

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ АБЛЯЦИИ

Изгиб круглых трехслойных пластин в условиях термосилового нагружения рассмотрен в статье [1]. Предлагаемая работа посвящена исследованию несимметричных колебаний круглой несимметричной по толщине трехслойной пластинки, вызванных мгновенным тепловым ударом, в результате которого унесена часть внешнего теплозащитного слоя. Учтено воздействие распределенного по поверхности нормального давления, контур пластинки защемлен.

Предположим, что на внешнюю поверхность рассматриваемой пластинки ($z = c + h_1$; $2c = h_3$; h_1, h_2, h_3 — толщины защитного, несущего слоев и заполнителя соответственно; цилиндрическая система координат r, φ, z связана со срединной плоскостью заполнителя, ось z направлена в сторону защитного слоя) в течение времени $\tau \rightarrow 0$ воздействовал тепловой поток интенсивностью q_τ , такой, что $q_\tau \tau = \text{const}$. В результате возникшей абляции часть материала защитного слоя унесена с некоторой скоростью v_τ , направленной перпендикулярно к поверхности. Контур пластинки и внешняя поверхность несущего слоя ($z = -c - h_2$) теплоизолированы. При таких условиях стационарное неоднородное по толщине пластинки температурное поле будет определяться в соответствии с формулой, приведенной в статье [1], при условии $\tau = 0$.

В качестве геометрических гипотез во внешних слоях принимаются допущения Кирхгофа, деформированная нормаль в жестком заполнителе остается прямолинейной и несжимаемой. В этом случае задачу в перемещениях можно сформулировать относительно трех неизвестных функций: $u(r, t)$ — радиальное перемещение координатной поверхности, $\psi(r, t)$ — сдвиг в заполнителе и $w(r, t)$ — прогиб пластинки.

Уравнения движения следуют из приведенных в работе [1] уравнений равновесия, после добавления к последним сил инерции:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 r_0^2 w &= q \end{aligned} \quad (1)$$

при начальных и граничных условиях:

$$w(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = -v'_0, \quad u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad (r = 1). \quad (2)$$

Здесь L_2, L_3 — линейные дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} L_2(u) &\equiv ((ru)_{,r}/r)_{,r} \equiv u_{,rr} + u_{,r}/r - u/r^2, \\ L_3(u) &\equiv (rL_2(u))_{,r}/r \equiv u_{,rrr} + 2u_{,rr}/r - u_{,r}/r^2, \end{aligned}$$

пятая в нижнем индексе обозначает частное дифференцирование по следующей за ней координате; константы a_i выражаются через геометрические и

упругие характеристики материалов слоев, зависящие от температуры [1];

$$M_0 = \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k; \quad \rho_k - \text{плотность } k\text{-го слоя.}$$

Перемещения и радиальная координата в (1), (2) отнесены к радиусу пластинки r_0 . При выводе системы уравнений (1) предполагалась малость модуля сдвига заполнителя по сравнению с несущими слоями $G_3 \ll G_1, G_2$, поэтому можно пренебречь работой касательных напряжений $\sigma_{rz}^{(3)}$, равной $2G_3 \psi$. Начальную скорость движения v'_0 получим, используя закон сохранения количества движения системы:

$$v'_0 = \rho_1 h_0 v_t / \left(\sum_{k=1}^3 \rho_k h_k \right),$$

где h_0 — толщина унесенной со скоростью v_t части защитного слоя.

Рассмотрим сначала однородную систему уравнений, соответствующую (1) и описывающую свободные колебания пластинки, возникшие вследствие абляции. После частичного интегрирования и простейших преобразований получаем:

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2/r, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4/r, \\ L_3(w_{,r}) + M^4 w &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где b_i, M — константы, выражающиеся через a_n, M_0, r_0 . Из условия непрерывности решения в начале координат следует $C_2 = C_4 = 0$.

Решение третьего уравнения системы (3) можно представить в виде

$$w(r, t) = v(r) (A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (4)$$

После подстановки (4) в (3) получим уравнение для функции $v(r)$:

$$L_3(v_{,r}) - \beta^4 v = 0, \quad \beta^4 = M^4 \omega^2. \quad (5)$$

С учетом ограниченности в начале координат его решение

$$v = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r), \quad (6)$$

где J_0, I_0 — функции Бесселя первого рода нулевого порядка от действительного и мнимого аргументов соответственно.

Из граничных условий (3) и решения (6) в соответствии с требованием нетривиальности решения получаемой системы уравнений относительно констант интегрирования C_5, C_6 следует трансцендентное уравнение для определения собственных чисел β_n

$$I_1(\beta) J_0(\beta) + J_1(\beta) I_0(\beta) = 0. \quad (7)$$

Частоты собственных колебаний определяются через собственные числа с помощью (5).

Для описания прогибов исследуемой пластинки вводится ортонормированная система собственных функций $v_n \equiv v(\beta_n r)$:

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n} (J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r)) . \quad (8)$$

Коэффициент d_n определяется из условия ортонормированности v_n [2]. Построенная система функций (8) является фундаментальной [3], и искомый прогиб можно представить в виде равномерно сходящегося ряда

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) . \quad (9)$$

Используя (5), получаем радиальное перемещение и сдвиг:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (b_1 v_{n,r} + C_1 r) (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) , \quad (10)$$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (b_2 v_{n,r} + C_3 r) (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) .$$

Здесь

$$\{C_1, C_3\} = \{b_1, b_2\} \frac{\beta_n}{d_n} (J_1(\beta_n) + \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n)) .$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются из начальных условий.

Таким образом, соотношения (9), (10) описывают свободные осесимметричные колебания круглой защемленной трехслойной пластинки, возбужденные мгновенным тепловым ударом по ее поверхности, вызвавшим абляцию части внешнего защитного слоя.

В случае комплексного силового воздействия движение пластинки описывает система дифференциальных уравнений (1). Ее решение и нагрузку можно представить в виде разложения в ряд по фундаментальной системе функций (8):

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t) , \quad u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_1 v_{n,r} + C_1) T_n(t) ,$$

$$\psi(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_2 v_{n,r} + C_3) T_n(t) , \quad q(r, t) = M_0 r_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t) . \quad (11)$$

Уравнение для определения неизвестной функции $T_n(t)$ следует из (1) после подстановки в него выражений (11):

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n , \quad q_n = \frac{1}{M_0 r_0^2} \int_0^1 q(r, t) v_n r dr . \quad (12)$$

Общее решение уравнения (12) имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin [\omega_n(t - \tau)] q_n(\tau) d\tau . \quad (13)$$

В результате осесимметричные колебания рассматриваемой пластинки при

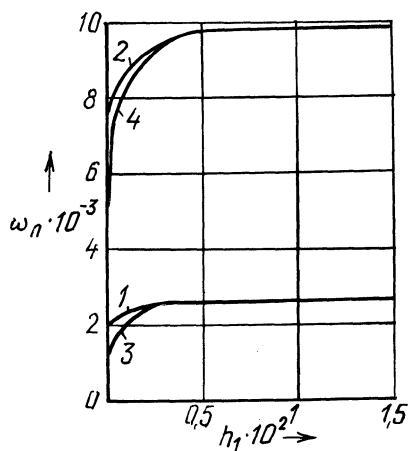


Рис. 1. Зависимость частот колебаний ω_n от приведенной толщины теплозащитного слоя n_1 :

- 1 - $\omega_0 r_0$, $q_t = 0$; 2 - $\omega_1 r_0$, $q_t = 0$;
 3 - $\omega_0 r_0$, $q_t = 0,362 \cdot 10^6$ Дж/(м²·с);
 4 - $\omega_1 r_0$, $q_t = 0,362 \cdot 10^6$ Дж/(м²·с)

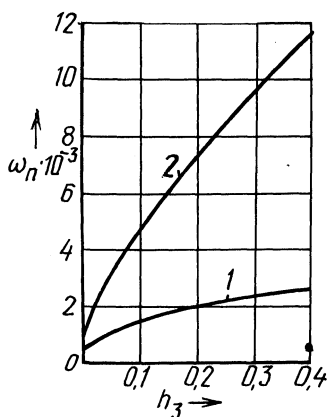


Рис. 2. Зависимость частот колебаний ω_n от толщины заполнителя h_3 :

- 1 - $\omega_0 r_0$, $q_t = 0$; 2 - $\omega_1 r_0$, $q_t = 0$;
 3 - $\omega_0 r_0$, $q_t = 0,362 \cdot 10^6$ Дж/(м²·с);
 4 - $\omega_1 r_0$, $q_t = 0,362 \cdot 10^6$ Дж/(м²·с)

термосиловом воздействии описываются выражениями (11) с учетом (8), (13).

Численные расчеты получены для пластинки, защитный слой которой выполнен из кордиерита, заполнитель — из фторопласта, несущий слой — из алюминиевого сплава Д16Т. Температурная зависимость параметров упругости указанных материалов определялась по известным экспериментальным данным и приведена в работе [4].

Трансцендентное уравнение для собственных чисел (7) исследовалось на интервале от 0 до 50. Найденные корни β_n , $n = 1, \dots, 15$, вычислены с точностью до 0,005 и записаны в табл. 1. Первые четыре из них совпадают с обычно приводимыми в литературе, по остальным можно судить о достаточно равномерном распределении собственных чисел на указанном интервале.

Таблица 1

n	β_n	n	β_n	n	β_n
0	3,195	5	18,855	10	34,565
1	6,305	6	21,955	11	37,705
2	9,435	7	25,135	12	40,845
3	12,575	8	28,275	13	43,985
4	15,715	9	31,425	14	47,125

Зависимость первых двух частот колебаний от приведенной толщины части внешнего теплозащитного слоя h_1 , оставшейся после абляции, и толщины заполнителя h_3 показана на рис. 1 и 2. Величина теплового потока q_f подбиралась таким образом, чтобы температура на поверхности теплозащитного слоя достигала предельных значений эксплуатации кордиерита: 1000...1200 К. Зависимость частот от температуры наблюдается при сравнительно тонких внешних защитных слоях $h_1 \leq 0,001$, $h_2 = 0,005$, $h_3 = 0,3$ (см. рис. 1). При исследовании зависимости частот от толщины заполнителя полагалось, что $h_2 = 2h_1 = 0,005$. В этом случае вся теплота, полученная пластинкой, реализуется в защитном слое в относительно малой его верхней части. Поэтому в данном случае кривые для частот при изотермических и неизотермических колебаниях практически совпали.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов Э.И. Изгиб круглой трехслойной пластинки в условиях абляции // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1988. — Вып. 15. — С. 112–118. 2. Дидковский В.С., Старовойтов Э.И., Старовойтова Т.А. О колебаниях упругой двухслойной пластинки // Пробл. прочности. — 1984. — № 6. — С. 28–31. 3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. — М., 1951. — Т. 1. — 360 с. 4. Старовойтов Э.И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочности. — 1988. — № 4. — С. 11–15.

УДК 539.3.01

В.В. МИТЮШЕВ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работах [1, 2] были решены плоские задачи теории упругости для круговых областей с помощью применения одного варианта метода функциональных уравнений. В работе [3] этот метод был развит и применен к более сложным задачам. В настоящей статье решается задача о трещине, моделируемой лучом, в среде с включением специального вида. Для краткости изложения рассматривается случай продольного сдвига, т. е. $K_I = K_{II} = 0$, $K_{III} \neq 0$ [4, с. 74]. Эту статью можно рассматривать как простейший пример, иллюстрирующий возможности метода функциональных уравнений в теории трещин.

Рассмотрим продольный сдвиг кусочно-однородного изотропного материала, все сечения которого, перпендикулярные к оси Ox_1 , изображены на рис. 1. Здесь Γ — полубесконечный разрез вдоль действительной оси от точки $w = 1$ до точки $w = \infty$ комплексной плоскости, D_1 — включение с модулем упругости μ_1 , $L = \left\{ \xi \in \mathbb{C}, \left| \frac{\xi}{2 - \xi + 2\sqrt{1 - \xi}} \right| = r \right\}$ — граница области D_1 , r ($0 <$

$< r < 1$) — некоторый параметр. Упругая матрица с модулем упругости μ занимает область D — внешность луча Γ и контура L . Контакт между матрицей и включением идеальный. К контуру Γ приложены касательные напряжения.