УДК 624.014.02

Основы расчета стержней с использованием МКЭ

Смоленский Д.С., Захаро К.Н.
(Научный руководитель – Рябов А.Г., Фомичев В.Ф.)
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

История развития метода конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) - численный метод решения дифференциальных уравнений, широко используемый в различных областях техники (ракето- и самолетостроение, кораблестроение, строительство и др.). Основоположником теории МКЭ считается Р. Курант (1943 г.). М. Тернер, Х. Мартин и др. внедрили МКЭ в строительную механику и механику сплошных сред (конец пятидесятых - начало шестидесятых годов двадцатого века).

Существенно расширили область применения МКЭ Б.Сабо, О.Зенкевич и др. (конец шестидесятых - начало семидесятых годов), показав, что его можно использовать для решения любых дифференциальных уравнений.

Большой вклад в развитие МКЭ внесли отечественные ученые Л. Розин, В. Корнеев, В. Постнов и др.

Развитие МКЭ неразрывно связано с совершенствованием вычислительной техники, ускоряющей сложные численные расчеты. Соответственно совершенствовались вычислительные программы, реализующие этот метод. Наиболее распространенными программами расчета конструкций на основе МКЭ в настоящее время являются:

SCAD, NASTRAN, FEMAP, ANSYS, COSMOS, ЛИРА, STARK, Autodesk Robot Structural Analysis Professional.

Основная концепция метода конечных элементов

Основная идея МКЭ состоит в том, что любую *непрерывную* в некоторой области величину (например, внутреннее усилие в фундаментной балке, перемещение в плите перекрытия и т. п.) можно аппроксимировать *дискретной* моделью, которая создается из множества *кусочно-непрерывных* функций, определенных в конечном числе подобластей (элементов). Обычно такими функциями являются полиномы - линейные, квадратичные, кубичные и т.д. Кусочно-непрерывные функции строятся с помощью значений непрерывной величины в точках соединения элементов (в узлах).

Таким образом, чтобы определить неизвестную непрерывную величину, нужно определить ее значения в узлах.

Основные этапы создания дискретной модели неизвестной величины следующие:

1. В исследуемой области задается конечное число точек (узлов).
2. Значения непрерывной величины в каждом узле считаются неизвестными, они должны быть определены.
3. Исследуемая область разбивается на конечное число подобластей (элементов), имеющих общие точки (узлы).
4. Непрерывная величина в каждом элементе аппроксимируется полиномом, который определяется с помощью узловых значений этой величины: для каждого элемента определяется свой полином, но его коэффициенты подбираются так, чтобы сохранялась непрерывность величины на каждой границе элемента.

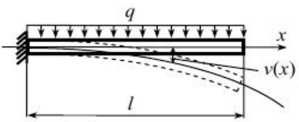

Рис. 1

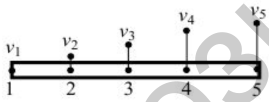

Рис. 2

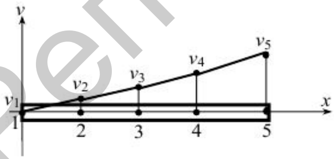

Рис. 3

Основную идею МКЭ иллюстрирует следующий пример.

Рассматриваются прогибы v в стержне (рис. 1).

Непрерывная величина - функция прогиба v(x). Ее область определения (исследуемая область) - стержень длиной l.

Задается пять точек (узлов). Фиксируются прогибы в каждом узле: vi, V2,..., V5 (рис. 2).

Аппроксимирующая функция - линейный по x полином, так как на каждый элемент приходится по два узла. Окончательная аппроксимация v(x) - четыре кусочно-линейные функции, каждая из которых определена на отдельном элементе (рис. 3).

Неизвестные узловые значения v(x) должны быть отрегулированы таким образом, чтобы приближение к истинной функции v(x) было наилучшим. Это осуществляется минимизацией некоторой величины, связанной с физической сущностью задачи. Процесс минимизации сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений v(x).

Дискретизация области

Разбиение области на подобласти - первый этап в решении задачи МКЭ. Эта операция требует инженерных навыков и опыта. Неудачное разбиение приведет к ошибочным результатам решения задачи.

При разбиении области необходимо уже иметь некоторые общие представления о результатах решения задачи, чтоб уменьшить размеры элементов в тех частях области, где ожидаемый результат может резко меняться, и увеличить размеры в тех частях, где ожидаемый результат близок к постоянному. Вообще, при разбиении области всегда идет поиск золотой середины: с одной стороны, элементы должны быть достаточно малыми, чтоб получить результаты необходимой точности; с другой стороны, чем крупнее элементы, тем меньше вычислительной работы.

Метод конечных элементов в расчетах плоских стержневых систем

Рассмотрение упругих систем вообще и плоских стержневых систем в частности с позиций МКЭ есть представление упругих систем в виде набора элементов с конечным числом степеней свободы, которые соединяются между собой в узловых точках (узлах). Такое представление заданной системы в виде дискретной модели приводит к полной формализации всех этапов расчета. Подход к решению задачи является единым, как для стержневых систем, так и для пластин, оболочек, объемных тел и т.п. Рассматривать будем МКЭ, разработанный на базе метода перемещений, применительно к расчету плоских стержневых систем. При расчете плоских стержневых систем в МКЭ приняты те же гипотезы, что и в обычном методе перемещений. Несколько уточняется только одна гипотеза: в МКЭ будем учитывать влияние не только изгибных, но и влияние продольных деформаций на перемещения узловых точек сооружения. Т.е. длина стержня в результате деформаций растяжения-сжатия может изменяться. Это положение позволяет в большей степени формализовать выбор основной системы МКЭ и получить результаты расчета более точные, чем в обычном методе перемещений. Расчет стержневых систем, как и любых других, в МКЭ начинают с разбиения заданной системы на отдельные элементы (рис.4).

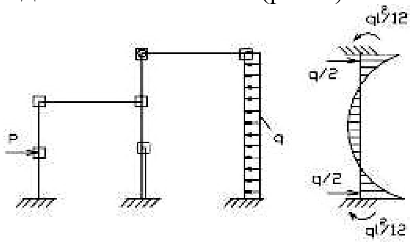

Рисунок 4 – Разбиение системы на отдельные элементы

В качестве конечных элементов (КЭ) мы будем рассматривать прямолинейные стержни, имеющие постоянную жесткость по длине. Между собой КЭ могут соединяться жестко или шарнирно. Точки соединения элементов в МКЭ называют узловыми или узлами. Т.е. основную систему (дискретную модель) МКЭ получают, разбивая заданную систему на отдельные прямолинейные элементы, имеющие постоянную жесткость по длине. При наличии в системе криволинейных стержней или стержней с переменной жесткостью, их, с достаточной степенью точности, разбивают на участки, в пределах которых стержни считают прямолинейными, с усредненной постоянной жесткостью. Кроме того, алгоритм МКЭ требует, чтобы все внешние нагрузки, действующие на сооружение, были приложены к узловым точкам ее дискретной модели. Поэтому, точки приложения сосредоточенных сил делают узловыми, а нагрузки распределенные по длине стержня, преобразуют к узловым.

Число степеней свободы КЭ, а в конечном итоге число неизвестных МКЭ, определяется количеством наложенных в узлах дополнительных связей. Условия равновесия и совместности деформаций выполняются только в узловых точках - точках соединения КЭ. Однако это не значит, что общая жесткость стержневой системы при этом резко уменьшается, поскольку зависимость между узловыми усилиями и деформациями каждого элемента рассматривается с учетом некоторых внутренних связей. Каждый элемент является частью заменяемой среды, т.е. сплошное тело лишь условно делится на отдельные элементы конечных размеров. Выделенный элемент имеет те же физические свойства и геометрические характеристики, что и рассматриваемая конструкция в месте расположения элемента.

При реализации МКЭ наибольшее распространение получили идеи метода перемещений, хотя имеются работы, где рассматривается метод сил и смешанный метод. Предпочтение методу перемещений отдано в основном из-за простоты выбора основной системы, составления матрицы жесткости и формирования вектора внешних нагрузок. Разрешающее уравнение МКЭ, которое представляет собой матричную форму канонических уравнений метода перемещений, имеет вид:

$$[r]\{Z\}=\{P\},$$

где: [r] - матрица жесткости сооружения в целом (формируется из матриц жесткости отдельных элементов)

{Z}- вектор перемещений узловых точек сооружения

{P}- вектор внешних нагрузок.

Из сказанного выше следует, что основными преимуществами МКЭ являются следующие:

1. Возможность исследовать тела (конструкции), составленные из нескольких материалов (так как свойства материалов соседних элементов могут быть разными).
2. Возможность исследовать области (конструкции) любой формы (так как криволинейная область аппроксимируется прямолинейными элементами или точно описывается криволинейными элементами).
3. Возможность составления общих методик и программ для решения различных по физике задач одного определенного вида (например, программа осесимметричной задачи о распространении тепла может быть использована для решения любой задачи данного типа: о распределении напряжений в осесимметричной конструкции и т.п.).