

5. Tickle, R. Ferromagnetic shape memory in the NiMnGa system / R. Tickle, R.D. James, T. Shield, M. Wuttig, V.V. Kokorin // IEEE Trans.Magn. – 1999. – V. 35. – P. 4301–4310.
6. O’Handley, R.C. Phenomenology of giant magnetic-field induced strain in ferromagnetic shape-memory materials / R.C. O’Handley, S.J. Murrey, M. Marioni, H. Nembach, S.M. Allen // J. Appl. Phys. 2000. – V. 87. – P. 4712–4717.
7. Murrey, S.J. 6 % magnetic-field-induced strain by twin-boundary motion in ferromagnetic Ni-Mn-Ga / S.J. Murrey, M. Marioni, S.M. Allen, R.C. O’Handley // Appl. Phys. Lett. – 2000. – V. 77. – P. 886–888.
8. Saren, A. Dynamic twinning stress and viscous-like damping of twin boundary motion in magnetic shape memory alloy Ni-Mn-Ga / A. Saren, K. Ullakko // Scripta Materialia. – 2017. – V. 139. – P. 126–129.
9. Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
10. Воднев, В. Т. Основные математические формулы: Справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Мн.: Выш. шк., 1988. – 269 с.

*Поступила 09.04.2020*

**УДК 539.21**

**Остриков О.М.**

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВОЙНИКОВАНИЯ**

**УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого»**

**Гомель, Беларусь**

*На основании аналогий развития процессов двойникования и разрушения для энергетических критериев двойникования предложено использование критериев разрушения. При этом использовался математический аппарат теории Гриффитса и Ирвина. Вывод энергетических критериев двойникования осуществлен на основании закона сохранения энергии с учетом скорости изменения энергии приложенных внешних сил и внутренних источников напряжений. В постановке задачи упругое деформирование твердого тела рассматривалось с уже существующим в нем двойником. Принималось допущение однородной и изотропной среды, в которой рассматривалось развитие двойника. Полная энергия системы «деформируемое твердое тело – двойник» рассматривалась как разница между скоростью изменения энергии приложенных внешних и внутренних сил. В результате решения задачи критерии двойникования были выражены через коэффициенты интенсивности напряжений. Это дает возможность рассмотрения развития двойникования при различных схемах деформирования твердого тела. За критерий двойникования бралась величина скорости высвобождения энергии. Получены условия устойчивого и неустойчивого роста двойника. При этом учитывалась энергия образования поверхности раздела двойник – материнский кристалл. Для расчетов коэффициентов интенсивности напряжений получались соотношения для определения плотностей двойникующих дислокаций в случае тонкого и нетонкого двойника. Данные соотношения получались из связи плотности двойникующих дислокаций с внутренними напряжениями. Учитывались напряжения, действующие на границах двойника со стороны внешних сил. Расчеты показали, что коэффициенты интенсивности напряжений для тонкого и нетонкого двойника отличаются в два раза. Результаты представляют практический интерес для их использования в технологии производства технических систем на основе двойникующихся материалов, материалов с памятью формы.*

**Введение.** По многочисленным данным [1–5] двойникование и разрушение представляют собой родственные (подразумевается, что слова «родственные», «схожие» и «аналогичные» – синонимы) физические явления. Это дало основание в работах [1, 3, 5] использовать математический аппарат механики разрушения для развития теории двойникования. Воспользуемся этим же подходом и применим математический аппарат теории разрушения Гриффитса (A.A. Griffith) [6, 7] и Ирвина (G.R. Irwin) [8], с учетом анализа, проведенного в [9, 10], для решения задачи о нахождении критериев механического двойникования.

Цель работы – на основании закона сохранения энергии вывести энергетические критерии деформационного (механического) двойникования.

**Методики исследований.** Рассмотрим механический двойник длиной  $L$ , находящийся у поверхности деформируемого твердого тела (рис. 1). Примем приближение однородной и изотропной среды, в которой рассматривается развитие двойника.

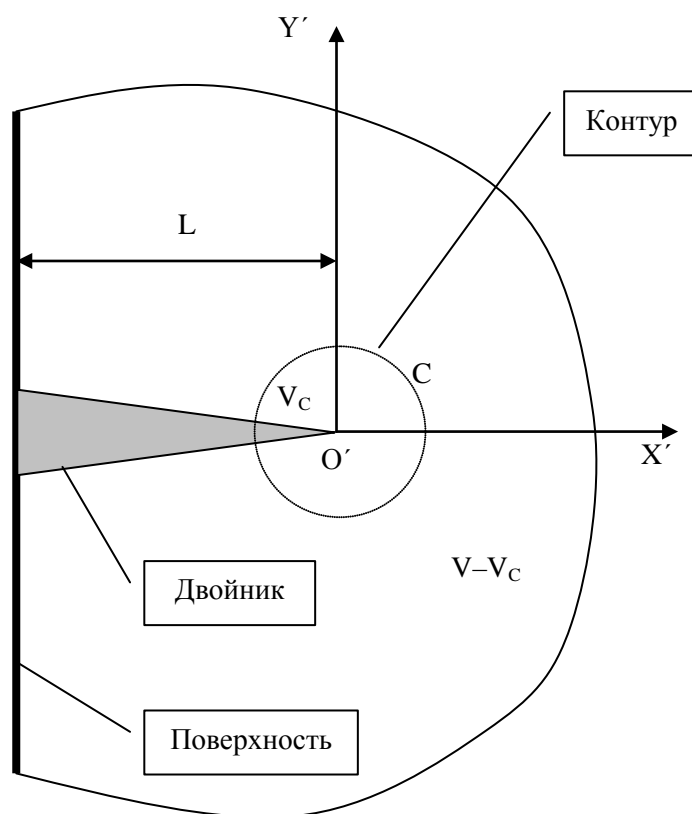


Рис. 1. Схематическое изображение механического клиновидного двойника, находящегося у поверхности кристалла

Пусть деформирование среды находится в рамках закона Гука. Деформирование твердого тела осуществляется в условиях уже существующего в нем двойника. При этом следует отметить, что важным вопросом, возникающим при рассмотрении теорий упругого и остаточного двойникования, является вопрос о правомерности использования теории упругости в теории двойникования, так как механическое двойникование проявляется на стадии пластической деформации твердых тел, выходящей за рамки линейной зависимости напряжений от деформаций.

**Основные результаты.** Известно, что для зарождения механического двойника необходима концентрация напряжений [1–4]. В случае, например, сосредоточенной на-

грузки необходимая для зарождения двойника область пластической деформации может иметь размер пренебрежимо малый по сравнению с размером сформировавшегося двойника. При этом после зарождения двойника в локальной области пластической деформации дальнейшее его развитие происходит за пределами этой области и движение двойникующих дислокаций происходит в поле упругих напряжений.

После снятия нагрузки в случае упругого двойникования раздвойникование происходит под действием полей упругих напряжений двойникующих дислокаций и сил притяжения дислокаций к поверхности. В случае остаточного двойника пластическая деформация локализуется на двойниковых границах в узкой области (шириной в два-три межатомных расстояния). В остальной области имеют место поля упругих напряжений, которые, как и в случае трещин, правомерно рассчитывать на основании линейной теории упругости [6–10].

Таким образом, несмотря на то, что для зарождения механических двойников необходимы напряжения превышающие предел упругости, развитие двойников и существование остаточных двойников может происходить в недеформированной области кристалла или в области полей упругих напряжений. Границы двойников локализуют пластическую деформацию в узких полосах, создавая при этом поле далекодействующих упругих полей напряжений. Аналогичная ситуация наблюдается и в случае образования трещин [6–10]. Но в этом случае для зарождения трещин необходимы напряжения, превышающие предел прочности материала, т.е. более высокие, чем в случае двойникования. А сами трещины создают напряжения, описываемые в рамках линейной теории упругости.

Декартову систему координат  $X'O'Y'$  свяжем с движущейся вершиной двойника (см. рисунок 1). Тогда полная энергия системы «деформируемое твердое тело – двойник» может быть найдена из соотношения:

$$W_D = W_{\text{ext}} - W_{\text{int}}, \quad (1)$$

где  $W_D$  – полная диссипация энергии в рассматриваемой системе;  $W_{\text{ext}}$  – мощность приложенных сил;  $W_{\text{int}}$  – скорость изменения энергии, обусловленной внутренними силами. Согласно [9]

$$W_{\text{ext}} = \int_{(\partial V)_T} \dot{\vec{u}} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \vec{n}) ds, \quad (2)$$

$$W_{\text{int}} = \int_V \hat{\sigma} : \dot{\hat{\epsilon}} dxdy = \frac{d}{dt} \int_V W(\hat{\epsilon}) dxdy, \quad (3)$$

где  $(\partial V)_T$  – изменение объема деформируемого твердого тела под действием внешних сил  $T$ ;  $\vec{u}$  – вектор смещения;  $\hat{\sigma}$  – тензор напряжений;  $\vec{n}$  – единичный вектор;  $V$  – область деформируемого твердого тела с двойником;  $\hat{\epsilon}$  – тензор деформаций;  $s, x, y$  – параметры интегрирования.

Подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$W_D = \int_{(\partial V)_T} \dot{\vec{u}} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \vec{n}) ds - \frac{d}{dt} \int_V W(\hat{\epsilon}) dxdy. \quad (4)$$

Скорость изменения работы обусловленными двойникованием внутренними силами может быть определена из соотношения [9]

$$\frac{d}{dt} \int_V W(\hat{\varepsilon}) dx dy = \frac{d}{dt} \int_{V_C} W(\hat{\varepsilon}) dx dy + \frac{d}{dt} \int_{V-V_C} W(\hat{\varepsilon}) dx dy \quad (5)$$

Здесь  $V_C$  – область, охваченная контуром  $C$  (см. рис. 1).

Переход к системе координат, связанной с движущейся вершиной двойника, даст [9]

$$\frac{d}{dt} \int_{V_C} W(\hat{\varepsilon}) dx dy = \int_{V_C} \hat{\sigma} : \left( \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial t} \right)_{x', y'} dx' dy' . \quad (6)$$

Как показано в [9],

$$\frac{d}{dt} \int_{V-V_C} W(\hat{\varepsilon}) dx dy = \int_{V-V_C} \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} dx dy - \int_C W(\hat{\varepsilon}) \dot{L}(\bar{e}_1 \cdot \bar{n}) ds , \quad (7)$$

где  $\bar{e}_1$  – единичный вектор, направленный в сторону перемещения вершины двойника.

После преобразования

$$\int_{V-V_C} \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} dx dy = \int_{\partial(V-V_C)} \dot{u} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \bar{n}) ds = \int_{\partial V} \dot{u} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \bar{n}) ds - \int_C \dot{u} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \bar{n}) ds , \quad (8)$$

где  $\bar{n}(C) = -\bar{n}(\partial(V - V_C))$ , (1) можно записать в виде:

$$W_D = \int_C (W(\hat{\varepsilon}) \dot{L}(\bar{e}_1 \cdot \bar{n}) + \dot{u} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \bar{n})) ds - \int_{V_C} \hat{\sigma} : \left( \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial t} \right)_{x', y'} dx' dy' . \quad (9)$$

При  $C \rightarrow 0$  получаем [9]:

$$W_D = \lim_{C \rightarrow 0} \int_C (W(\hat{\varepsilon}) \dot{L}(\bar{e}_1 \cdot \bar{n}) + \dot{u} \cdot (\hat{\sigma} \cdot \bar{n})) ds = G \dot{L} , \quad (10)$$

где

$$G = \lim_{C \rightarrow 0} \int_C \left( (W(\hat{\varepsilon}) \dot{L}(\bar{e}_1 \cdot \bar{n}) - (\bar{n} \cdot \hat{\sigma}) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}) \right) ds . \quad (11)$$

При этом величина интеграла

$$J = \int_C \left( W(\hat{\varepsilon})(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}) - n_i \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) ds \quad (12)$$

от выбора  $C$  не зависит.

Следует отметить, что  $G$  представляет собой скорость высвобождения упругой энергии и часто представляется в виде [6, 7, 9]

$$G = \frac{\partial U}{\partial L}, \quad (13)$$

где  $U$  – потенциальная энергия деформируемого нагрузкой твердого тела.

Учитывая, что  $G = W_D / \dot{L}$ , по аналогии с [6, 7, 9], для двойникования из (11) можно получить критерий двойникования

$$G_{tw} = \frac{1}{E} ((K_I^{tw})^2 + (K_{II}^{tw})^2) + \frac{1}{2\mu} (K_{III}^{tw})^2, \quad (14)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $\mu$  – модуль сдвига;  $K_I^{tw}$ ,  $K_{II}^{tw}$ ,  $K_{III}^{tw}$  – критерии интенсивности напряжений, зависящие от схемы нагружения твердого тела с двойником, определяемые по формулам:

$$K_I^{tw} = \alpha \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi L}; \quad K_{II}^{tw} = \alpha \sigma_{xy}^{\infty} \sqrt{\pi L}; \quad K_{III}^{tw} = \alpha \sigma_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi L}. \quad (15)$$

Здесь  $\sigma_{yy}^{\infty}$ ,  $\sigma_{xy}^{\infty}$ ,  $\sigma_{yz}^{\infty}$  – компоненты тензора внешних напряжений в случае одноосного растяжения, поперечного и продольного сдвига соответственно; как было показано в [11], для нетонкого двойника  $\alpha = 2$ , для тонкого –  $\alpha = 1$ .

Через энергию образования поверхности раздела двойник – материнский кристалл  $W_S$  критическое условие подрастания двойника по аналогии с [6, 7, 9] можно выразить следующим образом:

$$\partial U + \partial W_S = 0, \quad (16)$$

или

$$\frac{\partial(U + W_S)}{\partial L} = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$U = 2\alpha\gamma L, \quad (18)$$

где  $\gamma$  – энергия образования единичной площадки на границе раздела двойник – материнский кристалл.

В соответствии с гипотезой Гриффитса [6, 7] уравнение энергетического баланса из (17) с учетом (18) можно записать в виде

$$\frac{\partial W_s}{\partial L} = -2\alpha L. \quad (19)$$

Очевидно, что при

$$\frac{\partial^2(U + W_s)}{\partial L^2} < 0 \quad (20)$$

наблюдается неустойчивый рост двойника, а при выполнении условия

$$\frac{\partial^2(U + W_s)}{\partial L^2} > 0 \quad (21)$$

имеет место устойчивый рост двойника.

Согласно подходу Ирвина [8, 9], для каждого способа деформирования твердого тела с двойником существует свой критический коэффициент интенсивности напряжений, при превышении которого начинается рост двойника. При этом в соответствии с подходом Ирвина для двойникования можно записать

$$G_{nw} = -\frac{\partial U}{\partial L} = \frac{\beta}{E} ((K_I^{nw})^2 + (K_{II}^{nw})^2) + \frac{1+\nu}{E} (K_{III}^{nw})^2, \quad (22)$$

где  $\beta = 1$  или  $\beta = 1 - \nu^2$  при плоском напряженном или деформированном состоянии соответственно.

Как видно из критериев двойникования (14) и (22), важной задачей для их определения является расчет критериев интенсивности напряжений для различных схем нагружения твердого тела с двойником. При этом не всегда получается простое решение, как в случае формул (15). В случае, когда на двойниковые границы нетонкого двойника действует нормальная нагрузка  $T_1(x)$ , а краевая составляющая вектора Бюргера двойнивающей дислокации направлена вдоль оси  $O'X'$  (рисунок 1) внутренние напряжения у двойника могут быть определены по формулам [9]

$$\sigma_{xx} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{дв}(x)}{x-t} dt, \quad \sigma_{yy} = -\frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{дв}(x)}{x-t} dt, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad (23)$$

где  $\kappa = 3 - 4\nu$ ;  $\rho_{дв}(x)$  – плотность двойнивающих дислокаций на двойниковых границах. В случае нетонкого двойника можно записать

$$\rho_{\text{дв}}(x) = \rho_{\text{дв1}}(x) + \rho_{\text{дв2}}(x). \quad (24)$$

Здесь  $\rho_{\text{дв1}}(x)$ ,  $\rho_{\text{дв2}}(x)$  – плотность двойникующих дислокаций на одной и второй двойниковой границе соответственно.

В первом приближении для нетонкого двойника, сформированного в малодефектной области кристалла, можно принять  $\rho_{\text{дв1}}(x) \approx \rho_{\text{дв2}}(x)$ . Тогда из (24) следует, что  $\rho_{\text{дв}}(x) \approx 2\rho_{\text{дв1}}(x)$ .

В случае одноосного растяжения твердого тела с двойником по аналогии с [9] граничное условие может быть задано в виде сингулярного интегрального уравнения первого рода:

$$-\frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{\text{дв}}(t)}{t-x} dt = T_1(x). \quad (25)$$

Из этого уравнения, с учетом условия

$$\int_{-L/2}^{L/2} \rho_{\text{дв}}(t) dt = 0, \quad (26)$$

можно определить  $\rho_{\text{дв}}(x)$  по формуле [9]

$$\rho_{\text{дв}}(x) = \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu\sqrt{(L/2)^2 - x^2}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\sqrt{(L/2)^2 - t^2}}{t-x} T_1(t) dt. \quad (27)$$

В рассматриваемом случае коэффициент интенсивности напряжений находится по формуле [9]

$$K_I^{tw} = \frac{1}{\sqrt{\pi(L/2)}} \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\frac{(L/2)+t}{(L/2)-t}} T_1(t) dt. \quad (28)$$

Если двойник находится в твердом теле в поле напряжений поперечного сдвига, то на его границы будет действовать касательная нагрузка  $T_2(x)$ . Тогда по аналогии с [9] для плотности двойникующих дислокаций справедливо сингулярное интегральное уравнение

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{\text{дв}}(t)}{t-x} dt = \frac{2\pi(1-\nu)}{\mu} T_2(x). \quad (29)$$

Отсюда

$$\rho_{дв}(x_0) = -\frac{2(1-\nu)}{\pi\mu\sqrt{(L/2)^2 - x^2}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\sqrt{(L/2)^2 - t^2}}{t-x} T_2(t) dt . \quad (30)$$

Формула для определения коэффициента интенсивности напряжений в этом случае примет вид [9]

$$K_{II}^{tw} = \frac{1}{\sqrt{\pi(L/2)}} \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\frac{(L/2)+t}{(L/2)-t}} T_2(t) dt . \quad (31)$$

В случае антиплоского сдвига на двойниковые границы действует нагрузка  $T_3(x)$ . В этом случае справедливо уравнение [9]

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{дв}(t)}{t-x} dt = \frac{2\pi}{\mu} T_3(x) , \quad (32)$$

которое имеет решение

$$\rho_{дв}(x_0) = -\frac{2}{\pi\mu\sqrt{(L/2)^2 - x^2}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\sqrt{(L/2)^2 - t^2}}{t-x} T_3(t) dt . \quad (33)$$

Коэффициент интенсивности напряжений в этом случае определяется по формуле [9]

$$K_{III}^{tw} = \frac{1}{\sqrt{\pi(L/2)}} \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\frac{(L/2)+t}{(L/2)-t}} T_3(t) dt . \quad (34)$$

**Выводы.** Таким образом, показана возможность использования для критериев двойникового разрушения критериев разрушения. Это обусловлено родственностью (в смысле аналогичности) процессов двойникового и разрушения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Косевич, А. М. Дислокации в теории упругости. – Киев: Наук. Думка, 1978. – 220 с.
2. Финкель, В. М., Федоров, В. А., Королев, А. П. Разрушение кристаллов при механическом двойниковании. – Ростов-на-Дону. – 1990. – 172 с.
3. Косевич, А. М., Бойко, В. С. Дислокационная теория упругого двойникового кристаллов // Успехи физических наук. – 1971. – Т. 104, № 2. – С. 101–255.
4. Классен-Неклюдова, М.В. Механическое двойникование кристаллов. – М.: АН СССР, 1960. – 262 с.
5. Остриков, О.М. Механика двойникового твердых тел: монография. – Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 301 с.
6. Griffith, A.A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids // Phil. Trans. Roy. Soc., London. – 1920. – V. A221. – P. 162–198.



7. Grith, A.A. The Theory of Rupture // Proc. of First Int. Congress of Applied Mechanics. Delft. – 1924. – P. – 55–63.
8. Irwin, G.R. Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate// Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1957. – V. 24. – P. 361–364.
9. Астафьев, В. И., Радаев, Ю. Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. – Самара: Издательство «Самарский университет». – 2001. – 562 с.
10. Работнов, Ю. Н. Введение в механику разрушения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., – 1987. – 80 с.
11. Остриков, О.М. Дислокационная модель некогерентного нетонкого двойника // Журнал технической физики. – 2012. – Т. 82, № 11. – С. 38–42.

*Поступила 21.10.2020*