УДК 519.67

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

***Гущина Алина Дмитриевна**, студенты 2-го курса*
кафедры «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»
(Научный руководитель – Хотомцева М.А., старший преподаватель)

Наиболее фундаментальным понятием в евклидовой геометрии на плоскости является прямая линия. В процессе развития геодезии как науки, изучающей методы измерения земной поверхности и определения размеров земного шара, возникла потребность обобщить понятие отрезка прямой как кратчайшего расстояния между двумя точками на произвольные регулярные поверхности. Хотя большинство поверхностей изгибаются таким образом, что они не содержат прямых линий, они содержат кривые, называемые геодезическими, которые обладают многими важными характеристическими свойствами прямых линий.

Определения геодезических линий в различных пространствах зависят от конкретной структуры (метрики, линейного элемента, линейной связи), на которой основана геометрия конкретного пространства. В геометрии пространств, в которых метрика считается заданной заранее, геодезические линии определяются как локально самые короткие. В пространствах с соединением геодезическая линия определяется как кривая, для которой касательное векторное поле параллельно этой кривой. В римановой и финслеровой геометриях, где элемент линии задан заранее (другими словами, задана метрика в касательном пространстве в каждой точке рассматриваемого многообразия), а длины линий получены путем последующего интегрирования, геодезические линии определяются как экстремали функционала длины.

Геодезические линии были впервые изучены Дж. Бернулли и Л. Эйлером, которые попытались найти самые короткие линии на регулярных поверхностях в евклидовом пространстве. На таких линиях геодезическая кривизна исчезает, и главная нормаль таких кривых параллельна нормали к поверхности. Геодезические линии сохраняются при изометрической деформации.

Геодезические линии в римановых пространствах изучены наиболее тщательно. Пусть M^n-n-мерное риманово пространство с метрическим тензором g_{ij} класса C^k, $k \geq 2$. Определение геодезической линии как экстремальной позволяет записать ее дифференциальное уравнение в произвольных локальных координатах x^i, $i = 1, \dots ,n_i = 1$, или любая параметризация $\gamma = (x^i(t))$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0$$

Справедлива теорема

Пусть γ - кратчайший путь на поверхности S, соединяющий две точки p и q. Тогда часть γ, содержащаяся в любом участке σ поверхности S, должна быть геодезической.

Однако обратное утверждение в теореме не обязательно верно. Если γ-геодезическая на σ, соединяющая p и q. Тогда γ не обязательно должен быть кратчайшим путем между двумя точками. Например, большой круг, соединяющий две точки p и q на сфере, разделен точками на две дуги окружности. Обе дуги являются геодезическими. Только более короткий из них является кратчайшим путем, соединяющим p и q (Рис.1)

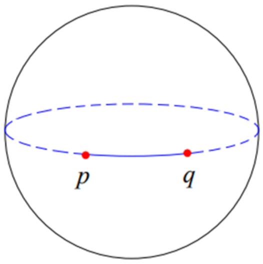

Рисунок 1 – Геодезические на сфере

Геодезические линии обладают некоторыми важными свойствами.

1. На всяком достаточно малом куске поверхности можно провести через две точки одну и только одну дугу геодезической линии.

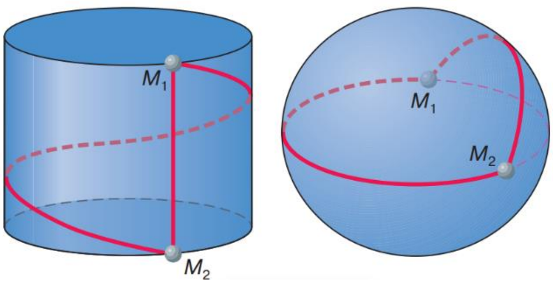

Рисунок 2 – Иллюстрация к свойству 2

2. На всяком куске поверхности можно построить угол с геодезическими сторонами таким же образом и так же его переносить, как угол с прямолинейными сторонами на плоскости

3. Гладкая кривая на поверхности является геодезической тогда и только тогда, когда она обладает параллельным полем касательных прямых

Если F – гладкая поверхность класса $C^k\left(k \geq 2\right)$. Сеть на поверхности F называется полугеодезической, если она ортогональна и одно семейство ее линий состоит из геодезических.

Пусть M — точка на поверхности F. Построим на поверхности полугеодезическую сеть. Для этого через точку M проведем на поверхности F гладкую линию γ. В качестве одного семейства линий сети возьмем геодезические, ортогональные линии, а в качестве линий другого семейства примем ортогональные траектории этого семейства геодезических линий (т. е. такие линии, которые пересекают каждую из построенных геодезических под прямым углом). В частности, линия γ будет одной из линий этого семейства. Оба эти семейства и образуют полугеодезическую сеть (Рис.3).

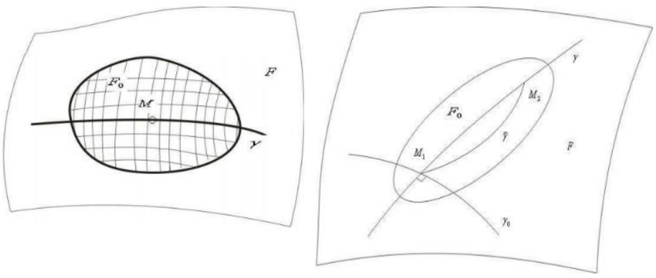

Рисунок 3 – Построение полугеодезической сети на поверхности

Теория геодезических линий и геодезических отображений интересна с прикладной точки зрения и для современных исследований, поскольку движение многих типов механических систем, а также тел или частиц в гравитационном и электромагнитном полях в непрерывной среде часто происходит по траекториям, которые можно рассматривать как геодезические линии некоторых пространств с тремя или более измерениями, определяемыми энергетическими режимами, в которых протекают процессы.