

Рис. 1. Изменение во времени толщины слоя для одно- и двухзвенной модели Максвелла при $F(\bar{t}) = 16 F_{\max} \bar{t}^2 (1 - \bar{t})^2$; $\bar{t} = t/T$; $\bar{h} = h/h_0$:

$$1 - 16 F_{\max} K T / (150 \eta) = 1; \quad 2 - 16 F_{\max} K T / (300 \eta) = 1$$

Из выражения (4) следует, что течение вязкоупругого слоя в момент времени $t = T$ прекращается и его толщина h_1 в дальнейшем не изменяется.

2. n -звенная модель Максвелла:

$$\varphi(t) |_{t \geq T} = K(A_0 \int_0^T F(t) dt + \sum_{j=1}^{n-1} A_j \exp(s_j t) \int_0^T \exp(-s_j t) F(t) dt).$$

Все коэффициенты A_0, A_j положительны. Из отрицательности s_j следует, что функция $\varphi(t)$ монотонно убывает, стремясь к предельному значению $\varphi_{\text{пр}}$. При этом $h(t)$ монотонно возрастает, также стремясь к предельному значению $h_{\text{пр}} = h_1$, где h_1 — не изменяющаяся после снятия силы $F(t)$ толщина

вязкоупругого слоя с одним временем релаксации. Для этого слоя $\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i$,

$$G = \sum_{i=1}^n G_i.$$

Таким образом, для обобщенной модели Максвелла явление упругого возврата имеет место и после снятия нагрузки. На рис. 1 представлены результаты расчета для двухзвенной модели Максвелла и модели Максвелла, для которой $\eta = \eta_1 + \eta_2$ и $G = G_1 + G_2$, $\tau_2 = 0,25 \tau_1$, $\eta_2 = 0,5 \eta_1$, $T = \tau_1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламбина Е.Н., Лапушина Б.И. Течение вязкоупругой среды наследственного типа в зазоре между конусами // Теоретическая и прикладная механика. — Минск, 1986. — Вып. 13. — С. 88–96.
2. Шультман Э.П., Хусид Б.М. Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. — Минск, 1983. — 255 с.

УДК 532.135:621.822

Ю.М. ПИКУС, канд. техн. наук,
Г.Н. АЛЕХНОВИЧ (БПИ)

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫМИ ЖИДКОСТЯМИ

Уравнения теории смазки реологически сложными жидкостями в отличие от классических уравнений Рейнольдса [1] должны включать компоненты тензора напряжений. Кроме того, их необходимо преобразовать с учетом

общепринятых допущений (ламинарное изотермическое течение, прилипание, однородность потока, отсутствие массовых сил и облитерации) и геометрии смазочного слоя (толщина пленки мала по сравнению с другими ограничивающими размерами). Рассмотрим получение такой системы уравнений для произвольного смазочного слоя в ортогональной криволинейной системе координат.

В качестве общей реологической модели примем уравнение Балкли–Гершеля для нелинейно-вязкопластичной жидкости, которое в случае пространственного течения устанавливает следующую связь между компонентами тензора напряжений трения τ_{ik} и скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ik}$:

$$\tau_{ik} = 2(\tau_0/I + kI^{n-1})\dot{\epsilon}_{ik}, \quad (1)$$

где τ_0 , k , n — реологические параметры жидкости.

Интенсивность скоростей деформации

$$I = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ik}\dot{\epsilon}_{ki}}. \quad (2)$$

Уравнение (1) справедливо для смазочных материалов, не проявляющих упругие свойства, или в условиях, когда влияние их незначительно. Оно обобщает реологические свойства пластичных смазок, полимерсодержащих масел (в определенном диапазоне скоростей сдвига), эмульсий и др. [2]. Представим выражение (1) в квазиньютоновской форме

$$\tau_{ik} = 2\mu_a\dot{\epsilon}_{ik}, \quad (3)$$

введя эффективную вязкость жидкости

$$\mu_a = \tau_0/I + kI^{n-1}. \quad (4)$$

Примем специальную систему ортогональных криволинейных координат q_1, q_2, q_3 , непосредственно связанную с одной из поверхностей трения, ограничивающих тонкий смазочный слой. Пусть координатные линии $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$ являются линиями кривизны поверхности, а координата q_3 определяет расстояние от рассматриваемой поверхности по нормали до точки внутри смазочного слоя. Подобным образом вводится система координат в теории трехмерного пограничного слоя. Такой подход справедлив, если поверхности трения имеют гладкую форму с непрерывными кривизнами и их производными. Гидродинамический и гидростатический смазочные слои в большинстве случаев отвечают этим требованиям.

Используя представления, приведенные в [3], зададим уравнение ограничивающей поверхности трения S_0 (при $q_3 = 0$) как $\bar{r}_0 = \bar{r}_0(q_1, q_2)$. Основная квадратичная форма этой поверхности

$$dS^2 = A_1^2 dq_1^2 + A_2^2 dq_2^2.$$

Семейство поверхностей S внутри смазочного слоя, параллельных поверхности S_0 , запишем в виде $\bar{r} = \bar{r}_0 + q_3 \bar{\omega}$, где $\bar{\omega}(q_1, q_2)$ — единичный вектор нормали к поверхности S_0 . Длина дуги в системе координат q_1, q_2, q_3 с учетом преобразований, обоснованных в [3]

$$dS^2 = A_1^2 (1 + q_3/R_1)^2 dq_1^2 + A_2^2 (1 + q_3/R_2)^2 dq_2^2 + dq_3^2, \quad (5)$$

где $A_1 = A_1(q_1, q_2)$; $A_2 = A_2(q_1, q_2)$ — коэффициенты основной квадратичной формы, ограничивающей поверхности трения S_0 ; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности S_0 .

Длина элемента дуги dS выражается через соответствующие координатам q_1, q_2, q_3 коэффициенты Ляме H_1, H_2, H_3 :

$$dS^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2. \quad (6)$$

Сопоставляя (5) и (6), получим следующие значения коэффициентов Ляме в ортогональной системе координат:

$$H_1 = A_1 (1 + q_3/R_1), \quad H_2 = A_2 (1 + q_3/R_2), \quad H_3 = 1. \quad (7)$$

Коэффициенты A_1, A_2 представляют собой значения $H|_{q_3=0}, H_2|_{q_3=0}$, т. е. коэффициенты Ляме для ортогональной координатной сетки q_1, q_2 на поверхности трения S_0 — $A_1 = H_{10}, A_2 = H_{20}$.

Поскольку координата q_3 изменяется в пределах толщины смазочного слоя h , которая существенно меньше главных радиусов кривизны R_1 и R_2 ($\epsilon = h/R_1, h/R_2 \ll 1$), для уравнений теории смазки справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_1 = A_1, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_2 = A_2, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2}, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Используем общеизвестные выражения для уравнений неразрывности и движения среды, компонент тензора скоростей деформации в ортогональных криволинейных координатах.

Учитывая (7), (8), уравнение неразрывности приведем к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (\rho V_1) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho V_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho V_3) + \\ + \frac{\rho V_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{\rho V_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем, принимая во внимание одинаковый порядок всех членов уравнения неразрывности среды $\rho V_1/(A_1 q_1) \sim \rho V_2/(A_2 q_2) \sim \rho V_3/q_3$, характерные значения (масштабы) плотности, времени, компонент скорости и размеров смазочного слоя:

$$\left. \begin{aligned} \rho \sim \rho_x, \quad t \sim t_x, \quad V_1 \sim U, \quad V_2 \sim U, \\ V_3 \sim W, \quad q_1 A_1 \sim L, \quad q_2 A_2 \sim L, \quad q_3 \sim h. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

С учетом вышеприведенных соображений и соотношений (10) порядок слагаемых уравнения (9):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &\sim \frac{\rho_x}{t_x}, \quad \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (\rho V_1) \sim \frac{\rho_x U}{L}, \quad \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho V_2) \sim \frac{\rho_x U}{L}, \\ \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho V_3) &\sim \frac{\rho_x W}{h}, \quad \frac{\rho V_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \sim \frac{\rho_x U}{L}, \\ \frac{\rho V_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} &\sim \frac{\rho_x U}{L}.\end{aligned}$$

Отсюда получим следующие оценки:

$$t_x = \frac{L}{U}, \quad W = U \frac{h}{L}, \quad \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \sim \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \sim \frac{1}{L}, \quad (11)$$

причем толщина смазочного слоя мала по сравнению с характерным размером L ($h/L = \epsilon \ll 1$).

В предположении несжимаемости жидкости уравнение неразрывности будет

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial V_1}{\partial q_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial V_2}{\partial q_2} + \frac{\partial V_3}{\partial q_3} + \frac{V_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{V_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} = 0. \quad (12)$$

Компоненты тензора скоростей деформации и оценки их порядка получим, используя выражения (8), (10), (11) и пренебрегая в каждой из составляющих $\dot{e}_{ik}$ слагаемыми порядка малости ϵ и выше:

$$\left. \begin{aligned}\dot{e}_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial V_1}{\partial q_1} + \frac{V_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \sim \frac{U}{L}, \\ \dot{e}_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial V_2}{\partial q_2} + \frac{V_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \sim \frac{U}{L}, \\ \dot{e}_{33} &= \frac{\partial V_3}{\partial q_3} \sim \frac{U}{L}, \\ \dot{e}_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial V_1}{\partial q_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial V_2}{\partial q_1} - \frac{V_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} - \frac{V_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \right) \sim \frac{U}{L}, \\ \dot{e}_{13} &= \frac{1}{2} \frac{\partial V_1}{\partial q_3} \sim \frac{U}{L} \frac{1}{\epsilon}, \\ \dot{e}_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\partial V_2}{\partial q_3} \sim \frac{U}{L} \frac{1}{\epsilon}.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Аналогично для интенсивности скоростей деформаций (2) с учетом (13) получим:

$$I = \sqrt{\left(\frac{\partial V_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial q_3}\right)^2} \sim \frac{U}{L} \frac{1}{\epsilon}. \quad (14)$$

Порядок компонент тензора вязких напряжений (3) оценим, используя соотношения (13) и характерное значение эффективной вязкости μ_{ax} :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12} &\sim \mu_{ax} \frac{U}{L}, \\ \tau_{13}, \tau_{23} &\sim \mu_{ax} \frac{U}{L} \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Для оценки давления жидкости подобно [4] рассмотрим плоскопараллельное течение ее в щелевом канале, при котором соотношение сил, действующих на элемент объема, дает $\tau_{xy} \sim Ph/L \sim P\epsilon$. Но $\tau_{xy} \sim \tau_{13} \sim \mu_{ax} U/L \cdot 1/\epsilon$, откуда

$$P \sim \mu_{ax} \frac{U}{L} \frac{1}{\epsilon^2}. \quad (16)$$

Представим уравнения движения в специальной ортогональной системе координат, связанной со смазочным слоем. Приведем их к безразмерному виду с использованием характерных значений величин по соотношениям (10), (11), (15), (16) и выражений (7) и (8). Безразмерный комплекс масштабов образует в левой части уравнений движения число Рейнольдса в форме, обычно принятой в теории смазки: $Re_c = UL\rho_x/\mu_{ax} \cdot \epsilon^2$. Пренебрегая в каждой группе членов, определяющих влияние одного из факторов (сил инерции или сопротивления деформированию) слагаемыми порядка малости ϵ и выше, получим безразмерные уравнения движения в виде:

$$Re_c \rho \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{V_1}{A_1} \frac{\partial V_1}{\partial q_1} + \frac{V_2}{A_2} \frac{\partial V_1}{\partial q_2} + V_3 \frac{\partial V_1}{\partial q_3} - \frac{V_2^2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{V_2 V_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \right) = - \frac{1}{A_1} \frac{\partial P}{\partial q_1} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial q_3}; \quad (17)$$

$$Re_c \rho \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{V_1}{A_1} \frac{\partial V_2}{\partial q_1} + \frac{V_2}{A_2} \frac{\partial V_2}{\partial q_2} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial q_3} - \frac{V_1^2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} + \frac{V_1 V_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \right) = - \frac{1}{A_2} \frac{\partial P}{\partial q_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial q_3}; \quad (18)$$

$$Re_c \rho \epsilon \left(\frac{V_1^2}{R_1} + \frac{V_2^2}{R_2} \right) = \frac{\partial P}{\partial q_3}. \quad (19)$$

Влияние инерции определяется значениями числа Re_c . При больших скоростях и в случае течения маловязких сред Re_c может стать близким к единице или даже несколько большим единицы. Полагая $Re_c \sim 1$ (течение сохраняется ламинарным) и удерживая в системе уравнений (17)...(19) только члены порядка 1 и более, приходим к системе уравнений движения в размерных величинах:

$$\rho \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{V_1}{A_1} \frac{\partial V_1}{\partial q_1} + \frac{V_2}{A_2} \frac{\partial V_1}{\partial q_2} + V_3 \frac{\partial V_1}{\partial q_3} - \frac{V_2^2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{V_2 V_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \right) = - \frac{1}{A_1} \frac{\partial P}{\partial q_1} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial q_3}; \quad (20)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{V_1}{A_1} \frac{\partial V_2}{\partial q_1} + \frac{V_2}{A_2} \frac{\partial V_2}{\partial q_2} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial q_3} - \frac{V_1^2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2} + \frac{V_1 V_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \right) = - \frac{1}{A_2} \frac{\partial P}{\partial q_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial q_3}; \quad (21)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_3} = 0. \quad (22)$$

Уравнения (20)...(22) определяют движение тонкого смазочного слоя произвольной формы при существенном влиянии инерционных сил. Для большинства сред с высокой эффективной вязкостью $Re_c \ll 1$ и обычно $Re_c \sim \epsilon$. Тогда инерционными эффектами можно пренебречь, и уравнения (20)...(22) станут подобными уравнениям Рейнольдса в теории смазки ньютоновскими жидкостями. В обоих случаях для взятой степени приближения давление по толщине смазочного слоя считается постоянным. Система уравнений движения (20)...(22) или их частный случай при $Re_c \ll 1$ дополняется уравнением неразрывности среды (12) и выражениями (23), (24) для существенных компонент тензора напряжений в принятой реологической модели (1) нелинейно-вязкопластичной среды:

$$\tau_{13} = \left(\frac{\tau_0}{I} + kI^{n-1} \right) \frac{\partial V_1}{\partial q_3}, \quad (23)$$

$$\tau_{23} = \left(\frac{\tau_0}{I} + kI^{n-1} \right) \frac{\partial V_2}{\partial q_3}, \quad (24)$$

где $I, \dot{\epsilon}_{13}, \dot{\epsilon}_{23}$ определены согласно (13) и (14).

Рассмотрим примеры получения уравнений теории смазки для конкретных пар трения.

1. Цилиндрическая пара трения (рис. 1). Используем ортогональную систему координат $Oz\varphi r$ ($q_1 = z, q_2 = \varphi, q_3 = r$), связанную с внутренней поверхностью трения. Длина элемента $dS^2 = dz^2 + R_0^2 d\varphi^2$ и соответственно $A_1 = A_z = 1, A_2 = A_\varphi = R_0$.

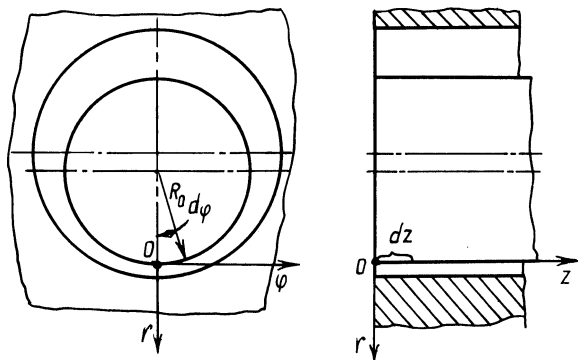


Рис. 1. Цилиндрическая пара трения

Подстановка q_1, q_2, q_3, A_1, A_2 в соотношения (12), (20)...(24) дает систему уравнений (25) для изотермического смазочного слоя:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_r}{\partial r} = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{V_\varphi}{R_0} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}, \\ \rho \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + \frac{V_\varphi}{R_0} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right) = - \frac{1}{R_0} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r}, \\ \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \\ \tau_{rz} = \left(\frac{\tau_0}{I} + kI^{n-1} \right) \frac{\partial V_z}{\partial r}, \\ \tau_{r\varphi} = \left(\frac{\tau_0}{I} + kI^{n-1} \right) \frac{\partial V_\varphi}{\partial r}, \end{array} \right. \quad (25)$$

$$I = \sqrt{\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2}.$$

2. Коническая пара трения (рис. 2). Введем ортогональную систему координат $Ol\varphi\delta$ ($q_1 = l, q_2 = \varphi, q_3 = \delta$), связанную с внешней поверхностью трения. Длина элемента $dS^2 = (l \sin \alpha \cdot d\varphi)^2 + dl^2$ и $A_1 = A_l = 1, A_2 = A_\varphi = l \sin \alpha$.

После подстановки q_1, q_2, q_3, A_1, A_2 в уравнения (12), (20)...(24) получим:

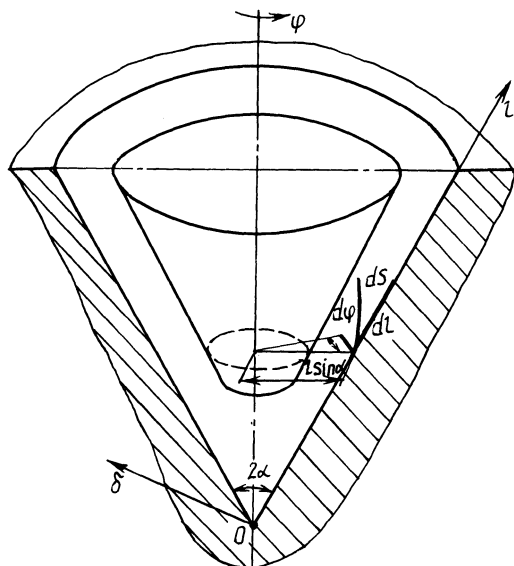


Рис. 2. Коническая пара трения

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial V_l}{\partial l} + \frac{V_l}{l} + \frac{1}{l \sin \alpha} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\delta}{\partial \delta} = 0, \\
 & \rho \left(\frac{\partial V_l}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_l}{\partial l} + \frac{V_\varphi}{l \sin \alpha} \frac{\partial V_l}{\partial \varphi} + V_\delta \frac{\partial V_l}{\partial \delta} - \frac{V_\varphi^2}{l} \right) = - \frac{\partial P}{\partial l} + \frac{\partial \tau_{l\delta}}{\partial \delta}, \\
 & \rho \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_\varphi}{\partial l} + \frac{V_\varphi}{l \sin \alpha} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_\delta \frac{\partial V_\varphi}{\partial \delta} + \frac{V_\varphi V_l}{l} \right) = \\
 & = - \frac{1}{l \sin \alpha} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi\delta}}{\partial \delta}, \\
 & \frac{\partial P}{\partial \delta} = 0; \\
 & \tau_{l\delta} = \left(\frac{\tau_0}{I} + k I^{n-1} \right) \frac{\partial V_l}{\partial \delta}, \\
 & \tau_{\varphi\delta} = \left(\frac{\tau_0}{I} + k I^{n-1} \right) \frac{\partial V_\varphi}{\partial \delta}, \\
 & I = \sqrt{\left(\frac{\partial V_l}{\partial \delta} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial \delta} \right)^2}.
 \end{aligned} \right. \quad (26)$$

Для осесимметричных пар трения дополнительно используется условие осевой симметрии $\partial/\partial\varphi = 0$. В этом случае уравнения (26) совпадают с полу-

ченными в [2] непосредственным преобразованием исходных уравнений в координатных. Это свидетельствует о приемлемости представленного в настоящей работе обобщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. К о р о в ч и н с к и й М.В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. — М., 1959. — 403 с. 2. П и к у с Ю.М. Гидростатическая смазка вязкопластичными и вязкими жидкостями. — Минск, 1981. — 192 с. 3. Струминский В.В. Трехмерный пограничный слой на произвольной поверхности // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, № 4. — С. 595–598. 4. С л е з к и н Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. — М., 1955. — 519 с.

УДК 577.525.1:621.793.7

А.С. ЛАЗАРЕВ, канд. техн. наук,
Т.Ф. БОГИНСКАЯ (БПИ)

НАТЕКАНИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ СТРУИ ВЯЗКОГО МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ГАЗА НА ЖЕСТКУЮ ОХЛАЖДЕННУЮ ПРЕГРАДУ

Одной из центральных задач в системах автоматизированного проектирования плазменных и газоплазменных процессов является поиск и расчет математических моделей, описывающих процесс истечения несущего газа с учетом его взаимодействия с преградой, подлежащей обработке. Ниже предлагается одно из возможных решений этой задачи.

Струя вязкого многокомпонентного газа набегает на жесткую преграду, расположенную перпендикулярно оси потока. Температура струи достигает 6000...8000 °С, температура стенки на 1–2 порядка меньше. У преграды струя разворачивается и на большом удалении от оси ее симметрии описывается как свободная. Закон истечения струи и распределение температуры на выходе из плазмотрона заданы. В этом же сечении известны распределения остальных параметров: энергии турбулентного потока, масштаба турбулентности и т. д.

Система уравнений, описывающих процесс, имеет вид:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V} m_j - \gamma_j \operatorname{grad} m_j) = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}[\rho \vec{V} h - \gamma_h \operatorname{grad} T - \gamma_k \operatorname{grad} k - \mu \operatorname{grad}(\frac{V^2}{2})] = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V} V_z - \sigma_{zz}) + \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V} V_r - \sigma_{rr}) + \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

$$\mu = \mu(t, \vec{V}), \quad \rho = \rho(V), \quad (5)$$