u_{2k}(x, y), \quad v_{2k} = v_{2k}(x, y), \quad w_{2k+1} = w_{2k+1}(x, y), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Теперь определим рекуррентные соотношения. Предварительно устанавливаем: $u_2 = -\Delta^2 u_0 - \gamma \partial_1 \theta_0$, $v_2 = -\Delta^2 v_0 - \gamma \partial_2 \theta_0$, $w_3 = -\Delta^2 w_1 - \gamma \theta_2$.

Тогда $\theta_2 = \partial_1 u_2 + \partial_2 v_2 + w_3 = -\Delta^2 \theta_0 - \gamma \Delta^2 \theta_0 - \gamma \theta_2$, итак, получаем уравнение $(\gamma + 1)\theta_2 = -(\gamma + 1)\Delta^2 \theta_0$, откуда находим $\theta_2 = -\nabla^2 \theta_0$.

Для других коэффициентов также будем иметь:

$$u_4 = -\Delta^2 u_2 - \gamma \partial_1 \theta_2, \quad v_4 = -\Delta^2 v_2 - \gamma \partial_2 \theta_2, \quad w_5 = -\Delta^2 w_3 - \gamma \theta_4.$$

Тогда $\theta_4 = \partial_1 u_4 + \partial_2 v_4 + w_5 = -\Delta^2 \theta_2 - \gamma \Delta^2 \theta_2 - \gamma \theta_4$.

Как и выше, получаем уравнение $(\gamma + 1)\theta_4 = -(\gamma + 1)\Delta^2 \theta_2$, откуда находим $\theta_4 = -\Delta^2 \theta_2$ и так далее, а $\theta_6 = \partial_1 u_6 + \partial_2 v_6 + w_7 = -\Delta^2 \theta_4$, поэтому

$$\theta_{2k} = (-1)^k \Delta^{2k} \theta_0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (5)$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} u_2 &= -\Delta^2 u_0 - \gamma \partial_1 \theta_0, \\ u_4 &= -\Delta^2 u_2 - \gamma \partial_1 \theta_2 = \Delta^4 u_0 + \gamma \Delta^2 \partial_1 \theta_0 - \gamma \partial_1 \theta_2 = \Delta^4 u_0 + 2\gamma \Delta^2 \partial_1 \theta_0, \\ u_6 &= -\Delta^2 u_4 - \gamma \partial_1 \theta_4 = -\Delta^6 u_0 - 2\gamma \Delta^4 \partial_1 \theta_0 - \gamma \partial_1 \theta_4 = -\Delta^6 u_0 - 3\gamma \Delta^4 \partial_1 \theta_0, \\ u_8 &= -\Delta^2 u_6 - \gamma \partial_1 \theta_6 = \Delta^8 u_0 + 3\gamma \Delta^6 \partial_1 \theta_0 - \gamma \partial_1 \theta_6 = \Delta^8 u_0 + 4\gamma \Delta^6 \partial_1 \theta_0. \end{aligned}$$

Значит,

$$u_{2k} = (-1)^k [\Delta^{2k} u_0 + k\gamma \Delta^{2k-2} \partial_1 \theta_0] = (-1)^k \Delta^{2k} u_0 + \frac{(-1)^k \gamma 2k \Delta^{2k-1} \partial_1 \theta_0}{2\Delta} \theta_0. \quad (6)$$

Аналогично

$$v_{2k} = (-1)^k [\Delta^{2k} v_0 + k\gamma \Delta^{2k-2} \partial_1 \theta_0] = (-1)^k \Delta^{2k} v_0 + \frac{(-1)^k \gamma 2k \Delta^{2k-1} \partial_2 \theta_0}{2\Delta} \theta_0. \quad (7)$$

Далее по схожему алгоритму определяем:

$$\begin{aligned} w_3 &= -\Delta^2 w_1 - \gamma \theta_2 = -\Delta^2 w_1 + \gamma \theta_0, \quad w_5 = -\Delta^2 w_3 + \gamma \Delta^2 \theta_2 = \Delta^4 w_1 - 2\gamma \Delta^4 \theta_0, \\ w_7 &= -\Delta^2 w_5 + \gamma \Delta^2 \theta_4 = -\Delta^6 w_1 + 3\gamma \Delta^6 \theta_0. \end{aligned}$$

Значит,

$$w_{2k+1} = (-1)^k \Delta^{2k} [w_1 - k\gamma \theta_0]. \quad (8)$$

Подставляя найденные рекуррентные соотношения в исходные ряды, получим:

$$\begin{aligned} u &= \cos(z\Delta) \cdot u_0(x, y) - \frac{\gamma z \partial_1 \sin(z\Delta)}{2\Delta} \cdot [\partial_1 u_0(x, y) + \partial_2 v_0(x, y) + w_1(x, y)], \\ v &= \cos(z\Delta) \cdot v_0(x, y) - \frac{\gamma z \partial_2 \sin(z\Delta)}{2\Delta} \cdot [\partial_1 u_0(x, y) + \partial_2 v_0(x, y) + w_1(x, y)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$w = \frac{\sin(z\Delta)}{\Delta} \cdot w_1(x, y) + \frac{\gamma[\sin z\Delta - z\Delta \cos(z\Delta)]}{2\Delta} \cdot [\partial_1 u_0(x, y) + \partial_2 v_0(x, y) + w_1(x, y)],$$

$$\text{где } \Delta = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}.$$

Для устранения произвола 3-х функций полагаем $u_0 = \frac{\partial_1}{\Delta^2} w_1$, $v_0 = \frac{\partial_2}{\Delta^2} w_1$, $\frac{w_1(x, y)}{\Delta^2} = f(x, y)$, и тогда окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} u &= [\cos(z\Delta) - \gamma z\Delta \sin(z\Delta)] \partial_1 \cdot f(x, y), \\ v &= [\cos(z\Delta) - \gamma z\Delta \sin(z\Delta)] \partial_2 \cdot f(x, y), \\ w &= [(\gamma + 1) \sin(z\Delta) - \gamma z\Delta \cos(z\Delta)] \Delta \cdot f(x, y). \end{aligned} \quad (10)$$

Проведем проверку для этого случая. Находим:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \partial_1 u + \partial_2 v + \partial_3 w = [\Delta^2 \cos(z\Delta) - \gamma \Delta^3 z \sin(z\Delta)] \cdot f(x, y) + \\ &+ [\Delta^2 \cos(z\Delta) + \gamma \Delta^3 z \sin(z\Delta)] \cdot f(x, y) = 2\Delta^2 \cos(z\Delta) \cdot f(x, y). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\nabla^2 \cos(z\nabla) = (\Delta^2 + \partial_3^2) \cdot \cos(z\nabla) = 0$ и $\nabla^2 \sin(z\nabla) = (\Delta^2 + \partial_3^2) \cdot \sin(z\nabla) = 0$, получаем $\nabla^2 u = -2\gamma \partial_1 \Delta^2 \cos(z\Delta) \cdot f(x, y)$ и тогда равенство $\nabla^2 u + \gamma \partial_1 \theta_A = 0$ тождественно выполняется.

Аналогично проверяется правильность второго уравнения равновесия. Для третьего уравнения получим:

$\nabla^2 w = 2\gamma \Delta^3 \sin(z\Delta) \cdot f(x, y)$, $\partial_3 \theta_A = -2\Delta^3 \sin(z\Delta)$ и теперь очевидно, что равенство $\nabla^2 w + \gamma \partial_3 \theta_A = 0$ также выполняется тождественно.

Теперь решим ЗАДАЧУ Б.

Ее решение ищем в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} u &= u_1 z + u_3 \frac{z^3}{3!} + u_4 \frac{z^5}{5!} + u_6 \frac{z^7}{7!} + \dots + u_{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ v &= v_1 z + v_3 \frac{z^3}{3!} + v_5 \frac{z^5}{5!} + v_7 \frac{z^7}{7!} + \dots + v_{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (11) \\ w &= w_0 + w_2 \frac{z^2}{2!} + w_4 \frac{z^4}{4!} + w_6 \frac{z^6}{6!} + \dots + w_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Подставляя (11) в (2), с учетом (3), получим:

$$\begin{aligned}\Delta^2 w_0 &= (\partial_1^2 + \partial_2^2) w_0 = 0, \quad \Delta^2 u_{2k+1} + u_{2k+3} + \gamma \partial_1 \theta_{2k+1} = 0, \\ \Delta^2 v_{2k+1} + v_{2k+3} + \gamma \partial_2 \theta_{2k+1} &= 0, \quad \Delta^2 w_{2k} + w_{2k+2} + \gamma \theta_{2k+3} = 0.\end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \theta_{2k+1} = \partial_1 u_{2k+1} + \partial_2 v_{2k+1} + w_{2k+2}, \quad \Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2,$$

$$\theta_1 = \partial_1 u_1 + \partial_2 v_1 + w_2;$$

$$u_{2k+1} = u_{2k+1}(x, y), \quad v_{2k+1} = v_{2k+1}(x, y), \quad w_{2k+2} = w_{2k+2}(x, y), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Теперь определим рекуррентные соотношения. Предварительно устанавливаем: $u_3 = -\Delta^2 u_1 - \gamma \partial_1 \theta_1$, $v_3 = -\Delta^2 v_1 - \gamma \partial_2 \theta_1$, $w_4 = -\Delta^2 w_2 - \gamma \theta_3$.

$$\text{Тогда } \theta_3 = \partial_1 u_3 + \partial_2 v_3 + w_4 = -\Delta^2 u_1 - \gamma \partial_1 \theta_1 - \Delta v_1 - \gamma \partial_2 \theta_1 - \Delta^2 w_2 - \gamma \theta_3.$$

$$\text{Итак, получаем уравнение } (\gamma + 1)\theta_3 = -(\gamma + 1)\Delta^2 \theta_1.$$

Для других коэффициентов также будем иметь:

$$u_5 = -\Delta^2 u_3 - \gamma \partial_1 \theta_3, \quad v_5 = -\Delta^2 v_3 - \gamma \partial_2 \theta_3, \quad w_6 = -\Delta^2 w_4 - \gamma \theta_5.$$

$$\text{Тогда } \theta_5 = \partial_1 u_5 + \partial_2 v_5 + w_6 = -\Delta^2 u_3 - \gamma \partial_1 \theta_3 - \Delta^2 v_3 - \gamma \partial_2 \theta_3 - \gamma \theta_5.$$

Как и выше, получаем уравнение $(\gamma + 1)\theta_5 = -(\gamma + 1)\Delta^2 \theta_3$, откуда находим $\theta_5 = -\nabla^2 \theta_3$ и так далее $\theta_7 = \partial_1 u_7 + \partial_2 v_7 + w_8 = -\nabla^2 \theta_5$, значит

$$\theta_{2k+1} = (-1)^k \Delta^{2k} \theta_1, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

В результате получим:

$$u_3 = -\Delta^2 u_1 - \gamma \partial_1 \theta_1;$$

$$u_5 = -\Delta^2 u_3 - \gamma \partial_1 \theta_3 = \Delta^4 u_1 + \gamma \Delta^2 \partial_1 \theta_1 - \gamma \partial_1 \theta_2 = \Delta^4 u_1 + 2\gamma \Delta^2 \partial_1 \theta_1;$$

$$u_7 = -\Delta^2 u_5 - \gamma \partial_1 \theta_5 = -\Delta^6 u_1 - 2\gamma \Delta^4 \partial_1 \theta_1 - \gamma \partial_1 \theta_5 = -\Delta^6 u_1 - 3\gamma \Delta^4 \partial_1 \theta_1;$$

$$u_9 = -\Delta^2 u_7 - \gamma \partial_1 \theta_7 = \Delta^8 u_1 + 3\gamma \Delta^6 \partial_1 \theta_1 - \gamma \partial_1 \theta_6 = \Delta^8 u_1 + 4\gamma \Delta^6 \partial_1 \theta_1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}u_{2k+1} &= (-1)^k [\Delta^{2k} u_1 + k\gamma \Delta^{2k-2} \partial_1 \theta_1] = \\ &= (-1)^k \Delta^{2k} u_1 + \frac{\gamma (-1)^k \Delta^{2k}}{2\Delta^2} [(2k+1) - 1] \theta_1.\end{aligned} \tag{12}$$

Аналогично,

$$v_{2k+1} = (-1)^k [\Delta^{2k} v_1 + k\gamma \Delta^{2k-2} \partial_2 \theta_1] =$$

$$= (-1)^k \Delta^{2k} v_1 + \frac{\gamma(-1)^k \Delta^{2k} \partial_2}{2\Delta^2} [(2k+1)-1]\theta_1. \quad (13)$$

Далее по схожему алгоритму определяем:

$$\begin{aligned} w_4 &= -\Delta^2 w_2 - \gamma \theta_3 = -\Delta^2 w_2 + \gamma \Delta^2 \theta_1 = \Delta^2 (-w_2 + \gamma \theta_1), \\ w_6 &= -\Delta^2 w_4 + \gamma \Delta^2 \theta_5 = \Delta^4 w_2 - 2\gamma \Delta^4 \theta_1 = \Delta^4 (w_2 - 2\gamma \theta_1), \\ w_8 &= -\Delta^2 w_6 + \gamma \Delta^2 \theta_7 = -\Delta^6 w_2 + 3\gamma \Delta^6 \theta_1 = \Delta^6 (-w_2 + 4\gamma \theta_1). \end{aligned}$$

Поэтому

$$w_{2k} = (-1)^k \Delta^{2k-2} [w_2 - k\gamma \theta_1], \quad (14)$$

где обозначено: $\Delta = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}$.

Подставляя найденные рекуррентные соотношения в исходные ряды, окончательно получим:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sin(z\Delta)}{\Delta} \cdot u_1(x, y) + \frac{\gamma \partial_1}{2\Delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Delta^{2k} (2k+1-1) z^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \theta_1(x, y) = \\ &= \frac{\sin(z\Delta)}{\Delta} \cdot u_1(x, y) + \frac{\gamma \partial_1 [z\Delta \cos(z\Delta) + \sin(z\Delta)]}{2\Delta^3} \cdot [\partial_1 u_1(x, y) + \partial_2 v_1(x, y) + w_2(x, y)], \\ v &= \frac{\sin(z\Delta)}{\Delta} \cdot v_1(x, y) + \frac{\gamma \partial_2}{2\Delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Delta^{2k} (2k+1-1) z^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \theta_1(x, y) = \\ &= \frac{\sin(z\Delta)}{\Delta} \cdot v_1(x, y) + \frac{\gamma \partial_2 [z\Delta \cos(z\Delta) + \sin(z\Delta)]}{2\Delta^3} \cdot [\partial_1 u_1(x, y) + \partial_2 v_1(x, y) + w_2(x, y)], \\ w &= -\frac{\cos(z\Delta)}{\Delta^2} \cdot w_2(x, y) - \frac{\gamma}{2\Delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2kz^{2k+1} \Delta^{2k}}{(2k+1)!} \cdot \theta_1(x, y) = \\ &= -\frac{\cos(z\Delta)}{\Delta^2} \cdot w_2(x, y) - \frac{\gamma z \sin(z\Delta)}{2\Delta} \cdot [\partial_1 u_1(x, y) + \partial_2 v_1(x, y) + w_2(x, y)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь, как и выше, для устранения произвола 3-х функций полагаем:

$$u_1 = \frac{\partial_1}{\Delta^2} w_2, \quad v_1 = \frac{\partial_2}{\Delta^2} w_2, \quad \frac{w_2(x, y)}{\Delta^3} = g(x, y), \quad \text{и тогда окончательно будем иметь:}$$

$$\begin{aligned} u &= [(\gamma+1)\sin(z\Delta) + \gamma z\Delta \cos(z\Delta)] \partial_1 \cdot g(x, y), \\ w &= -[\cos(z\Delta) + \gamma z\Delta \sin(z\Delta)] \Delta \cdot g(x, y). \end{aligned} \quad (16)$$

Проведем также проверку и для этого случая. Определяем:

$$\begin{aligned}\theta_B &= \partial_1 u + \partial_2 v + \partial_3 w = \{\sin(z\Delta) + \gamma[z\Delta \cos(z\Delta) + \sin(z\Delta)]\} \Delta^2 \cdot g(x, y) + \\ &+ \{\sin(z\Delta) - \gamma[z\Delta \cos(z\Delta) + \sin(z\Delta)]\} \Delta^2 \cdot g(x, y) = 2\Delta^2 \sin(z\Delta^2) \cdot g(x, y).\end{aligned}$$

С учетом $\nabla^2 \cos(z\nabla) = (\Delta^2 + \partial_3^2) \cdot \cos(z\nabla) = 0$ и

$$\nabla^2 \sin(z\nabla) = (\Delta^2 + \partial_3^2) \cdot \sin(z\nabla) = 0, \text{ устанавливаем, что}$$

$$\nabla^2 u = -2\gamma \partial_1 \Delta^2 \sin(z\Delta) \cdot f(x, y) \text{ и тогда равенство } \nabla^2 u + \gamma \partial_1 \theta_B = 0$$

выполняется тождественно.

Аналогично проверяется правильность второго уравнения равновесия.

Для третьего уравнения получим: $\nabla^2 w = 2\gamma \Delta^3 \sin(z\Delta) \cdot f(x, y)$, $\partial_3 \theta_B = -2\Delta^3 \sin(z\Delta)$ и теперь очевидно, что равенство $\nabla^2 w + \gamma \partial_3 \theta_B = 0$ также выполняется тождественно.

Теперь запишем граничные условия в перемещениях. Для этого воспользуемся хорошо известным в сопротивлении материалов обобщенным законом Гука для нормальных напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) = E\partial_1 u, \\ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) = E\partial_2 v, \\ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = E\partial_3 w. \end{cases}$$

Решив эту систему линейных уравнений, с учетом $E = 2G(1 + \nu)$, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\partial_1 u + \nu\partial_2 v + \nu\partial_3 w], \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-2\nu} [\nu\partial_1 u + (1-\nu)\partial_2 v + \nu\partial_3 w], \\ \sigma_z &= \frac{2G}{1-2\nu} [\nu\partial_1 u + \nu\partial_2 v + (1-\nu)\partial_3 w].\end{aligned}\tag{17}$$

Для касательных напряжений будем иметь

$$\tau_{xy} = G(\partial_2 u + \partial_1 v), \quad \tau_{yz} = G(\partial_3 v + \partial_2 w), \quad \tau_{zx} = G(\partial_1 w + \partial_3 u).\tag{18}$$

Теперь из выше полученных соотношений, выпишем формулы перемещений упругой среды для случая плоской задачи теории упругости (полосы). Итак, нетрудно получить:

ЗАДАЧА А.

$$\begin{aligned} u &= [\cos(z\partial_1) - \gamma z\partial_1 \sin(z\partial_1)] \cdot f(x), \\ w &= [(\gamma + 1)\sin(z\partial_1) - \gamma z\partial_1 \cos(z\partial_1)] \cdot f(x). \end{aligned} \quad (19)$$

ЗАДАЧА Б.

$$\begin{aligned} u &= [(\gamma + 1)\sin(z\partial_1) + \gamma z\partial_1 \cos(z\partial_1)] \cdot g(x) \\ w &= -[\cos(z\partial_1) + \gamma z\partial_1 \sin(z\partial_1)] \cdot g(x). \end{aligned} \quad (20)$$

Граничным условиям в плоской задаче можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = \tau_{zx} &= G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \\ \sigma_x &= \frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\partial_1 u + \nu\partial_3 w] = G[(\gamma+1)\partial_1 u + (\gamma-1)\partial_3 w], \\ \sigma_z &= \frac{2G}{1-2\nu}[\nu\partial_1 u + (1-\nu)\partial_3 w] = G[(\gamma-1)\partial_1 u + (\gamma+1)\partial_3 w]. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь G – модуль поперечной упругости; $\gamma = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1-2\nu}$,

$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} = \gamma + 1$, $\frac{2\nu}{1-2\nu} = \gamma - 1$; λ и μ – коэффициенты Ламе; ν – коэффициент

Пуассона упругой изотропной среды. Применим только что полученные выше формулы к решению задачи расчета упругой полосы с закрепленным основанием.

А теперь применим описанный выше операторный подход к решению конкретной практической задачи. Рассмотрим равновесие упругой изотропной полосы, жестко сцепленной основанием $z = 0$ с неподвижным твердым телом, т. е. когда перемещения $u_0 = u|_{z=0}$ и $w_0 = w|_{z=0}$ тождественно равны нулю $u_0 = 0$, $w_0 = 0$ (рисунок 1).

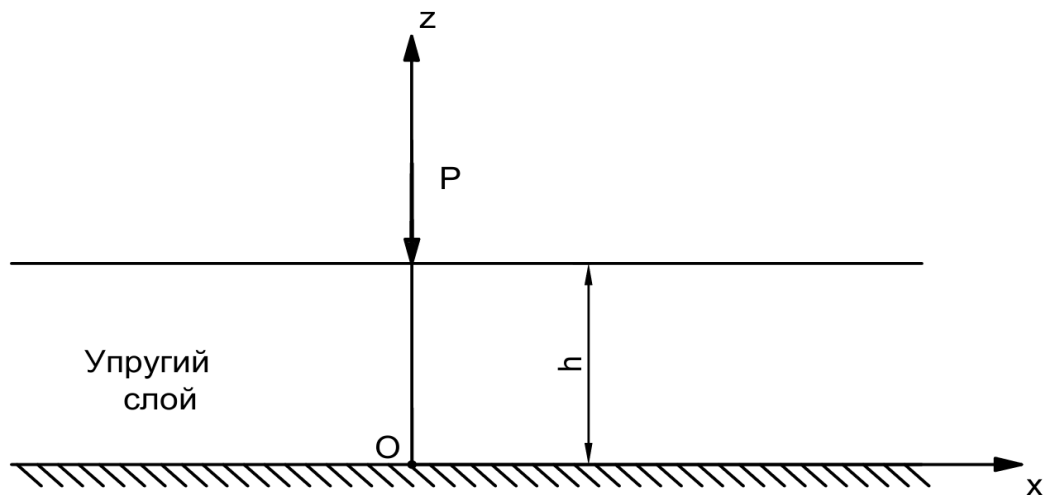


Рис. 1. Равновесие упругой изотропной полосы

В этой связи перепишем (19) и (20) в эквивалентном виде:

Задача А.

$$u = -\frac{1}{2}\gamma z \sin(z\partial_1)f(x); \quad w = \frac{1}{2}\left[(\gamma+2)\frac{\sin(z\partial_1)}{\partial_1} - \gamma z \cos(z\partial_1)\right]f(x). \quad (22)$$

Задача Б.

$$u = \frac{1}{2}\left[\gamma z \cos(z\partial_1) + (\gamma+2)\frac{\sin(z\partial_1)}{\partial_1}\right]g(x); \quad w = -\frac{1}{2}\gamma z \sin(z\partial_1)g(x), \quad (23)$$

где $\gamma = \frac{1}{1-2\nu}$, ν – коэффициент Пуассона, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные функции.

Формулы (22) и (23) тождественно удовлетворяют граничному условию $u_0 = u|_{z=0} = 0$, $w_0 = w|_{z=0} = 0$ и уравнению равновесия внутри области

$$\nabla^2 u + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0; \quad \nabla^2 w + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

где u и w – соответственно горизонтальное и вертикальное перемещение частиц упругой среды,

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Составим выражения для напряжений

$$\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \text{и} \quad \sigma_z = G[(\gamma-1)\frac{\partial u}{\partial x} + (\gamma+1)\frac{\partial w}{\partial z}].$$

В результате получим:

Задача А.

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G[\sin z \partial_1 - \gamma z \partial_1 \cos z \partial_1]f(x); \\ \sigma_z &= G[(\gamma+1)\cos z \partial_1 + \gamma z \partial_1 \sin z \partial_1]f(x). \end{aligned} \quad (24)$$

Задача Б.

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G[(\gamma+1)\cos z \partial_1 - \gamma z \partial_1 \sin z \partial_1]g(x); \\ \sigma_z &= -G[\sin z \partial_1 + \gamma z \partial_1 \cos z \partial_1]g(x). \end{aligned} \quad (25)$$

Полагая $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-i\lambda x} d\lambda$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B e^{-i\lambda x} d\lambda$, и используя теорему о дифференцировании под знаком интеграла по параметру x , имеем: $f^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^n A e^{-i\lambda x} d\lambda$.

На основании этих формул устанавливаем

$$\begin{aligned} [\sin(z\partial_1)]f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(iz\lambda) A e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A \operatorname{sh}(z\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ [\cos(z\partial_1)]f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A \operatorname{ch}(z\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ [z\partial_1 \sin(z\partial_1)]f(x) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Az \cdot \operatorname{sh}(z\lambda) \frac{d}{dx}(e^{-i\lambda x}) d\lambda = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A\lambda z \cdot \operatorname{sh}(z\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ [z\partial_1 \cos(z\partial_1)]f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Az \cdot \operatorname{ch}(z\lambda) \frac{d}{dx}(e^{-i\lambda x}) d\lambda = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A\lambda z \cdot \operatorname{ch}(z\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогичные соотношения получаются и для функций $g(x)$. Используя (10), запишем выражения для напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{rz}}{G} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Ai[\gamma z\lambda \cdot \operatorname{ch}(z\lambda) - \operatorname{sh}(z\lambda)] \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B[(\gamma + 1) \cdot \operatorname{ch}(z\lambda) + \gamma z\lambda \cdot \operatorname{sh}(z\lambda)] \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda \\ \frac{\sigma_{zz}}{G} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A[(\gamma + 1) \operatorname{ch}(z\lambda) - \gamma z\lambda \cdot \operatorname{sh}(z\lambda)] \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Bi[\operatorname{sh}(z\lambda) + \gamma z\lambda \cdot \operatorname{ch}(z\lambda)] \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим случай сжатия полосы сосредоточенной силой P , приложенной в точке $x = 0$, $z = h$ перпендикулярно верхнему основанию. Тогда $\tau_{rz}(z = h) = 0$; $\sigma_{zz}(z = h) = -P\delta(x)$, где $\delta(x)$ – дельта функция. Умножим

уравнение (27) на $e^{i\lambda x} dx$ и проинтегрируем по всей длине полосы. Используя основную формулу интегрального преобразования Фурье

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} du \right\} e^{i\lambda x} dx$$

и свойство дельта функции $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{i\lambda x} dx = 1$, получим для определения $A(\lambda)$

и $B(\lambda)$ систему уравнений при $z = h$.

$$Ai[\gamma h\lambda \cdot \text{ch}(h\lambda) - \text{sh}(h\lambda)] + B[(\gamma + 1) \cdot \text{ch}(h\lambda) + \gamma h\lambda \cdot \text{sh}(h\lambda)] = 0$$

$$A[(\gamma + 1) \cdot \text{ch}(h\lambda) - \gamma h\lambda \cdot \text{sh}(h\lambda)] + Bi[\text{sh}(h\lambda) + \gamma h\lambda \cdot \text{ch}(h\lambda)] = -\frac{P}{\sqrt{2\pi G}}.$$

Вычисляем определитель полученной системы

$$\Delta = \text{sh}^2(h\lambda) - (\gamma + 1)^2 \text{ch}^2(h\lambda) - \gamma^2 h^2 \lambda^2$$

и находим A и B :

$$A = -\frac{[\gamma \cdot \text{ch}(h\lambda) + (\gamma - 1)h\lambda \cdot \text{sh}(h\lambda)]P}{\sqrt{2\pi G}\Delta}, \quad B = \frac{[(\gamma - 1)h\lambda \cdot \text{ch}(h\lambda) - \text{sh}(h\lambda)]Pi}{\sqrt{2\pi G}\Delta}.$$

Приведем расчетные формулы для напряжений в заделанном основании $z = 0$:

$$\tau_{zx} = \frac{2(\gamma + 1)P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma h\lambda \cdot \text{ch}(h\lambda) - (\gamma + 1)\text{sh}(h\lambda)}{\text{sh}^2(h\lambda) - (\gamma + 1)^2 \text{ch}^2(h\lambda) - \gamma^2 h^2 \lambda^2} \sin(\lambda x) d\lambda;$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{2(\gamma + 1)P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\gamma + 1) \cdot \text{ch}(h\lambda) + \gamma h\lambda \cdot \text{sh}(h\lambda)}{\text{sh}^2(h\lambda) - (\gamma + 1)^2 \text{ch}^2(h\lambda) - \gamma^2 h^2 \lambda^2} \cos(\lambda x) d\lambda.$$

С учетом $\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 = (1 - 2\nu)^2$, $\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma}\right)^2 = 4(1 - \nu)^2$ определяем:

$$\begin{aligned}\Delta &= \operatorname{sh}^2(h\lambda) - (\gamma + 1)^2 \operatorname{ch}^2(h\lambda) - \gamma^2 h^2 \lambda^2 = (\gamma - 1)^2 \left[(1/\gamma)^2 \operatorname{sh}^2(h\lambda) - (\gamma + 1/\gamma)^2 \cdot \right. \\ &\cdot \operatorname{ch}^2(h\lambda) - h^2 \lambda^2 = \gamma^2 \left[(1 - 2\nu)^2 \operatorname{sh}^2(h\lambda) - 4(1 - \nu)^2 (\operatorname{sh}^2(h\lambda) + 1) - h^2 \lambda^2 \right] = \\ &= -\gamma^2 \left[(3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2(h\lambda) + h^2 \lambda^2 + 4(1 - \nu)^2 \right].\end{aligned}$$

Вынося в числителе выражений τ_{zx} и σ_{zx} за скобки множитель $(1 - \nu)$, после элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned}\tau_{zx}|_{z=0} &= \frac{2(1 - \nu)P}{\pi h} \int_0^\infty \frac{\mu \cdot \operatorname{ch}(\mu) - (1 - 2\nu) \operatorname{sh}(\mu)}{(3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2(\mu) + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2} \sin\left(\mu \frac{x}{h}\right) d\mu, \\ \sigma_z|_{z=0} &= -\frac{2(1 - \nu)P}{\pi h} \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{sh}(\mu) + 2(1 - \nu) \operatorname{ch}(\mu)}{(3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2(\mu) + \mu^2 + 4(1 - \nu)^2} \cos\left(\mu \frac{x}{h}\right) d\mu,\end{aligned}$$

где принято $\mu = \lambda h$. Полученный результат совпадает с классическим [8, стр. 40–41], что доказывает корректность нового операторного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов, В. А. Операторный метод решения задач теории упругости : дис. канд. физ.-мат. наук : 01.02.04. / В. А. Акимов – Мн., 1992. – 136 с.
2. Крушевский, А. Е. Введение в аналитическую механику упругих тел / А. Е. Крушевский – Мн. : БНТУ, 2004. – 335 с.
3. Акимов, В. А. Операторный метод решения задач теории упругости : монография / В. А. Акимов – Мн. : УП «Технопринт», 2003. – 101 с.
4. Лурье, А. И. К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / А. И. Лурье // Труды Ленингр. индустр. ин-та. – 1937. – Т. 3, № 6. – С. 31–36.
5. Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 223 с.
6. Микусинский, Я. Операторное исчисление / Я. Микусинский. – М. : Издательство иностр. лит., 1956. – 367 с.
7. Маслов, В. П. Операторные методы / В. П. Маслов. – М. : Наука, Гл. редакция физ.-мат. литературы, 1973. – 544 с.
8. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости / Я. С. Уфлянд // АН СССР. – М.-Л., 1963. – 367 с.

Поступила: 12.09.2025