

Определение степени влияния поперечной силы на перемещение балочных конструкций

Иванов А.Л., Гусь О.В., Соколовский А.И.,
Ровда С.В., Кольцов Е.В., Шестовский А.В.
(Научный руководитель – Давыдов Е.Ю.)

Белорусский национальный технический университет,
Минск, Беларусь

Целью данной работы являлось сопоставление “прогибов балочных конструкций” полученных с учетом и без учета поперечной силы и определение области, где погрешность вычислений составит 5 процентов и более.

Нами исследовались следующие схемы нагружения:

- 1) Нагрузка равномерно распределенная, закрепление опорных узлов шарнирное
- 2) Нагрузка равномерно распределенная, закрепление узлов жесткое
- 3) Нагрузка сосредоточенная, закрепление узлов шарнирное
- 4) Нагрузка сосредоточенная, закрепление узлов жесткое

Значение нагрузок изменялось в пределах от 75 до 130 кН/м и пролеты изменялись от 10 до 18 метров. Расчеты выполнялись аналитически и с использованием программных комплексов Scad и Femap. При создании модели для компьютерного расчета использовались стержневые конечные элементы. Во всех вариантах модель разбивалась на одинаковое количество элементов. На узлы накладывались связи, препятствующие работе балок из плоскости.

1) В первой части нашей работы рассматривались балки с *равномерно распределённой нагрузкой*. Для начала рассмотрим балку с *изменениями сечений с шарнирным закреплением узлов*. В учебной литературе для балок с изменением сечения рекомендуется следующая формула (1):

$$f_1 = \frac{f}{1 + 10.95} \quad (1)$$

Аналитически нами была получена формула учитывающая места изменения сечения (2).

$$f = \frac{qx^3}{6EI_1} \left(\frac{l}{c} - \frac{x}{c} \right) + \frac{q}{6EI} \left(\frac{EIl^4}{384} - \frac{lx^3}{c} + \frac{x^4}{c} \right) \quad (2)$$

где I – момент инерции в не измененном сечении,

I_1 – момент инерции в измененном сечении,

x – расстояние от начала балки до места изменения сечения,

l – длина балки,

q – распределённая нагрузка на балку.

Сопоставление результатов, полученных по формуле (1) с результатами, полученными аналитически (интегрированием) и численно показывает, что при длинах балки 10 метров и нормативной нагрузки свыше 90 кН/м погрешность формулы, рекомендуемой в учебной литературе, составляет более 5 процентов.

Формула, полученная нами аналитически, учитывает место изменения сечения и в вышеуказанных балках погрешность не превысит 2 процентов.

Также нами была получена формула учитывающая влияние поперечной силы (3):

$$f = \left(\frac{qx^3}{6EI_1} \left(\frac{l}{c} - \frac{x}{c} \right) + \frac{q}{6EI} \left(\frac{EIl^4}{384} - \frac{lx^3}{c} + \frac{x^4}{c} \right) \right) \left(1 + 3,56 \frac{h^3}{l^3} \right) \quad (3)$$

При сравнении результатов полученных по этой формуле с результатами МКЭ мы получили погрешности менее процента кроме тех случаев, где место изменения сечения находится на расстоянии $L/4$.

Следующая модель, рассмотренная нами, была балка также нагруженная равномерно распределённой нагрузкой, но с **жёстким закреплением узлов**.

При создании модели, защемлённой на опорах, использовался тот же тип КЭ. Менялся только тип опорных связей и геометрические размеры сечений (балка моделировалась с постоянным сечением).

Аналитическая формула для вычисления прогиба с учетом поперечной силы принимает вид (4).

$$f = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI} + \frac{hql^3}{3EA} \quad (4)$$

Вынесем $\frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}$ за скобки EI и получим выражение (5).

$$f = \frac{qL^3}{24} \left(1 + \frac{128I}{A_w L^2} \right) \quad (5)$$

Где μ – коэффициент, учитывающий вид закрепления,
 A – площадь поперечного сечения двутавра,
 A_w – площадь стенки.

Тогда непосредственно величина $\frac{128I}{A_w L^2}$ и есть влияние поперечной силы. И взяв один из вариантов загрузки например в котором пролет 10 метров, высота стенки 80 см и толщина 1 см получим путем нехитрых алгебраических действий следующее (6).

$$\left(1 + \frac{128 \cdot 140680}{80 \cdot 1000^2} \right) = (1 + 0,22) \quad (6)$$

Как мы видим поперечная сила оказывает существенное влияние на конечный результат прогиба (свыше 20 процентов).

В таблице 1 представлены результаты для прогибов, полученных аналитически с учетом поперечной силы и численными методами.

Сравнивая полученные результаты аналитического и численного расчета (таблица 1), можно сделать вывод, что наибольшее влияние поперечная сила будет оказывать на балки, длиной 10-13 метров, которые будут загружены максимальной нагрузкой.

Таблица 1

$q, \text{кН/м}$	$L, \text{м}$	$f, \text{мм}$	$f(F), \text{мм}$	$f(S), \text{мм}$	$f(\text{формула})$	$\Delta F \%$	$\Delta S \%$
93,7	10	8,13	8,138	8,136	8,41	4,37	4,37
76,58	13	6,50	6,506	6,503	6,50	0,44	0,46
129,1	13	4,79	4,802	4,799	5,01	4,31	4,30
129,7	16	5,86	5,872	5,869	5,86	0,98	0,98
69,26	16	7,76	7,767	7,764	7,76	0,35	0,35
86,95	18	12,59	12,59	12,59	12,58	0,36	0,36

Где q – нагрузка на балку,

L – длина балки,

f – прогиб, полученный по формуле, рекомендуемой в литературе,

$f(S)$ – прогиб, полученный в программном комплексе Scad,

$f(F)$ – прогиб, полученный в программном комплексе Femar,

$f(\text{формула})$ – прогиб, полученный по аналитической формуле,

ΔF – погрешность, полученная между аналитическим расчетом по формуле рекомендуемой в литературе, и расчетом численными методами в программном комплексе Femar,

ΔS – погрешность, полученная между аналитическим расчетом по формуле рекомендуемой в литературе, и расчетом численными методами в программном комплексе Scad.

Как мы видим, то, что при аналитическом расчете мы учитывали влияние поперечной силы, позволило нам добиться расхождения результатов в пределах пяти процентов. Это отражено в Столбцах ΔF и ΔS .

2) Следующая часть работы заключалась в рассмотрении влияния поперечной силы при *сосредоточенной нагрузке*.

Для этого мы вывели аналитические формулы: для шарнирно опертых балок с измененным сечением и для жестко защемленных балок с постоянным сечением

Кроме аналитических расчетов были выполнены численные расчеты. на программном комплексе Femap для каждого варианта при этом было разработано 2 модели. Первая модель – стержневая, разбитая на конечные элементы типа Beam. Вторая модель – объемная, разбитая на конечные элементы типа Solid. Каждая балка разбивалась на 200 конечных элементов.

Все балки приняты из курсовых проектов, при изменениях сечений на расстоянии 1/4, 1/5, 1/6 пролетов

Шарнирно закрепленная балка с изменяемым сечением.

В нашей научной работе рассмотрено 2 варианта определения прогиба. Первый, когда пренебрегают поперечной силой. Тогда формула по определению прогиба будет иметь следующий вид:

$$f = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI} \quad (7)$$

Если рассмотреть вариант, когда балка имеет измененное сечение, которое располагается на расстоянии «х» от ее начала, то получим:

$$f = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P}{6E} \left(\frac{l^3}{6I} - \frac{x^3}{I} + \frac{x^3}{I_2} \right) \quad (8)$$

Прогиб балки постоянного сечения от действия сосредоточенной нагрузки (с учетом поперечной силы):

$$f = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI} + \frac{Pl}{4GA_{xy}} \quad (9)$$

Прогиб балки с измененным сечением от действия сосредоточенной нагрузки (с учетом поперечной силы):

$$f = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI} \left(\frac{l^2}{l} - \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) + \frac{Pl}{4GA_{yy}}. \quad (10)$$

По этим аналитическим формулам нами было рассчитано 9 прогибов для разных балок. В балках отличался как пролет, так и сосредоточенная сила, место изменения сечения, а также размеры сечений. Также эти 9 балок были рассчитаны на программном комплексе Femar и вычислены погрешности. Процент влияния Q получился от 5% до 15% (зависит от размеров сечения, нагрузки и пролета балки).

Жестко закрепленная балка с постоянным сечением.

Рассмотрено 2 варианта определения прогиба. Первый случай, когда пренебрегают поперечной силой. Тогда для определения прогиба будет иметь следующий вид:

$$f = \int_0^l \frac{M(x) dx}{EI} = \frac{1}{192} \frac{Pl^3}{EI} \quad (11)$$

Второй случай, когда учитываем влияние поперечной силы Q, тогда формула будет иметь вид:

$$f = \frac{1}{192} \frac{Pl^3}{EI} + \frac{Pl}{4GA_{yy}} = \frac{Pl}{192E} \left(\frac{l^2}{I} + \frac{12E}{A_{yy}} \right). \quad (12)$$

Процент влияния поперечной силы оказался в пределах от 20% до 40% (зависит от размеров сечения, нагрузки и пролета балки).

В заключении хочется отметить, что работа будет иметь продолжение для перфорированных балок. И нами ожидается, что в этих балках поперечная сила будет оказывать ещё большее влияние.