ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕВОЗОК АВТОМОБИЛЬНЫМ ТРАНСПОРТОМ OPTIMIZATION OF AUTOMOBILE TRANSPORTATION

В.С. Ивашко[1], д.т.н., профессор, В.С. Миленький[2], к.т.н., доцент, П.Е. Круглый[3], к.т.н., доцент, С.П. Круглый[3]

1. Белорусский национальный технический университет; 2. БелНИИТ «Транстехника»; 3. УО «Белорусский государственный аграрный технический университет», г. Минск

Аннотация. Предложена методика оптимизации перевозок грузов автомобильным транспортом, путем решения транспортной задачи, как частного случая задачи линейного программирования.

The summary. The methods of optimization of cargoes automobile transportation by the decision of a transport problem as special case of a problem of linear programming is offered.

Введение. Наиболее эффективный вид транспорта и организацию перевозок выбирают путем сравнения нескольких вариантов по технико-экономическим показателям, то есть путем их оптимизации. При этом рассчитывают затраты, связанные с капитальными вложениями, содержанием и эксплуатацией транспорта.

Оптимальным считают вариант, при котором приведенные затраты на транспортирование единицы груза будут минимальными.

Задачу оптимизации решают поэтапно. Сначала разрабатывают маршруты движения транспорта и минимизируют их по протяженности холостых пробегов.

Затем выбирают вид транспортного средства и осуществляют оптимизацию методами линейного программирования, как правило с использованием персональных компьютеров. Это транспортная задача.

Основная часть. Транспортная задача, как частный случай общей задачи линейного программирования, может быть поставлена в следующем виде [1, 2, 3].

Требуется составить такую схему (план) грузоперевозок, при которой будет полностью удовлетворяться спрос на перемещение груза и соблюдаться график перевозок, а затраты на транспортирование груза С будут минимальными.

Предположим, что имеется m пунктов, из которых отправляется груз (пунктов отправления), и n пунктов назначения. Заданы размеры отправления (ресурсы) — a_i и потребности (спрос) — b_i по конкретному пункту в тоннах или других единицах. Известна стоимость перевозки единицы груза от каждого пункта отправления до определенного пункта назначения C_{ij}.

План перевозок можно представить таблицей, строки которой соответствуют пунктам отправления, столбцы пунктам назначения (табл. 1).

Такие таблицы называются **матрицами**. С левой стороны проставлены номера пунктов отправления грузов и их ресурсы, то есть количество груза в тоннах или других единицах измерения, подлежащего отправлению с данного пункта. Вверху ставятся номера пунктов назначения и величина их спроса на данный вид груза (в тоннах или других единицах измерения).

В каждом элементе матрицы (клетке) в верхнем левом углу проставляются стоимости перевозки C_{ij}, а в правом нижнем — возможные размеры перевозок X_{ij}. Затраты на одну перевозку с пункта отправления I на пункт назначения j можно выразить произведением $C_{ij}X_{ij}$.

Тогда общие затраты на все перевозки

$$C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij} \qquad (1)$$

Аргументы X_{ij} этой линейной функции связаны между собой следующим образом. Сумма всех перевозок, расположенных в первой строке матрицы (табл. 1), равна размерам отправлений из пункта 1:

$$X_{11}+X_{12}+\ldots+X_{1j}+\ldots+X_{1n}=a_1 \qquad (2)$$

Аналогичные равенства можно написать и для всех остальных строк. В результате получим систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=a_i, \qquad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (3)$$

Сумма всех перевозок, расположенных в первом столбце, равна потребности первого пункта назначения:

$$X_{11}+X_{21}+\ldots+X_{i1}+\ldots+X_{m1}=b_1 \qquad (4)$$

Для всех столбцов это система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=a_i, \qquad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (5)$$

Кроме того решение задачи имеет смысл при положительных значениях перевозок

$$X_{ij}\ge 0, \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n). \qquad (6)$$

Таким образом, в общем виде транспортная задача линейного программирования формулируется следующим образом: необходимо привести к минимуму линейную функцию

$$C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}\to\min \qquad (7)$$

с неотрицательными аргументами, связанными системой линейных ограничений

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=a_i, \quad (i=1,2,\ldots,m);\\&\sum_{i=1}^{m}X_{ij}=b_j, \quad (j=1,2,\ldots,n);\\&X_{ij}\ge 0, \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n).\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Таблица 1. Матрица плана перевозок

Пункты отправления и их ресурсы		Пункты назначения				
		1	...	j	...	n
		Спрос				
		b_1	...	b_j	...	b_n
1	a_1	C_{11} X_{11}	...	C_{1j} X_{1j}	...	C_{1n} X_{1n}
...	...	...	...	...	...	...
i	a_i	C_{i1} X_{i1}	...	C_{ij} X_{ij}	...	C_{in} X_{in}
...	...	...	...	...	...	...
m	a_m	C_{m1} X_{m1}	...	C_{mj} X_{mj}	...	C_{mn} X_{mn}

Большинство транспортных задач решается из условия обеспечения минимума затрат на перевозку груза. В некоторых случаях встречаются задачи, когда требуется минимизировать общее количество времени на все перевозки. Они решаются точно так же, как обычные, а в качестве показателя C_{ij} берут продолжительность перевозки груза из пункта i в пункт j.

Транспортная задача может иметь две формы: замкнутую модель, если общие размеры отправления груза со всех пунктов и прибытия на все пункты назначения равны

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{9}$$

и открытую

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{10}$$

Открытую модель всегда можно привести к замкнутой, введя фиктивный пункт назначения, когда ресурсы превышают потребности, либо фиктивный пункт отправления если потребности превышают ресурсы.

Для решения транспортных задач разработано несколько методов (алгоритмов). В зависимости от размера матрицы (числа грузоотправителей и грузополучателей) применяют те или иные из них.

Решение транспортной задачи, как правило, состоит из двух этапов: построения исходного или начального плана с использованием определенных методов и приемов; опираясь на начальный план, последовательно однообразными математическими действиями (итерациями) переходят к другому, улучшенному плану, до тех пор, пока не достигнут оптимального решения.

Начальным может быть любой базисный план. Однако время решения задачи зависит от числа итераций, которые необходимо сделать, чтобы прийти к оптимальному плану. Чем лучше начальный план, тем меньше число итераций надо сделать и, следовательно, затратить меньше времени на решение задачи.

Рассмотрим решение транспортной задачи методом наименьшей стоимости.

Задан план перевозок в виде матрицы (табл. 2).

В пунктах отправления 1...3 находятся 15, 25 и 30 тонн груза соответственно. Грузополучатели 1...4 требуют соответственно 16, 20, 25 и 9 тонн груза. Стоимости перевозки 1 тонны груза в тыс. рублей из пунктов отправления в пункты потребления показаны в соответствующих клетках матрицы в левом верхнем углу.

Анализ табл. 2 показывает, что при перевозке груза из пункта отправления 2 в пункт назначения 2 (клетка 2.2) стоимость перевозки наименьшая из всех вариантов и составляет 1 тыс. руб. за 1 тонну груза, а перевозка из пункта отправления 3 в пункт назначения 4 является максимальной по стоимости и составляет 23 тыс. руб. за 1 тонну груза (клетка 3.4). При составлении плана необходимо в клетку 2.2 назначить максимально возможное количество перевозок, а в 3.4 — минимально возможные или даже совсем не включать перевозки.

Таблица 2. Начальный план перевозок (стоимость перевозки тыс. руб./т)

Пункты отправления и их ресурсы (т)		Пункты назначения и их спрос (т)				Остаток
		1	2	3	4	
		16	20	25	9	
1	15	4	11	2 II 15	17	К
2	25	12	1 I 20	22	8 III 5	5 К
3	30	21 V 16	19	15 IV 10	23 VI 4	20 4 К
Оста-ток	-	К	К	10 К	4 К	-

При назначении перевозок последовательно с клеток имеющих минимальную стоимость, к клеткам с большей стоимостью распределяется объем перевозок и составляется план перевозок.

В элемент матрицы (табл. 2) с минимальной стоимостью (клетка 2.2) назначаем максимально возможную перевозку. Для этого сравниваем ресурсы второй строки (25 т) и спрос второго столбца (20 т). Меньшую цифру (20) помещаем в рассматриваемую клетку (2.2) и вычитаем из сравниваемых величин. В остатке второго столбца останется нуль (ставим букву К), в остатке второй строки — 5.

Второй столбец из дальнейшего рассмотрения исключаем, а в оставшихся клетках матрицы ищем следующий элемент с минимальной стоимостью. Им будет клетка 1.3.

Определяем величину перевозки, которую необходимо поместить в клетку 1.3. Для этого сравниваем ресурсы первой строки (15 т) и спрос третьего столбца (25 т). Меньшую цифру (15) помещаем в клетку 1.3 и разность 25 - 15 = 10 записываем в остаток третьего столбца. Первую строку из дальнейшего рассмотрения исключаем, так как ресурсы пункта отправления 1 исчерпаны. В остатке первой строки ставим букву К.

В оставшихся клетках матрицы ищем следующий элемент с минимальной стоимостью. Им будет клетка 2.4. Определяем величину перевозки, которую необходимо назначить в клетку 2.4. Для этого сравниваем остаток ресурсов второй строки (5 т) и спрос четвертого столбца (9 т). Меньшую цифру (5) записываем в клетку 2.4, разность 9 - 5 = 4 записываем в остаток четвертого столбца. Вторую строку из дальнейшего рассмотрения исключаем, так как ресурсы второго пункта отправления 25 т полностью исчерпаны. В остатке второй строки проставляем букву К. Далее в оставшихся клетках матрицы ищем следующий элемент с минимальной стоимостью перевозки. Это клетка 3.3. Определяем величину перевозки, которую необходимо поместить в клетку 3.3. Сравниваем ресурсы третьей строки (30 т) и неудовлетворенный спрос третьего столбца (10 т). Меньшую цифру (10) записываем в клетку 3.3, а разность 30 - 10 = 20 заносим в остаток третьей строки. Столбец 3 из дальнейшего рассмотрения исключаем, так как спрос третьего пункта назначения 25 т полностью удовлетворен. В остатке третьего столбца ставим букву К.

Следующим элементом матрицы с минимальной стоимостью перевозки будет клетка 3.1. Определяем величину перевозки, которую необходимо назначить в клетку 3.1. Сравниваем остаток ресурсов третьей строки (20 т) со спросом первого столбца (16 т). Меньшую цифру 16 заносим в клетку 3.1, разность 20 - 16 = 4 записываем в остаток строки 3. Столбец 1 из дальнейшего рассмотрения исключаем, так как спрос первого пункта назначения 16 т удовлетворен.

В оставшуюся клетку 3.4 назначаем перевозку 4 т. В остатках третьей строки и четвертого столбца записываем букву К.

Таким образом, объем перевозок полностью распределен (римскими цифрами указана очередность назначения перевозок).

Теперь подсчитываем стоимость перевозок по данному плану:

$$C = 1x20 + 2x15 + 8x5 + 15x10 + 21x16 + 23x4 = 668 \text{ тыс. руб.}$$

Метод наименьшей стоимости довольно прост и удобен для решения задач при малых размерах матрицы. При больших ее размерах возникают трудности поиска клеток с минимальной стоимостью, что может привести к ошибке, а следовательно, к увеличению числа итераций при построении оптимального плана перевозок. Поэтому при больших размерах матрицы решение необходимо выполнять с применением персонального компьютера.

Заключение. Предложена методика оптимизации перевозок грузов автомобильным транспортом. Приведен пример решения транспортной задачи методом наименьшей стоимости.

Список использованных источников

1. Матюшин И.Е., Катькало Ю.А. Применение математических методов на промышленном транспорте. - Минск: Высшая школа, 1997. – 192 с.

2. Надежность и ремонт машин / Под ред. В.В.Курчаткина – М.: Колос, 2000. – 560 с.

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 448 с.