

а компоненты напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(\frac{3\xi - \kappa + 4\eta}{\xi} \right) \frac{\rho\omega^2}{16} (R^2 - r^2) + \frac{\rho\omega^2}{4} (R^2 - r^2) \cos 2\theta; \\ \sigma_\theta &= \left(\frac{3\xi - \kappa + 4\eta}{\xi} \right) \frac{\rho\omega^2}{16} \left(R^2 - \frac{\xi - 3\kappa + 12\eta}{3\xi - \kappa + 4\eta} r^2 \right) - \\ &\quad - \frac{\rho\omega^2}{4} (R^2 - r^2) \cos 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= - \frac{\rho\omega^2}{4} (R^2 - r^2) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из соотношений (8) при $E_x = E_y = E$, $\nu_{yx} = \nu_{xy} = \nu$, $G_{xy} = G = E / [2(1 + \nu)]$ получим известное распределение напряжений во вращающемся вокруг диаметра сплошном изотропном диске [2].

Анализируя результаты расчета, можно сделать два вывода: первый — найденное решение (8) для анизотропного диска по форме совпадает с решением для изотропного диска, хотя упругие свойства обоих дисков существенно различны; второй — полученное решение (7) для функции напряжений $F(r, \theta)$ относится к новому классу решений системы уравнений (5), не предсказанных в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. К о р о л е в В.И. Плоская задача теории упругости для круглых пластин с прямоугольной анизотропией // Науч. тр. Москов. лесотехн. ин-та. — 1983. — № 149. — С. 82—87.
2. H o d g e P.G., B r o o k l y n N.Y. Stress Functions for Rotating Plates // J. of Appl. Mech. — 1956. — V. 23, N 2. — P. 273—276.

УДК 539.3

М.Д. МАРТЫНЕНКО, НГО ХЫОНГ НЬЮ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ МЕРИДИАНА БЕЗМОМЕНТНОЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЗАДАННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Предполагается, что оболочка вращения выполнена из разномодульного материала, а внешние нагрузки и температурные воздействия при заданных граничных условиях вызывают в ней только мембранные напряжения. При этих условиях найдено явное выражение для формы ее меридиана. В случае изотропного материала аналогичное исследование проведено в [1].

Пусть при чистом растяжении и чистом сжатии в любом направлении материал оболочки имеет модули упругости и коэффициенты Пуассона, равные E^+ ,

ν^+ и E^- , ν^- соответственно. Тогда закон термоупругости для оболочки в областях второго рода, где $T_s T_\varphi < 0$, имеет вид [2]

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{1}{hE^+} (T_s - \nu^+ T_\varphi) + \alpha_t T; \\ \epsilon_\varphi &= \frac{1}{hE^-} (T_\varphi - \nu^- T_s) + \alpha_t T, \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

где T_s и T_φ — усилия, отнесенные к главным направлениям s, φ и определяемые из уравнений равновесия [3]

$$\left. \begin{aligned} T_s &= \frac{1}{r} \left[\int_{r_0}^r r \left(Z + \frac{X}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \right) dr + C \right] \eta; \\ T_\varphi &= r\eta Z + \left[\int_{r_0}^r r \left(Z + \frac{X}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \right) dr + C \right] \frac{d\eta}{dr}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь $\eta = \sec\theta$; θ — угол между касательной к оболочке и осью вращения; α_t — коэффициент линейного теплового расширения материала; T — температура оболочки, являющаяся функцией координат и времени; $h = h(r)$ — толщина оболочки.

Предположим, что T не вызывает изменения кривизны срединной поверхности оболочки, т.е.

$$\kappa_t = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T \delta d\delta = 0,$$

где δ — расстояние от произвольной точки оболочки до срединной поверхности.

В этом случае для безмоментной оболочки вращения условие отсутствия изгибающих напряжений имеет вид [1]:

$$\frac{d}{dr} (\epsilon_\varphi r) = \epsilon_s. \quad (3)$$

Подставляя (1), (2) в уравнение (3), получим для определения $\eta = \eta(r)$ в области второго рода нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} r^2 I \frac{d^2 \eta}{dr^2} + r \left[I \left(1 - \frac{rh'}{h} + \frac{E^-}{E^+} \nu^+ \right) + r \left(rZ + \frac{dI}{dr} \right) - \right. \\ \left. - \nu^- I \right] \frac{d\eta}{dr} + \eta \left[r^2 Z \left(1 - \frac{rh'}{h} + \frac{E^-}{E^+} \nu^+ \right) + \right. \\ \left. + I \left(\frac{rh'}{h} \nu^- - \nu^- \frac{E^-}{E^+} \right) + r^2 \left(Z + r \frac{dZ}{dr} \right) - r \nu^- \left(-\frac{1}{r} I + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{dI}{dr} \right) \right] = -r h E^- \left(\frac{d(\alpha_t T)}{dr} - \alpha_t T \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$I = \int_{r_0}^r r \left(Z + \frac{X}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \right) dr + C.$$

Если $X = 0, Z = \text{const}, h/h_0 = (r/r_0)^n$, где n — действительное положительное или отрицательное число, уравнение (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & r^2 (2C + Zr^2 - Zr_0^2) \frac{d^2 \eta}{dr^2} + r \left[Zr^2 (5 - n + \frac{E^+}{E^-} \nu^+ - \nu^-) + \right. \\ & + (2C - Zr_0^2) (1 - \nu^- - n + \frac{E^-}{E^+} \nu^+) \left. \right] \frac{d\eta}{dr} + \eta \left[Zr^2 (2(2 - n + \right. \\ & + \frac{E^-}{E^+} \nu^+ - \nu^-) + n\nu^- - \frac{E^-}{E^+}) + (2C - Zr_0^2) (n\nu^- - \frac{E^-}{E^+}) \left. \right] = \\ & = -2rh_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \left(\frac{d(\alpha_t T)}{dr} - \alpha_t T \right), \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (5) принадлежит к классу Фукса (с особой точкой $z = 0$). Вид его решения зависит от корней определяющего уравнения [4]

$$\rho(\rho - 1) + \rho(1 + \nu^- + \frac{E^-}{E^+} \nu^+ - n) + (n\nu^- - \frac{E^-}{E^+}) = 0,$$

из которого

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{E^-}{E^+} \nu^+ + n + \nu^- \pm \sqrt{\Delta} \right),$$

где

$$\Delta = \left(\frac{E^-}{E^+} \nu^+ - \nu^- - n \right)^2 - 4 \left(n\nu^- - \frac{E^-}{E^+} \right).$$

Пусть $\rho = \rho_1 - \rho_2 = \sqrt{\Delta}$ не целое число, тогда решение однородного уравнения, соответствующего (5), имеет вид [4]:

$$\eta_1^0 = r^{\rho_1} / [1 + Zr^2 / (2C - Zr_0^2)]; \quad \eta_2^0 = r^{\rho_2} / [1 + Zr^2 / (2C - Zr_0^2)].$$

Если ρ — целое число, то

$$\eta_1^0 = r^{\rho_1} / [1 + Zr^2 / (2C - Zr_0^2)]; \quad \eta_2^0 = \eta_1^0 (K_1 \ln r + k_2) \text{ при } \rho = 0;$$

$$\eta_2^0 = \eta_1^0 \left(K_1 \frac{r^{-\rho} - r_0^{-\rho}}{\rho} + K_2 \right) \text{ при } \rho \neq 0.$$

При известных η_1^0, η_2^0 , если $r^2 (2C + Zr^2 - Zr_0^2) \neq 0$ решение неоднородного уравнения (5) можно представить в виде:

$$\eta = \frac{h_0}{r_0^n} D \left[\eta_2^0 \int_{r_0}^r r^{n-\rho_2} \left(\frac{d(\alpha_t T)}{dr} - \alpha_t T \right) dr - \right. \\ \left. - \eta_1^0 \int_{r_0}^r r^{n-\rho_1} \left(\frac{d(\alpha_t T)}{dr} - \alpha_t T \right) dr \right] + A \eta_1^0 + B \eta_2^0,$$

где h_0 — толщина оболочки при $r = r_0$; $D = 2E / (\rho_2 - \rho_1) (Zr_0^2 - 2C)$.

Пусть z — расстояние вдоль оси вращения, тогда при известном $\eta = \sec \theta$ форма меридиана оболочки определяется по формуле

$$\frac{dr}{dz} = \begin{cases} \sqrt{\eta^2 - 1} & \text{при } \eta > 0, \\ -\sqrt{\eta^2 - 1} & \text{при } \eta < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение этого уравнения дает искомое уравнение формы меридиана $z = z(r)$.

Итак, рассматриваемая задача свелась к последовательному решению двух дифференциальных уравнений (4) и (6) в случае, когда $T_s T_\varphi < 0$.

Если же $T_s T_\varphi > 0$, формула закона Гука примет вид

$$\epsilon_s = \frac{1}{hE^\pm} (T_s - \nu^\pm T_\varphi) + \alpha_t T;$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{hE^\pm} (T_\varphi - \nu^\pm T_s) + \alpha_t T,$$

где знаки (+) и (−) характеризуют условия $T_s > 0, T_\varphi > 0$ и $T_s < 0, T_\varphi < 0$ соответственно, причем T_s и T_φ определяются по формулам (2). Все остальные выкладки аналогичны сделанным для областей второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко М.Д. Определение безмоментной формы оболочки под действием заданной внешней нагрузки // Вопросы математической физики и теории функции. — Киев, 1964. — С. 91–96.
2. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. — М., 1982. — 320 с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. — М., 1961. — 384 с.
4. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.; Л., 1950. — 290 с.