

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет
Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 1

Электронный учебно-методический комплекс

для студентов специальностей:

1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»

1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)»

1-40 05 01-04 «Информационные системы и технологии (в обработке и представлении информации)»

1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производства»

1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы»

1-53 01 06 «Промышленные роботы и робототехнические комплексы»

Составители: Лебедева Г.И., Герасимова Е.А., Раевская Л.А., Сагарда Е.В.,
Юринок В.И., Яцкевич Т.С.

Рассмотрено и утверждено

на заседании совета факультета информационных технологий
и робототехники 27 мая 2021 г., протокол № 11

Минск БНТУ 2021

Оглавление

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	5
I ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 1»	6
1 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА	6
1.1 Матрицы. Основные определения. Операции над матрицами	6
1.2 Определители. Миноры и алгебраические дополнения	7
1.3 Обратная матрица.....	11
1.4 Ранг матрицы	13
1.5 Системы линейных уравнений. Основные понятия. Решение невырожденных линейных систем. Матричный метод. Формулы Крамера	16
1.6 Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса.....	18
2 ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ.....	21
2.1 Разложение векторов. Координаты вектора	21
2.2 Скалярное произведение векторов	29
2.3 Векторное произведение векторов	30
2.4 Смешанное произведение векторов.....	32
3 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.....	34
3.1 Полярная система координат. Уравнение линии на плоскости	34
3.2 Прямая на плоскости.....	36
3.3 Плоскость в пространстве.....	41
3.4 Прямая в пространстве.....	44
3.5 Прямая и плоскость в пространстве	48
3.6 Кривые второго порядка	50
3.7 Поверхности второго порядка.....	60
4 ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.....	66
4.1 Числовая последовательность, предел числовой последовательности. Функция и предел функции	66
4.2 Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых	70
4.3 Непрерывность функции. Точки разрыва функции и их классификация.....	72
5 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	75
5.1 Производная. Касательная и нормаль к графику функции. Геометрический и физический смысл производной	75
5.2 Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Таблица производных.....	78
5.3 Производная показательной-степенной функции. Логарифмическое дифференцирование	80
5.4 Производные функций, заданных неявно и параметрически	81
5.5 Дифференциал функции, его геометрический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях	84
5.6 Производные и дифференциалы высших порядков.....	86
5.7 Приложения теорем Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя	88

5.8	Формула Тейлора и ее приложения	91
6	ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ	94
6.1	Возрастание и убывание функции. Точки экстремума функции.....	94
6.2	Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	96
6.3	Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.....	97
6.4	Асимптоты графика функции.....	99
6.5	Общая схема исследования функции и построения графика.....	100
6.6	Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой	103

ПЕРЕЧЕНЬ МАТЕРИАЛОВ

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «МАТЕМАТИКА. Часть 1» состоит из следующих разделов:

- кратких теоретических материалов по курсу математики первого семестра обучения;
- материалов для проведения практических занятий по учебной дисциплине;
- материалов для текущей и итоговой аттестации;
- вспомогательных материалов.

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для теоретического изучения учебной дисциплины в объеме, установленном учебным планом по специальности.

Практический раздел ЭУМК содержит материалы для проведения практических занятий в аудитории и заданий для самостоятельной работы.

Раздел контроля знаний ЭУМК содержит материалы текущей и итоговой аттестации, позволяющие определить соответствие результатов учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, и представлен тестовыми заданиями по темам учебной дисциплины. В разделе тестов размещены ответы ко всем тестам.

Вспомогательный раздел ЭУМК содержит программу дисциплины, экзаменационные вопросы, перечень учебно-методических пособий, рекомендуемых к использованию в образовательном процессе.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

ЭУМК предназначен для изучения дисциплины «МАТЕМАТИКА». Он содержит набор методических материалов по этой дисциплине.

ЭУМК состоит из четырех частей.

Теоретический раздел содержит набор методических материалов по этому предмету: рекомендаций студенту для работы с дисциплиной, кратких теоретических материалов, посвященных изложению в наглядном виде основных определений, свойств, формул и теорем, сопровождающихся подробными примерами.

Практический раздел содержит практикум по дисциплине, состоящий из материалов для проведения аудиторных занятий по математике. Каждое занятие содержит задачи для домашней работы с ответами.

Раздел контроля знаний содержит тесты для организации текущего контроля знаний студентов.

Вспомогательный раздел содержит программу дисциплины, перечень экзаменационных вопросов, список рекомендуемой литературы.

Конспект лекций в ЭУМК представляет собой гипертекстовый pdf-документ, предоставляющий возможность навигации по содержанию документа. Все задачи в практикуме снабжены ответами, которые могут быть использованы для самоконтроля. Тестовые задания при текущем контроле могут быть выполнены как в аудитории, так и в компьютерной системе тестирования.

I ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 1»

1 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1 Матрицы. Основные определения. Операции над матрицами

О п р е д е л е н и е . *Матрицей размера $m \times n$* называется прямоугольная таблица из чисел $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов. Элементы матрицы A нумеруются двумя индексами. Для обозначения матриц применяются также и квадратные скобки. Так, элемент a_{32} означает принадлежность третьей строке и второму столбцу. Сокращенно будем писать $A = (a_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Если $m = n$, то матрица называется **квадратной порядка n** . Матрица может содержать только одну строку ($i = 1$) или один столбец ($j = 1$). Для квадратной матрицы $A_{n \times n}$ элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ составляют **главную диагональ**. **Нулевой** называется матрица, все элементы которой равны нулю; ее обозначают буквой O . Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется **единичной**. Единичная матрица обозначается буквой E . Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется **транспонированной**. Ее обозначают A^T . Так,

если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & \pi \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 4 & \pi \end{pmatrix}$, причем $A = A_{2 \times 3}, A^T = A_{3 \times 2}, (A^T)^T = A$.

Основными операциями над матрицами являются: сложение (вычитание) матриц; умножение матриц на число; умножение матриц. Операции сложения (вычитания) вводятся только для матриц одинаковых размеров.

О п р е д е л е н и е . *Суммой $A+B$ матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковых размеров $m \times n$* называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера $m \times n$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

Аналогично вводится понятие разности двух матриц $C = A - B$.

О п р е д е л е н и е . *Произведением матрицы $A_{m \times n}$ и числа α* называется матрица $B_{m \times n}$ такая, что $B = \alpha \cdot A = A \cdot \alpha$ и

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

□ **Пример 1.1.** Найти матрицу X , удовлетворяющую условию $X = 3A - 4E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. В данном случае $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и, следовательно,

$$X = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ -12 & 0 & 18 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -12 & -4 & 18 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \quad \otimes$$

Произведение матрицы A и матрицы B вводится только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B , т. е. если A – матрица размера $m \times n$, то B должна иметь размер $n \times k$.

Определение. *Произведением AB матрицы $A_{m \times n}$ и матрицы $B_{n \times k}$* называется матрица $C_{m \times k}$, элементы которой c_{ij} находятся по формуле

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k}, \quad (1.3)$$

или $c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k}.$

Если существует произведение $A \cdot B$, то произведение $B \cdot A$ может и не существовать. Может быть, что при существовании $B \cdot A$ $A \cdot B \neq B \cdot A$. Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются *перестановочными* (или *коммутирующими*).

□ **Пример 1.2.** Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & -2 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-1) + (-6) \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + (-6) \cdot (-3) + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 3 \\ -5 & 28 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 3 \\ -5 & 28 \end{pmatrix}. \quad \otimes$

Заметим, что и произведение $B \cdot A$ существует:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -7 & 26 & 0 \\ -3 & -14 & 22 \end{pmatrix}, \text{ причем } A \cdot B \neq B \cdot A.$$

1.2 Определители. Миноры и алгебраические дополнения

Каждой квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие число $\det A$ ($|A|$ или Δ), которое называется ее *определителем*. Рассмотрим определители 1-го, 2-го и 3-го порядков.

1. Пусть $n = 1$, $A = (a_{11})$. Определитель $\det A = a_{11}$.

2. Пусть $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Определитель второго порядка

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (1.4)$$

Вычисление определителя 2-го порядка изображается схемой:



3. Пусть $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Определитель третьего порядка

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (1.5)$$

Определители третьего порядка обычно вычисляются с использованием **правила треугольников** (или правила **Саррюса**). Суть его в том, что определитель в (1.5) состоит из трех слагаемых, взятых со знаком «+» по схеме (рис. 1.1, а) и трех слагаемых, взятых со знаком «-» по схеме (рис. 1.1, б).

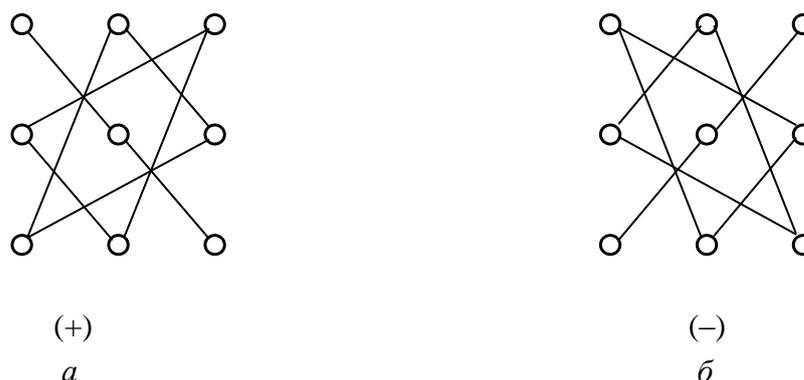


Рис. 1.1

Пример 1.3. Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. По формуле (1.4) имеем: $\det A = \begin{vmatrix} 21 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 21 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 84 + 6 = 90$. \otimes

□ П р и м е р 1.4. Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е . По формуле (1.5) имеем:
 $\det A = (-2) \cdot 2 \cdot 6 + 7 \cdot 4 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot (-3) - -7 \cdot 1 \cdot 6 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = -133$. ⊗

Пусть дана квадратная матрица 4-го порядка $n = 4$. Выберем в ней произвольно s строк и s столбцов ($1 \leq s \leq n$). Элементы, стоящие на пересечении s строк и s столбцов, образуют матрицу порядка s . Определитель этой матрицы называется **минором порядка s** и обозначается M . Оставшиеся элементы матрицы образуют определитель, который называется **дополнительным** к минору M и обозначается через M' . Так, например, для матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ при $s = 2$ выберем вторую и третью строки, первый и четвертый

столбец. Тогда минором второго порядка будет определитель $M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$, а дополни-

тельным минором будет определитель $M' = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$.

Каждый элемент матрицы 4-го порядка является минором первого порядка. Дополнительный минор является определителем 3-го порядка, обозначаемый M_{ij} , соответствующий элементу a_{ij} .

О п р е д е л е н и е . **Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij} называется дополнительный минор M_{ij} , умноженный на $(-1)^{i+j}$, т. е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (1.6)$$

Тогда будем считать по определению, что определитель матрицы четвертого порядка

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \quad (1.7)$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4}, \quad i = \overline{1,4}.$$

Формула (1.7) называется **разложением определителя четвертого порядка** по элементам i -й строки. Можно показать, что

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j}, \quad j = \overline{1,4} \quad (1.8)$$

(**разложение определителя по элементам j -го столбца**). Аналогично можно ввести понятие определителя n -го порядка.

Назовем строки и столбцы матрицы ее **рядами**.

Теорема (о разложении определителя по элементам ряда). *Определитель квадратной матрицы порядка n ($n > 1$) равен сумме произведений элементов некоторого ряда на их алгебраические дополнения, т. е. справедлива формула*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}). \quad (1.9)$$

Для $n = 3$ и $i = 1$ формула (1.9) примет вид

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}, \quad (1.10)$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Приведем некоторые свойства определителей:

- 1) Определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы, т. е. $\det A = \det A^T$.
- 2) Если поменять местами два столбца (две строки) определителя, то он изменит знак на противоположный.
- 3) Определитель, имеющий нулевой ряд, равен нулю.
- 4) Определитель, имеющий два одинаковых параллельных ряда, равен нулю.
- 5) Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.
- 6) Если соответствующие элементы двух параллельных рядов определителя пропорциональны, то он равен нулю.
- 7) Если к элементам одного ряда определителя прибавить элементы другого параллельного ряда, умноженные на число $\lambda \in R$, то величина определителя не изменится.

□ П р и м е р 1.5. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, разложив его по элементам первой строки.

Решение. Воспользуемся формулой (1.10):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13},$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 \cdot 2 - 4 \cdot 1) = 8;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -7.$$

$$\det A = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 + 0 \cdot (-7) = -2 - 8 = -10.$$

Заметим, что A_{13} можно было и не вычислять, т. к. $a_{13} = 0$. \otimes

1.3 Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица n -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

О п р е д е л е н и е . Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель не равен нулю, т. е. $\Delta = \det A \neq 0$. Если $\Delta = \det A = 0$, то матрица A называется **вырожденной**.

Матрица A^{-1} называется **обратной** к квадратной матрице A , если выполняется равенство

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E, \quad (1.11)$$

где E – единичная матрица.

Теорема. Для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1} .

В случае квадратной матрицы n -го порядка обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A . Для квадратной матрицы третьего порядка формула (1.12) имеет следующий вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

□ П р и м е р 1.6. Найти матрицу A^{-1} , обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е . Так как $\Delta = \det A = -10 \neq 0$ (см. пример 1.5), то матрица A невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 - 8) = -2; & A_{11} &= -2; \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-4 - 4) = 8; & A_{12} &= 8; \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4 - 3) = -7; & A_{13} &= -7; \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2 - 0) = 2; & A_{21} &= 2; \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 - 0) = 2; & A_{22} &= 2; \\ A_{23} &= -3; & A_{31} &= -4; & A_{32} &= -4; & A_{33} &= 1. \end{aligned}$$

Подставляя все данные в (1.13), получаем обратную матрицу

$$A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 8 & 2 & -4 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,2 & 0,4 \\ -0,8 & -0,2 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}. \quad \otimes$$

□ П р и м е р 1.7. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -20 \\ 40 & 10 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е . Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$. Матрица невырожденная, находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |3| = 3; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |2| = -2; \quad A_{21} = -2; \quad A_{22} = -1.$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 50 & -20 \\ 40 & 10 \end{pmatrix}$, тогда матричное уравнение запишется в виде

$X \cdot A = B$. Умножим обе части последнего уравнения на A^{-1} справа: $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$. Так как $A \cdot A^{-1} = E$, то $X \cdot E = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$. Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле (1.12) при $n = 2$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Следовательно, $A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Находим матрицу $X = B \cdot A^{-1}$; $X = \begin{pmatrix} 50 & -20 \\ 40 & 10 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$X = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 50 \cdot 3 + (-20) \cdot (-1) & 50 \cdot (-2) + (-20) \cdot (-1) \\ 40 \cdot 3 + 10 \cdot (-1) & 40 \cdot (-2) + 10 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 170 & -80 \\ 110 & -90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{170}{5} & \frac{-80}{5} \\ \frac{110}{5} & \frac{-90}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 & 16 \\ -22 & 18 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -34 & 16 \\ -22 & 18 \end{pmatrix}$. ⊗

Отметим некоторые свойства обратных матриц.

1) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

1.4 Ранг матрицы

О п р е д е л е н и е . Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Если все миноры матрицы равны нулю, то ранг матрицы считается равным нулю. Обозначения: $\text{rang } A$; r_A , r .

О п р е д е л е н и е . Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Для ненулевой матрицы существует базисный минор, вообще говоря, не единственный.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ранг $r_A = 1$, т. к. существует минор 1-го порядка, отличный от нуля (например, $|2| = 2 \neq 0$), а все миноры 2-го порядка равны нулю (в силу пропорциональности строк). Базисным минором является каждый минор 1-го порядка.

Для матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ранг $r_B = 2$, т. к. $\det B = -2 \neq 0$. Единственный базисный минор матрицы B совпадает с ее определителем $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

О п р е д е л е н и е . Минором, окаймляющим минор M порядка k матрицы A , называется минор порядка $(k+1)$ этой матрицы, содержащий минор M .

О п р е д е л е н и е . Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие операции:

- 1) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой строки (столбца), умноженной на произвольное число;
- 3) перестановку местами двух строк (столбцов) матрицы.

⚠ Известно, что при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не изменяется.

Ранг матрицы можно найти следующими способами.

Метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы состоит в том, что любую ненулевую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к трапецевидной, т. е. к матрице вида

$$B = \left(\begin{array}{cccc|ccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{b_{rr}} & b_{rr+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right),$$

где $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля. Вычеркнем нулевые строки в B . Ранг полученной матрицы равен r – числу ненулевых строк. Следовательно, $r_B = r$, а значит, и $r_A = r$. Базисным

минором в матрице B является выделенный минор $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix}$.

Метод окаймляющих миноров вычисления ранга матрицы основан на следующем утверждении.

Теорема. Если в матрице A имеется минор M порядка r , отличный от нуля, а все миноры, окаймляющие минор M (если они существуют), равны нулю, то $r_A = r$.

Для нахождения ранга матрицы A необходимо:

1) Найти какой-нибудь минор M_1 1-го порядка (т. е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r_A = 0$.

2) Вычислять миноры 2-го порядка, окаймляющие минор M_1 до тех пор, пока не найдется минор M_2 , отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r_A = 1$; если есть, то $r_A \geq 2$. и т. д.

Процесс нужно продолжать до тех пор, пока либо все окаймляющие миноры будут равны нулю, либо миноры $(k+1)$ порядка у данной матрицы не существуют. В этом случае $r_A = k$.

⚠ Заметим, что при нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой окаймляющий минор k -го порядка для $M_{k-1} \neq 0$.

□ Пример 1.8. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу к трапецевидной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 6 & -21 & -33 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r_A = 2 \quad (\text{это число ненулевых строк}).$$

Здесь цифрами [1], [2] обозначены следующие операции:

[1] – ко 2-й строке прибавим 1-ю, умноженную на (+2);

к 4-й строке прибавим 1-ю, умноженную на (-7);

к 5-й строке прибавим 1-ю.

[2] – из 3-й и 5-й строки вычли 2-ю строку;

к 4-й строке прибавили 2-ю, умноженную на 3.

Ответ: $r_A = 2$. \otimes

□ **Пример 1.9.** Методом окаймляющих миноров найти ранг матрицы и указать один из

базисных миноров: $A = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{2} & \underline{1} & -4 & 5 \\ \underline{3} & \underline{4} & \underline{0} & -1 & 0 \\ \underline{4} & \underline{6} & \underline{1} & -5 & 5 \\ \underline{5} & \underline{8} & \underline{2} & -9 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r_A \geq 1$. За основу выберем $M_1 = |1| = 1$, стоящий в левом верхнем углу. Перейдем к вычислению миноров 2-го порядка, окаймляющих выбранный M_1 . Выберем $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, стоящий в левом верхнем углу.

Так как $M_2 \neq 0$, то переходим к вычислению миноров 3-го порядка.

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0; \quad M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. к. третья строка у всех}$$

этих миноров равна сумме первых двух.

Аналогично,

$$M_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3^{(5)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 0; \quad M_3^{(6)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. к. 3-я строка равна}$$

сумме 2-й и 1-й, умноженной на 2.

Так как все миноры 3-го порядка, окаймляющие $M_2 \neq 0$, равны нулю, то $r_A = 2$. Одним из базисных миноров является $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. \otimes

1.5 Системы линейных уравнений. Основные понятия. Решение невырожденных линейных систем. Матричный метод. Формулы Крамера

О п р е д е л е н и е . Система m уравнений с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n называется **линейной**, если она имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.15)$$

где числа a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) называются **коэффициентами системы**, а числа b_i ($i = \overline{1, m}$) – **свободными членами**.

О п р е д е л е н и е . **Решением системы** (1.15) называется упорядоченное множество чисел (c_1, c_2, \dots, c_n) , если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство после подстановки вместо x_1, x_2, \dots, x_n соответственно чисел c_1, c_2, \dots, c_n .

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется **несовместной**.

Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Решить систему уравнений означает выяснить, совместна она или нет, и если совместна, то найти все ее решения.

Две системы уравнений называются **эквивалентными** или **равносильными**, если любое решение одной из них является также решением другой и наоборот.

Эквивалентные системы уравнений получают в результате следующих преобразований:

- 1) **умножения уравнения системы на число, отличное от нуля;**
- 2) **прибавления к одному уравнению другого, умноженного на любое число;**
- 3) **перестановки местами двух уравнений системы.**

Система уравнений, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$), называется **однородной**.

⚠ Однородная система всегда совместна, т. к. она имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, хотя оно не обязательно единственно.

Систему (1.15) можно записать в матричной форме $AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – **матрица системы;**

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – **столбец (или вектор-столбец) неизвестных,**

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов.}$$

$$\text{Матрица } \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \text{ называется } \textit{расширенной матрицей системы}.$$

Рассмотрим случай системы n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (1.16)$$

или в матричной форме: $AX = B$.

Система (1.16) называется *невырожденной*, если $\det A = \Delta \neq 0$. невырожденная система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено

$$1) \text{ по формулам Крамера: } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.17)$$

$$2) \text{ матричным методом по формуле } X = A^{-1}B, \quad (1.18)$$

где Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой i -го столбца столбцом свободных членов B .

□ П р и м е р 1.10. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ по формулам Крамера и матричным способом.

$$\text{Р е ш е н и е. Матрица системы имеет вид } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ее определитель } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \text{ следовательно, система является невырожденной}$$

и имеет единственное решение.

1) Используем формулы Крамера (1.17), найдя предварительно $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 28; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 35; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -21.$$

$$\text{Тогда } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{28}{7} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{35}{7} = 5; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-21}{7} = -3.$$

Ответ: (4; 5; -3).

$$2) \text{ Найдем } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда по формуле (1.18) } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 28 \\ 35 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (4; 5; -3). ⊗

1.6 Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Метод Гаусса

Рассмотрим систему (1.15).

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений (1.15) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы: $r_A = r_{\tilde{A}}$.

Исследовать систему линейных уравнений означает выяснить, совместна она или нет, для совместной системы определить, имеет ли она единственное решение или бесконечное множество решений.

При этом возможны три случая:

- 1) $r_A < r_{\tilde{A}}$ – система несовместна (т. е. решений нет).
- 2) $r_A = r_{\tilde{A}} = n$ (n – число неизвестных) – система совместна и имеет единственное решение.
- 3) $r_A = r_{\tilde{A}} < n$ – система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Для исследования систем линейных уравнений можно использовать, например, **метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)**. С помощью элементарных преобразований над строками система m линейных уравнений с n неизвестными может быть приведена к виду

$$\left. \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1r}x_r + \dots + c_{1n}x_n = d_1; \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2r}x_r + \dots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \dots \dots \dots \dots = \dots \\ c_{rr}x_r + \dots + c_{rn}x_n = d_r; \\ 0 = d_{r+1}; \\ \dots = \dots \\ 0 = d_m, \end{array} \right\} \quad (1.19)$$

где $c_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $r \leq n$.

Система (1.19) эквивалентна исходной системе (1.15). Если хотя бы одно из чисел $d_{r+1}, d_{r+2}, \dots, d_m$ отлично от нуля, то система (1.19), а, следовательно, и исходная система (1.15) несовместна (случай $r_A = r < r_{\tilde{A}}$).

Если же $d_{r+1} = d_{r+2} = \dots = d_m = 0$, то $r_A = r_{\tilde{A}}$ и система (1.19) совместна. В случае $r_A = r = r_{\tilde{A}} < n$ неизвестные x_1, x_2, \dots, x_r считаются **базисными**, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ – **свободными**.

Базисные неизвестные оставляют в левой части уравнений, а свободные переносят в правую. Из уравнений (1.19) выражают последовательно базисные неизвестные $x_r, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1$ через свободные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, которым придают произвольные значения, получая общее решение системы (1.19), а значит (1.15) (решений у системы будет бесконечное множество).

Если $r_A = r = r_{\tilde{A}} = n$, то система (1.19) будет иметь единственное решение, которое находят, выражая $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$ последовательно через $d_n, d_{n-1}, \dots, d_2, d_1$.

□ П р и м е р 1.11. Методом Гаусса решить систему
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Расширенная матрица системы имеет вид

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)^{[1]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 2 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)^{[2]} \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 11 & -11 & 66 \end{array} \right)^{[3]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{array} \right), \end{aligned}$$

где цифрами [1], [2], [3] обозначены следующие операции:

[1] – 1-ю и 2-ю строки поменяли местами; [2] – ко 2-й строке прибавили 1-ю, умноженную на (-2); к 3-й прибавили 1-ю, умноженную на (-3); [3] – к 3-й строке прибавили 2-ю, умноженную на (-1).

Этой матрице соответствует система
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22; \\ 11x_2 - x_3 = 56; \\ -10x_3 = 10. \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим

$$x_3 = \frac{10}{-10} = -1; \quad 11x_2 = 56 + x_3; \quad x_2 = \frac{56-1}{11} = 5; \quad x_1 = -22 + 4x_2 - 3x_3; \quad x_1 = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -1$. ⊗

□ П р и м е р 1.12. Решить систему
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$
 методом Гаусса.

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array} \right)$.

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу \tilde{A} к трапецевидной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array} \right)^{[1]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array} \right)^{[2]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{1} & -1 & -4 \\ \bar{0} & \bar{1} & -2 & 4 \\ \bar{0} & \bar{0} & 0 & 0 \end{array} \right),$$

где цифрами [1], [2] обозначены следующие операции:

[1] – из 2-й строки вычитаем 1-ю строку, к 3-й строке прибавляем 1-ю, умноженную на 2;

[2] – к 3-й строке добавляем 2-ю, умноженную на (-2).

Получим, что $r_A = r_{\tilde{A}} = 2 < n = 3$. Следовательно, система совместна и имеет бесконечное множество решений. x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная переменная. Количество базисных неизвестных равно $r_A = 2$; число свободных неизвестных равно $n - r_A = 1$. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

В левой части уравнений оставим только базисные неизвестные: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 + x_3; \\ x_2 = 4 + 2x_3. \end{cases}$

Подставляя выражение для x_2 в 1-е уравнение, получим $x_1 = -x_3 - 8$.

Полагая $x_3 = C, C \in R$, решение системы будет иметь следующий вид:

$$x_1 = -C - 8; \quad x_2 = 4 - 2C; \quad x_3 = C.$$

Ответ: $(-C - 8; 4 - 2C; C), C \in R$. ⊗

□ П р и м е р 1.13. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Приведем к трапецевидной форме расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right)^{[1]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array} \right)^{[2]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array} \right),$$

где [1] – из 2-й строки вычитаем 1-ю;

к 3-й строке прибавим 1-ю, умноженную на 2;

[2] – к 3-й строке прибавим 2-ю, умноженную на (-2).

Так как $r_A = 2 \neq r_{\tilde{A}} = 3$, то система несовместна.

Ответ: система несовместна. ⊗

2 ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

2.1 Разложение векторов. Координаты вектора

О п р е д е л е н и е . *Направленным отрезком* (или *связанным вектором*) называется отрезок, на котором задано направление (т. е. для которого известно, какая из двух ограничивающих его точек является началом и какая концом). Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается \overrightarrow{AB} (рис. 2.1):

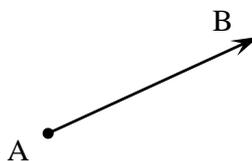


Рис. 2.1

Нулевым направленным отрезком называется пара совпадающих точек (обозначение $\vec{0}$) (т. е. направление его не определено).

Длиной направленного отрезка \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB . Два направленных отрезка \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются *одинаково направленными* (или *сонаправленными*), если лучи AB и CD одинаково направлены, и *противоположно направленными*, если лучи AB и CD противоположно направлены (рис. 2.2).

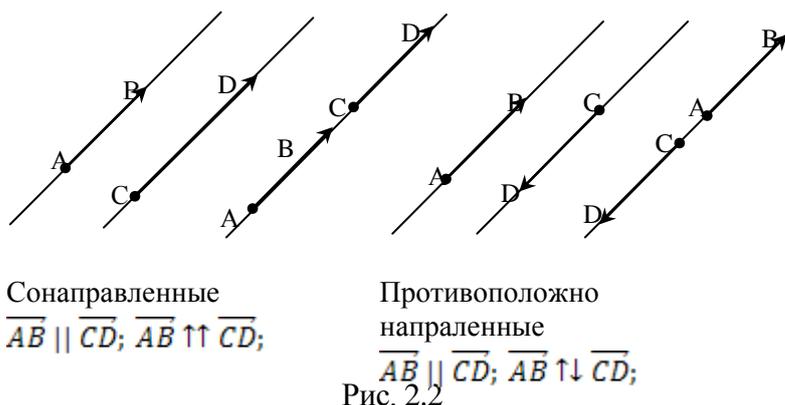


Рис. 2.2

Нулевой направленный отрезок считается сонаправленным с любым направленным отрезком; его длина равна нулю.

Два направленных отрезка \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются *эквивалентными*, если они одинаково направлены и имеют одну и ту же длину. Множество всех направленных отрезков разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных друг другу отрезков.

О п р е д е л е н и е . *Свободным вектором* или просто *вектором* называется класс эквивалентных направленных отрезков.

Для задания вектора достаточно указать какой-либо один направленный отрезок из этого класса. Обозначать векторы будем малыми латинскими буквами со стрелкой сверху: \vec{a}, \vec{b}, \dots или $\vec{a} = \{\overrightarrow{AB}\}$, указывая при этом один из направленных отрезков, принадлежащих классу вектора \vec{a} . Иногда будем писать $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и направленный отрезок \overrightarrow{AB} называть просто вектором.

О п р е д е л е н и е . Два вектора \vec{a} и \vec{b} называются *равными*, если они совпадают как классы эквивалентных направленных отрезков: $\vec{a} = \vec{b}$.

Если заданы вектор \vec{a} и точка A , то существует единственная точка B , такая, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Операцию построения такой точки B будем называть *откладыванием вектора* \vec{a} от точки A .

⚠ *Это означает, что вектор \vec{a} может быть отложен из любой точки пространства.*

Длиной или модулем вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ называется длина любого его представителя. Обозначается $|\vec{a}|$; $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором**.

Углом между векторами \vec{a} и \vec{b} называется угол φ , не превышающий π (развернутого угла), между представителями этих векторов, отложенными от одной точки (рис. 2.3).

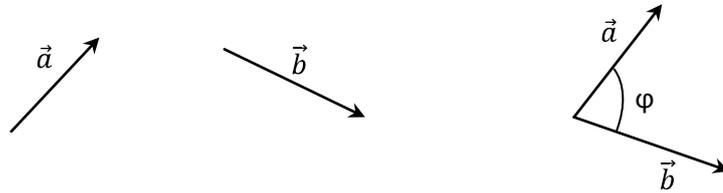


Рис. 2.3

О п р е д е л е н и е . Векторы называются **коллинеарными**, если образующие их направленные отрезки параллельны некоторой прямой.

О п р е д е л е н и е . Векторы называются **компланарными**, если направленные отрезки, которые их определяют, параллельны некоторой плоскости.

О п р е д е л е н и е . Векторы называются **ортогональными**, если угол между ними прямой ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Можно считать, что нулевой вектор $\vec{0}$ ортогонален любому вектору. Для коллинеарных векторов угол между ними равен нулю, если они сонаправлены, и развернутому, т. е. 180° , если они противоположно направлены.

О п р е д е л е н и е . **Линейными операциями** над векторами называют сложение, вычитание и умножение вектора на число.

О п р е д е л е н и е . Пусть заданы два вектора \vec{a} и \vec{b} . Возьмем какую-либо точку O и отложим от нее вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Далее от точки A отложим вектор $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор \overrightarrow{OB} называется **суммой векторов** \vec{a} и \vec{b} и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

Для геометрического представления суммы векторов используют правила «замыкающей» (его еще называют «правилом треугольника») и «параллелограмма», проиллюстрированные на рис. 2.4, а и 2.4, б соответственно.

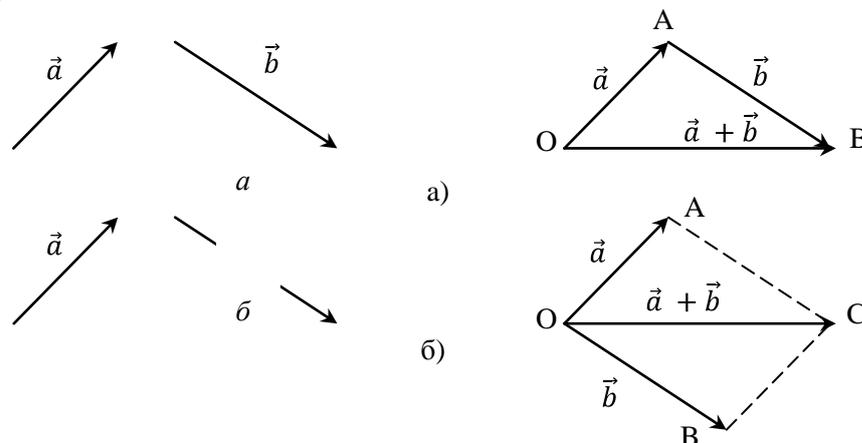


Рис. 2.4

Заметим, что определение операции сложения векторов корректно, т. е. результат не зависит от выбора точки O .

Вектор \overrightarrow{BA} называется **противоположным вектору** $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и обозначается $-\vec{a}$.

Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется сумма векторов \vec{a} и $(-\vec{b})$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

О п р е д е л е н и е . Произведением вектора \vec{a} на действительное число α называется вектор $\alpha\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

б) векторы \vec{a} и $\alpha\vec{a}$ сонаправлены при $\alpha > 0$ ($\vec{a} \uparrow \alpha\vec{a}$) и противоположно направлены при $\alpha < 0$ ($\vec{a} \updownarrow \alpha\vec{a}$).

Заметим, что в случае $\alpha = 0, |\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}| = 0$, т. е. для любого вектора \vec{a} произведение $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Основные свойства линейных операций над векторами

Пусть даны произвольные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и действительные числа α, β .

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативный или переместительный закон);
- 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (сочетательный или ассоциативный закон);
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (закон поглощения нулевого вектора);
- 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (существование противоположного вектора);
- 5) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (распределительный или дистрибутивный закон);
- 6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (распределительный или дистрибутивный закон);
- 7) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ (сочетательный или ассоциативный закон);
- 8) $1\vec{a} = \vec{a}$.

Теорема 1 (критерий коллинеарности). Для того, чтобы векторы \vec{a} и \vec{b} были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить как произведение другого на число, т.е. чтобы существовало действительное число α такое, что $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, или существовало бы число β такое, что $\vec{b} = \beta\vec{a}$.

Теорема 2 (критерий компланарности). Для того, чтобы три вектора были компланарными, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других, причем если векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарные, то всякий третий компланарный им вектор \vec{c} может быть единственным способом представлен в виде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Пр и м е р 2.1. В треугольнике ABC дано: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$; точка M – середина стороны BC . Выразить вектор \overrightarrow{AM} через векторы \vec{a} и \vec{b} .

Р е ш е н и е . Для векторов $\overrightarrow{AB} = \vec{a}; \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ справедливо равенство: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис.2.5). Отсюда $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Так как $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) =$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}). \text{ Получаем } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

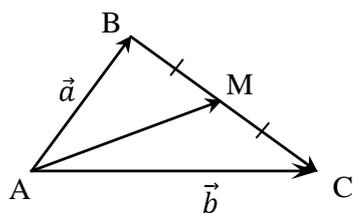


Рис. 2.5

Ответ: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. \otimes

\square П р и м е р 2.2. Какому условию должны удовлетворять ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} , чтобы имело место соотношение $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$?

Р е ш е н и е. Построим на векторах \vec{a} и \vec{b} , отложенных от точки O , параллелограмм $OADB$ (рис. 2.6). Тогда $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$. Равенство $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ означает, что длины диагоналей параллелограмма равны, т. е. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OD}|$. Отсюда следует, что данный параллелограмм есть прямоугольник. Следовательно, векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны.

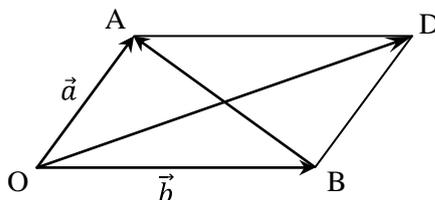


Рис. 2.6

Ответ: $\vec{a} \perp \vec{b}$. \otimes

\square П р и м е р 2.3. Дан треугольник ABC . Найти вектор, определяющий направление биссектрисы внутреннего угла при вершине A , если $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

Р е ш е н и е. Найдем единичные векторы \vec{e}_1, \vec{e}_2 , сонаправленные с векторами \vec{a}, \vec{b} :

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Тогда вектор $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ будет определять направление биссектрисы внутреннего угла при вершине A , т. к. диагонали ромба делят его угол пополам (рис. 2.7), т. е. $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. \otimes

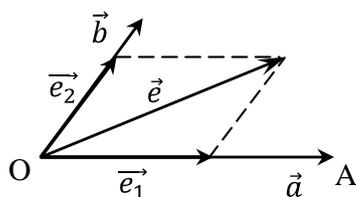


Рис. 2.7

\square П р и м е р 2.4. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ – коллинеарны. Доказать, что векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

Р е ш е н и е. Так как векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ – коллинеарны, то согласно критерию коллинеарности вектор $\vec{a} + \vec{b}$ можно выразить через вектор $\vec{a} - \vec{b}$, т. е. записать в виде

$\vec{a} + \vec{b} = \alpha(\vec{a} - \vec{b})$. Далее преобразуем это выражение, пользуясь свойствами суммы векторов и произведения векторов и скаляров: $\vec{a} + \vec{b} = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{b}$, $(1 - \alpha)\vec{a} = (-1 - \alpha)\vec{b}$. Если $\alpha \neq 1$, то вектор \vec{a} можно выразить через \vec{b} , умножая обе части последнего равенства на число $\frac{1}{1 - \alpha} \neq 0$:

$\vec{a} = -\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\vec{b}$; если $\alpha = 1$, то $\vec{b} = \vec{0}$ и тогда $\vec{b} = \vec{0} \cdot \vec{a}$. Таким образом, по критерию коллинеарности векторов векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

О п р е д е л е н и е . **Базисом на прямой** называется любой ненулевой вектор на этой прямой, **базисом на плоскости** – упорядоченная пара (\vec{e}_1, \vec{e}_2) двух неколлинеарных векторов этой плоскости, **базисом в пространстве** – упорядоченная тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ некомпланарных векторов.

О п р е д е л е н и е . **Базис** называется **ортонормированным**, если образующие его векторы единичной длины и попарно ортогональные. Примером является базис, обозначаемый $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, $(|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1; \vec{i} \perp \vec{j}; \vec{i} \perp \vec{k}; \vec{j} \perp \vec{k})$. Совокупность фиксированной точки O пространства и ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется **декартовой прямоугольной системой координат**: $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Точка O называется **началом системы координат**.

О п р е д е л е н и е . Упорядоченная тройка некопланарных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называется **правой**, если поворот по кратчайшему пути от первого вектора \vec{e}_1 ко второму вектору \vec{e}_2 из конца вектора \vec{e}_3 виден против часовой стрелки. В противном случае эта тройка называется **левой** (рис. 2.8). Соответствующие **системы координат** называются **правыми** или **левыми**.

В дальнейшем мы будем пользоваться только правыми системами координат.

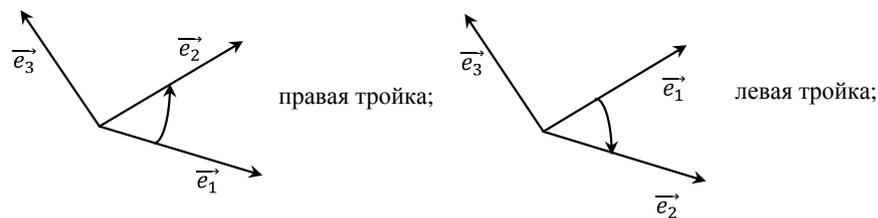


Рис. 2.8

Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты) координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно прямоугольной системы координат $Oxyz$, то для любого вектора \vec{a} существует единственная упорядоченная тройка действительных чисел (x, y, z) такая, что

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (2.1)$$

Равенство (2.1) называется **разложением вектора \vec{a} по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$** , а коэффициенты разложения – **координатами вектора \vec{a}** в этом базисе. При этом пишут $\vec{a} = (x, y, z)$ или $\vec{a}(x, y, z)$.

Пусть \vec{a} и \vec{b} – два вектора, причем $\vec{b} \neq \vec{0}$. Отложим эти векторы от некоторой точки O ; получим векторы $\vec{a} = \vec{OA}$ и $\vec{b} = \vec{OB}$, пусть точка A_1 – проекция точки A на прямую OB (рис. 2.9).

О п р е д е л е н и е . **Проекцией** вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется число $pr_{\vec{b}}\vec{a}$, которое определяется следующим образом:

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \begin{cases} |\overrightarrow{OA_1}|, & \text{если } \overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow \vec{b}; \\ -|\overrightarrow{OA_1}|, & \text{если } \overrightarrow{OA_1} \uparrow\downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

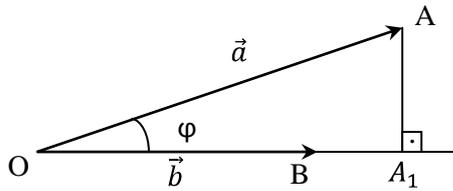


Рис. 2.9

Координаты x, y, z вектора \vec{a} в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – это его проекции на соответствующие координатные оси:

$$x = np_{\vec{i}}\vec{a}, \quad y = np_{\vec{j}}\vec{a}, \quad z = np_{\vec{k}}\vec{a}.$$

Длина вектора $\vec{a}(x, y, z)$ определяется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.2)$$

О п р е д е л е н и е . *Направляющими косинусами* вектора $\vec{a}(x, y, z)$ называются косинусы углов α, β, γ , которые вектор образует с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ (рис. 2.10). При этом

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \quad (2.3)$$

Имеет место равенство: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Для единичного вектора \vec{a}^0 , имеющего направление вектора \vec{a} , имеем:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (2.4)$$

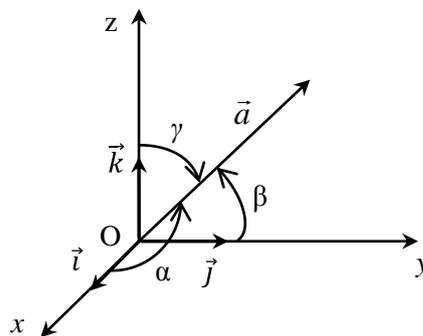


Рис. 2.10

Пусть даны два вектора $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$. Тогда:

1) векторы \vec{a} и \vec{b} равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т. е.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}.$$

2) при сложении векторов их одноименные координаты складываются, при вычитании – вычитаются, при умножении вектора на число – умножаются на это число:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2); \alpha \vec{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

3) векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (2.5)$$

О п р е д е л е н и е . Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат с произвольной точкой пространства, называется **радиус-вектором** точки M .

О п р е д е л е н и е . **Координатами точки M** называются координаты ее радиус-вектора $\vec{r} = (x, y, z)$ или $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ задан точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то его координаты равны разности соответствующих координат конечной и начальной его точек:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (2.6)$$

При этом

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.7)$$

Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, и пусть точка $C(x, y, z)$ такая, что $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$. Тогда координаты точки C находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.8)$$

Координаты середины отрезка AB (т.е. $\lambda = 1$ в 2.8) определяются равенствами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (2.9)$$

Пр и м е р 2.5. Даны две точки $A(3, -4, 1)$ и $B(4, 6, -3)$. Найти координаты, модуль, направляющие косинусы вектора \overrightarrow{AB} .

Р е ш е н и е . Координаты вектора \overrightarrow{AB} находим по формуле (2.6). При этом $x_1 = 3; y_1 = -4; z_1 = 1; x_2 = 4; y_2 = 6; z_2 = -3$, т. е. $\overrightarrow{AB} = (4 - 3; 6 + 4; -3 - 1) = (1; 10; -4)$. Модуль вектора \overrightarrow{AB} находим по формуле (2.7): $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 10^2 + (-4)^2} = \sqrt{117}$.

Направляющие косинусы вычисляем по формулам (2.3):

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{117}}; \quad \cos \beta = \frac{y}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{10}{\sqrt{117}}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{AB}|} = -\frac{4}{\sqrt{117}}. \quad \otimes$$

□ П р и м е р 2.6. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1; -2; 3); B(3; 2; 1); C(6; 4; 4)$. Найти его четвертую вершину D .

Р е ш е н и е. Обозначим координаты вершины D через x, y, z , т. е. $D(x, y, z)$. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Находим координаты векторов \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AD} : $\overrightarrow{BC} = (6-3; 4-2; 4-1)$, т. е. $\overrightarrow{BC} = (3; 2; 3)$; $\overrightarrow{AD} = (x-1; y+2; z-3)$. Из равенства векторов \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AD} следует, что $x-1=3; y+2=2; z-3=3$. Отсюда находим: $x=4; y=0; z=6$. Значит, $D(4; 0; 6)$. \otimes

□ П р и м е р 2.7. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны?

Р е ш е н и е. Так как $\vec{a}(-2, 3, \alpha), \vec{b}(\beta, -6, 2)$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то по условию (2.5) $-\frac{2}{\beta} = \frac{3}{-6} = \frac{\alpha}{2}$. Отсюда $-\frac{2}{\beta} = -\frac{1}{2}$ и $\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $\beta=4; \alpha=-1$, т. е. при $\alpha=-1$ и $\beta=4$ векторы коллинеарны.

□ П р и м е р 2.8. Найти координаты вектора \vec{a} , если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{b} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\sqrt{2}\vec{k}$ и его модуль равен 5.

Р е ш е н и е. Так как и $\vec{a} \downarrow \vec{b}$, то можно записать, что $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, где $\alpha < 0$. Следовательно, $\vec{a} = (5\alpha; -4\alpha; 2\sqrt{2}\alpha)$, причем $|\vec{a}| = \sqrt{(5\alpha)^2 + (-4\alpha)^2 + (2\sqrt{2}\alpha)^2} = 5$ (см. (4.2)).

Отсюда $25\alpha^2 + 16\alpha^2 + 8\alpha^2 = 25$, или $49\alpha^2 = 25$. Значит, $\alpha = -\frac{5}{7}$, а тогда $\vec{a} = \left(-\frac{25}{7}; \frac{20}{7}; -\frac{10\sqrt{2}}{7}\right)$ или $\vec{a} = -\frac{25}{7}\vec{i} + \frac{20}{7}\vec{j} - \frac{10\sqrt{2}}{7}\vec{k}$. \otimes

□ П р и м е р 2.9. Дана сила $\vec{F} = (4; 4; -4\sqrt{2})$. Найти величину и направление силы \vec{F} .

Р е ш е н и е. Величину силы \vec{F} находим, используя формулу модуля вектора (2.2). Имеем

$$|\vec{F}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4\sqrt{2})^2} = 8.$$

Направляющие косинусы вектора \vec{F} определяем по формулам (2.3): $\cos \alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \cos \beta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \cos \gamma = -\frac{4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Итак,

$$\alpha = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ; \quad \beta = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ;$$

$$\gamma = \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ.$$

Значит, сила $|\vec{F}| = 8$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы $\alpha = 60^\circ; \beta = 60^\circ; \gamma = 135^\circ$. \otimes

2.2 Скалярное произведение векторов

О п р е д е л е н и е . *Скалярным произведением* ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, которое обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или (\vec{a}, \vec{b}) и определяется равенством

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), \quad (2.10)$$

т. е. число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ между ними. По определению $(\vec{a}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{a}) = 0$.

Скалярное произведение обладает следующими **свойствами**:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (коммутативность);
- 2) $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$ (дистрибутивность);
- 3) $(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b})$ (ассоциативность относительно скалярного множителя);
- 4) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (или $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$) (критерий ортогональности);
- 5) $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0$ (скалярный квадрат вектора);

Если векторы \vec{a} и \vec{b} заданы координатами в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$; $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$;
- 2) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ (следует из свойства 5);
- 3) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ (вытекает из формулы (2.10) и формул

для вычисления (\vec{a}, \vec{b}) и $|\vec{a}|, |\vec{b}|$).

Механический смысл скалярного произведения – это работа A , производимая силой \vec{F} , точка приложения которой перемещается по отрезку $M_1 M_2$ из точки M_1 в точку M_2 :

$$A = (\vec{F}, \overline{M_1 M_2}).$$

Пр и м е р 2.10. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 7\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$.

Р е ш е н и е . Так как векторы \vec{a}, \vec{b} заданы координатами в ортонормированном базисе

$\vec{a} = (3; -3; 1)$, $\vec{b} = (0; -1; 7)$, а $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 0 + (-3)(-1) + 1 \cdot 7 = 10; |\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50}. \text{ Поэтому } \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{10}{\sqrt{50}} = \frac{10}{5\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$. \otimes

Пр и м е р 2.11. Найти $(\vec{a} - 3\vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 3$; $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

Р е ш е н и е . Используя свойства 1, 2, 3, 5 скалярного произведения, имеем:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} - 3\vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}) &= 2(\vec{a}, \vec{a}) - 5(\vec{a}, \vec{b}) - 3(\vec{b}, \vec{b}) = \\
 &= 2 \cdot |\vec{a}|^2 - 5 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) - 3|\vec{b}|^2 = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - 3 \cdot 3^2 = \\
 &= 8 - 15 - 27 = -34.
 \end{aligned}$$

Ответ: -34 . \otimes

\square **Пример 2.12.** Какую работу производит сила $\vec{F} = (2; -1; -4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A = (1; -2; 3)$ в точку $B = (5; -6; 1)$?

Решение. Используя механический смысл скалярного произведения, имеем $A = (\vec{F}, \overline{AB})$.

Найдем координаты вектора \overline{AB} :

$$\overline{AB} = (5 - 1; -6 - (-2); 1 - 3) = (4; -4; -2).$$

$$\text{Тогда } A = (\vec{F}, \overline{AB}) = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) = 20.$$

Ответ: 20 . \otimes

2.3 Векторное произведение векторов

Определение. *Векторным произведением* вектора \vec{a} и вектора \vec{b} называется вектор \vec{c} , удовлетворяющий трем условиям:

$$1) |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}});$$

$$2) \vec{c} \perp \vec{a}; \vec{c} \perp \vec{b};$$

3) упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая (рис. 2.11).

Обозначение: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

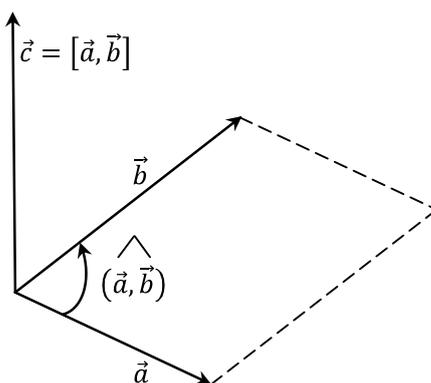


Рис. 2.11

Векторное произведение обладает следующими **свойствами**:

$$1) [\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}] \text{ (антикоммутативность);}$$

$$2) [\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}] \text{ (дистрибутивность);}$$

$$3) [\alpha \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}] \text{ (ассоциативность относительно скалярного множителя);}$$

4) $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ (критерий коллинеарности);

5) **геометрический смысл** векторного произведения: модуль векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ равен **площади параллелограмма**, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , отложенных от одной точки:

$$S_{\text{паралл}} = |[\vec{a}, \vec{b}]|;$$

6) **механический смысл** векторного произведения: **момент силы** \vec{F} , приложенной в точке B , относительно точки A определяется равенством: $\vec{M}_A(\vec{F}) = [\vec{AB}, \vec{F}]$.

Если векторы \vec{a} и \vec{b} заданы в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$; $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \quad (2.11)$$

$$= \vec{i}(y_1 z_2 - z_1 y_2) - \vec{j}(x_1 z_2 - z_2 x_1) + \vec{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

□ **Пример 2.13.** Найти площадь и длину высоты BD треугольника с вершинами в точках $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$, $C(6, 2, 0)$.

Решение. Поскольку площадь S треугольника ABC равна $S = \frac{1}{2} |\overline{AC}| |\overline{BD}|$, то

$$|\overline{BD}| = \frac{2S}{|\overline{AC}|} \quad (\text{рис. 2.12}).$$

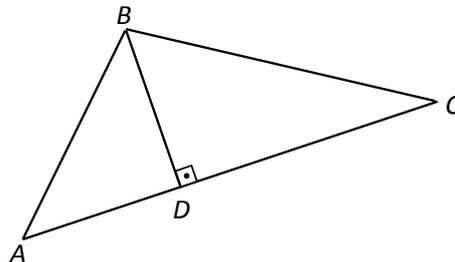


Рис. 2.12

1. Находим координаты векторов \overline{AB} , \overline{AC} и длину $|\overline{AC}|$ вектора \overline{AC} :

$$\overline{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}; \quad \overline{AC} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k};$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{105}.$$

2. Находим S :

$$S = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]|; \quad [\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -28\vec{j} - 14\vec{k}.$$

$$|[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \sqrt{(-28)^2 + (-14)^2} = 14\sqrt{5}; \quad S = 7\sqrt{5}.$$

3. $|\overline{BD}| = \frac{14\sqrt{5}}{\sqrt{105}} = \frac{14}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ ⊗

□ **Пример 2.14.** Сила $\vec{F} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ приложена в точке $B(0; 1; -2)$. Найти $\vec{M}_A(\vec{F})$, если $A(1; -1; 2)$.

Решение. Согласно определению момента силы $\vec{M}_A(\vec{F}) = [\vec{AB}, \vec{F}]$, находим координаты вектора $\vec{AB} = (-1; 2; -4)$, тогда

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}.$$

Ответ: $\vec{M}_A(\vec{F}) = (-2; -3; -1)$ ⊗

□ **Пример 2.15.** Найти единичный вектор \vec{c} , перпендикулярный каждому из векторов $\vec{a} = (3; -1; 2)$ и $\vec{b} = (-1; 3; -1)$.

Решение. Векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ даст вектор, который ортогонален каждому из векторов \vec{a} и \vec{b} . Найдем $[\vec{a}, \vec{b}]$ (см. (2.11)):

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + \vec{j} + 8\vec{k}; \quad |[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 8^2} = \sqrt{90}.$$

$$\text{Тогда } \vec{c} = \pm \frac{[\vec{a}, \vec{b}]}{|[\vec{a}, \vec{b}]|} = \pm \left(-\frac{5}{\sqrt{90}}; \frac{1}{\sqrt{90}}; \frac{8}{\sqrt{90}} \right) = \pm \left(-\frac{5}{3\sqrt{10}}; \frac{1}{3\sqrt{10}}; \frac{8}{3\sqrt{10}} \right).$$

Ответ: $\pm \left(-\frac{5}{3\sqrt{10}}; \frac{1}{3\sqrt{10}}; \frac{8}{3\sqrt{10}} \right)$ ⊗

2.4 Смешанное произведение векторов

Определение. *Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$* называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ умножается скалярно на вектор \vec{c} . Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Таким образом, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

Смешанное произведение векторов обладает следующими **свойствами**:

$$1) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]);$$

2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$, т. е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов и меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух рядом стоящих векторов – сомножителей;

$$3) (\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{d}, \vec{b}, \vec{c});$$

$$4) (\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \alpha\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{c}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c});$$

5) модуль смешанного произведения равен **объему параллелепипеда**, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

6) равенство $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ является **необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$** .

Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка; если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$ – левая тройка.

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатами

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1); \vec{b}(x_2, y_2, z_2); \vec{c}(x_3, y_3, z_3), \text{ то } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

□ П р и м е р 2.16. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0, 0, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(6, 2, 3)$, $D(3, 7, 2)$.

Р е ш е н и е . Рассмотрим три вектора (рис. 2.13):

$$\vec{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}; \quad \vec{AC} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}; \quad \vec{AD} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}.$$

Можно показать, что объем пирамиды $ABCD$ равен шестой части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

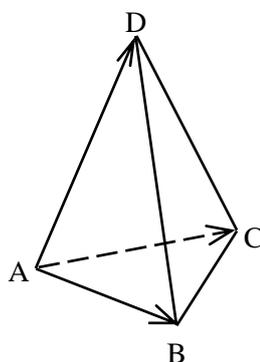


Рис. 2.13

$$\text{Тогда } V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|, \text{ а т. к. } (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 120, \text{ то } V = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20.$$

Ответ: 20. ⊗

□ П р и м е р 2.17. Доказать, что четыре точки $A_1(3, 5, 1)$, $A_2(2, 4, 7)$, $A_3(1, 5, 3)$, $A_4(4, 4, 5)$ лежат в одной плоскости.

Р е ш е н и е . Достаточно показать, что три вектора $\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}, \vec{A_1A_4}$, имеющие начало в одной из данных точек, лежат в одной плоскости (т. е. компланарны). Находим координаты векторов $\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}, \vec{A_1A_4}$:

$$\vec{A_1A_2} = (2-3; 4-5; 7-1) = (-1; -1; 6);$$

$$\vec{A_1A_3} = (1-3; 5-5; 3-1) = (-2; 0; 2);$$

$$\vec{A_1A_4} = (4-3; 4-5; 5-1) = (1; -1; 4).$$

Проверяем условие компланарности векторов (свойство 6 смешанного произведения):

$$(\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}, \vec{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 0 - 2 - 8 = 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}, \vec{A_1A_4}$ компланарны, а значит, точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости. ⊗

□ П р и м е р 2.18. Образуют ли векторы $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (5; 7; 4)$, $\vec{c} = (2; 7; -4)$ базис в трехмерном пространстве? Если да, то определите, какой тройкой является тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правой или левой.

Р е ш е н и е. Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -49.$$

Так как $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны, а значит, образуют базис в пространстве. Учитывая, что $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, то тройка векторов – левая. ⊗

3 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1 Полярная система координат. Уравнение линии на плоскости

Полярная система координат

Полярная система координат задается точкой O , называемой **полюсом**, лучом Op , называемым **полярной осью**, и **единичным вектором** \vec{e} того же направления, что и луч Op .

Положение точки M на плоскости определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ , образованным отрезком OM с полярной осью (рис. 4.15) и отсчитываемым в положительном направлении.

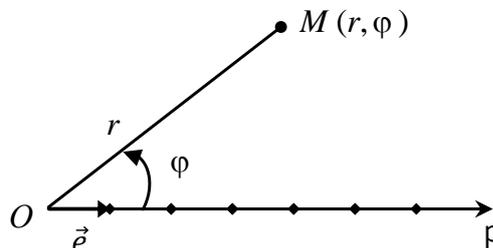


Рис. 3.1

О п р е д е л е н и е. Числа r и φ называются **полярными координатами** точки M : r называют **полярным радиусом**, φ – **полярным углом**.

Если рассматривать значения r в промежутке $[0; +\infty)$, а значение φ в $(-\pi; \pi]$ (или в $[0; 2\pi)$), то каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ , и наоборот.

Если совместить полюс O с началом координат системы Oxy , а полярную ось – с положительной полуосью Ox (рис. 3.1), то связь между полярными и прямоугольными координатами точки (кроме точки O) устанавливается формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi; \end{cases} \quad (3.1)$$

и

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Откуда, в частности, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, где $x \neq 0$.

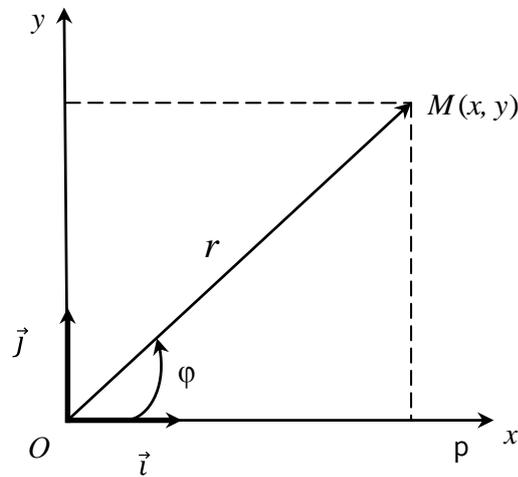


Рис. 3.2

□ **Пример 3.1.** Найти прямоугольные координаты точки M с полярными координатами $\left(2; -\frac{2}{3}\pi\right)$.

Решение. Имеем $r = 2$, $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$. По формулам (3.1) находим

$$x = 2 \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \quad y = 2 \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}. \quad \otimes$$

□ **Пример 3.2.** Найти полярные координаты точки M с прямоугольными координатами $(-\sqrt{3}; -1)$.

Решение. Имеем $x = -\sqrt{3}$; $y = -1$. По формулам (3.2) находим $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Точка M лежит в III четверти, следовательно, с уче-

том того, что $-\pi < \varphi \leq \pi$, получаем $\varphi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi$. Итак, $M\left(2; -\frac{5}{6}\pi\right)$. \otimes

Уравнение линии на плоскости

Определение. *Уравнением линии на плоскости Oxy* называется уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней. Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами* точек линии.

Задача нахождения точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0; \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Аналогично вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат: $F(r, \varphi) = 0$.

Линию на плоскости можно рассматривать как траекторию пути, пройденного точкой, движущейся по какому-нибудь закону. Если абсцисса точки $M(x, y)$ изменяется по закону $x = x(t)$, а ордината – по закону $y = y(t)$, где t – переменная, называемая **параметром**, то уравнение линии записывается в виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_1, t_2]$.

Эти уравнения называются **параметрическими уравнениями линии**.

Линию на плоскости можно задать **векторным уравнением** $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где t – скалярный параметр; при изменении t конец вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ описывает некоторую линию, называемую **годографом** (рис. 3.2). Параметрические уравнения годографа: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

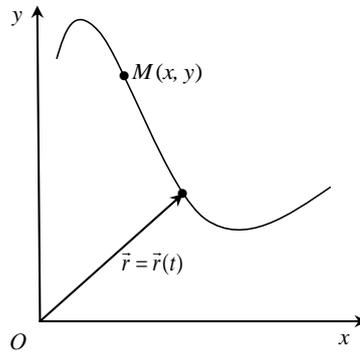


Рис. 3.2

Так, например, параметрическими уравнениями окружности с центром в точке O и радиуса R являются $\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases}$ а эллипса с полуосями a и b – $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$

Здесь в качестве параметра t использован угол между осью Ox и вектором \vec{OM} , где M – текущая точка кривой.

Примером векторного уравнения кривой является уравнение окружности диаметра $2R$, центр которой лежит на полярной оси, а полюс системы координат лежит на окружности: $r = 2R \cos \varphi$.

3.2 Прямая на плоскости

Будем считать, что на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy .

Различные виды уравнений прямой

Положение прямой на плоскости однозначно определяется какой-либо фиксированной точкой $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на ней, и либо:

- 1) ненулевым вектором $\vec{n}(A, B) \neq \vec{0}$, перпендикулярным к прямой, который называется **нормальным вектором** прямой;
- 2) ненулевым вектором $\vec{s}(m, n) \neq \vec{0}$, параллельным прямой, который называется **направляющим вектором** прямой;
- 3) **угловым коэффициентом** прямой k , который равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox ;

4) **еще одной точкой** $M_1(x_1, y_1)$, не совпадающей с точкой $M_0(x_0, y_0)$.

В каждом из перечисленных случаев получаются свои уравнения прямой.

1) Заданы точка $M_0(x_0, y_0)$, лежащая на прямой, и нормальный вектор $\vec{n}(A, B)$, т. е. $\vec{n}(A, B) \neq \vec{0}$ и перпендикулярен прямой. Имеем следующие уравнения:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \quad (3.3)$$

откуда получаем

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.4)$$

где $C = -(Ax_0 + By_0)$, причем $A^2 + B^2 \neq 0$ (т. к. $\vec{n} \neq \vec{0}$).

О п р е д е л е н и е . Уравнение (3.4) называется **общим уравнением прямой** на плоскости.

Уравнение $Ax + By + C = 0$ с условием $A^2 + B^2 \neq 0$ называется уравнением **первой степени с двумя переменными**.

Если в уравнении (3.4) $A \neq 0; B \neq 0; C \neq 0$, то его можно привести к виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Это уравнение называется **уравнением прямой в отрезках**, где a и b – длины отрезков с учетом знака, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно.

2) Даны точка $M_0(x_0, y_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{s}(m, n)$, т. е. $\vec{s} \neq \vec{0}$ и \vec{s} параллелен прямой.

Имеем уравнения:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, t \in R, \quad (3.5)$$

или при условии $m \neq 0, n \neq 0$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (3.6)$$

О п р е д е л е н и е . Уравнения (3.5) называются **параметрическими** уравнениями, а (3.6) – **каноническим уравнением прямой** на плоскости.

Несложными алгебраическими преобразованиями уравнения (3.5) и (3.6) могут быть сведены к общему уравнению (3.4), т. е. к уравнению первой степени относительно x и y .

Замечание. В случае, когда одна из координат направляющего вектора $\vec{s}(m, n)$ равна нулю, запись уравнения прямой в канонической форме сохраняется в виде (3.6). При этом если в знаменателе стоит нуль, то к нулю нужно приравнять и числитель. Полученное равенство (или $y = \text{const}$, или $x = \text{const}$) и будет уравнением прямой на плоскости.

3) Если заданы точка $M_0(x_0, y_0)$ прямой и ее угловой коэффициент k , то **уравнение с угловым коэффициентом** имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (3.7)$$

После приведения подобных членов (3.7) можно записать и так: $y = kx + b$.

4) На прямой заданы две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Тогда **каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки**, имеет следующий вид:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}. \quad (3.8)$$

Все уравнения (3.5–3.8) можно записать в виде уравнения первой степени относительно x и y .

⚠ Вывод. Каждая прямая на плоскости Oxy определяется уравнением первой степени с двумя переменными x и y :

$$Ax + By + C = 0; \quad A^2 + B^2 \neq 0.$$

Верно и обратное: каждое такое уравнение первой степени относительно x и y задает на плоскости прямую.

Заметим, что нормальный и направляющий векторы прямой на плоскости связаны следующим образом: если $\vec{n}(A, B)$, то $\vec{s}(B, -A)$ (т. к. $(\vec{n}, \vec{s}) = AB - AB = 0$, то $\vec{s} \perp \vec{n}$).

Расстояние $\rho(M_0, l)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l , заданной уравнением (3.4), вычисляется по формуле

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.9)$$

□ Пример 3.3. Составить каноническое и общее уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2;1)$ и $M_2(-1;2)$. Найти угловой коэффициент этой прямой.

Решение. Для составления канонического уравнения воспользуемся формулой (3.8):

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-1}{2-1} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{1} \quad \text{— каноническое уравнение.}$$

Общее уравнение получим из данного канонического, умножая обе части равенства на -3 , перенося все слагаемые в левую часть и приводя подобные члены:

$$x-2+3(y-1)=0 \Leftrightarrow x+3y-5=0 \quad \text{— общее уравнение.}$$

Чтобы получить угловой коэффициент прямой, выразим из общего уравнения y :

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{— уравнение с угловым коэффициентом вида } y = kx + b. \quad \text{Следовательно,}$$

$$k = -\frac{1}{3}. \quad \otimes$$

□ Пример 3.4. Составить уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M(-1, 2)$ перпендикулярно вектору, проходящему через точки $M_1(3, 1)$ и $M_2(4, -2)$. Найти расстояние от точки M до прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 .

Решение. Уравнение прямой запишем в виде (3.3):

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0,$$

где x_0, y_0 — координаты точки M , а A и B — координаты нормального вектора.

Так как $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (1, -3)$, то уравнение имеет вид $1(x+1) - 3(y-2) = 0$ или $x - 3y + 7 = 0$.

Для нахождения расстояния от точки M до прямой M_1M_2 запишем уравнение этой прямой в виде (3.8):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{3},$$

$$\text{или } 3x + y - 10 = 0.$$

Подставляя в формулу (3.9) координаты $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ точки M , получаем

$$\rho(M, l) = \frac{|3(-1) + 1 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{10}}. \quad \otimes$$

□ **Пример 3.5.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1; -2)$ и образующей с осью Ox угол $\alpha = 60^\circ$.

Решение. Найдем угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$. Подставляя координаты данной точки M_0 и значение углового коэффициента в уравнение (3.7) получим искомое уравнение прямой: $y + 2 = \sqrt{3}(x - 1)$ или $y - \sqrt{3}x + 2 + \sqrt{3} = 0$ – общее уравнение прямой. \otimes

Взаимное расположение прямых на плоскости

Две прямые на плоскости либо пересекаются, либо параллельны, либо совпадают.

О п р е д е л е н и е . Под **углом между прямыми в плоскости** понимают наименьший (острый) из углов, образованных этими прямыми. Один из углов, образованных пересечением прямых, совпадает с углом между векторами нормали или направляющими векторами прямых.

1. Если две прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то величина φ угла между ними вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \left| \cos \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2 \right) \right| = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad (3.10)$$

где $\vec{n}_1(A_1, B_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ – векторы нормали прямых.

Условие **пересечения** прямых:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}, \quad (3.11)$$

в частности, условие **перпендикулярности** прямых:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \quad (3.12)$$

Условие **параллельности** прямых:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \quad (3.13)$$

условие **совпадения** прямых:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (3.14)$$

2. Если прямые l_1 и l_2 заданы **каноническими (параметрическими)** уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}, \quad \text{то}$$

$$\cos \varphi = \left| \cos \left(\vec{s}_1, \vec{s}_2 \right) \right| = \frac{|\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}, \quad (3.15)$$

где $\vec{s}_1(m_1, n_1), \vec{s}_2(m_2, n_2)$ – направляющие векторы прямых.

Условие **пересечения** прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2}, \quad (3.16)$$

параллельности прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (3.17)$$

перпендикулярности прямых:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (3.18)$$

3. Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с **угловым коэффициентом** $y = k_1 x + b_1, y = k_2 x + b_2$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Условие **пересечения** прямых: $k_1 \neq k_2$;

параллельности прямых:

$$k_1 = k_2; b_1 \neq b_2;$$

совпадения прямых:

$$k_1 = k_2; b_1 = b_2;$$

перпендикулярности прямых:

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \text{ т. е. } k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Для нахождения точек пересечения прямых l_1 и l_2 нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}, \\ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = k_1 x + b_1, \\ y = k_2 x + b_2. \end{cases} \quad (3.19)$$

□ **Пример 3.6.** Найти острый угол между прямыми, определяемыми уравнениями $9x - 3y + 7 = 0$ и $6x + 3y - 4 = 0$. Найти точку пересечения этих прямых.

Решение. Запишем векторы нормалей этих прямых $\vec{n}_1(9; -3); \vec{n}_2(6; 3)$ и воспользуемся формулой (3.10):

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1, \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|9 \cdot 6 + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{9^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{45}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{45}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$. Для того, чтобы найти точку пересечения прямых, составим

и решим систему уравнений (3.19):
$$\begin{cases} 9x - 3y + 7 = 0 \\ 6x + 3y - 4 = 0 \end{cases}.$$

Складывая оба уравнения, получим $\begin{cases} 15x + 3 = 0 \\ 6x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x = -\frac{1}{5}, \\ y = \frac{26}{15}. \end{cases}$ \otimes

\square **Пример 3.7.** Дана прямая $3x - 4y = 7$. Через точку $M_0(3; 2)$ проведена прямая: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой. Составить ее уравнение.

Решение. а) $\vec{n}(3; -4)$ – вектор нормали исходной прямой. В силу параллельности прямых его можно считать и вектором нормали искомой прямой. Составляем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3; -4)$ (см. (3.3)):

$$3(x - 3) + (-4)(y - 2) = 0, \text{ или } 3x - 4y - 1 = 0.$$

б) В силу перпендикулярности прямых вектор нормали $\vec{n}(3; -4)$ будет направляющим вектором для перпендикулярной прямой: $\vec{s} = \vec{n}(3; -4)$. Составим каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; 2)$ параллельно вектору $\vec{s}(3; -4)$ (см. (3.6)):

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 2}{-4} \Rightarrow -4x + 12 = 3y - 6 \Rightarrow 4x + 3y - 18 = 0 - \text{искомое уравнение. } \otimes$$

3.3 Плоскость в пространстве

Будем считать, что в пространстве задана прямоугольная декартова система координат *Oxyz*.

Различные виды уравнения плоскости

Однозначное расположение плоскости определяется

1) либо фиксированной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой плоскости, и ненулевым вектором $\vec{n}(A, B, C)$, перпендикулярным к плоскости, который называется **нормальным вектором**;

2) либо тремя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащими на одной прямой.

Рассмотрим эти случаи.

1. **Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A, B, C)$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$:**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.20)$$

Если раскрыть скобки, привести подобные члены, обозначить $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, то будем иметь уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \quad (3.21)$$

которое называется **общим уравнением плоскости**.

Если в (4.51) все коэффициенты не равны нулю, то путем деления обеих частей уравнения (4.51) на $(-D)$ получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (3.22)$$

которое называется **уравнением плоскости в отрезках**. Здесь a, b, c – абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с координатными осями $Ox, Oy,$ и Oz соответственно.

2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.23)$$

Если вычислить этот определитель, то мы придем к уравнению вида (3.21), т. е. к общему уравнению плоскости.

Уравнением первой степени с тремя переменными называют уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Вывод. Каждая плоскость в пространстве $Oxyz$ определяется уравнением первой степени с тремя переменными

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

И наоборот, каждое уравнение первой степени относительно x, y, z определяет некоторую плоскость в пространстве.

Взаимное расположение плоскостей

Пусть две плоскости заданы своими общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (3.24)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (3.25)$$

Различают следующие случаи взаимного расположения плоскостей: 1) пересекаются по прямой; 2) параллельны; 3) совпадают.

Условие **пересечения**: соответствующие коэффициенты при x, y, z в (3.24), (3.25) не пропорциональны, т. е. $\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$, здесь $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1); \vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$. При этом условие **перпендикулярности** плоскостей имеет вид:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (3.26)$$

Условия **параллельности** плоскостей (3.24) и (3.25):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}; \quad (3.27)$$

совпадения плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (3.28)$$

Углом между плоскостями (3.24) и (3.25) называется угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$.

Поэтому косинус угла φ между ними находится по формуле

$$\cos \varphi = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.29)$$

Величина меньшего угла между плоскостями вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.30)$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.31)$$

□ **Пример 3.8.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(2; 1; -1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(1; -2; 3)$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.20):

$$1 \cdot (x-2) + (-2)(y-1) + 3(z-(-1)) = 0.$$

Отсюда $x-2-2y+2+3z+3=0$, а значит, $x-2y+3z+3=0$ – общее уравнение искомой плоскости. ⊗

□ **Пример 3.9.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2; 3; 1)$ параллельно плоскости Oxy .

Решение. В качестве вектора нормали плоскости Oxy можно взять базисный вектор $\vec{k} = (0; 0; 1) = \vec{n}$, который будет служить и вектором нормали искомой плоскости. Далее по формуле (3.20): $0 \cdot (x+2) + 0 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z-1) = 0$ или $z-1=0$. ⊗

□ **Пример 3.10.** Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1; 0; -1)$, $M_2(2; 2; 3)$, $M_3(0; -3; 1)$.

Решение. Используя формулу (3.23), получим

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 2-1 & 2-0 & 3+1 \\ 0-1 & -3-0 & 1+1 \end{vmatrix} = 0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 16(x-1) - 6y - (z+1) = 0 \Rightarrow 16x - 6y - z - 17 = 0 \quad - \end{aligned}$$

общее уравнение искомой плоскости. ⊗

□ **Пример 3.11.** Найти угол между двумя плоскостями: $x-2y-z+1=0$, $x+3z-7=0$.

Решение. Нормальный вектор первой плоскости $\vec{n}_1(1;-2;-1)$, второй – $\vec{n}_2(1;0;3)$. Следовательно, по формуле (3.29)

$$\cos\varphi = \cos\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right) = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 3}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt{15}}$$

Значит, угол φ тупой, $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$. Острый угол находится из соотношения: $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}$; $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$. \otimes

□ Пример 3.12. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями: $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Решение. $\vec{n}(1;-2;-2)$ – вектор нормали обеих плоскостей. Для решения задачи найдем какую-либо точку на первой плоскости и вычислим расстояние от этой точки до второй плоскости. Для этого положим в первом уравнении $x = 0$, $y = 0$, тогда $-2z - 12 = 0$. Отсюда $z = -6$. Следовательно, $M_0(0; 0; -6)$ – точка, лежащая на первой плоскости. Тогда по формуле (3.31) имеем: $d = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-6) - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{3} = 2$, т. е. $d = 2$. \otimes

3.4 Прямая в пространстве

Различные уравнения прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве однозначно определяется:

- 1) заданием точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой прямой и ненулевого вектора $\vec{s}(m, n, p)$, параллельного прямой, который называется **направляющим вектором** прямой;
- 2) заданием двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ на этой прямой;
- 3) пересечением двух непараллельных плоскостей.

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{s}(m, n, p)$, $\vec{s} \neq \vec{0}$, имеют следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad (3.32)$$

а ее **параметрические уравнения**:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \quad t \in R. \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad (3.33)$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.34)$$

Общими уравнениями прямой называется система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (3.35)$$

т. е. прямая задается пересечением двух плоскостей. Направляющий вектор прямой (3.35) находится по формуле:

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \quad (3.36)$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad (3.37)$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}. \quad (3.38)$$

Возможны следующие случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве: 1) прямые параллельны; 2) совпадают; 3) пересекаются в одной точке; 4) прямые скрещиваются.

Условия **параллельности** прямых (3.37) и (3.38):

$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 : \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$; и вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ не коллинеарен векторам $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$.

Условия **совпадения** прямых:

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}.$$

Условия **пересечения** прямых:

$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$ (условие компланарности векторов \vec{s}_1, \vec{s}_2 и $\overrightarrow{M_1M_2}$) и векторы $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ неколлинеарны.

Условия **скрещивающихся** прямых (т. е. прямые не лежат в одной плоскости):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (условие некомпланарности векторов } \vec{s}_1, \vec{s}_2 \text{ и } \overrightarrow{M_1M_2} \text{)}.$$

Заметим, что $(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = 0$ является условием того, что прямые (3.37) и (3.38) **лежат в одной плоскости**.

Под *углом между прямыми* (3.37), (3.38) понимают угол между направляющими векторами $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$. Величина этого угла φ определяется формулой:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (3.39)$$

Условие *перпендикулярности* двух прямых:

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0, \text{ т.е. } m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

□ Пример 3.13. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(4; 3; -2)$ параллельно 1) вектору $\vec{s}(3; -6; 5)$; 2) прямой

$$\begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0, \\ 2x - y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. 1) Вектор $\vec{s}(3; -6; 5)$ является направляющим вектором искомой прямой, проходящей через точку M_0 . Тогда по формуле (3.32) канонические уравнения прямой примут вид:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z+2}{5}.$$

Используя (3.33), параметрические уравнения прямой запишутся в виде:

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 3 - 6t \\ z = -2 + 5t \end{cases}, \quad t \in R.$$

2) Направляющий вектор \vec{s}_1 заданной в условии прямой находим по формуле (3.36):

$$\vec{s}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}, \text{ т. е. } \vec{s}_1 = (-11; 6; -7).$$

Вектор \vec{s}_1 может служить направляющим вектором и искомой прямой, т. к. прямые параллельны. Получаем канонические уравнения:

$$\frac{x-4}{-11} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+2}{-7},$$

а параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x = 4 - 11t, \\ y = 3 + 6t \\ z = -2 - 7t, \end{cases} \quad t \in R. \quad \otimes$$

□ Пример 3.14. Найти уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(2; 2; 2)$ и $M_2(6; 2; 1)$.

Решение. Воспользуемся уравнениями (3.34):

$$\frac{x-2}{6-2} = \frac{y-2}{2-2} = \frac{z-2}{1-2} \text{ или } \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}.$$

Запись уравнений прямой в канонической форме сохраняется и в случае обращения отдельных координат вектора \vec{s} в ноль. Если в знаменателе стоит ноль, то нулю нужно приравнять и числитель, т. е. уравнения можно

записать в виде: $\begin{cases} y-2=0, \\ \frac{x-2}{4} = \frac{z-2}{-1}, \end{cases}$ или $\begin{cases} y=2, \\ x+4z-10=0, \end{cases}$ – это общие уравнения прямой в про-

странстве. При этом параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x=2+4t, \\ y=2, \\ z=2-t. \end{cases} \quad \otimes$$

□ Пример 3.15. Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{-8}$ и $\frac{x}{11} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z+1}{-7}$.

Решение. $\vec{s}_1(7; 2; -8)$ и $\vec{s}_2(11; -8; -7)$ – направляющие векторы первой и второй прямых соответственно. Тогда по формуле (3.39)

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{7 \cdot 11 + 2 \cdot (-8) + (-8) \cdot (-7)}{\sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} = \\ &= \frac{117}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{234}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 45^\circ. \quad \otimes \end{aligned}$$

□ Пример 3.16. Установить взаимное расположение прямых:

$$1) \frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2} \text{ и } \begin{cases} x=5-8t, \\ y=4-6t, \\ z=3+4t. \end{cases}$$

$$2) \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1} \text{ и } \frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}.$$

Решение. 1) Выпишем направляющие векторы первой и второй прямых: $\vec{s}_1(4; 3; -2)$, $\vec{s}_2(-8; -6; 4)$. Так как координаты этих векторов пропорциональны: $\frac{4}{-8} = \frac{3}{-6} = \frac{-2}{4}$, то $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$. Следовательно, данные прямые параллельны или совпадают. Возьмем точки $M_1(2; 0; -1)$ и $M_2(5; 4; 3)$, лежащие на прямых. Получим вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (3; 4; 4)$. Так как $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{s}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{s}_2$, то прямые параллельны.

2) Координаты направляющих векторов $\vec{s}_1(2; -3; 1)$, $\vec{s}_2(3; 2; 4)$ данных прямых не пропорциональны: $\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{1}{4}$. Следовательно, прямые либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся. Проверим условие принадлежности двух прямых одной плоскости: $(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = 0$. Данные прямые проходят через точки $M_1(0; 1; -2)$ и $M_2(-4; -3; 1)$. Имеем:

$$\begin{vmatrix} -4-0 & -3-1 & 1-(-2) \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-14) + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 13 = 115 \neq 0.$$

Следовательно, данные прямые – скрещивающиеся. \otimes

□ Пример 3.17. Общие уравнения прямой $\begin{cases} x+2y-3z+2=0, \\ 2x-2y+z-5=0, \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду.

Решение. Нам надо знать какую-либо точку на прямой и ее направляющий вектор \vec{s} . Выберем точку на прямой следующим образом: положим, например, $z=0$; тогда для находж-

дения абсциссы x и ординаты y этой точки получим систему уравнений: $\begin{cases} x + 2y + 2 = 0, \\ 2x - 2y - 5 = 0, \end{cases}$ из

которой находим $x = 1, y = -\frac{3}{2}$. Значит, $M_0\left(1; -\frac{3}{2}; 0\right)$ – точка прямой. Направляющий вектор \vec{s} прямой находим по формуле (3.36):

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k},$$

т. е. $\vec{s} = (-4; -7; -6)$. Тогда, согласно формуле (3.32): $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{-7} = \frac{z}{-6}$ – искомые канонические уравнения прямой. \otimes

3.5 Прямая и плоскость в пространстве

Пусть прямая задана каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad (3.40)$$

а плоскость задана общим уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3.40a)$$

Различают следующие случаи расположения прямой и плоскости: 1) прямая пересекается с плоскостью в одной точке; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости. Укажем для каждого из этих случаев условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений (3.40) и (3.40 а). Выпишем направляющий вектор $\vec{s}(m, n, p)$ прямой (3.40), нормальный вектор $\vec{n}(A, B, C)$ плоскости (3.40а), координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой (3.40).

Условие **пересечения** прямой и плоскости:

$$(\vec{s}, \vec{n}) \neq 0 \Leftrightarrow Am + Bn + Cp \neq 0; \quad (3.41)$$

условия параллельности прямой и плоскости:

$$\begin{cases} (\vec{s}, \vec{n}) = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Условия, при котором **прямая** (3.40) **лежит в плоскости** (3.40а):

$$\begin{cases} (\vec{s}, \vec{n}) = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Углом между прямой и плоскостью называется угол φ (острый) между прямой и ее проекцией на плоскость. Величина угла φ определяется по формуле:

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{s}, \vec{n} \right) \right| = \frac{|\langle \vec{s}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (3.44)$$

Условие **перпендикулярности прямой и плоскости**:

$$\vec{s} \parallel \vec{n} : \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (3.45)$$

Для нахождения **точки пересечения прямой и плоскости** удобно использовать параметрические уравнения прямой (3.33):

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Координаты точки пересечения находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt; \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

□ Пример 3.18. Найти угол (в градусах) между прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ и плоскостью $3x - 4y + z - 2 = 0$.

Решение. В данном случае направляющий вектор прямой $\vec{s} = (3; 1; 2)$; а вектор нормали плоскости $\vec{n} = (3; -4; 1)$.

Воспользуемся формулой (3.44). Получим:

$$\sin \varphi = \frac{|9 - 4 + 2|}{\sqrt{9 + 1 + 4} \cdot \sqrt{9 + 16 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} = \frac{7}{2\sqrt{13} \cdot 7} = \frac{7}{2\sqrt{91}} \approx 0,37.$$

Откуда $\varphi = \arcsin 0,37 \approx 21,5^\circ$. ⊗

□ Пример 3.19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; -3; 6)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-2}$.

Решение. Направляющий вектор $\vec{s} = (2; 1; -2)$ прямой может служить нормальным вектором для искомой плоскости: $\vec{n} = \vec{s} = (2; 1; -2)$. Теперь воспользуемся формулой (3.20):

$2(x-4) + 1 \cdot (y - (-3)) + (-2) \cdot (z-6) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 7 = 0$ – общее уравнение искомой плоскости. ⊗

□ Пример 3.20. Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(3; 4; 5)$ относительно плоскости $x - 2y + z - 6 = 0$.

Решение. Точка M_2 , симметричная точке M_1 относительно плоскости, находится на перпендикуляре к плоскости и является концом отрезка M_1M_2 , для которого серединой будет точка N пересечения прямой M_1M_2 и плоскости. Направляющий вектор перпендикуляра к плоскости – это нормальный вектор этой плоскости $\vec{n} = (1; -2; 1)$. Уравнения перпендикуляра к плоскости, проведенного через точку M_1 , имеют вид ($\vec{s} = \vec{n} = (1; -2; 1)$):

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-5}{1} (=t) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+t, \\ y=4-2t, \\ z=5+t. \end{cases}$$

Координаты точки N пересечения перпендикуляра с плоскостью найдем, решая систему (3.46):

$$\begin{cases} x=3+t; y=4-2t; z=5+t; \\ x-2y+z-6=0. \end{cases}$$

Подставляя выражения для x, y, z в последнее уравнение системы, получим:

$$(3+t) - 2(4-2t) + (5+t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Теперь, подставляя найденное значение t в x, y, z , будем иметь: $x=3+1=4; y=4-2=2; z=5+1=6$, т. е. $N(4;2;6)$ – точка пересечения перпендикуляра и плоскости. А так как N – середина отрезка M_1M_2 , то

$$x_N = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2}; y_N = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2}; z_N = \frac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2}.$$

Имеем: $4 = \frac{3 + x_{M_2}}{2}; 2 = \frac{4 + y_{M_2}}{2}; 6 = \frac{5 + z_{M_2}}{2}$. Отсюда находим: $x_{M_2} = 5; y_{M_2} = 0; z_{M_2} = 7$.

Значит, точка M_2 имеет координаты $(5; 0; 7)$. \otimes

3.6 Кривые второго порядка

Считаем, что на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy .

Уравнением второй степени с двумя переменными называется уравнение вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad (3.47)$$

Линией (кривой) второго порядка называется множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют какому-либо уравнению 2-й степени (3.47).

Линиями 2-го порядка являются **окружность, эллипс, гипербола, парабола**. Рассмотрим уравнения этих линий в наиболее простом (каноническом) виде, который достигается определенным выбором системы координат.

Окружность

О п р е д е л е н и е . **Окружностью** называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки $N(a, b)$, называемой **центром**, на одно и то же расстояние R , называемое **радиусом** окружности (рис. 3.3).

Каноническое уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (3.48)$$

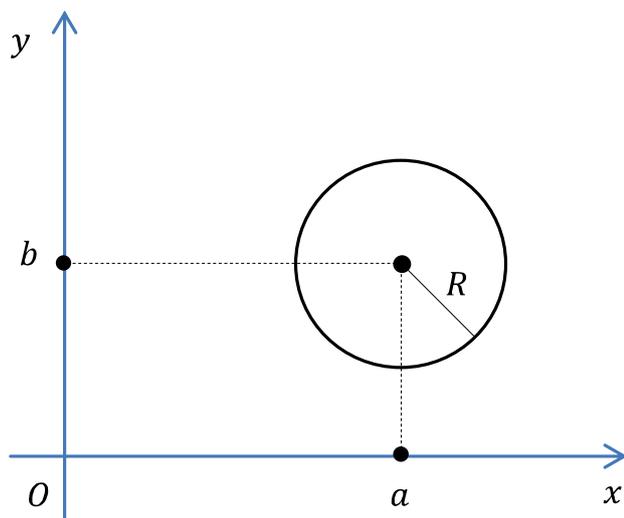


Рис. 3.3

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, т. е. $a = b = 0$, то уравнение (3.48) имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (3.49)$$

Эллипс

О п р е д е л е н и е . *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, бóльшая, чем расстояние между фокусами.

Если фокусы эллипса F_1 и F_2 , $|F_1F_2| = 2c$, расположить на оси Ox симметрично относительно начала координат, то $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$. Обозначив через $2a$ сумму расстояний от точки кривой до фокусов ($2a > 2c$), получим **каноническое уравнение эллипса**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.50)$$

В этом уравнении $a > b$; $b > 0$ и числа a, b, c связаны соотношением:

$$c^2 = a^2 - b^2. \quad (3.51)$$

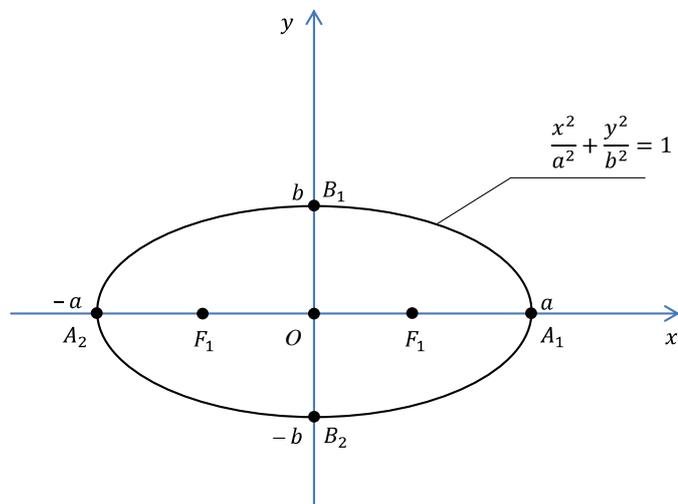


Рис. 3.4

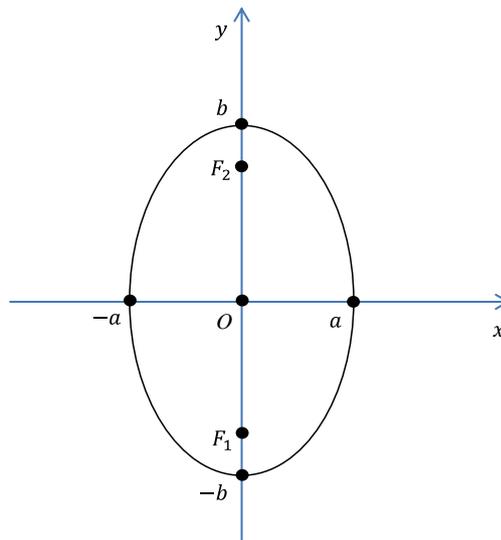


Рис.3.5

Числа a и b называются **полуосями** эллипса, a – **большая полуось**, b – **малая полуось**.

Точки $A_1(a;0); A_2(-a;0); B_1(0;b); B_2(0;-b)$ называются **вершинами** эллипса (это точки пересечения эллипса с осями координат), точка $O(0;0)$ – **центром** эллипса. Эллипс, заданный уравнением (3.50) изображен на рис. 3.4.

Эксцентриситетом эллипса называется число ε , равное отношению расстояния между фокусами эллипса $2c$ к длине большой оси $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (0 \leq \varepsilon < 1, \text{ т. к. } c < a). \quad (3.52)$$

Замечания. 1) При $a < b$ уравнение (3.50) также задает эллипс, но его фокусы лежат на оси Oy , при этом $c^2 = b^2 - a^2; F_1(0;-c); F_2(0;c); \varepsilon = \frac{c}{b}$ (рис. 3.5).

2) Если $a = b$, то уравнение (3.50) определяет окружность радиуса a с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = a^2$. В этом случае $c = 0$. Следовательно, окружность – это частный случай эллипса с совпадающими фокусами, при этом $\varepsilon = 0$.

3) Уравнение эллипса с осями параллельными координатным имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (3.53)$$

где x_0, y_0 – координаты центра эллипса.

4) Уравнения: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in [0; 2\pi]$, являются параметрическими уравнениями эллипса.

Гипербола

О п р е д е л е н и е . **Гиперболой** называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами, и отличная от нуля.

Если фокусы гиперболы F_1 и $F_2, |F_1F_2| = 2c$, расположить на оси Ox симметрично относительно начала координат: $F_1(c;0), F_2(-c;0)$; и обозначить модуль разности расстояний от точки кривой до фокусов через $2a(0 < a < c)$, то **каноническое уравнение гиперболы** имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.54)$$

$$\text{в котором } b > 0, \text{ причем } c^2 = a^2 + b^2. \quad (3.55)$$

Гипербола (3.54) пересекает ось Ox в точках $A_1(a;0); A_2(-a;0)$, которые называются **вершинами** гиперболы, а ось Oy гипербола не пересекает.

Та ось гиперболы, которую она пересекает, называется **действительной**, а та, которую не пересекает – **мнимой**. Числа a и b называются **полуосями** гиперболы; (a – **действительная**, b – **мнимая** полуоси). Точка $O(0;0)$ называется **центром** гиперболы.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ называются **асимптотами** гиперболы. При неограниченном удалении от начала координат гипербола бесконечно близко приближается к своей асимптоте, не пересекая ее. Гипербола (3.54) изображена на рис. 3.6.

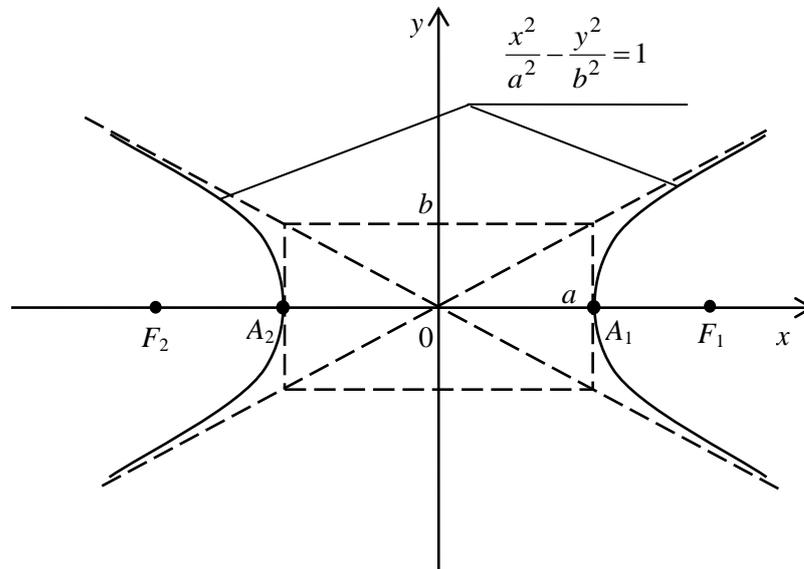


Рис. 3.6

Эксцентриситетом гиперболы называется число ε , равное отношению половины расстояния между фокусами гиперболы к ее действительной полуоси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon > 1, \text{ т. к. } c > a). \quad (3.56)$$

Замечания. 1) Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy , то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (3.57)$$

Действительной осью гиперболы (3.57) является ось Oy , а мнимой – ось Ox . Гиперболы, заданные уравнениями (3.54) и (3.57), называются **сопряженными**. Сопряженные гиперболы имеют одинаковые асимптоты, а действительные оси их взаимно перпендикулярны.

Для гиперболы (3.57) $\varepsilon = \frac{c}{b}$. Она изображена на рис. 3.7.

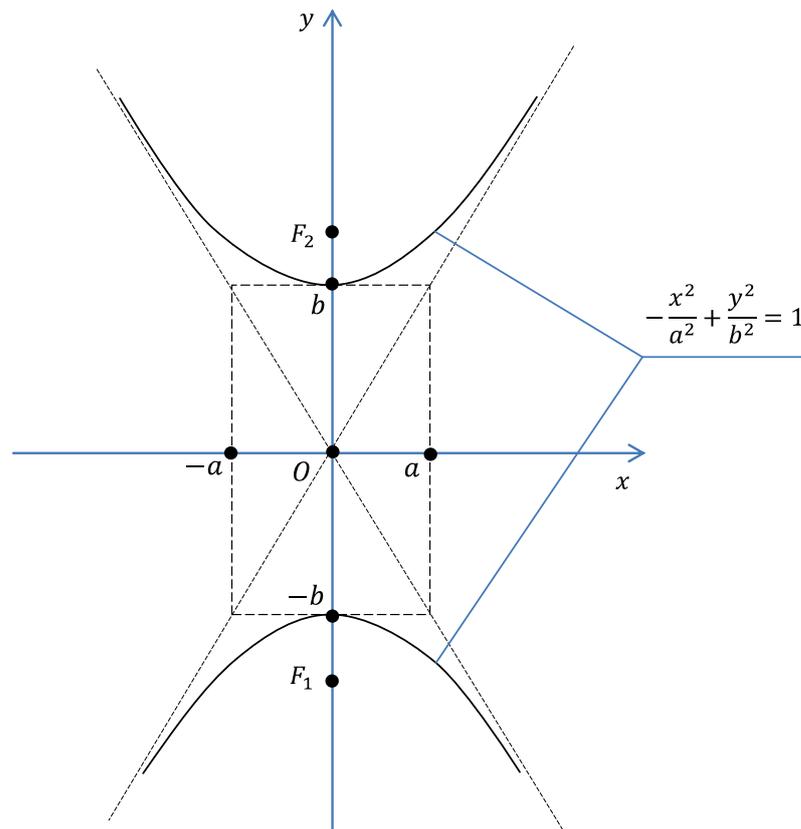


Рис. 3.7

2) Уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (3.58)$$

где (x_0, y_0) – координаты центра гиперболы.

Парабола

О п р е д е л е н и е . *Параболой* называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой **фокусом** F , и данной прямой l , называемой **директрисой**.

Если расстояние от фокуса F до директрисы l обозначить через p , расположить фокус F на оси Ox , которая перпендикулярна директрисе l , а ось Oy – посередине между фокусом и директрисой параллельно последней, то парабола задается уравнением

$$y^2 = 2px, \quad (3.59)$$

которое называется каноническим уравнением параболы (рис. 3.8).

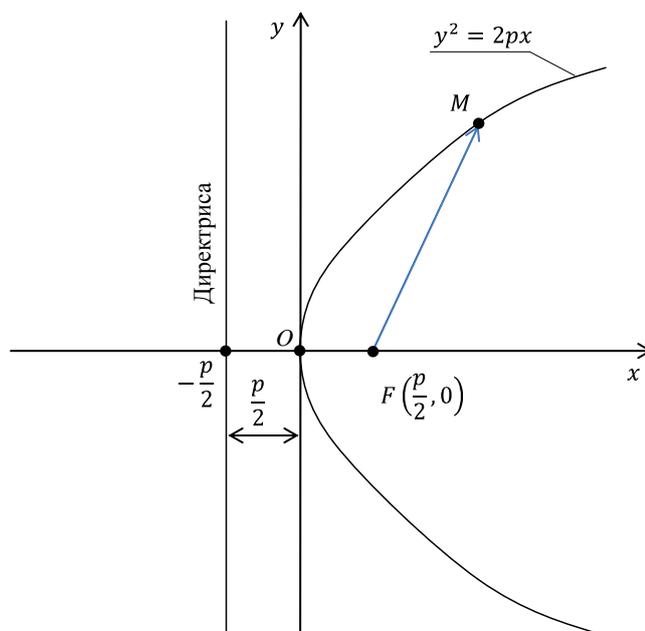


Рис. 3.8

Число p , равное расстоянию от фокуса F до директрисы l , называется **параметром** параболы, точка $O(0;0)$ – ее **вершиной**, а ось Ox – **осью симметрии** параболы. **Уравнение директрисы l** имеет вид: $x = -\frac{p}{2}$. **Эксцентриситет ε параболы** по определению считается равным 1: $\varepsilon = 1$.

Замечания. 1) Уравнение $y^2 = -2px$ также задает параболу, симметричную относительно оси Ox (рис. 3.9). Фокус F имеет координаты $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, а уравнение директрисы: $x = \frac{p}{2}$.

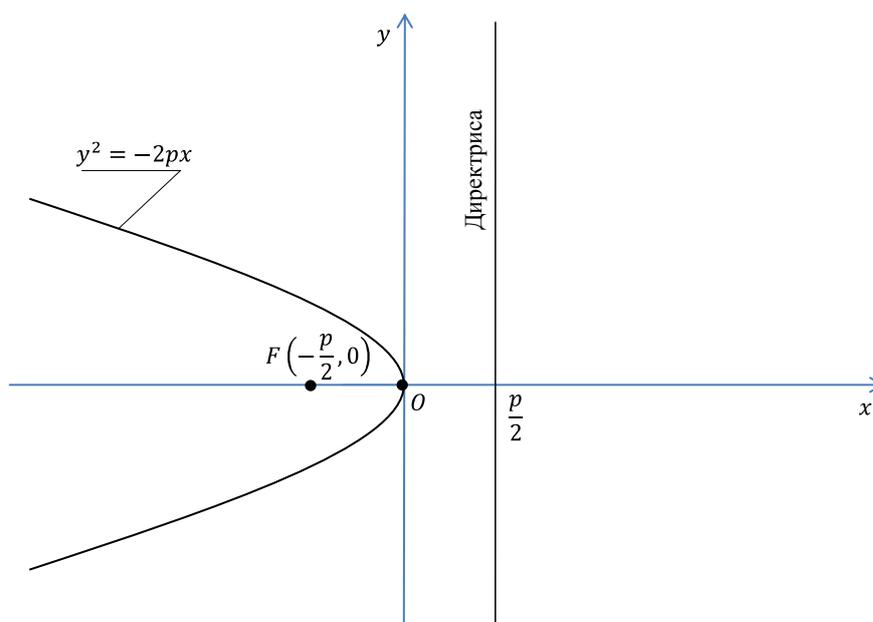


Рис. 3.9

2) Уравнения $x^2 = 2py$; $x^2 = -2py$ также задают параболы, но симметричные относительно оси Oy . У параболы $x^2 = 2py$ фокус $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, уравнение директрисы $y = -\frac{p}{2}$ (рис. 3.10). Для параболы $x^2 = -2py$ фокус $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, а уравнение директрисы $y = \frac{p}{2}$ (рис. 3.11).

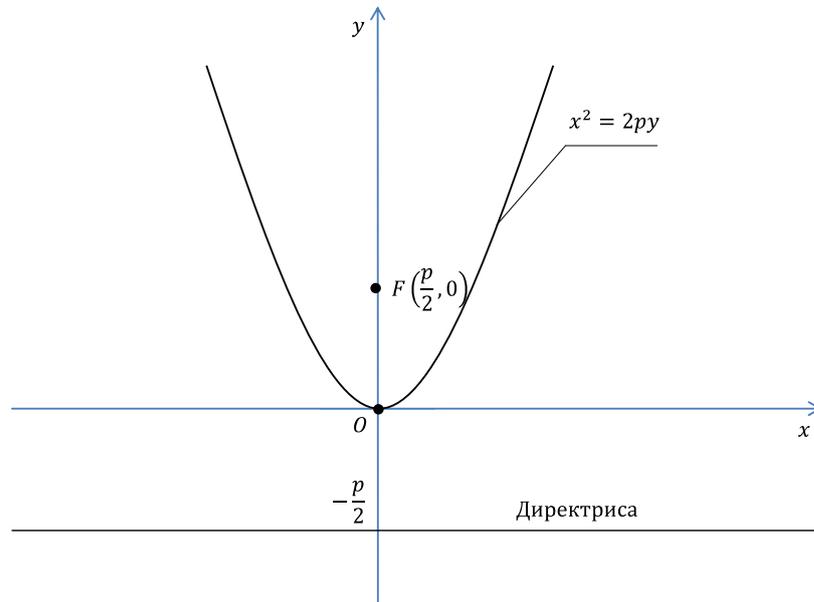


Рис. 3.10

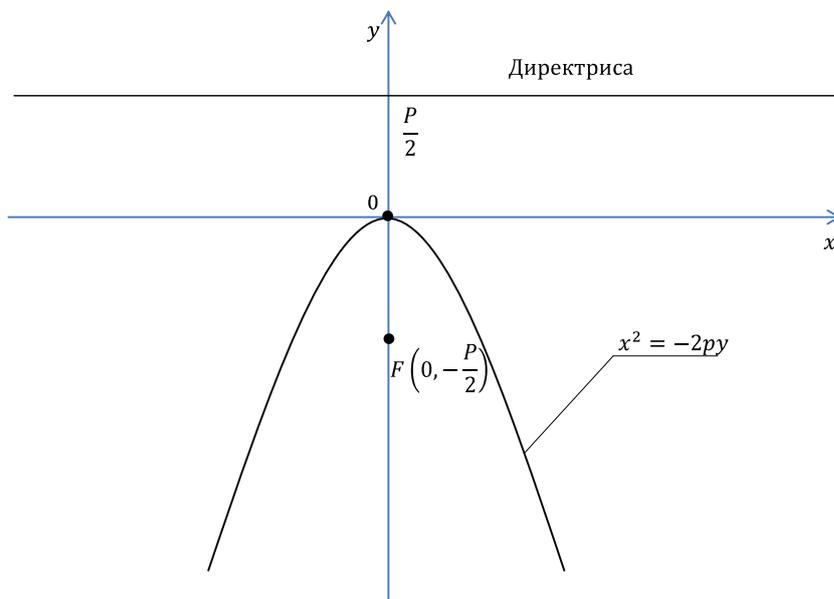


Рис. 3.11

3) Уравнения парабол с осями симметрии, параллельными координатным осям, имеют вид: $(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0)$; $(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$.

Известно, что для любой линии второго порядка на плоскости существует прямоугольная декартова система координат, в которой эта линия задается каноническим уравнением.

Покажем на конкретных примерах, как практически привести уравнение линии 2-го порядка, не содержащее члена с произведением переменных, т. е. $B = 0$ в (3.47), к каноническому виду.

□ Пример 3.21. Линия второго порядка задана уравнением

$$3y^2 - 12x - 6y + 11 = 0. \quad (3.60)$$

Определить вид этой линии и нарисовать ее.

Решение. Уравнение (3.60) не является каноническим. Выделим полный квадрат, включающий в себя все слагаемые с переменной y , причем коэффициент при y^2 обязательно выносим за скобки.

$$\begin{aligned} 3(y^2 - 2y) - 12x + 11 = 0 &\Leftrightarrow 3((y^2 - 2y + 1) - 1) - 12x + 11 = 0 \Leftrightarrow \\ 3(y-1)^2 - 3 - 12x + 11 = 0 &\Leftrightarrow 3(y-1)^2 = 12x - 8 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 4\left(x - \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Применив преобразование параллельного переноса $X = x - \frac{2}{3}$; $Y = y - 1$, из последнего уравнения получаем каноническое уравнение $Y^2 = 4X$. Отсюда видим, что рассматриваемая линия – парабола, симметричная относительно оси O_1X .

Чтобы нарисовать эту линию, изобразим на одном рисунке обе системы координат Oxy и O_1XY . При параллельном переносе координатные оси перемещаются параллельно самим себе, поэтому для определения их расположения достаточно определить положение нового начала координат. В точке O_1 $X = 0$ и $Y = 0$, значит, $x = \frac{2}{3}$; $y = 1$. Через точку $O_1\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ проводим оси, сонаправленные осям Ox и Oy , и получаем новую систему координат. В этой системе рисуем параболу $Y^2 = 4X$, вершина которой находится в начале координат, а ветви направлены в сторону положительного направления оси O_1X симметрично этой оси (рис. 3.12).

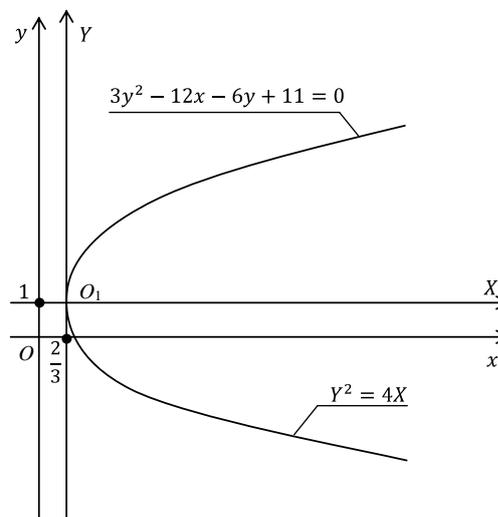


Рис. 3.12

□ Пример 3.22. Упростить уравнение $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$, пользуясь переносом начала координат. Построить линию, определяемую этим уравнением.

Решение. Выделим полные квадраты по переменным x и y соответственно.

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 6x) + 5(y^2 + 2y) + 13 = 0 &\Leftrightarrow \\ 2(x^2 - 6x + 9) - 18 + 5(y^2 + 2y + 1) - 5 + 13 = 0 &\Leftrightarrow \\ 2(x-3)^2 + 5(y+1)^2 = 10 &\Leftrightarrow \\ \frac{(x-3)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Обозначая $x - 3 = X$, $y + 1 = Y$, получим каноническое уравнение эллипса $\frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{2} = 1$. Начало новой системы координат – точка $O_1(3, -1)$; оси O_1X , O_1Y параллельны осям Ox и Oy соответственно. Большая полуось эллипса $a = \sqrt{5}$, малая полуось $b = \sqrt{2}$. Изобразим кривую на (рис. 3.13). \otimes

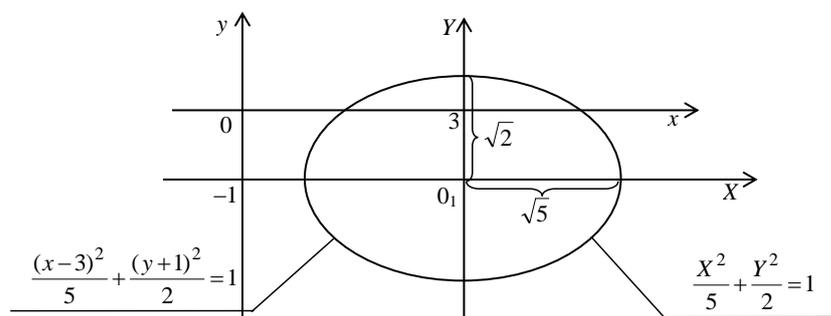


Рис. 3.13

\square **Пример 3.23.** Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $N(2; -5)$ и радиус, равный 4.

Решение. Подставим значения координат центра и радиуса в уравнение (3.48), получим $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$. \otimes

\square **Пример 3.24.** Дано уравнение эллипса $24x^2 + 49y^2 = 1176$. Найти: 1) длины его полуосей; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.

Решение. Приведем уравнение эллипса $24x^2 + 49y^2 = 1176$ к каноническому виду (3.50), разделив обе части равенства на 1176: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$, из которого вытекают следующие соотношения:

1) $a^2 = 49, b^2 = 24$, т. е. $a = 7$ – большая полуось; $b = 2\sqrt{6}$ – малая полуось.

2) Используя равенство (3.51), найдем $c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 24 = 25, c = 5$. Значит, $F_1(5; 0), F_2(-5; 0)$.

3) По формуле (3.52) $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{7}$. \otimes

\square **Пример 3.25.** Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2; -4\sqrt{3}), M_2(-1; 2\sqrt{15})$.

Решение. Уравнение эллипса ищем в виде (3.50): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как эллипс проходит через точки M_1, M_2 , то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса:

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{48}{b^2} = 1, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{60}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Умножая второе равенство на (-4) и складывая с первым, находим: $-\frac{192}{b^2} = -3$, т. е. $b^2 = 64$. Подставляя полученное значение b^2 во второе равенство, получаем $\frac{1}{a^2} + \frac{60}{64} = 1$, откуда $a^2 = 16$. Искомое уравнение эллипса имеет следующий вид: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$. \otimes

\square **Пример 3.26.** Дано уравнение гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: 1) длины полуосей гиперболы; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

Решение. Разделим обе части уравнения на 144, тем самым приведя его к каноническому виду (3.54): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

1) Из последнего уравнения $a^2 = 9, b^2 = 16$, т. е. $a = 3$ – действительная полуось, $b = 4$ – мнимая полуось.

2) Используя равенство (3.55): $c^2 = a^2 + b^2$, получим: $c^2 = 25$, а $c = 5$. Значит, $F_1(5;0), F_2(-5;0)$.

3) По формуле (3.56) $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.

4) Уравнения асимптот имеют вид: $y = \pm \frac{b}{a}x$. В нашем случае $y = \pm \frac{4}{3}x$. \otimes

\square **Пример 3.27.** Составить каноническое уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси Oy и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

Решение. Искомое уравнение имеет вид (3.57): $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Согласно условию $2b = 8, 2c = 10$. Значит, $b = 4, c = 5$. Из (3.55) $c^2 = a^2 + b^2$. Найдем мнимую полуось a : $a^2 = c^2 - b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$, т. е. $a = 3$. Искомое уравнение гиперболы: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$. \otimes

\square **Пример 3.28.** Дана парабола $x^2 = 4y$. Найти: 1) координаты фокуса; 2) уравнение директрисы.

Решение. Парабола задана каноническим уравнением $x^2 = 2py$. Следовательно, $2p = 4, p = 2$. Откуда получаем: 1) $F\left(0; \frac{p}{2}\right) \Rightarrow F(0;1)$; 2) $y = -\frac{p}{2} \Rightarrow y = -1$ – уравнение директрисы. \otimes

\square **Пример 3.29.** Составить уравнение параболы, если ее вершина совпадает с началом координат, а фокус находится в точке $F(2;0)$.

Решение. Так как фокус параболы находится всегда на ее оси симметрии, то в нашем случае осью параболы будет ось Ox , причем $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \Rightarrow F(2;0)$. Отсюда $\frac{p}{2} = 2$, значит, $p = 4$. При этом каноническим уравнением параболы будет $y^2 = 2px$, т. е. в данном случае $y^2 = 8x$. Отметим, что уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, т. е. $x = -2$. \otimes

3.7 Поверхности второго порядка

Мы будем рассматривать в данном параграфе только прямоугольную систему координат $Oxyz$.

Цилиндры и конусы

Пусть в пространстве заданы некоторая линия L и прямая α , пересекающая L .

О п р е д е л е н и е . *Цилиндрической поверхностью или цилиндром* называется поверхность, образованная прямой α при ее перемещении параллельно самой себе так, что она все время пересекает линию L . Прямые, полученные при перемещении прямой α , называются *образующими* этого цилиндра, а линия L – его *направляющей*. Если цилиндр имеет ось симметрии, а направляющая, лежащая в перпендикулярной этой оси плоскости, является окружностью, то цилиндр называется *круговым*.

Заметим, что если в уравнении поверхности отсутствует одна из координат, то это уравнение задает цилиндр с образующими, параллельными координатной оси, определяемой отсутствующей координатой. Уравнение направляющей этого цилиндра, лежащей в перпендикулярной образующим координатной плоскости, совпадает с уравнением самого цилиндра.

Так, уравнение $F(x, y) = 0$ задает цилиндр с образующими, параллельными оси Oz . Если это уравнение рассматривать в системе координат Oxy (т. е. в плоскости $z = 0$), то получим уравнение направляющей этого цилиндра.

Уравнения $F(x, z) = 0$ и $F(y, z) = 0$ задают цилиндры с образующими, параллельными осям Oy и Ox соответственно.

Пусть в пространстве задана некоторая линия L и точка O' .

О п р е д е л е н и е . *Конической поверхностью или конусом* называется поверхность, образованная прямыми, проходящими через O' и пересекающими кривую L . Прямые, из которых состоит конус, называются его *образующими*, а точка O' – его *вершиной*. Если конус имеет ось симметрии, а все его образующие наклонены к ней под одним и тем же углом, то конус называется *круговым*.

Канонические уравнения поверхностей второго порядка

О п р е д е л е н и е . *Поверхностью второго порядка* называется множество всех точек пространства, удовлетворяющих в некоторой системе координат какому-либо уравнению 2-й степени, т. е. уравнению вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + R = 0. (3.61)$$

Уравнение (3.61) называется *общим уравнением* поверхности второго порядка (коэффициенты A, B, C, D, E, F не равны нулю одновременно).

Для любой поверхности 2-го порядка в пространстве существует прямоугольная декартова система координат, в которой эта поверхность задается каноническим уравнением. Перечислим все принципиально возможные типы канонических уравнений 2-й степени с тремя переменными и таким образом классифицируем поверхности 2-го порядка.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \text{ эллипсоид (рис. 3.14);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad - \text{ мнимый эллипсоид;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad - \text{точка } O(0,0,0);$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \text{однополостный гиперboloид (рис. 3.15);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad - \text{двуполостный гиперboloид (рис. 3.16);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad - \text{конус второго порядка (рис. 3.17);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \quad - \text{эллиптический параболоид (рис. 3.18);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \text{эллиптический цилиндр (рис. 3.19);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad - \text{мнимый эллиптический цилиндр;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad - \text{прямая (ось } Oz);$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad - \text{гиперболический параболоид (рис. 3.20);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \text{гиперболический цилиндр (рис. 3.21);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{cases} \quad - \text{пара пересекающихся плоскостей;}$$

$$y^2 = 2px \quad - \text{параболический цилиндр (рис. 3.22);}$$

$$y^2 = a^2, \text{ или} \quad \begin{cases} y = a \\ y = -a \end{cases} \quad - \text{пара параллельных плоскостей;}$$

$$y^2 = 0 \quad - \text{сдвоенная плоскость;}$$

$$y^2 = -a^2 \quad - \text{пара мнимых параллельных плоскостей.}$$

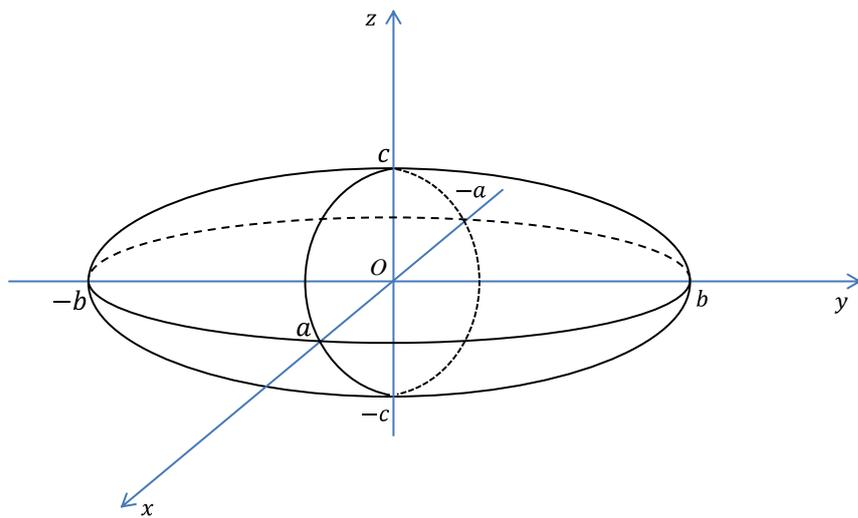


Рис. 3.14

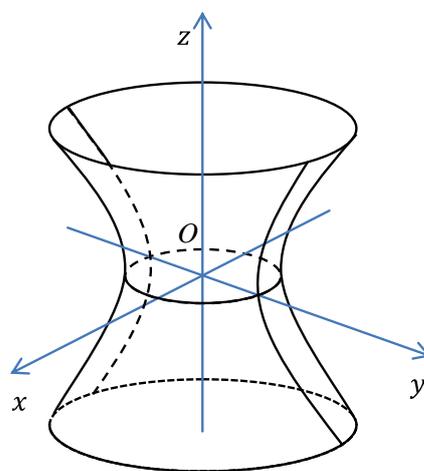


Рис. 3.15

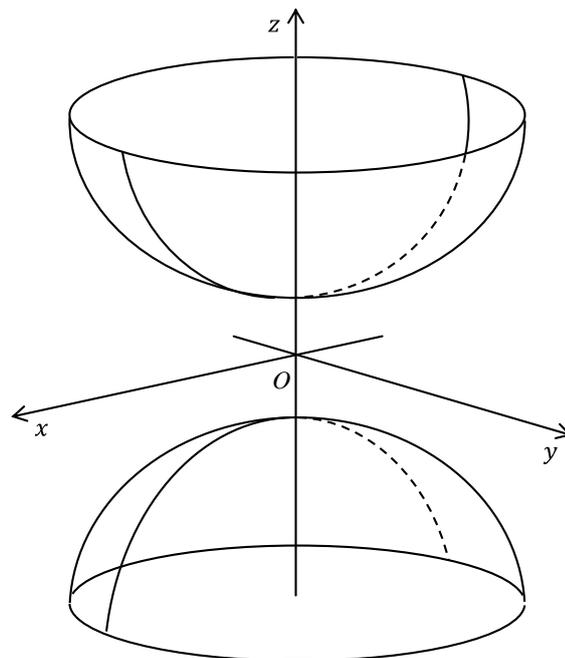


Рис. 3.16

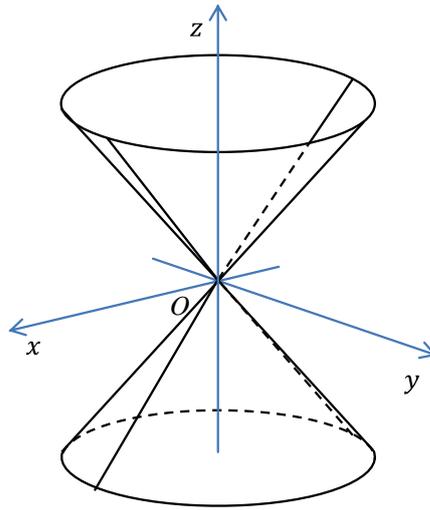


Рис. 3.17

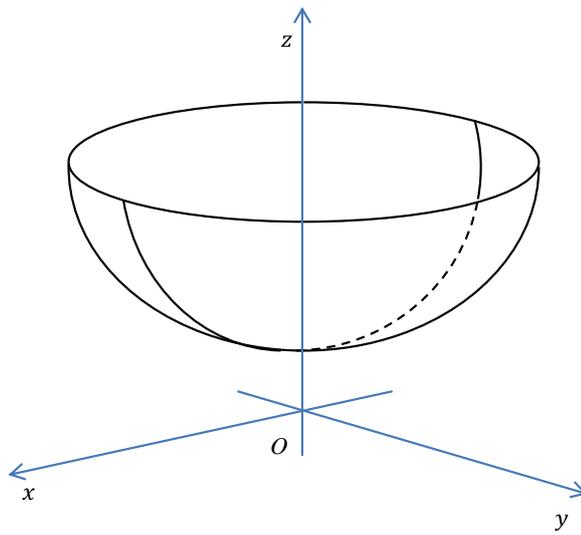


Рис. 3.18

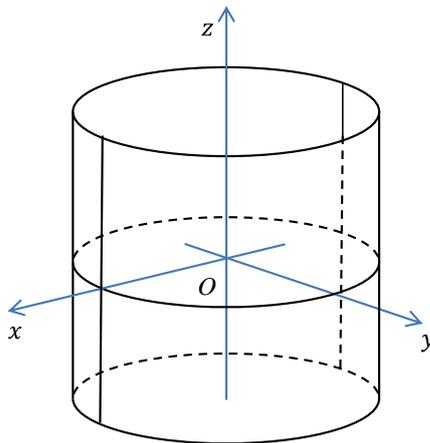


Рис. 3.19

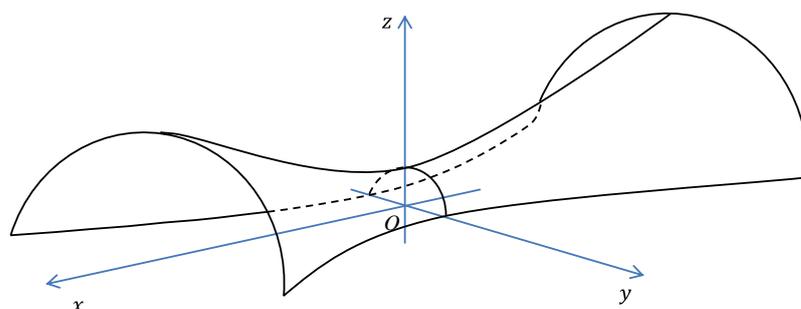


Рис. 3.20

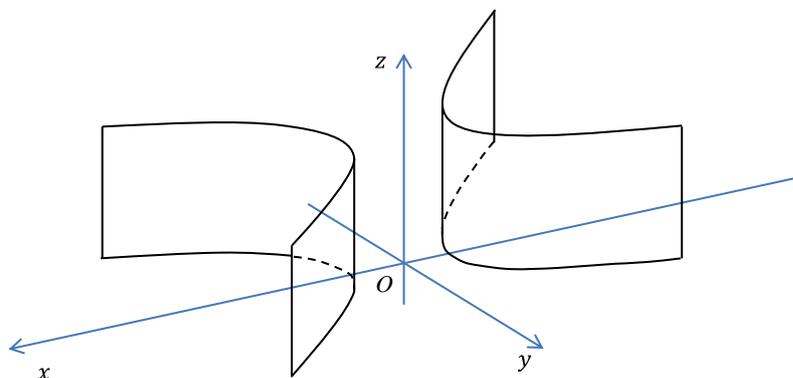


Рис. 3.21

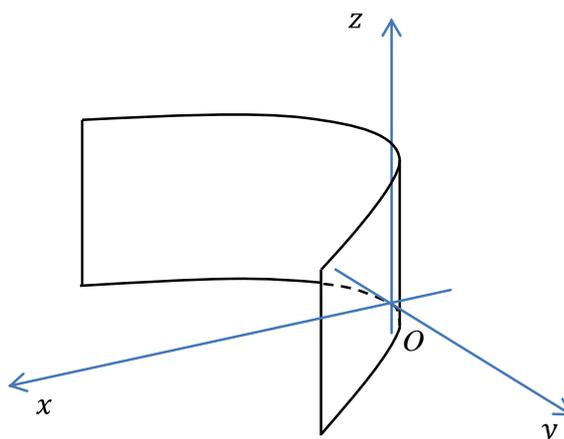


Рис. 3.22

Числа a , b и c в уравнениях эллипсоида, двуполостного и однополостного гиперboloидов, конуса 2-го порядка, эллиптического и гиперболического цилиндров называются их **полуосями**. Все эти поверхности симметричны относительно всех координатных плоскостей и относительно начала координат. Точки пересечения двуполостного гиперboloида и эллиптического параболоида с осями симметрии называются их **вершинами**. **Вершиной конуса** называется его центр симметрии.

Чтобы по каноническому уравнению определить вид поверхности без формального заучивания уравнений, полезно рассуждать в следующей последовательности.

Если каноническое уравнение не содержит одной из переменных, то это один из цилиндров. При этом его образующие параллельны координатной оси, определяемой отсутствующей переменной, а уравнение направляющей, лежащей в координатной плоскости, перпендикулярной этой оси, совпадает с уравнением самой поверхности.

Если каноническое уравнение содержит все переменные, проверим, все ли они в квадратах. Если присутствует слагаемое первой степени, то это один из параболоидов. Какой из них, легко понять по левой части уравнения.

Если в каноническом уравнении присутствуют квадраты всех трех переменных, посмотрим на знаки коэффициентов при квадратах. В случае, когда все эти коэффициенты одного знака, мы имеем либо эллипсоид, действительный или мнимый, либо точку. При $a = b = c$ из уравнения эллипсоида получаем частный случай – уравнение сферы.

Если в каноническом уравнении присутствуют квадраты всех трех переменных, но они разных знаков, то рассматриваемая поверхность либо один из гиперboloидов, либо конус второго порядка. Конус выделяется тем, что он проходит через начало координат, что легко проверяется подстановкой. Так как переменных всего три, то два коэффициента при квадратах будут иметь одинаковый знак, а третий – противоположный. Таким образом, две переменные будут равноправными, а третья – особенной. Конус или гиперboloид всегда «вытянуты» вдоль оси, определяемой особенной переменной. Чтобы отличить однополостный гиперboloид от двуполостного, следует положить равной нулю эту особенную переменную. Если в сечении получился эллипс, то гиперboloид однополостный, если пустое множество – двуполостный.

□ **Пример 3.30.** Построить тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$.

Решение. Тело ограничено снизу поверхностью параболоида: $x^2 + y^2 = 3z$, а сверху – поверхностью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Тело изображено на рис. 3.23.

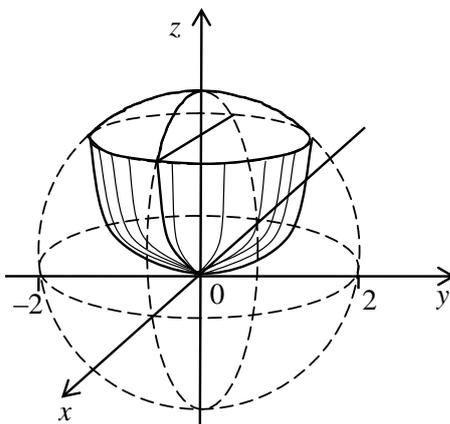


Рис. 3.23 ⊗

□ **Пример 3.31.** Построить тело, ограниченное поверхностями

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad x = 0, z = 0 \quad (x \geq 0, z \geq 0), \quad y = 3, y = -3.$$

Решение. Поверхность $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ – эллиптический цилиндр. Он пересечен плоскостями $x = 0, z = 0$ (координатные плоскости Ozy и Oxy). По оси Oy тело ограничено плоскостями $y = 3, y = -3$ (рис. 3.24).

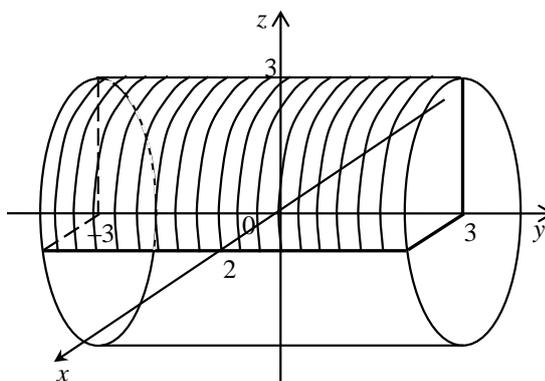


Рис. 3.24 ⊗

4 ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

4.1 Числовая последовательность, предел числовой последовательности.

Функция и предел функции

О п р е д е л е н и е . Под *числовой последовательностью* (или просто *последовательностью*) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ понимается функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве N натуральных чисел. Отдельные числа x_n называются *членами* (или *элементами*) числовой последовательности: x_1 – *первый* член числовой последовательности, x_2 – *второй* и т. д. Кратко последовательность обозначается $\{x_n\}, n \in N$; а символом x_n обозначается *общий член числовой последовательности*.

□ Примеры:

1. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}; x_n = \frac{1}{n}.$
2. $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\right\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}; x_n = \frac{n-1}{n}.$
3. $\{-1, 2, -3, 4, \dots\} = \{(-1)^n \cdot n\}; x_n = (-1)^n \cdot n. \quad \otimes$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \leq M$. В противном случае последовательность называется *неограниченной*. Очевидно, что последовательности в примерах 1 и 2 ограничены; в примере 3 – неограничена.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу, то ее называют *постоянной*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если для любого $n \in N$ выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$). Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.

О п р е д е л е н и е . Число a называется **пределом** числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение предела последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$; $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**. Последовательность, не имеющая предела, называется **расходящейся**.

Теорема Больцано–Вейерштрасса. 1. *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.* 2. *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, то последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой** числовой последовательностью. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если для любого $M > 0$ существует число N такое, что $|x_n| > M$ для всех $n > N$. Тогда пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

О п р е д е л е н и е . Пусть даны два непустых множества X и Y . Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция f . Говорят, что **функция f отображает множество X на множество Y** .

Множество X называется **областью определения функции f** (обозначается $D(f)$), а множество Y называется **областью значений функции f** (обозначается $E(f)$).

О п р е д е л е н и е . Число A называется **пределом функции $f(x)$ в точке x_0** , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение предела функции: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow x_0$, то справедливы следующие **теоремы о пределах**:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ (если $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$).

Теорема (предел сжатой функции). Если $u(x), v(x), z(x)$ определены в окрестности точки

$$\left\| \begin{array}{l} x = x_0 \text{ и при } x \rightarrow x_0 \text{ выполняются условия } u(x) \leq z(x) \leq v(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = A, \\ \text{то } \lim_{x \rightarrow x_0} z(x) = A. \end{array} \right.$$

При вычислении пределов числовых последовательностей и функций часто используются известные пределы:

Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$ или $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$

Из приведенных формул следуют: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha,$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha,$ α – любое число.

Выражения, предел которых не может быть найден непосредственно с помощью теорем о пределах, называют **неопределенностями**. **Раскрыть неопределенность**, значит, вычислить указанный предел.

Например, отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$, когда $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции, представляет неопределенность, которую символически записывают как

$\left(\frac{0}{0}\right)$. Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ возможно после предварительного упрощения выражения, либо использования **замечательных пределов**, либо применения **правила Лопиталя**.

Другие виды неопределенностей $(0 \cdot \infty; \infty - \infty; 1^\infty; 0^0; \infty^0)$ могут быть преобразованы к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

□ **Примеры**. Найти пределы:

□ **Примеры**. Найти пределы:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{3^n} + \frac{3^n}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n} - \frac{3^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = -1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 3}{8x^3 + 2x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}}{8 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{5}{8}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} = 0.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{5^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5} \left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n \right)}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{1}{6}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -1.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right) \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right)}{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 1 - x^2 + 7x - 3}{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 4}{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{4}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{5}{2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) \cdot 3x}{\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right) \cdot 7x} = \frac{3}{7}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{arctg} x}{2x + \operatorname{arc} \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (\operatorname{arctg} x)/x}{2 + (\operatorname{arc} \sin x)/x} = \frac{1}{3},$$

так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = [\arcsin x = y] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

$$10. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = y \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}; \quad y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{y^2} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{y}{2} \cdot \sin \frac{y}{2}}{2 \frac{y}{2} \cdot 2 \frac{y}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+3}\right)^x = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3+2}{x+3}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2} \cdot 2^{-3}} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right)^2 \times \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^{-3} = e^2 \cdot 1^{-3} = e^2.$$

12.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\begin{array}{l} a^x - 1 = y, \quad a^x = 1 + y \\ x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0 \quad x \ln a = \ln(1 + y) \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln a}{\ln(1 + y)} = \ln a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \ln a,$$

$$\text{так как } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{y} \ln(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + y)^{1/y}} = \frac{1}{\ln \lim_{y \rightarrow \infty} (1 + y)^{1/y}} = \frac{1}{\ln e} = 1. \quad \otimes$$

4.2 Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых

О п р е д е л е н и е . Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция.

3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть бесконечно малая функция.

4. Теорема о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$. Если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$ и существует предел их отношения $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$. Тогда:

1) Если $c \neq 0$, $c \neq \infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка малости**. Если $c = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми** (обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$).

2) Если $c = 0$, то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$** (обозначение $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow x_0$).

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых функций каждую из них можно заменить эквивалентной ей бесконечно малой, т. е. если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$

при $x \rightarrow x_0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Приведем важнейшие эквивалентные бесконечно малые функции, которые используются при вычислении пределов. Если $\alpha(x) \rightarrow 0$, то:

$$1) \quad \sin \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad 5) \quad 1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2};$$

$$2) \quad \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad 6) \quad e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$$

$$3) \quad \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad 7) \quad a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a;$$

$$4) \quad \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad 8) \quad \ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x).$$

\square П р и м е р 4.1. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{\arcsin(1 - 2x)}$.

Решение. При $x \rightarrow \frac{1}{2}$ функции $\alpha(x) = 1 - 2x$ и $\beta(x) = \arcsin(1 - 2x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{\arcsin(1 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x + 1) = -2.$$

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow x_0$, если для любого положительного числа M существует такое число $\delta > 0$, что при всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > M$, и обозначается

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Теорема. Всякая функция, имеющая предел, ограничена.

Обратное утверждение неверно.

4.3 Непрерывность функции. Точки разрыва функции и их классификация

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0 , если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется **ограниченной** при $x \rightarrow x_0$, если, задав любое $\varepsilon > 0$, можно указать такое $M > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Из определения непрерывности функции в точке x_0 следует:

- 1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
- 2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0 ;
- 3) этот предел равен значению функции в точке x_0 , т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Или другими словами:

- 1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
- 2) существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0);$$

- 3) эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке x_0 .

Часто используется другое определение непрерывности функции в точке. Пусть Δy – приращение функции в любой точке x : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

О п р е д е л е н и е . Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если предел приращения функции в этой точке равен нулю при $\Delta x \rightarrow 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

О п р е д е л е н и е . **Точкой разрыва функции** называется точка, в которой функция не является непрерывной. Другими словами, точка x_0 , в которой не выполняется хотя бы одно из трех условий непрерывности функции, называется **точкой разрыва функции**.

Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$
 такие что $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 называется **точкой**

разрыва первого рода. Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ не существует или равен бесконечности, то точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода**. Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, но функция в точке x_0 не определена или если $f(x)$ в точке x_0 определена, но $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то x_0 называется **точкой устранимого разрыва**.

Укажем основные свойства непрерывных функций.

1. Простейшие элементарные функции (C , x^α , a^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg} x$) непрерывны во всех точках, где они определены.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) непрерывны в точке x_0 .

3. Если $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале** (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

О п р е д е л е н и е . Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) , непрерывна справа в точке a (т. е. $\lim_{x \rightarrow a + 0} f(x) = f(a)$) и слева в точке b (т. е. $\lim_{x \rightarrow b - 0} f(x) = f(b)$).

Укажем основные свойства непрерывных на отрезке функций.

1. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$ достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значений. (А, следовательно, функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке.)

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах его принимает неравные значения $f(a) = A, f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B .

3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a, b]$ существует хотя бы одна точка c , в которой функция обращается в нуль, т. е. $f(c) = 0, c \in (a, b)$.

□ П р и м е р 4.2. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ и определить их вид.

Р е ш е н и е . Так как функции $e^x - 1$ и x непрерывны, то непрерывным будет и их отношение $\frac{e^x - 1}{x}$ во всех точках, кроме точки $x = 0$. При $x = 0$ $f(x)$ не определена, следовательно, разрывна. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (см. п. 4.1 пример 12), то $x = 0$ – точка устранимого разрыва. Если положить $f(0) = 1$, то функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 1 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

будет непрерывной при всех x . ⊗

□ П р и м е р 4.3. Установить вид точек разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ x + 1 & \text{при } 0 < x \leq 3; \\ 6 - x & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Область определения функции $f(x)$ – вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$. Разрывы возможны только в точках $x = 0$ и $x = 3$, в которых изменяется аналитическое задание функции. Найдем односторонние пределы в точке $x = 0$ и значение функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (x^2 + 1) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x + 1) = 1, f(0) = 1.$$

Следовательно, в точке $x = 0$ функция непрерывна.

Рассмотрим точку $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (x+1) = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (6-x) = 3.$$

Так как эти пределы конечны, но не равны между собой, то $x = 3$ – точка разрыва первого рода. График функции $f(x)$ изображен на рис. 4.1.

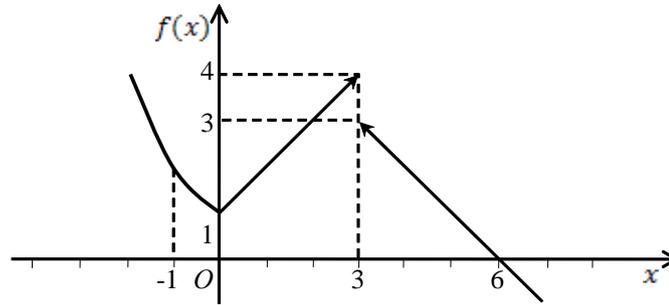


Рис. 4.1 

 **Пример 4.4.** Установить вид точек разрыва функции

$$f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}.$$

Решение. Данная функция непрерывна всюду, кроме точки $x = -1$, в которой $f(x)$ не определена.

Поскольку $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} e^{\frac{1}{x+1}} = 0$ (т.к. $\frac{1}{x+1} \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -1-0$),

$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$ (т.к. $\frac{1}{x+1} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow -1+0$), т.е. правосторонний предел 

бесконечен, то $x = -1$ – точка разрыва второго рода. 

5 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1 Производная. Касательная и нормаль к графику функции.

Геометрический и физический смысл производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную в интервале $(a; b)$. Зафиксируем точку $x_0 \in (a; b)$. Пусть $x_0 \in (a; b)$, тогда $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента в точке x_0 , которому соответствует приращение функции $\Delta y = f(x - x_0) - f(x_0)$ в той же точке. Иногда удобнее Δy обозначать через $\Delta f(x_0)$.

О п р е д е л е н и е . *Производной* функции в данной точке называют предел, если он существует, отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее произвольным образом стремится к нулю. Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначим $f'(x_0)$, тогда по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \text{ или } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (5.1)$$

Если x – произвольная точка, то производная функции $f(x)$ является также функцией аргумента x , т.е. $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Производная обозначается y' , y'_x , $\frac{dy}{dx}$.

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 является значением функции $f'(x)$ в точке x_0 .

О п р е д е л е н и е . Если $f'(x)$ существует, то функция называется *дифференцируемой* в точке x .

Пусть дана кривая $y = f(x)$ (рис. 5.1), проведем через точки $M(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ прямую MM_1 . Прямую, проведенную через любые две точки графика функции $y = f(x)$, называют *секущей* графика функции $f(x)$. Предельное положение MT секущей MM_1 , когда M_1 , передвигаясь по кривой, стремится к точке M , называется *касательной* к кривой в точке M (рис. 5.1).

Пусть k_1 – угловой коэффициент секущей MM_1 , т. е. тангенс угла, который образует прямая MM_1 с осью абсцисс, k – угловой коэффициент касательной MT , тогда из определения касательной $k = \lim_{M_1 \rightarrow M} k_1$. Так как $k_1 = \frac{M_1N}{MN} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, поэтому $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, т. е. производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 , а именно $k = f'(x_0)$.

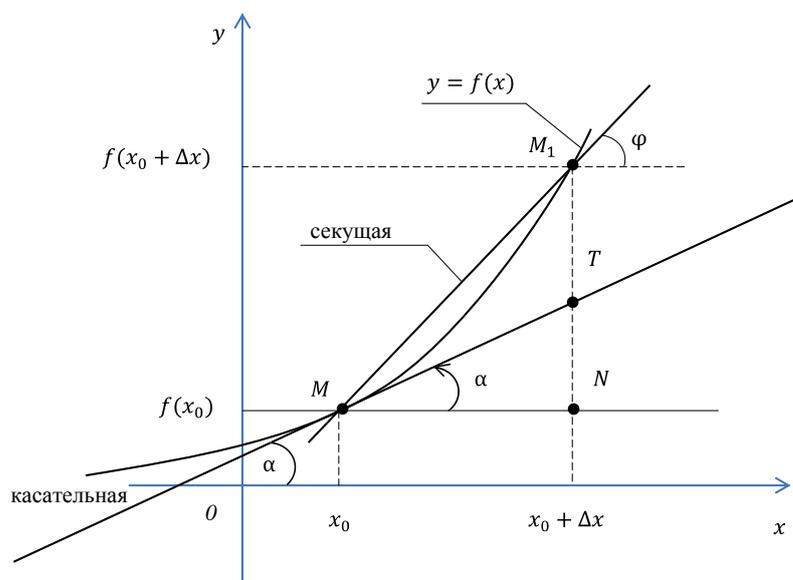


Рис. 5.1

Уравнение касательной запишем, используя уравнение прямой $y = ax + b$. Так как $a = k = f'(x_0)$, тогда $y = f'(x_0)x + b$. Так как прямая проходит через точку $(x_0, f(x_0))$, то $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$. Отсюда $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Тогда уравнение касательной имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (5.2)$$

Прямая, проходящая через точку касания $M(x_0, f(x_0))$ перпендикулярно к касательной, называется **нормалью** к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. Уравнение нормали запишем в виде

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (5.3)$$

Выясним геометрический и физический смысл производной.

Величина угла прямой (секущей) M_1M к оси Ox обозначена через φ (см. рис. 5.1), $\varphi = \angle M_1MN$. Из прямоугольного треугольника M_1MN имеем: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_1N}{MN} \Rightarrow k_1 = \operatorname{tg} \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Обозначим через α угол наклона касательной MT к оси Ox , $\alpha = \angle TMN$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{TN}{MN}$. Если $M_1 \rightarrow M$ (и, следовательно, $\Delta x \rightarrow 0$), то $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{M_1 \rightarrow M} \operatorname{tg} \varphi$, или $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Получаем равенство $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. Это равенство выражает геометрический смысл производной:

производная функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равна тангенсу угла между касательной к графику функции в точке $M(x_0, y_0)$ и положительным направлением оси Ox .

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней. Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной.

Рассмотрим задачу о скорости неравномерного прямолинейного движения. Неравномерное прямолинейное движение точки M осуществляется по закону $x = f(t)$, где $x = OM$ – длина пути, $f(t)$ – заданная функция времени t . Пусть в момент времени t_0 точка M занимала положение M_0 . За промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ пройден путь $M_0M = \Delta x = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = \Delta f(t_0)$. Средней скоростью $v_{\text{ср}}$ за промежуток времени Δt называют отношение приращения пути Δx к соответствующему приращению времени Δt : $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. **Скоростью** точки M в данный момент времени t_0 (мгновенной скоростью)

называют предел средней скорости при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{или} \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Таким образом, мгновенная скорость определена как предел отношения приращения пути к приращению времени при $\Delta t \rightarrow 0$.

Из определения производной и последней формулы следует, что эта формула выражает физический смысл производной:

скорость движения точки в момент времени t_0 равна производной от пути по времени при $t = t_0$.

5.2 Правила дифференцирования. Производная сложной функции.

Таблица производных

О п р е д е л е н и е . Дифференцированием функции называют операцию нахождения производной функции.

Основные правила дифференцирования указывают, как найти производную суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций.

Пусть C – постоянная, а $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

- 1) $C' = 0$;
- 2) $(Cu)' = Cu'$;
- 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$$4) (u \cdot v)' = u'v + v'u;$$

$$5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, (v \neq 0).$$

Теорема (производная сложной функции). Если функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x , а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u = u(x)$, то сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная равна

$$y'(x) = f'_u(u) \cdot u'(x) \text{ или } y'_x = f'_u \cdot u'_x.$$

Приведем таблицу производных основных элементарных функций.

$$1. (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u', \quad \alpha \neq 0; \quad (\text{в частности, } (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'; \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u')$$

$$2. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$$

$$3. (e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$4. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$$

$$5. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$$

$$6. (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$7. (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$8. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$$

$$9. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$$

$$10. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'; \quad (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$11. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'; \quad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$12. (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u';$$

$$13. (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u';$$

$$14. (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'; \quad (\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$$

□ П р и м е р 5.1. Найти производные функций:

$$\text{а) } y = \sqrt{x^2 - 3x + 4}; \text{ б) } y = 3^{\sqrt{x}} \cdot \cos^2 5x; \text{ в) } y = \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{7}}{\log_8 e^{x^4}}.$$

Р е ш е н и е . Используя правила дифференцирования, терему о производной сложной функции и таблицу производных, получим:

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= \left((x^2 - 3x + 4)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (x^2 - 3x + 4)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 - 3x + 4)' = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - 3x + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 3 + 0) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 4}}; \end{aligned}$$

б) используем производную произведения:

$$\begin{aligned} y' &= \left(3^{\sqrt{x}} \right)' \cdot \cos^2 5x + 3^{\sqrt{x}} \cdot (\cos^2 5x)' = 3^{\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot (\sqrt{x})' \cdot \cos^2 5x + \\ &+ 3^{\sqrt{x}} \cdot 2 \cos 5x \cdot (\cos 5x)' = 3^{\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos^2 5x + \\ &+ 3^{\sqrt{x}} \cdot 2 \cos 5x \cdot (-\sin 5x) \cdot 5 = \frac{\ln 3}{2\sqrt{x}} \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot \cos^2 5x - 5 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot \sin 10x; \end{aligned}$$

в) используем правило для производной частного:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{7}}{\log_8 e^{x^4}} \right)' = \frac{\left(\operatorname{tg}^3 \frac{x}{7} \right)' \cdot \log_8 e^{x^4} - \left(\log_8 e^{x^4} \right)' \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{x}{7}}{\left(\log_8 e^{x^4} \right)^2} = \\ &= \frac{3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{7} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{7}} \cdot \frac{1}{7} \cdot \log_8 e^{x^4} - \frac{1}{e^{x^4} \ln 8} \cdot 4x^3 \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{x}{7}}{\left(\log_8 e^{x^4} \right)^2}. \end{aligned}$$

Результат оставим без упрощения. \otimes

5.3 Производная показательно-степенной функции. Логарифмическое дифференцирование

Показательно-степенной функцией или сложно-показательной функцией называется функция вида $y(x) = u(x)^{v(x)}$. Логарифмическое дифференцирование состоит в нахождении производной от логарифма некоторой функции, что упрощает вычисление производной.

Если $y = f(x)$, то $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$.

□ П р и м е р 5.2. Найти производную показательно-степенной функции

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}.$$

Р е ш е н и е . Логарифмируя, а затем дифференцируя левую и правую части равенства, получим $\ln y = 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; $(\ln y)' = \left(2x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)'$;

$$\frac{y'}{y} = 2 \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right].$$

Умножая обе части равенства на y , имеем:

$$y' = 2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right). \quad \otimes$$

□ П р и м е р 5.3. Найти производную функции $y = \sqrt{\frac{x(1-3x)}{(4x-21)^5}}$.

□ Р е ш е н и е . Логарифмируем функцию: $\ln y = \ln \sqrt{\frac{x(1-3x)}{(4x-21)^5}}$. Используя свойства логарифмов, имеем:

$$\ln y = \frac{1}{2} (\ln x + \ln(1-3x) - 5 \ln(4x-21)).$$

Дифференцируем левую и правую части равенства:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{1-3x} - \frac{5 \cdot 4}{4x-21} \right).$$

Откуда

$$y' = y \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{1-3x} - \frac{20}{4x-21} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x(1-3x)}{(4x-21)^5}} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{1-3x} - \frac{20}{4x-21} \right). \quad \otimes$$

5.4 Производные функций, заданных неявно и параметрически

Функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, **неявно** задана уравнением $F(x, y) = 0$, если для всех $x \in (a; b)$ выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$.

Для вычисления производной функции, заданной неявно, следует тождество $F(x, f(x)) = 0$ продифференцировать по x (рассматривая левую часть как сложную функцию от x), а затем полученное уравнение решить относительно $f'(x)$.

□ П р и м е р 5.4. Уравнение $x^3 + y^5 = e^{x^2} + y$ неявно определяет функцию $y = y(x)$. Требуется найти производную y' .

Р е ш е н и е . Дифференцируя по x тождество $x^3 + y^5(x) = e^{x^2} + y(x)$, получим $3x^2 + 5y^4(x) \cdot y'(x) = e^{x^2} \cdot 2x + y'(x)$.

Отсюда $5y^4 \cdot y' - y' = 2xe^{x^2} - 3x^2$. Из этого равенства находим y' : $y' = \frac{2xe^{x^2} - 3x^2}{5y^4 - 1}$. ⊗

□ П р и м е р 5.5. Найти производную функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$.

Р е ш е н и е . Дифференцируя по x тождество $x^2 - 2x^2y^2(x) + 5x + y(x) - 5 = 0$, получим $2x - 4xy^2 - 4x^2yy' + 5 + y' = 0$. Выражая y' из этого равенства, находим:

$$y' = \frac{4xy^2 - 2x - 5}{1 - 4x^2y}. \quad \otimes$$

□ П р и м е р 5.6. Вывести правило дифференцирования обратной функции.

Р е ш е н и е . Если $y = f(x), x \in D, y \in E$, то если существует $x = f^{-1}(y)$, то $x = f^{-1}(y)$ есть функция, обратная к $y = f(x)$, при этом для всех $y \in E$ выполняется равенство $f(f^{-1}(y)) - y = 0$. Значит, функция $x = f^{-1}(y)$ есть функция, заданная неявно уравнением $f(x) - y = 0$. Для нахождения производной x'_y , дифференцируем равенство $f(x) - y = 0$ по y : $f'_x(x(y)) \cdot x'_y(y) - 1 = 0$, откуда получаем формулу для производной обратной функции:

$$x'_y(y) = \frac{1}{f'_x(x(y))} \text{ или } x'_y = \frac{1}{y'_x}. \quad (5.4) \quad \otimes$$

□ П р и м е р 5.7. Найти производную функции $\operatorname{arcsch} x$.

Р е ш е н и е . Функция $\operatorname{arcsch} x$ является обратной по отношению к функции $y = \operatorname{sh} x$ ($\operatorname{sh} x$ – синус гиперболический x). По определению $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Так как

$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, то $\operatorname{sh} x$ монотонно возрастает при всех $x \in (-\infty; +\infty)$ и, следовательно, имеет обратную функцию $\operatorname{arcsch} x$.

Применяем формулу (5.4) следующим образом:

$$x'_y = (\operatorname{arcsch} x)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\operatorname{sh} x)'} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \left[\begin{array}{l} \text{учтем, что} \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \text{ и} \\ \operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}; \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Из соотношения $(\operatorname{arcsch} y)' = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$ следует, что $(\operatorname{arcsch} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. \otimes

Пусть заданы функции

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in (\alpha; \beta) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in (\alpha; \beta). \end{cases} \quad (5.5)$$

Если функция $x = \varphi(t)$ на интервале $(\alpha; \beta)$ имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, то определена новая функция $y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$, называемая **функцией, заданной параметрически** соотношениями (6.5). Дифференцируя $y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ по x и используя формулу (6.4) имеем соотношение

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (5.6)$$

\square **Пример 5.8.** Найти касательную к окружности $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Запишем уравнение касательной в виде $y = y(x_0) + y'_x(x_0)(x - x_0)$. Здесь

$$x_0 = x(t_0) = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad \text{а}$$

$$y_0 = y(x_0) = 2 \sin\left(\arccos \frac{x_0}{2}\right) = 2 \sin\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \text{ Найдем произ-$$

водную y'_x по формуле (6.6): $y'_t = (2 \sin t)'_t = 2 \cos t$;

$$x'_t = (2 \cos t)'_t = -2 \sin t, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2 \sin t}{2 \cos t} = -\operatorname{tg} t.$$

$$\text{Тогда } y'_x(x_0) = -\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{x_0}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1.$$

Окончательно имеем: $y = \sqrt{2} - 1(x - \sqrt{2})$ или $y = -x + 2\sqrt{2}$ (рис. 5.2). \otimes

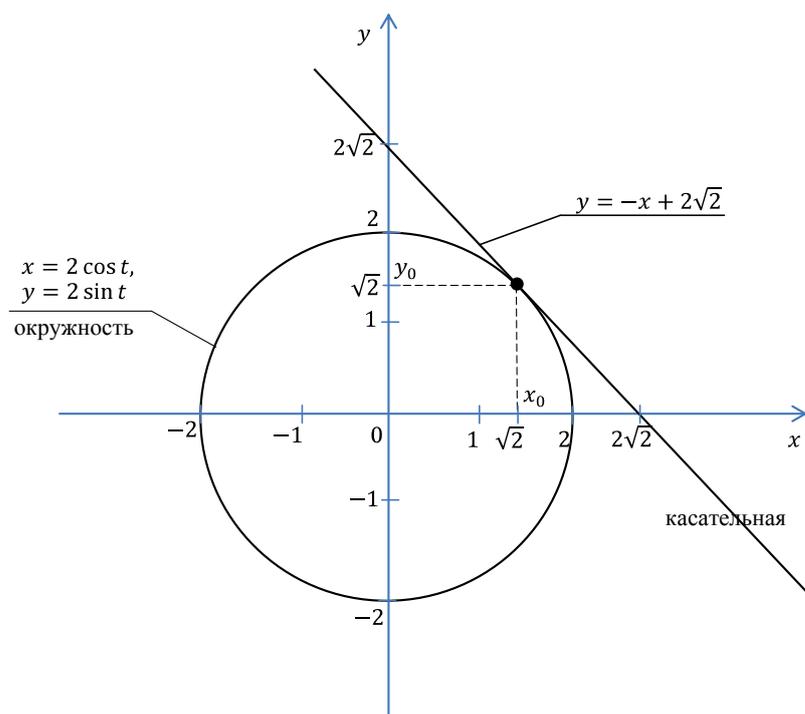


Рис. 5.2

5.5 Дифференциал функции, его геометрический смысл.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a; b)$. Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ и

$\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Из последнего равенства получаем, что

$$\Delta y(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x.$$

О п р е д е л е н и е . Произведение $f'(x_0) \cdot \Delta x$, являющееся *главной линейной частью приращения функции*, называется *дифференциалом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 , соответствующим приращению Δx и обозначается $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$, а для произвольной точки x $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. Дифференциал независимой переменной x будет равен $dx = 1 \cdot \Delta x$, поэтому

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (5.7)$$

□ **П р и м е р 5.9.** Найти дифференциал функции $y = \arcsin \frac{x}{3}$.

Решение. Находим производную $f'(x) = \left(\arcsin \frac{x}{3} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}} \cdot \frac{1}{3}$, тогда

$$dy = \frac{1}{3\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx. \quad \otimes$$

Основные свойства дифференциала аналогичны правилам дифференцирования (п. 5.2).

1. $d(C) = 0$;
2. $d(Cu) = Cdu$;
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$;
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$, ($v \neq 0$);
6. $df(u) = f'(u)du$, где $u = \varphi(x)$.

Последнее свойство называется **инвариантностью формы дифференциала первого порядка**. Геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ (рис. 5.3) в точке $M_0(x_0, y_0)$ при приращении аргумента, равном Δx . Это следует из того, что $\frac{AB}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, тогда $AB = f'(x_0)\Delta x = dy$. Здесь AB – приращение ординаты касательной TT_1 .

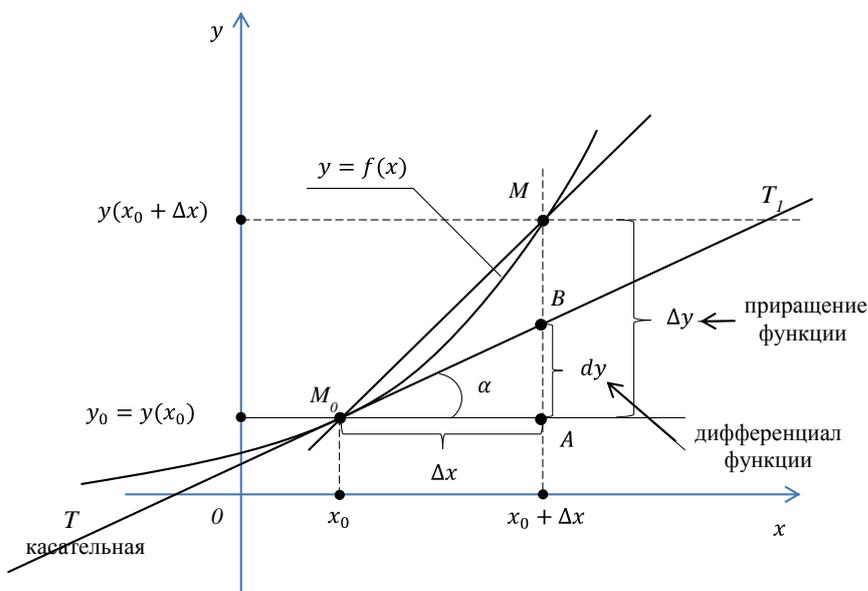


Рис. 5.3

При достаточно малых Δx $\Delta y \approx dy$, т. е. $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$, а в точке x_0 можно записать приближенную формулу

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \quad (5.8)$$

□ **Пример 5.10.** Найти приближенно $\sqrt[3]{128}$.

Решение. Применим формулу (5.8), записав, что $\sqrt[3]{128} = 5 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{3}{125}}$.

Здесь $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = \frac{3}{125}$, $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Тогда $\sqrt[3]{128} \approx 5 \left(\sqrt[3]{1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} \cdot \frac{3}{125} \right) = 5 \left(1 + \frac{1}{125} \right) = 5(1 + 0,008) = 5 \cdot 1,008 = 5,04$. Точное значение $\sqrt[3]{128}$ равно 5,0396842.... ⊗

□ **Пример 5.11.** Найти приближенное значение объема шара, радиус которого равен 1,02 м.

Решение. Воспользуемся формулой $V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Тогда $V' = 4\pi r^2$. Полагая $r = 1$, $\Delta r = 0,02$, получим $V(1,02) \approx V(1) + V'(1)0,02 = \frac{4}{3}\pi + 4\pi \cdot 0,02 \approx 4,43 \text{ м}^3$. ⊗

5.6 Производные и дифференциалы высших порядков

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$, т. е. $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = (y')'$. Аналогично определяются производные более высоких порядков $y''' = (y'')'$, ..., $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Дифференциалы высших порядков функции $y = f(x)$ (x – независимая переменная) вычисляются по формулам

$$d^2 y = y''(dx)^2, \dots, d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически соотношениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем $x'(t) \neq 0$, то ее первая y'_x и вторая y''_{xx} производные находятся по формулам:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}; \quad \text{или} \quad (5.9)$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}. \quad (5.10)$$

□ П р и м е р 5.12. Найти выражение для производной n -го порядка функции $y = \frac{1}{x}$.

Р е ш е н и е . $y' = -\frac{1}{x^2}$; $y'' = \frac{2}{x^3}$; $y''' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} = -\frac{3!}{x^4}$, ..., $y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$. ⊗

□ П р и м е р 5.13. Найти производную 2-го порядка от функции $y = y(x)$, заданной неявно

уравнением $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Р е ш е н и е . По правилу дифференцирования функции, заданной неявно, получаем:

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}(y'x - y)}{x^2 + y^2}. \text{ Отсюда, используя равенство } e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ имеем:}$$

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y'x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ или } x + yy' = y'x - y.$$

Следовательно, $y' = \frac{x+y}{x-y}$. Дифференцируя последнее равенство и используя найденное

для y' выражение, получим:

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y) - (1-y')(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{x-y+xy' - yy' - x-y+xy'}{(x-y)^2} +$$

$$+ \frac{yy'}{(x-y)^2} = \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2\left(x\frac{x+y}{x-y} - y\right)}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}. \quad \otimes$$

□ П р и м е р 5.14. Найти производную 2-го порядка функции, заданной параметрически:

$$y = \ln t, \quad x = t^2, \quad t \in (0; +\infty).$$

Р е ш е н и е . $y'_t = \frac{1}{t}$, $x'_t = 2t$, $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{2t^2}$, $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{1}{2t^2}\right)'_t}{2t} = \frac{-\frac{1}{t^3}}{2t} = -\frac{1}{2t^4}$. ⊗

□ П р и м е р 5.15. Найти дифференциалы 1-го, 2-го, ..., n -го порядков функции

$$y = (2x-3)^3.$$

Р е ш е н и е . $dy = 3(2x-3)^2 2dx = 6(2x-3)^2 dx$,

$$d^2y = 12(2x-3)2(dx)^2 = 24(2x-3)(dx)^2, \quad d^3y = 48(dx)^3, \quad d^4y = 0(dx)^4 = 0, \dots, d^ny = 0. \quad \otimes$$

5.7 Приложения теорем Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одна точка $\xi \in (a; b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференциру-

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (\text{формула Лагранжа}). \quad (5.11)$$

ема на интервале $(a; b)$, то существует точка $\xi \in (a; b)$ такая, что

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a; b)$ и $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a; b)$, то существует точка $\xi \in (a; b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\text{формула Коши}). \quad (5.12)$$

□ **Пример 5.16.** Доказать, что уравнение $3x^5 + 15x - 8 = 0$ имеет только один действительный корень.

Решение. Поскольку функция $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ непрерывна и на концах отрезка $[0; 1]$ принимает значение разных знаков ($f(0) < 0, f(1) > 0$), то по первой теореме Больцано–Коши на интервале $(0; 1)$ уравнение $f(x) = 0$ имеет корень. Предположим, от противного, что это уравнение имеет два действительных корня $x = a, x = b, f(a) = f(b) = 0$.

Тогда по теореме Ролля на интервале $(a; b)$ существовала бы точка ξ , в которой $f'(\xi) = 0$. Но $f'(x) = 15x^4 + 15 \neq 0$ при действительных x . Полученное противоречие доказывает, что действительный корень – единственный.

□ **Пример 5.17.** Используя формулу Лагранжа, доказать неравенство $|\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1|$.

Решение. Функция $f(x) = \sin x$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на любом отрезке $[x_1; x_2]$; $f'(x) = \cos x$. Поэтому $\sin x_2 - \sin x_1 = \cos \xi \cdot (x_2 - x_1)$. Отсюда, учитывая, что $|\cos \xi| \leq 1$, имеем $|\sin x_2 - \sin x_1| = |\cos \xi| |x_2 - x_1| \leq |x_2 - x_1|$. \otimes

Пример 5.18. Написать формулу Коши и найти значение ξ для функций $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Все условия теоремы Коши выполнены: $g'(x) = -\sin x \neq 0, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0} = \frac{\cos \xi}{-\sin \xi}; \quad -1 = \operatorname{ctg} \xi, \quad \xi = -\frac{\pi}{4}. \quad \otimes$$

Правило Лопиталья (раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$).

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на $\dot{U}(x_0)$; $g'(x) \neq 0, x \in \dot{U}(x_0)$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$),

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (5.13)$$

при условии, что существует предел отношения производных.

З а м е ч а н и я :

1. Аналогичная теорема справедлива и в случае $x_0 = \infty$.
2. Если частное $f'(x)/g'(x)$ в точке x_0 также есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то можно перейти к отношению вторых производных и т. д.
3. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$ алгебраическими преобразованиями функции приводятся к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, и далее применяется правило Лопиталья.
4. В случае неопределенности вида $0^0, \infty^0, 1^\infty$ следует прологарифмировать функцию и предварительно найти предел ее логарифма.

□ П р и м е р 5.19. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{\arcsin x}$.

Р е ш е н и е . Используем формулу (6.13):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{\arcsin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 3 \cos 3x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = -1. \quad \otimes$$

□ П р и м е р 5.20. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3^x}$.

Р е ш е н и е . Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{3^x \ln 3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{3^x \ln^2 3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{3^x \ln^3 3} = 0. \quad \otimes$$

□ П р и м е р 5.21. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.

Р е ш е н и е . Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\ln x + 1 + 1} = -\frac{1}{2}. \quad \otimes \end{aligned}$$

□ П р и м е р 5.22. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Р е ш е н и е . Здесь имеем неопределенность вида 1^∞ . Обозначим $y = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$. Логарифмируя и применяя правило Лопиталя (5.13), получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} \right) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

(здесь дважды использован предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = -\frac{1}{6}$, то $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$. \otimes

5.8 Формула Тейлора и ее приложения

Если функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 , то для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ имеет место **формула Тейлора** n -го порядка:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$ – **остаточный член в форме Лагранжа**.

Приведем разложения некоторых функций по формуле Тейлора при $x=0$, которые называются **формулами Маклорена**:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x);$$

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \cos(\theta x) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x);$$

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \cos(\theta x) \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!};$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x);$$

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot (1+\theta x)^{n+1}};$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x);$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1}; \quad 0 < \theta < 1.$$

Остаточный член формулы Тейлора может быть представлен в **форме Пеано**:

$$R_n(x) = o(|x - x_0|^n) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

□ П р и м е р 5.23. Разложить многочлен $f(x) = x^4 - 2x^2 + 13x + 9$ по степеням двучлена $x + 2$.

Р е ш е н и е . Поскольку $f(x)$ – многочлен 4-й степени, то $f^{(5)}(x) = 0$ и формула Тейлора при $x_0 = -2$ имеет вид

$$f(x) = f(-2) + \frac{f'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3 + \frac{f^{IV}(-2)}{4!}(x+2)^4.$$

Подставляя в эту формулу значения $f(-2) = -9$, $f'(-2) = (4x^3 - 4x + 13)|_{x_0=-2} = -11$, $f''(-2) = (12x^2 - 4)|_{x_0=-2} = 44$, $f'''(-2) = 24x|_{x_0=-2} = -48$, $f^{IV}(-2) = 24$, получим

$$f(x) = -9 - 11(x+2) + 22(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4. \quad \otimes$$

□ П р и м е р 5.24. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x) = 10^x$ в точке $x_0 = 0$.

Р е ш е н и е . Имеем:

$$f(x) = 10^x; \quad f'(x) = 10^x \ln 10; \quad f''(x) = 10^x \ln^2 10; \quad f'''(x) = 10^x \ln^3 10;$$

$$f^{(IV)}(x) = 10^x \ln^4 10; \quad f(0) = 1; \quad f'(0) = \ln 10; \quad f''(0) = \ln^2 10,$$

$$f'''(0) = \ln^3 10, \quad f^{(IV)}(\theta x) = 10^{\theta x} \cdot \ln^4 10.$$

По формуле Тейлора получаем

$$10^x = 1 + (\ln 10)x + \frac{\ln^2 10}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 10}{3!}x^3 + \frac{10^{\theta x} \cdot \ln^4 10}{4!}x^4, \quad 0 < \theta < 1. \quad \otimes$$

□ П р и м е р 5.25. Вывести приближенную формулу $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ и оценить ее точность при $|x| < 0,05$.

Р е ш е н и е . Запишем формулу Тейлора 4-го порядка для функции $\sin x$ в точке $x_0 = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_4(x), \quad \text{где } R_4(x) = \frac{\cos \theta x \cdot x^5}{5!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

При $|x| < 0,05$ имеем $\Delta = |R_4(x)| \leq |\cos \theta x| \cdot \frac{|x|^5}{5!} \leq \frac{(0,05)^5}{5!} < 3 \cdot 10^{-9}$.

Поэтому $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ с точностью $\Delta < 3 \cdot 10^{-9}$. \otimes

\square П р и м е р 5.26. Вычислить $e^{0,2}$ с точностью до 10^{-3} .

Р е ш е н и е . Формула Тейлора для функции e^x имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \text{ где } R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Полагая $x = 0,2$, получим $e^{0,2} = 1 + \frac{0,2}{1!} + \frac{0,2^2}{2!} + \dots + \frac{0,2^n}{n!} + R_n(0,2)$,

где $R_n(0,2) = \frac{0,2^{n+1}}{(n+1)!} e^{0,2\theta}$, $0 < \theta < 1$.

Так как $0 < \theta < 1$; $2 < e < 3$; $1 < e^{0,2\theta} < 3$, то $R_n(0,2) < 3 \frac{0,2^{n+1}}{(n+1)!}$.

Определим наименьшее значение n так, чтобы выполнялось неравенство $R_n(0,2) < 10^{-3}$.

Если $n = 2$, то $R_2 < 3 \cdot \frac{0,2^3}{3!} \approx 0,0013$, а если $n = 3$, то $R_3 < 3 \frac{0,2^4}{4!} \approx 0,00018 < 10^{-3}$. Поэтому

$e^{0,2} \approx 1 + \frac{0,2}{1!} + \frac{0,2^2}{2!} + \frac{0,2^3}{3!} = 1,221$ с точностью до 10^{-3} . \otimes

\square П р и м е р 5.27. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$.

Используем формулу Тейлора с остаточными членами в форме Пеано:

$$\sin x = x + o(x), \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + o(z^3).$$

Из последней формулы при $z = -\frac{x^2}{2}$ получим

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^6).$$

Искомый предел может быть переписан в виде

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^6) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)}{x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{o(x^5)}{x^4} + \frac{o(x^6)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

(поскольку $\frac{o(x^5)}{x^4} \rightarrow 0$, $\frac{o(x^6)}{x^4} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$). \otimes

6 ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

Одним из важнейших приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графиков функций.

6.1 Возрастание и убывание функции. Точки экстремума функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* в интервале (a, b) , если из неравенства $x_1 < x_2$, где $x_1, x_2 \in (a, b)$, следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (или, соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

Функция $f(x)$ называется *постоянной* на интервале (a, b) , если она принимает на этом интервале одно и то же значение.

Теорема 1 (достаточное условие возрастания (убывания) функции). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает на (a, b) , если же $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*. Определим условия постоянства функции.

Теорема 2 (необходимое и достаточное условия постоянства функции). Функция $y = f(x)$ постоянна на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ в каждой точке интервала.

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *минимум* (локальный минимум) (*максимум*), если существует δ -окрестность точки x_0 ($x_0 - \delta, x_0 + \delta$) такая, что для всякой точки $x \neq x_0$ из этой

окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ (или $f(x) < f(x_0)$). Точки минимума и максимума функции $f(x)$ называются ее **точками экстремума**, а значения функции $f(x)$ в этих точках называются **экстремумами функции**.

Сформулируем условия существования экстремума функции.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума). Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то в этой точке $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Точка x_0 , в которой $f'(x)$ обращается в ноль или $f'(x)$ не существует, называется **критической точкой функции** $f(x)$.

Теорема 4 (первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ критической точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума функции $f(x)$. Если же $f'(x)$ сохраняет знак при переходе через точку x_0 , то x_0 не является точкой экстремума функции.

Теорема 5 (второе достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в критической точке x_0 и в некоторой ее окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогда, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума $f(x)$. Если же $f''(x_0) = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Отметим, что в точках экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси Ox .

На рис. 6.1 приведены примеры экстремумов функции.

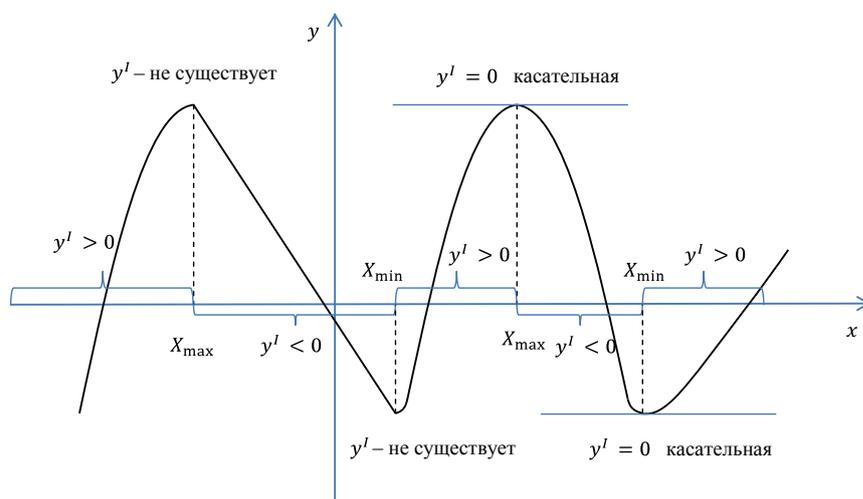


Рис. 6.1

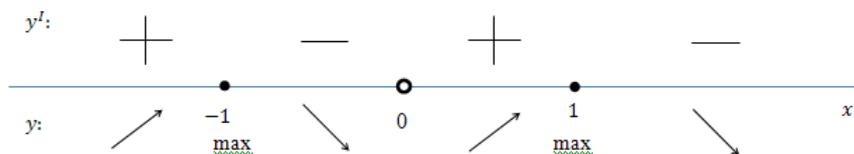
□ **Пример 6.1.** Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции

$$y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}.$$

Решение. Область определения этой функции: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Найдем производную:

$y' = \frac{4(1-x^2)}{x^5}$. Приравняв к нулю эту производную, получим $1-x^2=0$. Следовательно,

$x_1=1, x_2=-1$ – критические точки функции (в точке $x_3=0$ y' не существует, но $x_3=0$ не входит в область определения функции). Эти точки разбивают область определения функции на интервалы монотонности. Исследуем знаки производной y' на этих интервалах, укажем вид интервалов монотонности функции, характер критических точек.



Следовательно, $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ – функция возрастает, $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ – функция убывает, $x=-1, x=1$ – точки максимума функции, $y(1)=y(-1)=1$ – максимумы функции. Точек минимума нет. ⊗

6.2 Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке. Эти значения функция может при-

нимать либо во внутренних точках (тогда это критические точки функции), либо на границе отрезка $[a, b]$.

Получаем следующую схему нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$:

1. Найти производную $f'(x)$ и критические точки функции на интервале (a, b) (из условия $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует).

2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка $[a, b]$.

3. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

□ П р и м е р 6.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -3x^4 + 18x^2 - 5$ на отрезке $[-1, 2]$.

Р е ш е н и е .

1. Находим $y' = -12x^3 + 36x = 12x(3 - x^2) = 12x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$. Критические точки функции на отрезке $[-1, 2]$ $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$ (точка $x = -\sqrt{3}$ не входит в $[-1, 2]$).

2. Вычисляем $y(0) = -5, y(\sqrt{3}) = 22$. Находим значения функции на концах отрезка: $y(-1) = 10, y(2) = 29$.

3. Итак, $y_{\text{наиб}} = y(2) = 29, y_{\text{наим}} = y(0) = -5$. ⊗

6.3 Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

О п р е д е л е н и е . График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **выпуклым** (**вогнутым**) на интервале (a, b) , если дуга кривой на этом интервале расположена ниже (выше) всякой касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ на (a, b) .

О п р е д е л е н и е . Точка $(x_0, f(x_0))$, при переходе через которую направление выпуклости меняется на противоположное, называется точкой **перегиба** графика функции $y = f(x)$.

На рис. 6.2 график функции $y = f(x)$ на интервале (a, x_0) – вогнутый, на интервале (x_0, b) – выпуклый, а точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика.

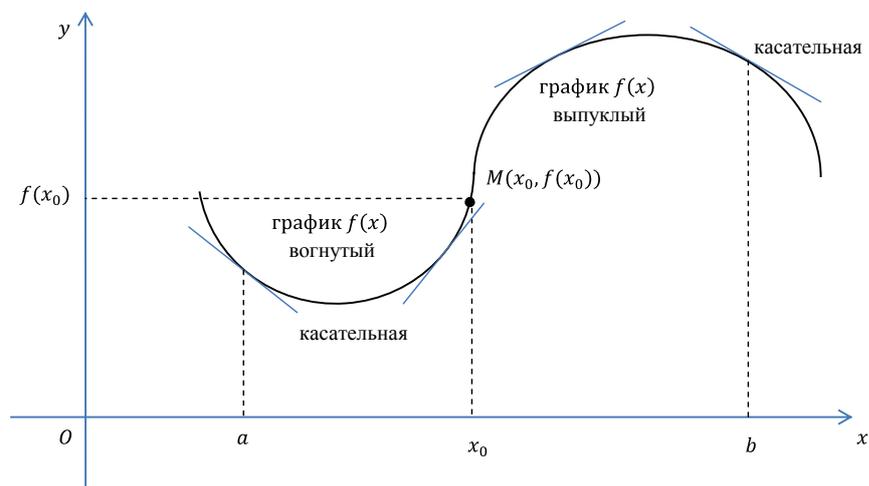


Рис. 6.2

Теорема 6 (достаточные условия выпуклости (вогнутости) графика функции). Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a, b) имеет вторую производную и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то график функции на интервале (a, b) выпуклый (вогнутый).

Теорема 7 (необходимое условие точки перегиба). Если точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x)$ не существует при $x = x_0$.

Точки, в которых $f''(x)$ обращается в ноль или $f''(x)$ не существует, называются **критическими точками второй производной**.

Теорема 8 (достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , в которой $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует. Если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 , то $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Таким образом, область определения функции $y = f(x)$ разбивается на конечное число интервалов с постоянным направлением выпуклости (вогнутости). Каждый из этих интервалов ограничен точками, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует.

□ **Пример 6.3.** Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = \ln(1 + x^2)$.

Решение.

Находим $y' = \frac{2x}{1+x^2}$, $y'' = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$. Критическими точками второй производной являются точки $x_1 = 1, x_2 = -1$. Эти точки разбивают область определения функции

на 3 интервала, на каждом из которых сохраняется направление вогнутости или выпуклости. Определим знаки второй производной на этих интервалах, характер точек $x_1 = 1, x_2 = -1$.



Таким образом, на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ – функция выпукла; на $(-1, 1)$ – функция вогнута; точки $M_1(1, \ln 2), M_2(-1, \ln 2)$ – точки перегиба графика функции. ☒

6.4 Асимптоты графика функции

О п р е д е л е н и е . Прямая l называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до прямой l стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат.

Асимптоты могут быть **вертикальными, наклонными** и **горизонтальными**.

Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x)$ равен бесконечности. В этом случае точка $x = a$ является точкой разрыва 2-го рода функции $y = f(x)$.

Так, например, кривая $y = \frac{1}{x-2}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 2$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

Для существования **наклонной асимптоты** $y = kx + b$ необходимо и достаточно существование двух пределов $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{или } x \rightarrow -\infty}} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$.

Если в уравнении $y = kx + b$ коэффициент k равен нулю, то имеем **горизонтальную асимптоту** $y = b$.

Заметим, что не всегда прямая, являющаяся асимптотой графика функции при $x \rightarrow +\infty$, будет являться асимптотой того же графика при $x \rightarrow -\infty$. Поэтому при отыскании наклонных асимптот нужно отдельно исследовать случаи при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

□ **Пример 6.4.** Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$.

Решение. Прямые $x=1, x=-1$ являются вертикальными асимптотами графика функции, так как

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Следует отметить, что точки $x=1, x=-1$ являются точками разрыва 2-го рода функции

$$y = \frac{2x^3}{x^2 - 1}.$$

Наклонную асимптоту ищем в виде: $y = kx + b$,

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 1} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x^3 - 2x^3 + 2x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = 2x$ – наклонная асимптота. ⊗

6.5 Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции и построение ее графика удобно выполнять по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, является ли функция четной, нечетной, периодической.
3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва.
4. Найти асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные).
5. Исследовать функцию с помощью первой производной: установить интервалы монотонности функции, найти точки экстремума функции, вычислить значения функции в этих точках.

6. Исследовать функцию с помощью второй производной: определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.

7. Используя результаты проведенного исследования, построить график функции. При необходимости уточнения отдельных участков кривой можно вычислить координаты нескольких дополнительных точек (в частности, координаты точек пересечения графика с осями координат).

□ П р и м е р 6.5. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е. Областью определения функции является совокупность интервалов $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Функция общего вида, т. к. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$. Функция не периодическая. Функция не определена при $x = 1$. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty.$$

Следовательно, $x = 1$ – точка разрыва 2-го рода, а, значит, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1,$$

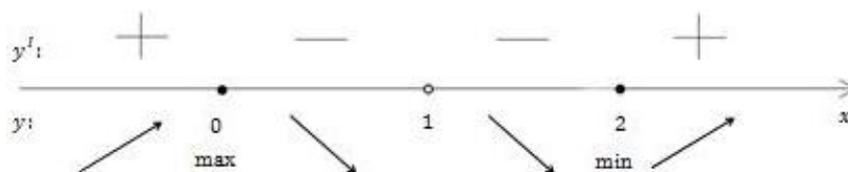
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1 - x^2 + x}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 1} = 0.$$

$y = x$ – наклонная асимптота.

Находим $y' = \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \right)' = \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$. Решаем уравнение $y' = 0$.

$$\frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \text{ при } x = 0, x = 2.$$

Укажем интервалы монотонности.



На $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ – функция возрастает, на $(0, 1) \cup (1, 2)$ – функция убывает.

Тогда $x = 0$ – точка максимума, $y(0) = -1$; $x = 2$ – точка минимума, $y(2) = 3$.

Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)((x-1)^2 - x^2 + 2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Находим критические точки второй производной.

y'' не обращается в ноль, но в точке $x = 1$ y'' не существует (хотя в этой точке функция не определена).



Точек перегиба нет. Точки пересечения с осью Ox найдем из уравнения $f(x) = 0$, а точки пересечения с Oy получим при $x = 0$:

$\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 \neq 0$, т. к. $D < 0$. А $f(0) = -1$, значит, $(0, -1)$ – точка пересечения с осью Oy .

Строим график функции (рис. 6.3).

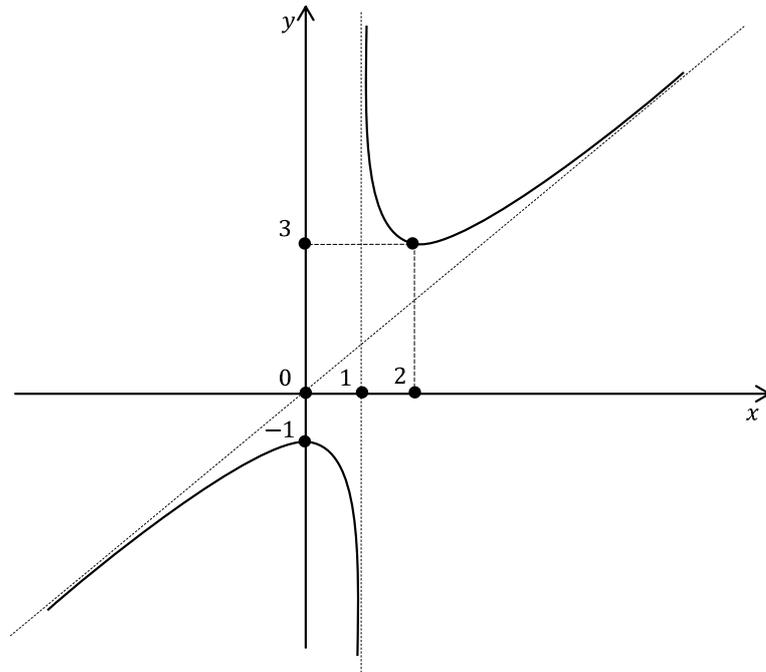


Рис. 6.3 ⊗

6.6 Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Так как вектор $\vec{s}(m, n, p)$ коллинеарен $\frac{d\vec{r}}{dt}$, то в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ следующие уравнения

$$\frac{x - x(t_0)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}} = \frac{y - y(t_0)}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_0}} = \frac{z - z(t_0)}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=t_0}} \quad (6.5)$$

есть уравнения *касательной* к пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

□ П р и м е р 6.6. Написать уравнения касательной к годографу

$$\vec{r}(t) = a \cos t \cdot \vec{i} + a \sin t \cdot \vec{j} + bt \cdot \vec{k} \text{ в точке } t_0 = \frac{\pi}{4}, \text{ (это винтовая линия, рис. 6.4).}$$

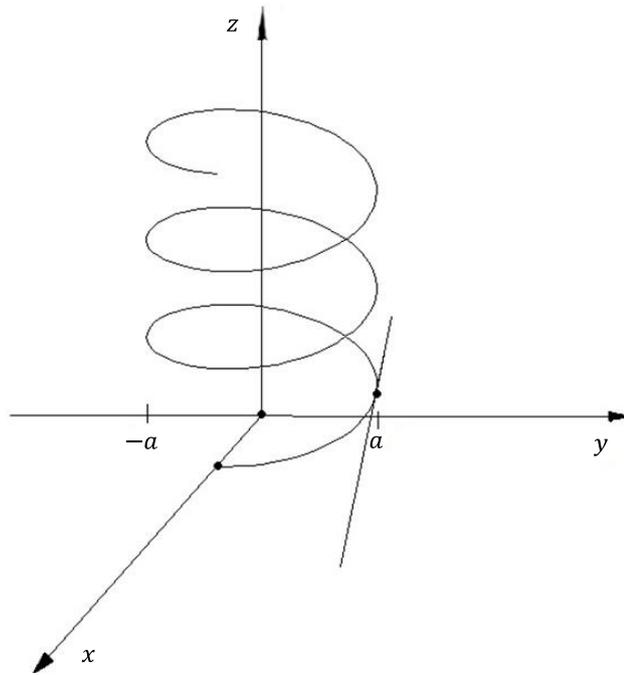


Рис. 6.4

Решение.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t; \quad \frac{dy}{dt} = a \cos t; \quad \frac{dz}{dt} = b;$$

$$x(t_0) = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \cos \frac{\pi}{4} = a \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y(t_0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \sin \frac{\pi}{4} = a \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z(t_0) = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = b \frac{\pi}{4};$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -a \sin \frac{\pi}{4} = -a \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = a \cos \frac{\pi}{4} = a \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = b.$$

Подставив в формулу (6.5), имеем:

$$\frac{x - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{z - b\frac{\pi}{4}}{b} \text{ — уравнения касательной к винтовой линии в точке } t_0 = \frac{\pi}{4}. \quad \otimes$$

Плоскость, проходящая через точку касания $M(t_0)$ и перпендикулярная к касательной, называется **нормальной плоскостью** к кривой в этой точке.

Ее уравнение имеет вид:

$$\frac{dx(t_0)}{dt}(x - x_0) + \frac{dy(t_0)}{dt}(y - y_0) + \frac{dz(t_0)}{dt}(z - z_0) = 0. \quad (6.6)$$

□ П р и м е р 6.7. Написать уравнение нормальной плоскости к винтовой линии

$\vec{r}(t) = a \cos t \cdot \vec{i} + a \sin t \cdot \vec{j} + bt \cdot \vec{k}$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$ (см. предыдущий пример).

Р е ш е н и е . Так как все необходимые величины найдены, то имеем по формуле (6.6):

$$-\frac{a\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{a\sqrt{2}}{2} \left(y - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) + b \left(z - b \frac{\pi}{4} \right) = 0. \quad \otimes$$

II ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Занятие 1. Декартова и полярная системы координат. Построение графиков функций

Аудиторные задания

1.1 Построить графики функций:

1) $y = 2^{\log_2 \cos x}$; 2) $y = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$; 3) $y = \begin{cases} 2^{x-1}, & 0 < x \leq 2, \\ -x^2 - 2x, & -3 < x \leq 0. \end{cases}$; 4) $y = 2x - |x-2| + 1$;

5) $y = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$; 6) $y = \sin |x| - 1$; 7) $y = \log_{1/2} x^2 + 1$; 8) $y = \frac{1}{|x|+1}$.

1.2 Построить графики функций, заданных параметрически:

1) $x = -1 + 2t$, $y = 2 - t$; 2) $x = t$, $y = t^2 - 4$; 3) $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$; 4)

$x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$;

5) $x = at^2$, $y = bt^3$; 6) $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$; 7) $x = -1 + 2 \cos t$, $y = 3 + 2 \sin t$;

8) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$.

1.3 Записать уравнения кривых в полярных координатах:

1) $y = x$; 2) $y = 1$; 3) $x^2 + y^2 = 4$; 4) $x^2 + y^2 = 2y$; 5) $x + y - 1 = 0$; 6)

$x^2 - y^2 = a^2$.

1.4 Построить графики функций, заданных уравнением в полярной системе координат:

1) $r = 1$; 2) $r = 2\varphi$; 3) $r \cos \varphi = 2$; 4) $r = e^\varphi$; 5) $r = 4 \cos \varphi$; 6) $r = 3 \sin 2\varphi$;

7) $r = 2(1 + \cos \varphi)$; 8) $r = \frac{6}{3 + 2 \cos \varphi}$; 9) $r = \frac{2}{1 + \sin \varphi}$; 10) $r = 2 \cos 3\varphi$; 11)

$r^2 = 36 \sin 2\varphi$.

Домашние задания

1.5 Построить следующие кривые:

1) $y = |x^2 - x - 2|$; 2) $y = x + |x + 3|$; 3) $x = t^2 + 1$, $y = t$; 4) $x = t^3$, $y = t^2$;

5) $r = 2 \sin \varphi$; 6) $r = 3(1 - \sin \varphi)$; 7) $r = 4 \cos 2\varphi$; 8) $r = \frac{3}{1 - \cos \varphi}$.

Ответы:

$$1.3 \text{ 1) } \varphi = \frac{\pi}{4}; \quad 2) r = \frac{1}{\sin \varphi}; \quad 3) r = 2; \quad 4) r = 2 \sin \varphi; \quad 5) r = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}; \quad 6)$$

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}.$$

Занятие 2. Матрицы и действия над ними

Аудиторные задания

2.1 Найти $2A + 3B - C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.2 Найти $3A + 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица третьего порядка.

рядка.

2.3 Найти матрицу X , если

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}X = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 8 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

2.4 Найти матрицу, транспонированную матрице A :

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad 3) A = (a \ a \ a).$$

2.5 Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти:

$$1) 2A; \quad 2) 2A + 3B - C; \quad 3) -2C^T.$$

2.6 Даны матрицы A и B . Найти AB и BA , если:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = (5 \ -2 \ 3).$$

2.7 Вычислить $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.8 Найти те из произведений AB, BA, A^2, B^2 , которые существуют:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$ 2) $A = (1 \ -2 \ 3 \ 0); B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};$

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix};$ 4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$

2.9 Найти произведение матриц $(AB)C$ и $A(BC)$:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.10 Показать, что матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ является корнем многочлена

$$f(x) = x^2 - 3x + 5.$$

2.11 Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если:

1) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$

2) $f(x) = x^2 - 3x + 2, A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix};$

3) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3, A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Домашние задания

2.12 Найти: 1) $3A - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$ 2) $2B - 5A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -15 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.13 Найти $(A + 3B)^2$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.14 Найти те из произведений AB, BA, AC, CA, BC, CB , которые имеют смысл, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.15 Проверить, коммутируют ли матрицы A и B :

$$1) \quad A = (1 \ 2 \ 3), B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad 2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad 3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2.16 Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если:

$$1) f(x) = 2x^2 - 2x + 7, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad 2) f(x) = 3x^2 + 5x - 2, A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.17 Найти матрицу A^T , если:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 3) A = (1 \ 2 \ 3 \ 4).$$

Ответы: **2.1** $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -9 \\ 9 & -4 & 4 \\ -13 & -3 & 21 \end{pmatrix};$ **2.2** $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -12 \\ -3 & -7 & 3 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix};$ **2.3** $\begin{pmatrix} 9 & -39 \\ -6 & 0 \\ -9 & -3 \end{pmatrix};$ **2.4** **1)**

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2) A^T = (1 \ 2 \ 3); \quad 3) A^T = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}; \quad 2.5 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 3 \\ 33 & -3 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -6 & -12 & -6 \end{pmatrix};$$

$$2.6 \text{ 1) } AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{pmatrix}; \text{ 2) } AB = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3) AB = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}, BA = (13); \text{ 2.7 } \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$2.8 \text{ 1) } AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}; A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}; B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2) AB = (-1); BA = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 & 0 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \\ -4 & 8 & -12 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; A^2 \text{ и } B^2 \text{ — не существуют};$$

$$3) AB = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}; BA, A^2, B^2 \text{ — не существуют};$$

$$4) AB = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}; A^2 \text{ и } B^2 \text{ — не существуют};$$

$$2.9 (AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}; \text{ 2.11 1) } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}; \text{ 2) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}; \text{ 3) } \begin{pmatrix} 18 & -20 \\ 30 & -2 \end{pmatrix};$$

$$2.12 \text{ 1) } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}; \text{ 2) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ 2.13 } \begin{pmatrix} 96 & 12 & 2 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 105 & 111 \end{pmatrix}; \text{ 2.14 } BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$AC = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \text{ 2.15 1) не коммутируют; 2) не коммутируют};$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \text{ 3) коммутируют: } AB = BA = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix};$$

$$2.16 \text{ 1) } \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}; \text{ 2) } \begin{pmatrix} -25 & 60 & -6 \\ 60 & -18 & 44 \\ 70 & 23 & -63 \end{pmatrix}; \text{ 2.17 1) } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \text{ 2) } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3) A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Занятие 3. Вычисление определителей

Аудиторные задания

3.1 Вычислить определители второго порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & -a \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} \sqrt[4]{a} & a \\ -1 & \sqrt[4]{a^3} \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} \ln x & \ln y \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

3.2 Вычислить определители третьего порядка различными способами:

$$1) \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 8 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad 5)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.3 Вычислить определители по правилу Саррюса и разлагая по элементам 1-й строки:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

3.4 Решить уравнение: $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$

3.5 Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

3.6 Построить график функции $y = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

3.7 Вычислить определители, разлагая по элементам ряда:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

3.8 Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$$

3.9 Вычислить определители, предварительно упростив их:

$$1) \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 13 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ -3 & -15 & -6 & 13 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Домашние задания

3.10 Решить уравнение $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 4 \\ x & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

3.11 Найти $\det(AB)$ и проверить, что $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.12 Вычислить определители, разлагая их по элементам ряда:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

3.13 Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

3.14 Решить неравенство $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leq 4.$

3.15 Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ответы: 3.1 1) 13; 2) $-2a^2$; 3) $\sin 2x$; 4) $2a$; 5) $\ln \frac{x^5}{y^2}$.

3.2 1) 78; 2) 0; 3) $\sin 2\alpha$; 4) 100; 5) -6 . 3.3 1) 0; 2) 0.

3.4 $x = -1$; $x = -4$. 3.5 $x = -3$. 3.6 Прямая $y = 2x - 2$. 3.7 1) 0; 2) 16. 3.8 1) 20; 2) 27.

3.9 1) 38; 2) 168; 3) -192 ; 4) 75; 5) -12 ; 6) 300. 3.10 $x_1 = -1, x_2 = 2$. 3.11 40. 3.12 1) 0; 2) 48.

3.13 1) 54; 2) 160. 3.14 $\left(-\infty; -\frac{36}{5}\right]$. 3.15 1) 60; 2) 150.

Занятие 4. Обратная матрица. Решение матричных уравнений

Аудиторные задания

4.1 Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

$$1) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \quad 4) \begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad 5)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2 Найти обратную матрицу, если она существует:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}.$$

4.3 Решить матричные уравнения:

$$1) \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

4.4 Решить матричные уравнения:

$$1) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.5 Решить матричные уравнения:

$$1) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Домашние задания

4.6 Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

4.7 Решить матричные уравнения:

$$1) X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответы: **4.1** 1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; 2) не существует; 3) $-\frac{1}{38} \begin{pmatrix} -10 & 4 & -2 \\ 7 & 1 & -10 \\ -8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$;

$$4) -\frac{1}{49} \begin{pmatrix} -7 & -14 & 35 \\ -7 & 21 & -21 \\ -7 & -7 & 14 \end{pmatrix}; \quad 5) -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.2 1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) не существует.

$$4.3 \text{ 1)} \begin{pmatrix} -\frac{11}{15} & 1 \\ \frac{15}{1} & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & 3 \\ \frac{13}{30} & -1 \\ \frac{13}{13} & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4.4 \text{ 1)} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$4.5 \text{ 1)} \begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -17 & 13 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$4.6 \text{ 1)} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad 4) \text{ не существует.}$$

$$4.7 \text{ 1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad 2) -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -14 & -8 & -2 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 5/2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -1 \end{pmatrix}.$$

Занятие 5. Решение невырожденных систем линейных уравнений

Аудиторные задания

5.1 Убедиться, что система является невырожденной, и решить ее по формулам

Крамера и матричным способом:

$$1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 4x + 5y + 6z = 8, \\ 7x + 8y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21. \end{cases} \quad 4)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} -2x + 2y - z + 7 = 0, \\ x - 3y + z - 6 = 0, \\ 3x + y + 2z - 7 = 0. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases} \quad 7) \begin{cases} 2x - y + 5z = 4, \\ 3x - y + 5z = 0, \\ 5x + 2y + 13z = 2. \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 2x - y + 2z = 1, \\ 3x + 2y - z = 9, \\ x - 4y + 3z = -5. \end{cases} \quad 11) \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 14 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 10 = 0. \end{cases}$$

Домашние задания

5.2 Проверить, являются ли системы невырожденными, и если являются, то решить их матричным методом и по формулам Крамера:

$$1) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + 4x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases} \quad 4)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Ответы: 5.1 1) $(-2; 2; 1)$; **2)** $(1; 2; -3)$; **3)** $(-3; 3; 0)$; **4)** $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; **5)** $x = 2, y = -1, z = 1$;

6) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$; **7)** $x = -4, y = -2, z = 2$; **8)** $x_1 = 2, x_2 = 3$; **9)**

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$; **10)** $x = 2, y = 1, z = -1$; **11)** $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -1$.

5.2 1) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$; **2)** $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}$; **3)** $x = 1, y = 3, z = 5$;

4) $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -1$.

Занятие 6. Ранг матрицы

Аудиторные задания

6.1 Найти ранг матрицы:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

6.2 Найти ранги матриц с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор.

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{1)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}; & \mathbf{2)} \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & \mathbf{3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}; \\
 \\
 \mathbf{4)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}; & \mathbf{5)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

6.3 При каких значениях λ ранг матрицы равен двум:

$$\mathbf{1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{2)} \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} ?$$

6.4 Проверить справедливость неравенств $r_{AB} \leq r_A, r_{AB} \leq r_B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Домашние задания

6.5 Найти ранги матриц и указать какой-нибудь базисный минор.

$$\mathbf{1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{2)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & 10 & 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.6 Проверить справедливость неравенства $r_{A+B} \leq r_A + r_B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответы: **6.1** **1)** 2; **2)** 2. **6.2** **1)** $r = 3$, $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}$; **2)** $r = 2$, $\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$; **3)** $r = 3$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix}$;

4) $r = 3$, $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \\ 7 & -5 & 1 \end{vmatrix}$; **5)** $r = 2$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. **6.3** **1)** $\lambda = 3$; **2)** $\lambda = 0, \lambda = 2$. **6.5** **1)** 2; **2)** 3; **3)** 3.

Занятие 7. Решение произвольных и однородных систем линейных уравнений

Аудиторные задания

7.1 Исследовать системы на совместность и в случае совместности решить их.

$$1) \begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases} \quad 3)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 5. \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases} \quad 6)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + \quad \quad + 5x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + \quad 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

7.2 Решить однородную систему и найти фундаментальную систему решений.

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases} \quad 6)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

7.3 Решить системы методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 \quad - 2x_3 = 16; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 4x - 3y + 3z = 0, \\ x + 3y = 0; \end{cases} \quad 4)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$$

Домашние задания

7.4 Исследовать системы уравнений и в случае совместности решить их.

$$\mathbf{1)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7. \end{cases} \quad \mathbf{2)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases} \quad \mathbf{3)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 = 1. \end{cases} \quad \mathbf{4)}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

7.5 Решить системы:

$$\mathbf{1)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad \mathbf{2)} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответы: 7.1 **1)** Система несовместна; **2)**

$$\left\{ \left(\frac{C_1 - 9C_2 - 2}{11}, \frac{10 - 5C_1 + C_2}{11}, C_1, C_2 \right) \mid \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathbf{3)} \left\{ \left(\frac{9 - C_1 - 14C_2 - C_3}{7}, \frac{4C_1 - 7C_2 - 3C_3 - 1}{7}, C_1, C_2, C_3 \right) \mid \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathbf{4)} \left\{ \left(\frac{-3 - 5C_1 + 13C_2 - 5C_3}{5}, \frac{4 + C_2}{5}, C_1, C_2, C_3 \right) \mid \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathbf{5)} x_1 = 5, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 2; \quad \mathbf{6)} \{(C, C+1, C+2, C+3) \mid \forall C \in \mathbb{R}\};$$

7) система несовместна; **8)**

$$\left\{ \left(C_1, C_2, \frac{3 - 5C_1 + 25C_2}{9}, \frac{10C_2 - 2C_1}{3} \right) \mid \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathbf{7.2 1)} \left\{ \left(\frac{3}{5}C_1, \frac{C_1}{5}, C_1 \right) \mid \forall C_1 \in \mathbb{R} \right\}; \quad (3, 1, 5); \quad \mathbf{2)} x_1 = x_2 = x_3 = 0;$$

$$\mathbf{3)} \left\{ \left(\frac{-7C_1 - 8C_2}{7}, C_1, \frac{5C_2}{7}, C_2 \right) \mid \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}; \quad (-1, 1, 0, 0); \quad \left(-\frac{8}{7}, 0, \frac{5}{7}, 1 \right);$$

$$\mathbf{4)} \left\{ \left(\frac{-19C_1 + 38C_2}{3}, \frac{7C_1 - 14C_2}{2}, C_1, C_2 \right) \mid \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}, \quad \left(-\frac{19}{3}, \frac{7}{2}, 1, 0 \right), \quad \left(\frac{38}{3}, -7, 0, 1 \right);$$

$$5) \left\{ \left(C_1, C_2, \frac{3C_1+6C_2}{4}, \frac{5C_1+10C_2}{4} \right) \mid \forall C_1, C_2 \in R \right\}, \left(1, 0, \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right), \left(0, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right);$$

6)

$$\left\{ \left(\frac{8C_1+9C_2}{26}, -\frac{6C_1+23C_2}{26}, \frac{22C_1-11C_2}{26}, C_1, C_2 \right) \mid \forall C_1, C_2 \in R \right\}, \left(\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{11}{13}, 1, 0 \right), \left(\frac{9}{26}, -\frac{23}{26}, -\frac{11}{26}, 0, 1 \right).$$

7.3 1) $(-C-8; 2C+4; C); C \in R$; 2) несовместна; 3) $(-3C; C; 5C); C \in R$; 4) $(-2; 1; 2)$.

7.4 1) Несовместна; 2) $\left\{ \left(\frac{5-7C}{5}, \frac{8C}{5}, C \right) \mid \forall C \in R \right\}$; 3) $x_1 = -1, x_2 = 1$;

$$4) \left\{ \left(C_1, C_2, \frac{3-5C_1+25C_2}{9}, \frac{10C_2-2C_1}{3} \right) \mid \forall C_1, C_2 \in R \right\}.$$

7.5 1) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$; 2) $\{(0, 2C_1 + C_2, C_1, C_2) \mid \forall C_1, C_2 \in R\}$.

Занятие 8. Векторы. Линейные операции над векторами. скалярное произведение векторов

Аудиторные задания

8.1 Определить, для каких векторов \vec{a} и \vec{b} выполняются следующие условия:

1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$; 3) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; 4) $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$; 5) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

8.2 Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Определить проекции на координатные оси следующих векторов:

1) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $2\vec{a}$; 3) $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

8.3 Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}(2; -1; 3)$ и $\vec{b}(-6; 3; -9)$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

8.4 При каких α и β векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ ортогональны, а векторы \vec{a} и $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + \beta\vec{k}$ коллинеарны?

8.5 Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}(6; -2; -3)$.

8.6 Определить модули суммы и разности векторов $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$.

8.7 Даны вершины треугольника $A(4;-1;2)$, $B(0;1;-3)$, $C(6;5;3)$. Найдите: 1) координаты вектора \overrightarrow{AD} , если AD – медиана треугольника; 2) координаты точки O пересечения медиан этого треугольника.

8.8 Даны точки $A(4;4;0)$, $B(0;0;0)$, $C(0;3;4)$, $D(1;4;4)$. Докажите, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

8.9 Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;3;-1)$, $B(4;1;-2)$, $C(1;0;2)$. Найдите: а) внутренний угол при вершине C ; б) площадь треугольника ABC ; в) длину высоты, опущенной из вершины C на AB .

8.10 Даны точки $A(-1;2;1)$, $B(2;1;-3)$, $C(3;0;5)$. Подобрать точку D так, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.

8.11 Найти $(\vec{m} + 2\vec{n}, \vec{m} - \vec{n})$, если $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$; $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

8.12 Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ и $D(-5;-5;3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

8.13 Вычислить внутренние углы треугольника ABC , если $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$, $C(7;4;-2)$. Убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

8.14 Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ на ось вектора $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

8.15 Даны векторы $\vec{a} = (1;-3;4)$, $\vec{b} = (3;-4;2)$, $\vec{c} = (-1;1;4)$. Найти $pr_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

8.16 Какую работу производит сила $\vec{F} = (2;-1;-4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A = (1;-2;3)$ в точку $B = (5;-6;1)$?

Домашние задания

8.17 Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(3;-5;8)$ и $\vec{b}(-1;1;-4)$, и косинус угла между его диагоналями.

8.18 Даны три вектора $\vec{a}(-2;1;1)$, $\vec{b}(1;5;0)$ и $\vec{c}(4;4;-2)$. Вычислить $pr_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

8.19 При каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

8.20 Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

8.21 Найти координаты вектора \vec{b} , коллинеарного вектору $\vec{a} = (2;1;-1)$, при условии что $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$.

8.22 Даны точки $A(-1;0;2)$, $B(2;3;-4)$, $C(2;3;4)$. Найдите координаты вектора \overline{AD} , если известно, что точка D делит отрезок BC в отношении $\lambda = 3$.

8.23 Найдите направляющие косинусы вектора \overline{AB} , если $A(3;4;-5)$, $B(-1;8;-3)$.

8.24 Найдите вектор \vec{b} , ортогональный вектору $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и удовлетворяющий условиям $(\vec{b}, \vec{i}) = 3$; $(\vec{b}, \vec{j}) = 2$.

Ответы: **8.1** 1) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; 2) $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$; 3) $\vec{a} \perp \vec{b}$; 4) $\vec{a} = -\vec{b}$; 5) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; $\vec{a} \neq 0$; $\vec{b} \neq 0$.

8.2 1) $\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$; 2) $(6; -4; 12)$; 3) $(0; -1; 12)$.

8.3 Векторы противоположно направленные, вектор \vec{b} длиннее вектора \vec{a} в 3 раза.

8.4 1) $\alpha = -5$; 2) $\alpha = -10$; $\beta = -\frac{3}{5}$. **8.5** $\cos \alpha = \frac{6}{7}$; $\cos \beta = -\frac{2}{7}$; $\cos \gamma = -\frac{3}{7}$.

8.6 $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$. **8.7** 1) $\overline{AD} = (-1; 4; -2)$; 2) $O = \left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **8.8** $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$.

8.9 а) $\arccos \frac{18}{\sqrt{494}}$; б) $\frac{\sqrt{170}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{170}}{3}$. **8.10** $D(0; 1; 9)$. **8.11** -42 .

8.13 $\cos \angle A = -\frac{12}{49}$; $\cos \angle B = \frac{\sqrt{122}}{14}$; $\cos \angle C = \frac{\sqrt{122}}{14}$. **8.14** $-\frac{2}{3}$. **8.15** 5 . **8.16** 20 .

8.17 $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$, $\cos \varphi = \frac{20}{21}$. **8.18** $np_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b}) = -11$. **8.19** $\alpha = -6$. **8.20**

$\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$. **8.21** $\vec{b} = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. **8.22** $\overline{AD}(3; 3; 0)$. **8.23** $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$; $\cos \beta = \frac{2}{3}$; $\cos \gamma = \frac{1}{3}$.

8.24 $\vec{b}(3; 2; 7)$.

Занятие 9. Векторное и смешанное произведения векторов

Аудиторные задания

9.1 Векторы \vec{a} и \vec{b} ортогональны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: **1)** $||[\vec{a}, \vec{b}]||$; **2)** $||[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]||$; **3)** $||[(3\vec{a} + \vec{b}), (\vec{a} - \vec{b})]||$.

9.2 Даны векторы $\vec{a} = (3; -1; -2), \vec{b} = (1; 2; -1)$. Найти координаты векторных произведений: **1)** $[\vec{a}, \vec{b}]$; **2)** $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$; **3)** $[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$.

9.3 Найдите какой-либо ненулевой вектор \vec{c} , перпендикулярный векторам $\vec{a} = (1; 2; 3)$ и $\vec{b} = (0; 2; 5)$.

9.4 Вычислите синус угла, образованного векторами $\vec{a} = 6\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

9.5 Даны вершины треугольника $A(1; -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3; -1)$. Вычислить площадь треугольника и длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

9.6 Докажите справедливость тождества $[\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$ и выясните его геометрический смысл.

9.7 Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}; \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$. Найдите: **1)** $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$; **2)** $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.

9.8 Известно, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Докажите, что $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}] = [\vec{b}, \vec{c}]$.

9.9 Сила $\vec{F} = (3; 4; 2)$ приложена к точке $C = (-2; 1; -2)$. Определите величину и направляющие косинусы момента силы относительно начала координат.

9.10 Выясните, компланарны ли векторы:

а) $\vec{a} = (0; 1; 1), \vec{b} = (1; 1; 1), \vec{c} = (1; 0; 0)$; **б)** $\vec{a} = (4; -2; 0), \vec{b} = (-3; 6; 3), \vec{c} = (1; 4; -5)$.

9.11 Доказать, что четыре точки $A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

9.12 Даны вершины тетраэдра: $A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(-5; -4; 8)$. Найти объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины D .

9.13 Выясните ориентацию тройки векторов:

1) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}; \vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}, \vec{c} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$;

2) $\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}; \vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

9.14 Найти длину высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах \vec{a} и \vec{b} .

Домашние задания

9.15 Найти вектор \vec{c} , ортогональный векторам $\vec{a} = (2; -3; 1)$ и $\vec{b} = (1; -2; 3)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{c}, \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

9.16 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (0; -1; 1)$ и $\vec{b} = (1; 1; 1)$.

9.17 Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = (2; -2; 1)$ и $\vec{b} = (2; 3; 6)$.

9.18 Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -1; 3)$, $\vec{c} = (1; 9; -11)$.

9.19 Лежат ли точки $A(5; 5; 4)$, $B(3; 8; 4)$, $C(3; 5; 10)$, $D(5; 8; 2)$ в одной плоскости?

9.20 Выяснить, правой или левой будет тройка векторов $\vec{a} = (3; 4; 0)$, $\vec{b} = (0; -4; 1)$, $\vec{c} = (0; 2; 5)$.

9.21 Вычислите объем тетраэдра $ABCD$ и длину высоты, опущенную из точки D на основание ABC , если известны координаты его вершин $A(0, 0, 1)$, $B(-3, 2, 3)$, $C(2, -1, 3)$, $D(1, 3, 8)$.

9.22 Даны три силы $\vec{F}_1 = (2; -1; 3)$, $\vec{F}_2 = (3; 2; -1)$, $\vec{F}_3 = (-4; 1; -3)$, приложенные к точке $C = (-1; 4; -2)$. Определите величину и направляющие косинусы момента равнодействующей силы относительно точки $A = (2; 3; -1)$.

Ответы: **9.1** 1) 12; 2) 24; 3) 48. **9.2** 1) (5; 1; 7); 2) (10; 2; 14); 3) (20; 4; 28). **9.3** $\vec{c} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

9.4 $\sqrt{\frac{23}{185}}$. **9.5** 2; 5. **9.6** Площадь параллелограмма, сторонами которого являются диагонали данного параллелограмма, равна удвоенной площади данного параллелограмма.

9.7 1) $-4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$; 2) $2\vec{j} + 2\vec{k}$. **9.9** 15; $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\cos \beta = -\frac{2}{15}$; $\cos \gamma = -\frac{11}{15}$. **9.10** а) да;

б) нет. **9.12** $\frac{154}{3}$; 11. **9.13** 1) правая тройка; 2) левая тройка. **9.14** $\frac{16}{3\sqrt{14}}$. **9.15** $\vec{c} = (7, 5, 1)$.

9.16 $\sqrt{6}$. **9.17** $\sin \varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$. **9.18** Компланарны. **9.19** Нет, не лежат. **9.20** Левая.

9.21 $\frac{29}{6}$, $\frac{29}{\sqrt{137}}$. **9.22** $\sqrt{66}$; $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{66}}$; $\cos \beta = \frac{4}{\sqrt{66}}$; $\cos \gamma = \frac{7}{\sqrt{66}}$.

Занятие 10. Прямая на плоскости

Аудиторные задания

10.1 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 2)$, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, если $M_1(2; -7)$, $M_2(3; 2)$.

10.2 Написать каноническое и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3; -2)$ параллельно: 1) вектору $\vec{s}(1; 5)$; 2) оси Oy .

10.3 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 8)$ и образующей с осью абсцисс угол, равный $\frac{3\pi}{4}$.

10.4 Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2; 1)$, $M_2(4; 5)$, и найти точки ее пересечения с осями координат.

10.5 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4; 3)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

10.6 При каком значении A прямая $Ax + 4y - 13 = 0$ образует с осью Ox угол $\alpha = 45^\circ$?

10.7 Даны вершины треугольника $A(2; -3)$, $B(4; 5)$, $C(-3; 4)$. Найти: 1) уравнение стороны AB ; 2) уравнение медианы, проведенной из вершины C ; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины C .

10.8 Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе второго координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3.

10.9 Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -3)$: 1) параллельно прямой $y = 2x - 9$; 2) перпендикулярно прямой $x + 3y - 2 = 0$.

10.10 Каково взаимное расположение двух прямых, угловые коэффициенты которых равны $-2,5$ и $-0,4$?

10.11 Найдите расстояние от точки $M(-1; 2)$ до прямой:

$$1) \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 + 3t, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = -3 - 3t. \end{cases}$$

10.12 Какие прямые данной пары пересекаются, параллельны или совпадают? Если прямые пересекаются, найдите координаты точки их пересечения:

$$1) 2x + y - 1 = 0 \text{ и } x - 3y - 2 = 0; \quad 2) 2x + 6y = 2 \text{ и } x + 3y - 1 = 0;$$

$$3) -x - y = 3 \text{ и } 3x + 3y + 1 = 0; \quad 4) \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} \text{ и } \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{1}.$$

10.13 Найти расстояние между прямыми $12x - 5y - 26 = 0$ и $12x - 5y + 13 = 0$.

10.14 Найти проекцию точки $A(2;6)$ на прямую $3x+4y-5=0$.

Домашние задания

10.15 Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y-7=0$ и $x+3y-6=0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.

10.16 Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1;-3), B(3;5), C(5;2), D(3;-5)$.

10.17 Даны вершины треугольника ABC : $A(1;2), B(2;-2), C(6;1)$. Найти:

1) уравнение стороны AB ;

2) уравнение высоты CH ;

3) уравнение медианы AM ;

4) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;

5) расстояние от точки C до прямой AB .

10.18 Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x+5y-15=0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

10.19 Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45° ; б) 90° ; в) 0° .

10.20 Найти точку B , симметричную точке $A(8;12)$ относительно прямой $x-2y+6=0$.

10.21 Найти один из углов между прямыми:

1) $2x+3y-5=0$ и $x-3y-7=0$; 2) $\begin{cases} x=4 \\ y=t+7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=\sqrt{3}t+2 \end{cases}$.

Ответы: **10.1** $x+9y-17=0$. **10.2 1)** $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{5}$, $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+5t \end{cases}$; **2)** $\frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{1}$, $x=3$.

10.3 $x+y-7=0$. **10.4** $2x-y-3=0; (0;-3), (1,5;0)$. **10.5** $4x+3y-25=0$. **10.6** -4 .

10.7 1) $4x-y-11=0$; **2)** $x+2y-5=0$; **3)** $x+4y-13=0$. **10.8** $y=-x+3$.

10.9 1) $2x-y-7=0$; **2)** $3x-y-9=0$. **10.10** Пересекаются. **10.11 1)** 0 ; **2)** $\frac{8}{\sqrt{13}}$.

10.12 1) $\left(\frac{5}{7}; -\frac{3}{7}\right)$; **2)** совпадают; **3)** параллельны; **4)** $(9;-5)$. **10.13** 3 . **10.14** $(-1,2)$.

10.15 $x=3$. **10.16** $O(3;1/3)$. **10.17 1)** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4}$; **2)** $x-4y-2=0$; **3)** $5x+6y-17=0$;

4) $4x + y - 25 = 0$; 5) $\frac{19}{\sqrt{17}}$. **10.18** $5x - 3y - 25 = 0, 5x - 3y + 9 = 0$. **10.19** 1) $x - y + 5 = 0$;

2) $x + 2 = 0$; 3) $y - 3 = 0$. **10.20** $B(12; 4)$. **10.21** 1) $\arccos \frac{7}{\sqrt{130}}$; 2) $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Занятие 11. Плоскость

Аудиторные задания

11.1 Даны точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

11.2 Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки: 1) $M_1(3; -1; 2), M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$; 2) $M_1(1; 3; 4), M_2(3; 0; 2)$ и $M_3(2; 5; 7)$.

11.3 Укажите особенности в расположении относительно системы координат $Ox-uz$ плоскости, заданной уравнением: 1) $3y + 2z - 1 = 0$; 2) $2x + y - 5z = 0$; 3) $2x - y - 1 = 0$; 4) $2x + y = 0$; 5) $x + z = 0$; 6) $3y - 4z = 0$; 7) $2x + 3 = 0$; 8) $z + 4 = 0$; 9) $y = 0$.

11.4 Найдите длины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью $3x - 2y + z - 6 = 0$.

11.5 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -1; 0)$ параллельно векторам: 1) $\vec{a} = (0; 2; 3)$ и $\vec{b} = (-1; 4; 2)$; 2) $\vec{s}_1 = (2; -1; 3)$ и $\vec{s}_2 = (3; 0; 1)$.

11.6 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -3; -2)$ параллельно: 1) плоскости $3x - 2y + 4z - 3 = 0$; 2) плоскости Oyz .

11.7 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 0; -2)$ перпендикулярно к плоскостям $x - 2y + z + 5 = 0$ и $2x - y + 3z - 1 = 0$.

11.8 Найдите угол между плоскостями: 1) $x + 4y - z + 1 = 0$ и $x + y - z - 3 = 0$; 2) $x + 2y - z + 5 = 0$ и $2x - y + z - 3 = 0$.

11.9 Дана пирамида с вершинами $A(2; 2; -3), B(3; 1; 1), C(-1; 0; 5), D(4; -2; -3)$. Найдите длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC .

11.10 Установите, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

1) $x - y + 3z + 1 = 0$ и $2x - y + 5z - 2 = 0$;

2) $3x + 2y - z + 2 = 0$ и $6x + 4y - 2z + 1 = 0$;

3) $2x + 6y + 2z - 4 = 0$ и $3x + 9y + 3z - 6 = 0$.

11.11 Найдите расстояние между плоскостями $2x - 3y + 6z - 21 = 0$ и $4x - 6y + 12z + 35 = 0$.

Домашние задания

11.12 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно к вектору \vec{n} , если: **1)** $M(3;5;-1); \vec{n}(13;2;1)$; **2)** $M(2;0;0); \vec{n}(0;7;0)$; **3)** $M(0;3;-1); \vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_1(1;-1;0), M_2(3;0;2)$.

11.13 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;2;3)$, параллельно плоскости, проходящей через точки $M_1(1;0;-2), M_2(3;4;5), M_3(-1;2;0)$.

11.14 Определите, при каком значении параметра α плоскость $\alpha x + (2\alpha - 1)y + z - 5 = 0$:

- 1) параллельна плоскости $2x + 3y + z - 4 = 0$;
- 2) параллельна плоскости $y - z + 7 = 0$;
- 3) перпендикулярна к плоскости $3x + y - z = 0$;
- 4) перпендикулярна к плоскости Oxz .

11.15 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(2;1;1)$ перпендикулярно к плоскости $3x + 4y + z - 6 = 0$.

11.16 Найдите расстояние от точки $M(2;1;1)$ до плоскости $x + y - z + 1 = 0$.

11.17 Найдите точку пересечения плоскостей $x + y + z - 6 = 0, 2x - y + z - 3 = 0, x + 2y - z - 2 = 0$.

Ответы: **11.1** $x - y - 3z + 2 = 0$. **11.2** **1)** $3x + 3y + z - 8 = 0$; **2)** $5x + 8y - 7z - 1 = 0$.

11.3 **1)** параллельно оси Ox ; **2)** проходит через начало координат; **3)** параллельна оси Oz ; **4)** проходит через ось Oz ; **5)** проходит через ось Oy ; **6)** проходит через ось Ox ; **7)** параллельна плоскости Oyz ; **8)** параллельна плоскости Oxy ; **9)** совпадает с плоскостью Oxz . **11.4** **2;** **3;** **6.** **11.5** **1)** $8x + 3y - 2z - 5 = 0$; **2)** $x - 7y - 3z - 8 = 0$. **11.6** **1)** $3x - 2y + 4z - 1 = 0$;

2) $x = 1$. **11.7** $5x + y - 3z - 11 = 0$. **11.8** $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$. **11.9** **1)** пересекаются; **2)** параллельны;

3) совпадают. **11.10** $h = 5$. **11.11** $5,5$. **11.12** **1)** $13x + 2y + z - 48 = 0$; **2)** $y = 0$;

3) $2x + y + 2z - 1 = 0$. **11.13** $x + 3y - 2z + 1 = 0$. **11.14** **1)** $\alpha = 2$; **2)** $\alpha = 0$; **3)** $\alpha = 0,4$; **4)**

$\alpha = 0,5$. **11.15** $x - y + z - 2 = 0$. **11.16** $\sqrt{3}$. **11.17** $(1;2;3)$.

Занятие 12. Прямая в пространстве. Прямая и плоскость в пространстве

Аудиторные задания

12.1 Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;0;-3)$ параллельно вектору $\vec{a} = (2;-3;5)$.

12.2 Составьте канонические и параметрические уравнения прямой:

$$1) \begin{cases} x+y+2z-3=0, \\ x-y+z-1=0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x+y+z-1=0, \\ 3x+2y+z-2=0. \end{cases}$$

12.3 Найдите угол между прямыми $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1}$ и $\frac{x+1}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-10}{6}$.

12.4 При каких значениях a прямые $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}$:

1) пересекаются; 2) скрещиваются; 3) параллельны; 4) совпадают?

12.5 Составьте уравнения сторон треугольника с вершинами в точках $A(-3;2;1)$; $B(1;-1;0)$; $C(2;3;-5)$.

12.6 Найдите уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;-5;4)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{4}$.

12.7 Выясните взаимное расположение прямой и плоскости: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{5}$ и

$$x-3y+2z-5=0.$$

12.8 Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;-1;3)$ перпендикулярно плоскости $3x-y+2z-4=0$.

12.9 Найдите угол между прямой и плоскостью:

$$1) \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-6} \quad \text{и} \quad 4x+4y-7z+1=0; \quad 2) \begin{cases} x+4y-2z+7=0, \\ 3x+7y-2z=0 \end{cases} \quad \text{и}$$

$$3x+y-z+1=0.$$

12.10 Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;0;-3)$ параллельно прямым $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$.

12.11 Найдите координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x-y+2z+5=0$.

12.12 Найдите проекцию точки $A(3; -1; 4)$ на плоскость $2x + y - z + 5 = 0$.

12.13 Найдите точку A , симметричную точке $P(6; -5; 5)$ относительно плоскости $2x - y + z - 4 = 0$.

12.14 Найдите проекцию точки $A(2; 3; 1)$ на прямую $\frac{x+7}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$ и расстояние от этой точки до данной прямой.

Домашние задания

12.15 Составьте уравнения прямой, проходящей через точку $M(4; -3; 2)$: **1)** параллельно оси Ox ; **2)** параллельно оси Oz ; **3)** перпендикулярно к плоскости $x - 3y + 2z - 5 = 0$; **4)** перпендикулярно к плоскости Oxz .

12.16 Вычислите угол между прямой $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $2x + 3y - z + 1 = 0$.

12.17 Найдите уравнения перпендикуляра, проведенного из точки $A(3; -5; 1)$ на плоскость: **1)** $2x - y + 5z + 3 = 0$; **2)** $3x - 2z + 4 = 0$; **3)** $y - 1 = 0$.

12.18 Пересекаются ли прямые:

1) $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $\frac{x}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{5}$; **2)** $\begin{cases} x + 3y - 4z + 7 = 0, \\ 3x + y + 2z - 5 = 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y + 3z - 6 = 0, \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$?

12.19 Составьте параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3; 6; -7), B(-5; 1; -4), C(0; 2; 3)$, проведенной из вершины C .

12.20 Найдите координаты точки Q , симметричной точке $P(-3; 1; -9)$ относительно плоскости $4x - 3y - z - 7 = 0$.

12.21 Найти координаты точки Q , симметричной точке $P(2; -5; 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5; 4; 6)$ и $M_2(-2; -17; -8)$.

12.22 Найдите угол между прямыми:

1) $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{0}$ и осью Ox ; **2)** $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} y + z = 0, \\ y - z + 2 = 0. \end{cases}$

Ответы: 12.1 $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}; \begin{cases} x = 2+2t, \\ y = -3t, \\ z = -3+5t. \end{cases}$ 12.2 1) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}; \begin{cases} x = 2+3t, \\ y = 1+t, \\ z = -2t. \end{cases}$

2) $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}; \begin{cases} x = -1-t, \\ y = 2+t, \\ z = 1+t. \end{cases}$ 12.3 $\frac{\pi}{2}$. 12.4 1) $a=3$; 2) $a \neq \pm 1; a \neq 3$; 3) $a=-1$;

4) $a=1$. 12.5 $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{-1}; \frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-6}; \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-5}$. 12.6 $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-4}{4}$.

12.7 Прямая параллельна плоскости. 12.8 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$. 12.9 1) $\arcsin\left(\frac{62}{63}\right)$;

2) $\arcsin\left(\frac{19}{11\sqrt{7}}\right)$. 12.10 $x+2y-5z-17=0$. 12.11 $(-3; -4; 0)$. 12.12. $(1; -2; 5)$. 12.13

$A(-2; 7; 1)$.

12.14 $(-5; 2; 4); \sqrt{59}$. 12.15 1) $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-2}{0}$; 2) $\frac{x-4}{0} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-2}{1}$; 3) $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{2}$;

4) $\frac{x-4}{0} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{0}$. 12.16 $\sin \varphi = \frac{5}{7}; \varphi \approx 45^\circ 36'$. 12.17 1) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-1}{5}$;

2) $\frac{x-3}{3} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-1}{-2}$; 3) $\frac{x-3}{0} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-1}{0}$. 12.18 1) нет; 2) да. 12.19 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = -3t + 2, \\ z = 17t + 3. \end{cases}$

12.20 $Q(1; -2; -10)$. 12.21 $Q(4; 1; -3)$. 12.22. 1) $\cos \varphi = \frac{3}{5}$; 2) $\cos \varphi = \frac{6}{\sqrt{61}}$.

Занятие 13. Кривые второго порядка на плоскости

Аудиторные задания

13.1 Для следующих эллипсов и гипербол найдите: а) полуоси; б) расстояние между фокусами; в) эксцентриситет ε ; г) координаты фокусов; д) координаты вершин; е) для гипербол составьте уравнения асимптот.

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = -1$; 4) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

13.2 Составьте уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс и симметричны относительно начала координат, если:

1) его полуоси равны 1 и 7;

2) расстояние между фокусами равно 8 и малая полуось равна 3;

3) большая полуось равна 5 и точка $M_0(3;-2;4)$ лежит на эллипсе.

13.3 Составьте уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат и симметричны относительно начала координат, если:

1) его полуоси равны 2 и 5;

2) расстояние между фокусами равно 12 и большая полуось 13;

3) малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

13.4 Составьте уравнение гиперболы, если:

1) ее фокусы находятся в точках $F_1(7;0)$, $F_2(-7;0)$, а действительная полуось равна 5;

2) гипербола проходит через точку $M_0(6;-2,5\sqrt{3})$, а ее вершины находятся в точках $A_1(-4;0)$, $A_2(4;0)$.

13.5 Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси ординат и симметричны относительно начала координат, если:

1) ее действительная и мнимая полуоси равны 11 и 4 соответственно;

2) расстояние между фокусами равно 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

3) уравнение одной из асимптот $y = \frac{3}{4}x$, а действительная полуось равна 6.

13.6 Составьте каноническое уравнение параболы, если:

1) ее вершина совпадает с началом координат, а фокус находится в точке $F(2;0)$;

2) ветви направлены вверх, а параметр равен 4;

3) уравнение директрисы $y = 3$, а фокус находится в точке $F(0;-3)$;

4) ее вершина совпадает с началом координат, парабола проходит через точку $M_0(9;-6)$ и ось абсцисс является осью параболы.

13.7 Определите вид и расположение линии 2-го порядка, постройте ее:

1) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$;

2) $9x^2 - 16y^2 + 54x + 64y - 127 = 0$;

3) $x^2 - 10x - 8y + 49 = 0$;

- 4) $y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$;
- 5) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y + 7 = 0$;
- 6) $x^2 + 4y^2 + 4x - 32y + 68 = 0$.

Домашние задания

13.8 Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

- 1) расстояние между фокусами равно 8, малая полуось равна 3;
- 2) малая полуось равна 6, эксцентриситет равен $4/5$.

13.9 Найти координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2 + y^2 = 4$.

13.10 Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; -1\right)$ и $M_2\left(-1; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$, и найти его эксцентриситет.

13.11 Найти уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями $x \pm 2y = 0$, а расстояние между вершинами, лежащими на оси Ox , равно 4.

13.12 Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

- 1) расстояние между фокусами равно 30, а расстояние между вершинами равно 24;
- 2) действительная полуось равна 4 и гипербола проходит через точку $M(2; 4\sqrt{2})$.

13.13 Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $6x^2 + 5y^2 = 30$.

13.14 Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что:

- 1) парабола имеет фокус $F(0;2)$ и вершину в точке $O(0;0)$;
- 2) парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $M(4; -2)$.

13.15 Найти длину общей хорды параболы $y = 2x^2$ и окружности $x^2 + y^2 = 5$.

13.16 Написать уравнение параболы, проходящей через точки $(0; 0)$ и $(-2; 4)$, если парабола симметрична: **1)** относительно оси Ox ; **2)** относительно оси Oy .

13.17 Составить канонические уравнения парабол, фокусы которых совпадают с фокусами гиперболы $x^2 - y^2 = 8$.

13.18 Выяснить, какая фигура соответствует каждому из данных уравнений, и (в случае непустого множества) изобразить ее в системе координат Oxy :

- 1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$;

$$2) 3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y + 20 = 0;$$

$$3) y^2 - 3x - 4y + 10 = 0;$$

$$4) 2x^2 + 3y^2 + 6x + 6y + 25 = 0.$$

$$5) 4x^2 + 25y^2 + 4x - 10y - 8 = 0;$$

$$6) x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0;$$

$$7) x^2 - 6x + 2y + 11 = 0.$$

Ответы: 13.1 1) а) $a=4; b=5$; б) $2c=6$; в) $\varepsilon = \frac{3}{5}$; г) $F_1(0;-3), F_2(0;3)$;

д) $(4;0), (-4;0), (0;5), (0;-5)$;

2) а) $a=5; b=4$; б) $2c=6$; в) $\varepsilon = \frac{3}{5}$; г) $F_1(3;0), F_2(-3;0)$; д) $(5;0), (-5;0), (0;4), (0;-4)$;

3) а) $a=12; b=5$; б) $2c=26$; в) $\varepsilon = \frac{13}{5}$; г) $F_1(0;-13), F_2(0;13)$; д) $A_1(0;-5), A_2(0;5)$;

е) $y = \pm \frac{5}{12}x$; 4) а) $a=12; b=5$; б) $2c=26$; в) $\varepsilon = \frac{13}{12}$; г) $F_1(13;0), F_2(-13;0)$;

д) $A_1(-12;0), A_2(12;0)$; е) $y = \pm \frac{5}{12}x$.

$$13.2 \text{ 1) } \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1; \text{ 2) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1; \text{ 3) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$13.3 \text{ 1) } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1; \text{ 2) } \frac{x^2}{133} + \frac{y^2}{169} = 1; \text{ 3) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1.$$

$$13.4 \text{ 1) } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1; \text{ 2) } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{15} = 1.$$

$$13.5 \text{ 1) } \frac{y^2}{121} - \frac{x^2}{16} = 1; \text{ 2) } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1; \text{ 3) } \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1.$$

$$13.6 \text{ 1) } y^2 = 8x; \text{ 2) } x^2 = 8y; \text{ 3) } x^2 = -12y; \text{ 4) } y^2 = 4x.$$

13.7 Во всех задачах новые координатные оси Ox, Oy, Oz сонаправлены старым, начало координат новой системы координат находится в точке O' .

1) эллипс $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1, O'(1;-2)$; 2) гипербола $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1, O'(-3;2)$;

3) парабола $X^2 = 8Y, O'(5;3)$; 4) парабола $Y^2 = 2X, O'(-3;2)$;

5) пара пересекающихся прямых $2x - 3y - 7 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$; 6) точка $O'(-2;4)$.

13.8 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1; \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

13.9 $F_1(0, -\sqrt{3}), F_2(0, \sqrt{3}), \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 13.10 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 13.11 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$.

13.12. 1) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1; \frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{81} = 1$; 2) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$. 13.13 $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{5} = 1$. 13.14 1) $x^2 = 8y$;

2) $y^2 = x$. 13.15 2. 13.16 1) $y^2 = -8x$; 2) $y = x^2$. 13.17 $y^2 = \pm 16x$.

13.18 1) окружность $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 12$; 2) гипербола $\frac{(y+1)^2}{3} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$;

3) парабола $(y-2)^2 = 3(x-2)$; 4) пустое множество; 5) эллипс $\frac{(x+0,5)^2}{2,5} + \frac{(y-0,2)^2}{0,4} = 1$;

6) пара пересекающихся прямых $x + y + 2 = 0; x - y = 0$; 7) парабола $(x-3)^2 = -2(y+1)$.

Занятие 14. Поверхности второго порядка

Аудиторные задания

14.1 Определите вид поверхностей и их расположение относительно координатных осей:

1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1$; 3) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = 1$;

4) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{49} = -1$; 5) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 2z$; 6) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 0$;

7) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1$; 8) $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{25} = -2x$; 9) $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{100} = 1$;

10) $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1$; 11) $z^2 = 18x$.

14.2 Привести к каноническому виду уравнение 2-го порядка, используя преобразование параллельного переноса, определить вид поверхности и ее расположение относительно новой системы координат:

1) $9x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 18x + 16z - 11 = 0$; 2) $9x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 18x - 16z - 43 = 0$;

3) $9x^2 - 4y^2 + 4z^2 + 18x + 16z + 25 = 0$; 4) $9y^2 + 4z^2 = 36x + 72$;

5) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$; 6) $y^2 = 4x + 16$; 7) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 2z - 10 = 0$.

14.3 Постройте тело, ограниченное поверхностями:

1) $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$; $z = 1$; $y = x$; $y = x\sqrt{3}$, расположенное в первом октанте;

2) $x^2 + y^2 = 2x$; $z = 0$; $z = x^2 + y^2$; 3) $z = x^2 + y^2 + 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x = 4$; $y = 4$;

4) $z = x^2 - y^2$; $z = 0$; $x = 3$; 5) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x^2 + y^2 = 3a$.

Домашние задания

14.4 Определить вид поверхности и построить ее:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$; 2) $x = y^2 + 2z^2$; 3) $2x^2 - y^2 + z^2 = 4$;

4) $2x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$; 5) $z^2 = 4x$; 6) $x^2 + z^2 = 5$;

7) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$; 8) $x^2 + 3z^2 - 8x + 18z + 34 = 0$; 9) $5x^2 + y^2 + 10x - 6y - 10z + 14 = 0$;

Ответы: 14.1 1) эллипсоид; 2) двуполостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Oz ; 3) двуполостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Ox ; 4) двуполостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Oy ; 5) эллиптический параболоид, вытянутый в положительном направлении оси Oz ; 6) конус, вытянутый вдоль оси Ox ; 7) однополостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Ox ; 8) эллиптический параболоид, вытянутый в отрицательном направлении оси Ox ; 9) эллиптический цилиндр, образующие параллельны оси Oy ; 10) гиперболоидический цилиндр, образующие параллельны оси Oy ; 11) параболический цилиндр, образующие параллельны оси Oy .

14.2 Во всех задачах новые координатные оси OX , OY , OZ сонаправлены старым, начало координат новой системы координат находится в точке O' .

1) эллипсоид $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} + \frac{Z^2}{9} = 1$; $O'(1;0;-2)$;

2) однополостный гиперболоид $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} - \frac{Z^2}{9} = 1$, вытянутый вдоль оси OZ , $O'(1;0;-2)$;

3) конус второго порядка $9X^2 - 4Y^2 + 4Z^2 = 0$, вытянутый вдоль оси OY , $O'(-1;0;-2)$;

4) эллиптический параболоид $\frac{Y^2}{4} + \frac{Z^2}{9} = X$, вытянутый в положительном направлении оси OX , $O'(-2;0;0)$;

5) эллиптический цилиндр (круговой) $X^2 + Y^2 = 1$, образующие параллельны оси OZ , $O'(-3;2;0)$;

6) параболический цилиндр $Y^2 = 4X$, образующие параллельны оси OZ , $O'(-4;0;0)$;

7) сфера $X^2 + Y^2 + Z^2 = 4$, $O'(-3;2;-1)$.

14.4 1) сфера $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = \frac{25}{2}$; 2) эллиптический параболоид;

3) однополостный гиперболоид; 4) коническая поверхность; 5) параболический цилиндр;

6) круговой цилиндр; 7) сфера $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$; 8) эллиптический цилиндр

$\frac{(x - 4)^2}{9} + \frac{(z + 3)^2}{3} = 1$; 9) эллиптический параболоид $z = \frac{(x + 1)^2}{2} + \frac{(y - 3)^2}{10}$.

Занятие 15. Функция. Предел последовательности и предел функции

Аудиторные задания

15.1 Найти области определения функций:

1) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$; 2) $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$; 3) $y = \sqrt{25 - x^2} + \lg \sin x$; 4) $y = 2^{x^2 - 2}$.

15.2 Проверить функции на четность или нечетность:

1) $f(x) = x^4 + 5x^2$; 2) $f(x) = x^2 + x$; 3) $f(x) = \frac{x}{2^x - 1}$; 4) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

15.3 Построить графики функций:

1) $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$; 2) $y = |3x + 4 - x^2|$; 3) $y = -2 \sin(2x + 2)$; 4) $y = x \sin x$.

15.4 Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 2x - 3)$; 2) $\lim_{x \rightarrow -3} (x+3)^2(x-1)$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-3x-x^2}{2x^2+x-3}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{2-x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x+1}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x}{5-3x^2+4x^4}$; 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x^2+x^3}{2x+1}$;
- 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{5n+7} - \frac{1+2n^3}{2+5n^3} \right)$; 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$; 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n+2}}{n+1}$;
- 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$; 13) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{4-x^2}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-27}{81-x^4}$; 15) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x^2-6x+5}$; 17) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2+5x-9}{2x^2+3x-5}$; 18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$; 19) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4}-4}{\sqrt{x}-2}$;
- 20) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{3-x}}$; 21) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$; 22) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$;
- 23) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-2n-1} - \sqrt{n^2-7n+3})$; 24) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1})$;
- 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$; 26) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$; 27) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$; 28) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \sin n}{n+1}$;
- 29) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^2-7x+6}$; 30) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$; 31) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n}{3^n-5^n}$; 32) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

Домашние задания

15.5 Найти пределы указанных последовательностей функций:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+4x^2+3x^3}{x^3-7x-10}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2-1}$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n-3}{5^{n+1}+2}$; 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1+2+3+\dots+n)$; 6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2-10x-8}{16-x^2}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2+1} \right) \right)$; 12) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^2} \right)$; 13) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{7-3x}-4}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{x^2+3x-2} \right)$; 15) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$.

Ответы: 15.1 1) $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$; 3) $[-5; -\pi) \cup (0; \pi)$; 4) $(-\infty; +\infty)$.

15.2 1) четная; 2) ни четная, ни нечетная; 3) ни четная, ни нечетная; 4) нечетная.

15.4 1) 1; 2) 0; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) ∞ ; 5) 0; 6) $\frac{5}{3}$; 7) 0; 8) ∞ ; 9) 0; 10) 3; 11) 0; 12) 0; 13) -3 ; 14) $-\frac{1}{6}$;

15) $-\frac{2}{5}$; 16) $\frac{5}{2}$; 17) $\frac{13}{7}$; 18) $\frac{1}{6}$; 19) $\frac{3}{2}$; 20) $\frac{1}{3}$; 21) $-\frac{1}{6}$; 22) 0; 23) $\frac{5}{2}$; 24) 1; 25) 3; 26) $\frac{2}{3}$;

27) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; 28) 0; 29) $\frac{3}{5}$; 30) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 31) -1 ; 32) -1 .

15.5 1) 3; 2) 0; 3) 0; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{7}{4}$; 7) -1 ; 8) 40; 9) $\frac{3}{2}$; 10) $-\frac{1}{3}$; 11) 2; 12) ∞ ; 13)

$\frac{40}{3}$;

14) 3; 15) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Занятие 16. Первый и второй замечательные пределы

Аудиторные задания

16.1 Вычислить, воспользовавшись первым замечательным пределом:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 2x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3 \arcsin 2x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{2x}$;

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 5x \cdot \cos 2x}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+4} - 2}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{\sin(2(x-1))}$; 13) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{x^2 - 4x - 5}$;

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \sin 3x} - \sqrt{2 - \sin 3x}}{5 \operatorname{tg} 2x}$; 15) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$; 16) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\pi - 4x}$;

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{4x \operatorname{tg} 3x}$; 18) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$; 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right)$;

20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \operatorname{arctg} 5x}{\cos x - \cos 4x}$; 21) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$.

16.2 Используя второй замечательный предел, найти:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{1/x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{2x-3}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-6}{x+5}\right)^{x+2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^x$;
 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-7x)^{3/x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7x+3}{9x+3}\right)^{1/x}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{6x-3}\right)^x$; 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} ((2x+1)(\ln(3x+1) - \ln(3x-2)))$;
 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6-x}{7-x}\right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}$; 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$; 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x-4)(\ln(2-3x) - \ln(5-3x)))$;
 12) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}$; 13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2}\right)^x$; 14) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;
 15) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{(1-x)/x}$; 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{x}$; 17) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{2x/(x-1)}$.

16.3 Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{1/2x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2)^{1/\sin x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$;
 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^x - 1}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x} - 1}{x}$.

Домашние задания

16.4 Найти пределы следующих функций:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{2 \operatorname{arctg} 3x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3 \sin x \operatorname{tg} 3x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{1 - \sqrt{1-x^2}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 4x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 2x}}$;
 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2 \sin x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 7x + 3}{\operatorname{tg}(2x-1)}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2 \cos x}$; 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}$;
 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-3x}{1-2x}\right)^{1/x}$; 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x(\ln(2+x) - \ln x))$; 11) $\lim_{x \rightarrow 1} (4-3x)^{5x^2/(1-x)}$;
 12) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/\sin^2 x}$; 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{x}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1}$; 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\sin x}$.

Ответы: 16.1 1) 5; 2) 1/3; 3) 7/2; 4) 2/3; 5) 5/2; 6) 1/2; 7) 6; 8) 9/25; 9) 4; 10) 1/2; 11) 12;

12) $-5/2$; 13) $-1/6$; 14) $\frac{3}{10\sqrt{2}}$; 15) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 16) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; 17) 1/3; 18) 0; 19) 0; 20) 2; 21) 1.

16.2 1) e^2 ; 2) e^2 ; 3) e^{-11} ; 4) e^{-2} ; 5) e^{-21} ; 6) $e^{-2/3}$; 7) 0; 8) 2; 9) e^{-1} ; 10) e^{-1} ; 11) 1; 12) e ;
13) e^2 ; 14) e^3 ; 15) e^{-4} ; 16) 7; 17) e^4 .

16.3 1) $e^{-1/2}$; 2) \sqrt{e} ; 3) e ; 4) 2/3; 5) 2; 6) $1/\ln 3$; 7) $2\ln a$.

16.4 1) 4/3; 2) 8/9; 3) -8 ; 4) 1; 5) ∞ ; 6) $-\frac{5}{2}$; 7) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 8) e^{-6} ; 9) e^{-1} ; 10) 2; 11) e^{15} ; 12) e^{-2} ;

13) $3\ln 2$; 14) e ; 15) 7.

Занятие 17. Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функций.

Точки разрыва

Аудиторные задания

17.1 Вычислить пределы, используя теорему об отношении двух бесконечно малых функций:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{2 \operatorname{tg} 3x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 10x}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 3(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$; 6) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2 - 25}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 4x}{\operatorname{arctg}^3 2x}$; 8)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + \sqrt{7x})}{1 - e^{x/3}}.$$

17.2 Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва:

1) $f(x) = \frac{x}{x-1}$; 2) $f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x-2}$; 3) $f(x) = 3^{4-x^2}$; 4) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$; 5)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3};$$

6) $f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$; 7) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -\infty < x \leq 1, \\ x^2 + 1, & x > 1. \end{cases}$; 8) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\infty < x \leq 1, \\ x^2 - 3, & 1 < x < 2, \\ x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$ 9) $f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-2}} - 1}{5^{\frac{1}{x-2}} + 1}$;

10) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$.

Домашние задания

17.3 Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\sin 2x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 7x} - 1}{x^2 + 3x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{\arcsin(1-2x)}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\operatorname{tg}(x^2 - 3x + 2)};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 3x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin^3(x-3)}{(e^{x-3} - 1)^2 \operatorname{arctg} x}.$$

17.4 Исследовать на непрерывность функции; установить характер точек разрыва:

$$1) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 + 2x}; \quad 2) f(x) = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}; \quad 3) f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2, \\ x-2, & 2 < x \leq 4, \\ -2\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases} \quad \text{Построить график функции;}$$

$$4) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}; \quad 5) f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & -\infty \leq x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi, \\ x - \pi - 1, & x > \pi. \end{cases} \quad \text{Построить график функции;}$$

$$6) f(x) = \frac{1 - \cos x}{2x^2 - x^3}.$$

Ответы: 17.1 1) 3; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 3; 6) $-\frac{1}{10}$; 7) 0; 8) -21 .

17.2 1) $x=1$ – точка разрыва 2-го рода; 2) $x=2$ – точка устранимого разрыва, $f(2)=1$;

3) $x=\pm 2$ – точки разрыва 2-го рода; 4) $x=1$ – точка устранимого разрыва, $f(1)=\frac{1}{2}$;

$x=-1$ – точка разрыва 2-го рода; 5) $x=3$ – точка разрыва 1-го рода; 6) $x=-1$ – точка разрыва 1-го рода; 7) функция непрерывна при $x \in R$; 8) $x=1$ – точка разрыва 1-го рода; 9) $x=2$ – точка разрыва 1-го рода; 10) $x=-1$ – точка устранимого разрыва; $f(-1)=3$.

17.3 1) $7/2$; 2) $7/3$; 3) -2 ; 4) 4; 5) $3/4$; 6) 0.

17.4 1) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $f(0)=\frac{1}{2}$; $x=-2$, $x=\frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k=0; \pm 1; \pm 2$ и т.д.)

– точки разрыва 2-го рода; 2) $x=0$ – точка разрыва 1-го рода; 3) $x=4$ – точка разрыва 1-го рода; 4) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $f(0)=2$; 5) всюду непрерывна; 6) $x=0$ –

точка устранимого разрыва, $f(0)=\frac{1}{4}$; $x=2$ – точка разрыва 2-го рода.

Занятие 18. Производная функции, ее геометрический и физический смысл

Аудиторные задания

18.1 Исходя из определения, найдите производные функций:

1) $y = 7x^2$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = 5(\operatorname{tg} x - x)$.

18.2 Найдите производные функций:

1) $y = 5x^4 - 8\sqrt[7]{x^3} + \frac{7}{x^5} + 4$; 2) $y = x^3 \sin 2x$; 3) $y = \frac{x^4 + 2x + 3}{x^5 - 1}$; 4) $y = (x^5 + 3x - 7)^4$;

5) $y = \sqrt[3]{\left(\frac{x^3 + 1}{x^7 - 2}\right)^2}$; 6) $y = \sqrt{x} \cdot \ln(2x^3 + 3x^2 - 2)$; 7) $y = \frac{\sin 4x - \cos \frac{x}{2}}{\sin 3x + \cos x}$; 8) $y = e^{-x^2} \cdot \log_3 \frac{1}{x}$;

9) $y = \sqrt{x^3} \cdot \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$; 10) $y = -\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{4} - 2 \ln \sin \frac{x}{2}$; 11) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x} + 2)$;

12) $y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$; 13) $y = \cos^5\left(\sin \frac{2x}{3}\right) + \sin\left(\cos \frac{x}{4}\right)$; 14) $y = 2^{-\sqrt{x}/\ln x}$;

15) $y = \arcsin \frac{2}{x} + \arccos \frac{1}{2}$; 16) $y = \log_a \ln x$.

18.3 Решите уравнение $f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = 0$, если $f(x) = x^3 \ln x$.

18.4 Решите неравенство $f'(x) + \varphi'(x) \geq 0$, если $f(x) = 2x^3 + 12x^2$,
 $\varphi(x) = 9x^2 + 72x$.

18.5 Вычислите значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + \frac{2x}{x+1} + 6$; $f'(1) = ?$ 2) $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x} + \sin \frac{\pi}{6}$; $f'(3) = ?$

3) $f(x) = \sin 8x \cos 4x$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$ 4) $f(x) = \frac{2 \cos x}{1 + \sin x}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

5) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3}}$; $f'(1) = ?$ 6) $f(x) = 4e^{-x^2} \cdot \arcsin \frac{x}{2}$; $f'(0) = ?$

7) $f(x) = 3^{-\sqrt{2x}}$; $f'(2) = ?$ 8) $f(x) = \ln \frac{2x}{1+4x}$; $f'(2) = ?$

$$9) f(x) = 5(x^2 - x) \cdot \cos^2 x; f'(0) = ? \quad 10) f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x}; f'(1) = ?$$

$$11) f(x) = \frac{2x - 4}{\sin^2 x}; f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$$

18.6 Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x^2 + 4$ в точке $M(1;5)$.

18.7 Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{4\pi}{3}$.

18.8 Тело массой 7 движется прямолинейно по закону $y = t^2 + t + 4$. Определите кинетическую энергию тела в момент времени $t = 3$.

18.9 Радиус шара изменяется со скоростью 6 см/с. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

18.10 Найдите силу тока в проводнике, если заряд, проходящий через поперечное сечение проводника, изменяется по закону $q = 2t + e^{-3t}$ (кл).

18.11 Материальная точка движется по окружности так, что угловое перемещение φ изменяется по закону $\varphi = 6,5 + 7t + 3,5t^2 + 2t^3$ (рад). Найдите угловую скорость движения материальной точки к моменту времени $t = 2c$ от начала движения.

Домашние задания

18.12 Найдите производные функций:

$$1) y = 5e^{2x} \cdot \sqrt{x}; \quad 2) y = \frac{\cos 3x}{\operatorname{tg} \sqrt{x}}; \quad 3) y = x^2 \arcsin 8x; \quad 4) y = \frac{x^3 \cdot \operatorname{ctg} 2x}{\sqrt{x+1}};$$

$$5) y = 3^{\arcsin x/2}; \quad 6) y = 5 \log_2 \sin \frac{x}{7}; \quad 7) y = \frac{3}{2x-7} - \frac{4}{x}; \quad 8) y = \ln^3(8x - 4^{-x^2});$$

$$9) y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad 10) y = \operatorname{arctg} \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}; \quad 11) y = \frac{\sqrt{x-x^2}}{e^{-x^3}}; \quad 12) y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[5]{x^3}}{b}.$$

18.13 Составьте уравнения касательной и нормали к графику функции $y = e^{1-x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

18.14 Вычислите значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной:

- 1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + \frac{14x}{2x-1}$; $f'(2) = ?$; 2) $f(x) = \frac{2x}{3} - \frac{3}{5x} + \sin 9x$; $f'(\pi) = ?$;
- 3) $f(x) = \frac{1}{6} \sin 6x \cdot \cos 3x$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$; 4) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}} x$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$;
- 5) $f(x) = \ln \frac{2x^2}{1+4\sqrt{x}}$; $f'(2) = ?$; 6) $f(x) = \arccos \sqrt{1-2x} + \sqrt{2x-4x^2}$; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = ?$;
- 7) $f(x) = \operatorname{arctg} x \frac{1+x}{1-x}$; $f'(0) = ?$

Ответы: 18.3 $x = \frac{1}{e}$. 18.4 $x \in (-\infty; -4] \cup [-3; +\infty)$.

- 18.5 1) $f'(1) = 7$; 2) $f'(3) = \frac{2}{3}$; 3) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5$; 4) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$; 5) $f'(1) = \frac{1}{2} - \frac{3\pi}{8}$;
- 6) $f'(0) = 2$; 7) $f'(2) = -\frac{\ln 3}{18}$; 8) $f'(2) = \frac{1}{18}$; 9) $f'(0) = -5$; 10) $f'(1) = \frac{7}{12}$; 11) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

18.6 $y = 2x + 3$; $x + 2y - 11 = 0$. 18.7 $y = 3x - \pi$. 18.8 $K = \frac{49}{2}$. 18.9 $v' = 24\pi R^2$, $s' = 48\pi R$.

18.10 $I = 2 - 3e^{-3t}$. 18.11 $\omega = 45$ рад/с. 18.13 $2x - y + 3 = 0$; $x + 2y - 1 = 0$.

- 18.14 1) $f'(2) = -\frac{8}{9}$; 2) $f'(\pi) = \frac{9-125\pi^2}{15\pi^2}$; 3) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -6$; 4) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\pi-1}{\sqrt{\pi^3}}$;
- 5) $f'(2) = \frac{3\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}+1}$; 6) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; 7) $f'(0) = -1$.

Занятие 19. Производная функции. Логарифмическая производная

Аудиторные задания

19.1 Найдите производные функций:

- 1) $y = \sqrt{x+2\sqrt{x+3\sqrt{x}}} + \operatorname{sh} x$; 2) $y = \log_x e$; 3) $y = \frac{1}{\cos^n(m+1)x}$; 4) $y = \log_2 \ln^n mx$;
- 5) $y = e^{-2x} \operatorname{ch} 5x$; 6) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$; 7) $y = \frac{\operatorname{ctg} 4x}{\operatorname{cth} 3x}$; 8) $y = 5 \operatorname{sh} \frac{1}{x}$.

19.2 Используя предварительно логарифмирование, найти производные функций:

$$\begin{aligned}
 & \text{1) } y = \frac{(x-3)^2(2x-1)^5}{(4x+1)^3}; \quad \text{2) } y = \sqrt[3]{\frac{(4x-7)^2(12x-x^2)^8}{(2-3x)^5}}; \quad \text{3) } y = (2x)^{\sin x/3}; \\
 & \text{4) } y = (\arcsin 3x)^{\sqrt{x}}; \quad \text{5) } y = (\operatorname{tg} 8x)^{x^9}; \quad \text{6) } y = x^{x^3}; \quad \text{7) } y = \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{\arcsin 5x}; \\
 & \text{8) } y = (\log_2 x)^{5/x}; \quad \text{9) } y = \operatorname{arctg} 2x \cdot (1+4x)^{\sqrt{x}}; \quad \text{10) } y = (\operatorname{th} 6x)e^{-x^2}.
 \end{aligned}$$

Домашние задания

19.3 Найдите производные функций:

$$\begin{aligned}
 & \text{1) } y = a^{\sqrt{\cos x}} \cdot \sqrt[4]{\cos x}; \quad \text{2) } y = \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right); \quad \text{3) } y = x^{-\operatorname{tg} 6x}; \quad \text{4) } y = (\operatorname{acctg} 2x)^{\ln 3x}; \quad \text{5) } y = x^{x^x}; \\
 & \text{6) } y = \frac{(3x+1)^4 \sqrt[5]{2-x}}{\sqrt[5]{(3-x)^4} \cdot x^{4/3}}; \quad \text{7) } y = x^3 \cdot \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt[5]{3x-8}}}; \quad \text{8) } y = x^{4^x}; \quad \text{9) } y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/\sqrt{x}}; \quad \text{10) } \\
 & y = (\log_x 7)^x.
 \end{aligned}$$

19.4 Вычислите значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной:

$$\begin{aligned}
 & \text{1) } f(x) = (3x)^{x^4}; f'(1) = ? \quad \text{2) } f(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\cos x}; f'(1) = ? \quad \text{3) } f(x) = (\cos x)^{1/x}; f'(2\pi) = ? \\
 & \text{4) } f(x) = x^{\ln 3x}; f'(1) = ? \quad \text{5) } f(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} 2x}; f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ? \quad \text{6) } f(x) = (\arcsin x)^{2x}; f'\left(\frac{1}{2}\right) = ? \\
 & \text{7) } f(x) = (x+1)^{2/x}; f'(2) = ? \quad \text{8) } y = \frac{(x-2)^2 \sqrt{x+1}}{(x-5)^3}; f'(1) = ? \quad \text{9) } y = \frac{(3x-2)^4 \sqrt{5x+1}}{(7x-5)^3}; f'(0) = ?
 \end{aligned}$$

Ответы: 19.4 1) $f'(1) = 12 \ln 3 + 3$; 2) $f'(1) = -2 \cos 1$; 3) $f'(2\pi) = 0$; 4) $f'(1) = \ln 3$;
 5) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; 6) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi \ln \pi}{3} - \frac{\pi \ln 6}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$; 7) $f'(2) = 1 - \frac{3}{2} \ln 3$; 8) $f'(1) = \frac{\sqrt{2}}{64}$;
 9) $f'(0) = -\frac{56}{625}$.

Занятие 20. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно.

Дифференциал функции

Аудиторные задания

20.1 Найти производные функций, заданных параметрически:

- 1) $x = t^2 + 2, y = \frac{1}{3}t^3 - 1$; 2) $x = \frac{1}{t+1}, y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2$;
 3) $x = a(\varphi - \sin \varphi), y = a(1 - \cos \varphi)$; 4) $x = \ln t, y = t^2 - 1$;
 5) $x = \arccos \sqrt{t}, y = \sqrt{t-t^2}$; 6) $x = \operatorname{arctg} t, y = \ln(1+t^2)$;
 7) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$; 8) $x = \operatorname{tg} t, y = \sin 2t + 2 \cos 2t$.

20.2 Найти y'_x в указанных точках:

- 1) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t; t = \frac{\pi}{6}$. 2) $x = \frac{3at}{1+t^2}, y = \frac{3at^2}{1+t^2}; t = 2$.

20.3 Найти производные функций, заданных неявно:

- 1) $e^x + 2x^2y^2 - e^y = 0$; 2) $2y \ln y = x$; 3) $x - y = \arcsin x - \arcsin y$;
 4) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$;
 5) $\operatorname{arctg} y = y - x^2$; 6) $\sin(xy) + \cos(xy) = 0$; 7) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;
 8) $e^x \sin y - e^y \cos x = 0$.

20.4 Найти y'_x в точке $x = 1$, если $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0, y(1) = 1$.

20.5 Найти y'_x в точке $(0,1)$, если $e^y + xy = e$.

20.6 Найти дифференциалы функций:

- 1) $y = x \operatorname{tg}^3 x$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x + (\arcsin x)^2}$; 3) $y = \ln(x + \sqrt{4+x^2})$; 4) $y^5 + y - x^2 = 1$.

20.7 Найти приближенное значение функции $y(x) = e^{x^2-x}$ при $x = 1, 2$.

20.8 Вычислить приближенно:

- 1) $\arcsin 0,05$; 2) $\ln 1,2$; 3) $\sqrt[4]{17}$; 4) $\operatorname{tg} 44^\circ 56'$.

Домашние задания

20.9 Найти y'_x :

- 1) $x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{t-1}{t}$; 2) $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$.

20.10 Убедиться в том, что функция, заданная параметрически уравнениями $x = \frac{1 + \ln t}{t^2}, y = \frac{3 + 2 \ln t}{t}$, удовлетворяет соотношению $yy' = 2x(y')^2 + 1$.

20.11 Найти производные от функций, заданных неявно:

- 1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; 2) $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y)$.

20.12 Убедиться в том, что функция y , определенная уравнением $xy - \ln y = 1$, удовлетворяет соотношению $y^2 + (xy - 1) \cdot y' = 0$.

20.13 Найти дифференциалы функций:

1) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - 3$; 2) $e^y = x + y$.

20.14 Вычислить приближенно: 1) $\sin 29^\circ$; 2) $\sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$.

20.15 На сколько приблизительно изменится площадь круга радиуса $R = 3$ см, если радиус увеличится на 0,1 см?

Ответы: **20.1** 1) $\frac{t}{2}$; 2) $-\frac{2t}{t+1}$; 3) $\frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$; 4) $2t^2$; 5) $2t - 1$; 6) $2t$; 7) $-\operatorname{tg} t$;

8) $2(\cos 2t - 2 \sin 2t) \cos^2 t$.

20.2 1) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)^2$; 2) $-\frac{4}{3}$. **20.3** 1) $\frac{e^x + 4xy^2}{e^y - 4x^2y}$; 2) $\frac{1}{2(\ln y + 1)}$; 3) $\frac{(\sqrt{1-x^2} - 1)\sqrt{1-y^2}}{(\sqrt{1-y^2} - 1)\sqrt{1-x^2}}$;

4) $\frac{2^x - 2^{x+y}}{2^{x+y} - 2^y}$; 5) $\frac{2x(1+y^2)}{y^2}$; 6) $-\frac{y}{x}$; 7) $-3\sqrt{\frac{y}{x}}$; 8) $\frac{e^y \sin x + e^x \sin y}{e^y \cos x - e^x \cos y}$.

20.4 $\frac{4}{3}$. **20.5** $-e^{-1}$. **20.6.** 1) $\operatorname{tg}^2 x \left(\operatorname{tg} x + \frac{3x}{\cos^2 x} \right) dx$; 2) $\left(\frac{1}{2\sqrt{\arctg x}} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$;

3) $\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$; 4) $\frac{2x dx}{5y^4 + 1}$. **20.7** 1,2. **20.8** 1) 0,05; 3) 0,2; 4) 2,02. **20.9** 1) -1; 2) $\frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$.

20.11 1) $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$; 2) $-\frac{y \cos^2(x+y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}{x \cos^2(x+y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}$. **20.13** 1) $\arcsin x dx$; 2) $\frac{dx}{e^y - 1}$.

20.14 1) 0,485; 2) 0,355. **20.15** 0,6 π .

Занятие 21. Производные и дифференциалы высших порядков

Аудиторные задания

21.1 Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \operatorname{arctg} x^2$; 3) $y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2}$;

4) $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$; 5) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$; 6) $y = e^{\sqrt{x}}$.

21.2 Показать, что функция $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ при любых постоянных c_1 и c_2 удовлетворяет уравнению $y'' - 5y' + 6y = 0$.

21.3 Найти производные 2-го порядка от функций, заданных неявно:

- 1) $y = 1 + xe^y$; 2) $x^3 + y^3 = 3xy$; 3) $\operatorname{arctg} y = y - x$; 4) $y = x + \ln y$;
 5) $x + y = e^{x-y}$; 6) $y = \sin(x + y)$.

21.4 Найти производные 2-го порядка от функций, заданных параметрически:

- 1) $x = t^2 + 2, y = \frac{1}{3}t^3 - 1$; 2) $x = \arcsin t, y = \sqrt{1-t^2}$;
 3) $x = a \cos^2 t, y = a \sin^2 t$; 4) $x = \ln t, y = t^2 - 1$;
 5) $x = a(\varphi - \sin \varphi), y = a(1 - \cos \varphi)$; 6) $x = 1 + e^{\alpha t}, y = \alpha t + e^{-\alpha t}$.

21.5 Найти дифференциалы 1, 2 и 3-го порядков функции $y = (2x - 3)^3$.

21.6 Найти дифференциалы 2-го порядка функций:

- 1) $y = e^{-x^2}$; 2) $xy + y^2 = 1$.

21.7 Найти дифференциал 3-го порядка функции $y = \frac{\ln x}{x}$.

21.8 Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$ с точностью до двух знаков после запятой.

Домашние задания

21.9 Найти производные второго порядка следующих функций:

- 1) $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$; 2) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;
 3) $y = -\frac{1}{9}x \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x$; 4) $y = \frac{1}{1+x^3}$.

21.10 Найти $y^{(n)}(x)$, если $y = e^{-x}$.

21.11 Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$, если:

- 1) $e^{x+y} = xy$; 2) $x = \frac{1}{\cos t}, y = \operatorname{tg} t$;
 3) $x^2 + y^2 + xy - 4 = 0$; 4) $x = \operatorname{arctg} t, y = \ln(1+t^2)$.

21.12 Вычислить значение производной второго порядка функции y , заданной уравнением $x^2 + 2y^2 - xy + x + y = 4$, в точке $M(1;1)$.

21.13 Доказать, что функция $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ удовлетворяет уравнению $y''' - 13y' - 12y = 0$. Записать для этой функции $d^3 y$.

21.14 Вычислить приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 12}$ при $x = 1,3$ с точностью до двух знаков после запятой.

Ответы: 21.1 1) $-2\cos 2x$; 2) $\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$; 3) $-\frac{2}{3\ln 2} \cdot \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$; 4) $2\sqrt{1-x^2}$;

5) $\frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$; 6) $\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$. 21.3 1) $\frac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^3}$; 2) $\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}$; 3) $\frac{-2(1+y^2)}{y^5}$;

4) $-\frac{y}{(y-1)^3}$; 5) $\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$; 6) $-\frac{y}{(1-\cos(x+y))^3}$. 21.4 1) $\frac{t^2+1}{4t^3}$; 2) $-\sqrt{1-t^2}$; 3) 0; 4)

$4t^2$;

5) $-\frac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$; 6) $2e^{-3\alpha t} - e^{-2\alpha t}$. 21.5 $6(2x-3)^2 dx$; $24(2x-3)dx^2$; $48dx^3$.

21.6 1) $e^{-x^2}(4x^2-2)dx^2$; 2) $\frac{2dx^2}{(x+2y)^3}$. 21.7 $\frac{2\ln x-3}{x^3}dx^3$. 21.8 1,99.

21.9 1) $-\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; 2) $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 3) $x\sin 3x$; 4) $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$. 21.10 $(-1)^n e^{-x}$.

21.11 1) $-\frac{y((x-1)^2+(y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}$; 2) $-\operatorname{ctg}^3 t$; 3) $-\frac{24}{(x+2y)^3}$; 4) $2(1+t^2)$. 21.12 - 1.

21.13 $(64e^{4x} - 2e^{-x})dx^3$. 21.14 1,93.

Занятие 22. Правило Лопиталья-Бернулли

Аудиторные задания

22.1 Применяя правило Лопиталья-Бернулли, найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{\arcsin x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3^x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2\cos x - 2}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{\ln x} - x}{\ln x}$; 7) $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\ln(x-a) \cdot \cos x}{\ln(e^x - e^a)}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + x - 1}{x^2 + 4x + 2}$;

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2\ln \sin x}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$; 12) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2x}$;

13) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{3}{x}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot e^{1/x^2}$; 15) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$; 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$;

$$\begin{aligned}
17) \quad & \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}; & 18) \quad & \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right); & 19) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; \\
20) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right); & 21) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}; & 22) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} x^{3/(1+\ln x)}; & 23) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} (x+10^x)^{1/x}; \\
24) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}; & 25) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}; & 26) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}; & 27) \quad & \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}; \\
28) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x; & 29) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}; & 30) \quad & \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x)^{\cos x}.
\end{aligned}$$

Домашние задания

22.2 Вычислить пределы:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2 \ln x}{x}; & 2) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}; & 3) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 5x}{\ln \sin 2x}; & 4) \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + x + 1}{e^{-x}}; & 5) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}; \\
6) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x\sqrt{1-x^2}}; & 7) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - e^{\sin x}}{x}; & 8) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right); & 9) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x \operatorname{tg} x} \right); \\
10) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right); & 11) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} \pi x; & 12) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1); & 13) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}; \\
14) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}; & 15) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}; & 16) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.
\end{aligned}$$

Ответы: 22.1 1) -1 ; 2) 0 ; 3) 2 ; 4) $1/2$; 5) 12 ; 6) $\ln 2 - 1$; 7) $\cos a$; 8) 5 ; 9) $2/3$; 10) $1/2$; 11) 2 ; 12) ∞ ; 13) 3 ; 14) $+\infty$; 15) $1/2$; 16) 0 ; 17) 2 ; 18) -1 ; 19) $-2/\pi$; 20) $-\frac{1}{2}$; 21) 1 ; 22) e^3 ; 23) 10 ; 24) e^{-2} ; 25) e^2 ; 26) e^{-1} ; 27) 1 ; 28) 1 ; 29) 1 ; 30) 1 .

22.2 1) 1 ; 2) 6 ; 3) 1 ; 4) 0 ; 5) $1/3$; 6) $\ln \frac{2}{3}$; 7) -4 ; 8) 0 ; 9) $1/6$; 10) $1/2$; 11) $1/\pi$; 12) 0 ; 13) 1 ; 14) 1 ; 15) e ; 16) $e^{-1/6}$.

Занятие 23. Формула Тейлора

Аудиторные задания

23.1 Разложить многочлен $x^4 - 2x^2 + 13x + 9$ по степеням двучлена $x + 2$.

23.2 Разложить многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$.

23.3 Для многочлена $x^4 + 4x^2 - x + 3$ написать формулу Тейлора 2-го порядка в точке $x_0 = 1$. Записать остаточный член в форме Лагранжа.

23.4 Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x) = 10^x$ в точке $x_0 = 0$.

23.5 Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$.

23.6 Написать формулу Тейлора 2-го порядка для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = 0$.

23.7 Вывести приближенную формулу $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ и оценить ее точность при $|x| < 0,05$.

23.8 Вывести приближенные формулы и оценить их погрешность при $|x| < 1$:

1) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$; 2) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$.

23.9 Проверить, что при вычислении значений функции e^x при $0 < x \leq \frac{1}{2}$ по приближенной формуле $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ допускаемая погрешность меньше 0,01.

Пользуясь этим, найти $e^{0,2}$ с тремя верными цифрами.

23.10 Вычислить с точностью до 10^{-4} $\cos 10^\circ$.

23.11 Вычислить с точностью до 10^{-3} :

1) $\sqrt[5]{33}$; 2) $\ln 1,05$.

23.12 Найти пределы, используя разложение по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x^3}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x\sqrt{1+x}}{x^2}$.

Домашние задания

23.13 Разложить многочлен $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ по степеням двучлена $x - 4$.

23.14 Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ при

$x_0 = 1$.

23.15 Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = \arcsin x$ при

$x_0 = 0$.

23.16 Написать формулу Тейлора n -го порядка для функции $y = \frac{1}{x}$ при $x_0 = -1$.

23.17 Написать формулу Маклорена n -го порядка для функции $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$.

23.18 Вычислить приближенные значения с заданной точностью Δ :

1) $\sin 1^\circ$, $\Delta = 10^{-4}$; 2) \sqrt{e} , $\Delta = 10^{-3}$; 3) $\sqrt[10]{1027}$, $\Delta = 10^{-4}$; 4) $\cos 5^\circ$, $\Delta = 10^{-5}$.

23.19 Найти пределы, используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме

Пеано:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}; 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x}; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}; 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

Ответы: **23.1** $f(x) = -9 - 11(x+2) + 22(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4$;

23.2 $f(x) = (x+1)^3 - 5(x+1) + 8$; **23.3** $f(x) = 7 + 11(x-1) + 10(x-1)^2 + 4(1 + \theta(x-1))(x-1)^3$;

23.4 $10^x = 1 + \ln 10 \cdot x + \frac{\ln^2 10}{2!} x^2 + \frac{\ln^3 10}{3!} x^3 + \frac{10^{\theta x} \ln^4 10}{4!} x^4, 0 < \theta < 1$;

23.5 $\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{(1 + \theta(x-2))^5}, 0 < \theta < 1$;

23.6 $\operatorname{tg} x = x + \frac{1 + 2 \sin^3 \theta x}{\cos^4 \theta x} \cdot \frac{x^3}{3}, 0 < \theta < 1$; **23.7** $\Delta < 3 \cdot 10^{-9}$; **23.8** 1) $\frac{1}{16} \cdot \frac{x^3}{(1 + \theta x)^{5/2}}, 0 < \theta < 1$;

2) $\frac{5}{81} \cdot \frac{x^3}{(1 + \theta x)^{8/3}}, 0 < \theta < 1$; **23.9** 1,221; **23.10** 0,9848; **23.11** 1) 2,012; 2) 0,049; **23.12** 1)

1;

2) 1/2; 3) 1/6; 4) -1; **23.13** $f(x) = -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4$;

$$23.14 \quad f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}(x-1)^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}(x-1)^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4!} \cdot \frac{(x-1)^4}{(1+\theta(x-1))^{9/2}}, \quad 0 < \theta < 1;$$

$$23.15 \quad y = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{9\theta x + 6\theta^3 x^3}{(1-\theta^2 x^2)^{7/2}}, \quad 0 < \theta < 1;$$

$$23.16 \quad y = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \dots - (x+1)^n + (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{(-1+\theta(x+1))^{n+2}}, \quad 0 < \theta < 1;$$

$$23.17 \quad f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot (\theta x + n + 1)e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1;$$

$$23.18 \quad 1) 0,0175; 2) 1,648; 3) 2,0006; 4) 0,99619; \quad 23.19 \quad 1) -1/6; 2) 1; 3) -2; 4) 1/2.$$

Занятие 24. Монотонность функций. Экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функций. Выпуклость и вогнутость графиков функций

Аудиторные задания

24.1 Найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функций:

$$1) \quad y = 15 - x^2 - 2x; \quad 2) \quad y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7; \quad 3) \quad y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{4};$$

$$4) \quad y = x\sqrt{1-x^2}; \quad 5) \quad y = \frac{2x^2-1}{x^4}; \quad 6) \quad y = x^2 e^{-x}; \quad 7) \quad y = \frac{x}{\ln x}; \quad 8) \quad y = \sqrt[3]{x^2-2x};$$

$$9) \quad y = \frac{e^x}{x+1}; \quad 10) \quad y = \ln \frac{x+1}{x+2}.$$

24.2 Найти экстремумы функций, пользуясь производной 2-го порядка:

$$1) \quad y = 4x^3 - 9x^2 + 6x; \quad 2) \quad y = e^{3x} - 3x + 2; \quad 3) \quad y = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$4) \quad y = x \ln^2 x; \quad 5) \quad y = x^2(a-x)^2; \quad 6) \quad y = x + \sqrt{1-x}.$$

24.3 Определить наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1) \quad y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2; 0]; \quad 2) \quad y = x + 2\sqrt{x}, [0; 4]; \quad 3) \quad y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}, [0; 1];$$

$$4) \quad y = \arctg \frac{1-x}{1+x}, [0; 1]; \quad 5) \quad y = \frac{x^2-1}{x^2+1}, [-2; 1]; \quad 6) \quad y = x \ln x - x; [1/e; e].$$

24.4 Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графиков функций:

$$1) y = \ln(1+x^2); 2) y = e^{-8x^2+4x}; 3) y = x^2 + \frac{1}{x^2}; 4) y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2; 5) y = x^4 - 2x^2 + 3;$$

$$6) y = \frac{3x^4+1}{x^3}; 7) y = \frac{2x^2-1}{x^4}; 8) y = x^2 \cdot e^{-x}; 9) y = x\sqrt{1-x^2}; 10) y = \sqrt[3]{x^2-2x}.$$

24.5 Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^3 , причем стороны основания относились бы как $1 : 2$. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

24.6 Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

24.7 Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R .

Домашние задания

24.8 Найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функций:

$$1) y = \ln x - \arctg x; 2) y = \frac{x^3}{x-1}; 3) y = (x-1)e^x; 4) y = x^3 - 6x^2 + 16.$$

24.9 Найти экстремум функции $y = x + \frac{a^2}{x}$, $a > 0$, используя вторую производную.

ную.

24.10 Найти точки перегиба графиков функций:

$$1) y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}; 2) y = x \arctg x; 3) y = \frac{4x^3}{1-x^3}; 4) y = e^{-x^2/2} \text{ (кривая Гаусса)}.$$

24.11 Найти наибольшее и наименьшее значения функций в интервалах (или во всей области определения):

$$1) y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}, [0; 1]; 2) y = xe^{-x^2/2}; 3) y = \ln(4-x^2), [-1; 1]; 4) y = x + 2\sqrt{x}, [0; 4].$$

24.12 Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При каком угле α наклона боковых стенок к днищу желоба площадь поперечного сечения будет наибольшей?

Ответы: 24.1 1) $(-\infty; -1)$ – возрастает; $(-1; +\infty)$ – убывает; $y_{\max} = y(-1) = 16$;

2) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ – возрастает; $(-1; 3)$ – убывает; $y_{\min} = y(3) = -47$; $y_{\max} = y(-1) = 13$;

- 3) $(1;2) \cup (3;+\infty)$ – возрастает; $(-\infty;1) \cup (2;3)$ – убывает; $y_{\min} = y(1) = y(3) = 0$;
 $y_{\max} = y(2) = \frac{1}{4}$;
- 4) $(-1; -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}; 1)$ – убывает; $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ – возрастает; $y_{\min} = y(-1/\sqrt{2}) = -1/2$;
 $y_{\max} = y(1/\sqrt{2}) = 1/2$;
- 5) $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$ – возрастает; $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$ – убывает; $y_{\max} = y(-1) = y(1) = 1$;
- 6) $(0; 2)$ – возрастает; $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ – убывает; $y_{\min} = y(0) = 0$; $y_{\max} = y(2) = 4/e^2$;
- 7) $(e; +\infty)$ – возрастает; $(0; 1) \cup (1; e)$ – убывает; $y_{\min} = y(e) = e$;
- 8) $(1; +\infty)$ – возрастает; $(-\infty; 1)$ – убывает; $y_{\min} = y(1) = -1$;
- 9) $(0; +\infty)$ – возрастает; $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ – убывает; $y_{\min} = y(0) = 1$;
- 10) $(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$ – возрастает; $(-2; -1)$ – убывает; экстремумов нет.
- 24.2 1) $y_{\max} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$; $y_{\min} = y(1) = 1$; 2) $y_{\min} = y(0) = 3$;
- 3) $y_{\max} = y(1) = 1$; $y_{\min} = y(-1) = -1$; 4) $y_{\max} = y(e^{-2}) = 4/e^2$; $y_{\min} = y(1) = 0$;
- 5) $y_{\max} = y\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^4}{16}$; $y_{\min} = y(0) = y(a) = 0$; 6) $y_{\max} = y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$;
- 24.3 1) $y_{\text{наиб.}} = y(-2) = 13$; $y_{\text{наим.}} = y(-1) = 4$; 2) $y_{\text{наиб.}} = y(4) = 8$; $y_{\text{наим.}} = y(0) = 0$;
- 3) $y_{\text{наиб.}} = y(0) = 2$; $y_{\text{наим.}} = y(1) = \sqrt[3]{2}$; 4) $y_{\text{наиб.}} = y(0) = \frac{\pi}{4}$; $y_{\text{наим.}} = y(1) = 0$;
- 5) $y_{\text{наиб.}} = y(-2) = \frac{3}{5}$; $y_{\text{наим.}} = y(0) = -1$; 6) $y_{\text{наиб.}} = y(e) = 0$; $y_{\text{наим.}} = y(1) = -1$;
- 24.4 1) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ – функция выпукла; $(-1; 1)$ – функция вогнута; $(-1; \ln 2)$, $(1; \ln 2)$ – точки перегиба;
- 2) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ – функция выпукла; $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ – функция вогнута; $(0; 1)$, $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ – точки перегиба;
- 3) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – функция вогнута; точек перегиба нет;

4) $(-\infty; -2)$ – функция выпукла; $(-2; 1) \cup (1; +\infty)$ – функция вогнута; $\left(-2; \frac{1}{9}\right)$ – точка перегиба;

5) $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$ – функция вогнута; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ – функция выпукла; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{22}{9}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{22}{9}\right)$ – точки перегиба;

6) $(-\infty; 0)$ – функция выпукла; $(0; +\infty)$ – функция вогнута; точек перегиба нет;

7) $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{5}{3}}; +\infty\right)$ – функция вогнута; $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ – функция выпукла; $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; \frac{21}{25}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{5}{3}}; \frac{21}{25}\right)$ – точки перегиба;

8) $(-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$ – функция вогнута; $(2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ – функция выпукла; $\left(2 + \sqrt{2}; (2 + \sqrt{2})^2 e^{-2 - \sqrt{2}}\right), \left(2 - \sqrt{2}; (2 - \sqrt{2})^2 e^{-2 + \sqrt{2}}\right)$ – точки перегиба;

9) $(-1; 0)$ – функция вогнута; $(0; 1)$ – функция выпукла; $(0; 0)$ – точка перегиба;

10) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ – функция выпукла; $(0; 2)$ – функц. вогнута; $(0; 0); (2; 0)$ – точки перегиба.

24.5 3,6 и 4 см; 24.6 $H=2R$; 24.7 $H = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$; 24.8 1) возрастает на всей области

определения;

2) $(-\infty; 1) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right)$ – убывает; $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ – возрастает; $y_{\min} = y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}$;

3) $(-\infty; 0)$ – убывает; $(0; +\infty)$ – возрастает; $y_{\min} = y(0) = -1$;

4) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ – возрастает; $(0; 4)$ – убывает; $y_{\max} = y(0) = 16$, $y_{\min} = y(4) = -16$;

24.9 $y_{\max} = y(-a) = -2a$; $y_{\min} = y(a) = 2a$;

24.10 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$; 2) точек перегиба нет; 3) $(0; 0)$, $\left(-3\sqrt{\frac{1}{2}}; \frac{4}{3}\right)$; 4) $(-1; e^{-1/2})$, $(1; e^{-1/2})$.

24.11 1) 1 и $3/5$; 2) $1/\sqrt{e}$ и $-1/\sqrt{e}$; 3) $\ln 4$ и $\ln 3$; 4) 8 и 0; 24.12 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Занятие 25. Асимптоты. Построение графиков функций

Аудиторные задания

25.1 Найти асимптоты графиков функций:

1) $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$; 2) $y = \frac{e^x}{x + 1}$; 3) $y = \frac{x^4}{x^3 + 1}$; 4) $y = \frac{\ln x}{x}$; 5) $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$;

6) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 9}$; 7) $y = x + \sin x$; 8) $y = (x - 2)e^{-1/x}$; 9) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$; 10) $y = x^2 + 2/x$.

25.2 Провести полное исследование и построить графики функций:

1) $y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$; 2) $y = x^2 e^{-x}$; 3) $y = x\sqrt{1 - x^2}$; 4) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$; 5) $y = x^2 \ln x$;

6) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 7) $y = \frac{x}{(1 + x)^3}$; 8) $y = (x - 1)e^x$; 9) $y = \frac{4x^3}{1 - x^3}$; 10) $y = x^3 - 6x^2 + 16$.

Домашние задания

25.3 Найти асимптоты графиков функций:

1) $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$; 2) $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$; 3) $y = \frac{x^3}{2(1 + x)^2}$; 4) $y = \frac{2 + x^3}{x^2}$.

25.4 Исследовать функции и построить графики:

1) $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$; 2) $y = xe^{1/x}$; 3) $y = \ln(1 - x^2)$; 4) $y = e^{2x - x^2}$.

Ответы: 25.1 1) $x = 2$; $y = x - 2$; 2) $x = -1$; $y = 0$ (левая); 3) $x = -1$; $y = x$; 4) $x = 0$; $y = 0$;

5) $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ (правая), $y = 3x - \frac{\pi}{2}$ (левая); 6) $x = 3$, $x = -3$, $y = 1$; 7) нет;

8) $x = 0$; $y = x - 3$; 9) $x = \pm 1$; $y = \pm x$; 10) $x = 0$.

25.3 1) $x = \pm \frac{1}{2}$; $y = 1$; 2) $x = -1/e$; $y = x + \frac{1}{e}$; 3) $x = -1$; $y = \frac{1}{2}x - 1$; 4) $x = 0$; $y = x$.

Занятие 26. Кривизна кривой

Аудиторные задания

26.1 Найдите кривизну и радиус кривизны линии $y = x^2 + 2$ в точке (1;3).

26.2 Вычислите кривизну линии $y = \sqrt[3]{x} + 2$ в любой точке.

- 26.3 Вычислите кривизну эллипса $x^2 + 9y^2 = 9$ в его вершинах.
- 26.4 Найдите кривизну кривой $xy = 4$ в точке $(2;2)$.
- 26.5 Найдите кривизну и радиус кривизны кривой $x^2 + xy + y^2 = 3$ в точке $M(1;1)$.
- 26.6 Вычислите кривизну кривой $r = 2(1 - \cos \varphi)$ в точке $\varphi = \pi$.
- 26.7 Вычислите кривизну кривой $x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}$ в точке $\left(1; \frac{2}{3}\right) (t = 1)$.

Домашние задания

- 26.8 Найдите кривизну и радиус кривизны линии $y = \sqrt{x^3}$ в точке $M(4;8)$.
- 26.9 Вычислите кривизну линии $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ в точке $x = 0$.
- 26.10 Вычислите кривизну гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ в точке $x = 2, y = 0$.
- 26.11 Найдите кривизну кривой $x^2 + y^2 - xy = 1$ в точке $M(1;1)$.
- 26.12 Вычислите кривизну линии $x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{t^3}{3}$ в точке $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) (t = 1)$.
- 26.13 Вычислите кривизну линии $y = 2 \cos t, y = 3 \sin t$ в любой ее точке.

Ответы: 26.1 $K = \frac{2}{5\sqrt{5}}; R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$; 26.2 $K = \frac{1}{6\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt{(9x^{4/3} + 1)^3}$; 26.3 $K = 3; K = \frac{1}{9}$;

26.4 $K = \frac{\sqrt{2}}{4}$; 26.5 $K = \frac{1}{3\sqrt{2}}; R = 3\sqrt{2}$; 26.6 $K = \frac{3}{8}$; 26.7 $K = \frac{1}{2}$;

26.8 $K = \frac{3}{80\sqrt{10}}; R = \frac{80\sqrt{10}}{3}$; 26.9 $K = 1$; 26.10 $K = \frac{9}{2}$; 26.11 $K = \frac{3}{\sqrt{2}}$; 26.12 $K = \frac{1}{2\sqrt{2}}$;

26.13 $K = \frac{(4\sin^2 t + 9\cos^2 t)^{3/2}}{6}$.

III Раздел контроля знаний

Тест 1. «Линейная алгебра»

Вариант 1

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Если A – квадратная матрица 3×3 , то под главной диагональю стоят элементы	1) a_{31}, a_{33} ; 2) a_{21}, a_{31} ; 3) a_{33} ; 4) a_{21}, a_{31}, a_{32} ; 5) другой ответ.
2.	Из перечисленных матриц $F_{3 \times 2}, G_{3 \times 3}, H_{2 \times 1}$ можно перемножить	1) FG ; 2) HF ; 3) FH, GF ; 4) FH ; 5) другой ответ.
3.	Элемент матрицы $C_{23}, C = AB$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	1) 20; 2) 15; 3) - 5; 4) 36; 5) другой ответ.
4.	Решением уравнения $XB = A$, где A, B – квадратные невырожденные матрицы одного и того же порядка, является матрица X , определяемая по формуле	1) AB ; 2) AB^{-1} ; 3) $B^{-1}A$; 4) $A^{-1}B^{-1}$; 5) другой ответ.
5.	Вычислить определитель, разлагая его по элементам 3-го столбца	1) 17; 2) - 13; 3) 13; 4) - 17; 5) другой ответ.
6.	Найти $\text{rang } A$ и указать какой-нибудь базисный минор $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.
7.	Решить систему $AX = B$ матричным способом. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$	1) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; 4) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; 5) другой ответ.

8.	<p>Решить систему методом Крамера</p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 = -6, \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$	<p>1) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; 4) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; 5) другой ответ.</p>
9.	<p>Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти ее решение:</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 = 2x_3 + 9x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$	<p>1) $\begin{pmatrix} -2C \\ -\frac{1}{3} - \frac{7}{3}C \\ \frac{2}{3} + \frac{5}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 2) $\begin{pmatrix} -2C \\ -\frac{2}{3} - \frac{7}{3}C \\ \frac{2}{3} + \frac{5}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 3) $\begin{pmatrix} 2C \\ -\frac{1}{3} - \frac{7}{3}C \\ \frac{2}{3} + \frac{5}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 4) $\begin{pmatrix} -4C \\ -\frac{1}{3} - \frac{7}{3}C \\ \frac{2}{3} + \frac{5}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 5) другой ответ.</p>
10.	<p>Для данной однородной системы найти общее решение:</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$	<p>1) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{7}C \\ \frac{5}{7}C \\ \frac{C}{7} \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{3}{7}C \\ \frac{5}{7}C \\ \frac{C}{7} \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 3) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{7}C \\ \frac{5}{7}C \\ \frac{C}{7} \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{4}{7}C \\ \frac{5}{7}C \\ \frac{C}{7} \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 5) другой ответ.</p>

Тест 1. «Линейная алгебра»

Вариант 2

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Если A – квадратная матрица 4×4 , то побочную диагональ составляют элементы	1) a_{11}, a_{22}, a_{33} ; 2) a_{33}, a_{44} ; 3) $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$; 4) $a_{41}, a_{32}, a_{14}, a_{23}$; 5) другой ответ.
2.	Из перечисленных матриц $H_{2 \times 3}, G_{2 \times 2}, F_{3 \times 1}$ можно перемножить	1) FH, FG ; 2) GFH ; 3) HF, GH ; 4) HFG ; 5) другой ответ.
3.	Элемент матрицы $C_{32}, C = AB$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	1) - 20; 2) 20; 3) 5; 4) 6; 5) другой ответ.
4.	Решением уравнения $BX = A$, где A, B – квадратные невырожденные матрицы одного и того же порядка, является матрица X , определяемая по формуле	1) $X = A^{-1}B$; 2) $X = B^{-1}A$; 3) $X = \frac{A}{B}$; 4) $X = BA^{-1}$; 5) другой ответ.
5.	Вычислить определитель, разлагая его по элементам 3-го столбца $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	1) 4; 2) 3; 3) 0; 4) - 4; 5) другой ответ.
6.	Найти $\text{rang } A$ и указать какой-нибудь базисный минор $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 0; 5) 5.
7.	Решить систему $AX = B$ матричным способом. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	1) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; 4) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; 5) другой ответ.

8.	<p>Решить систему методом Крамера</p> $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	$1) X = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}; 2) X = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}; 3) X = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}; 4) X = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix};$ <p>5) другой ответ.</p>
9.	<p>Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти ее решение:</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 16 \end{cases}$	$1) \begin{pmatrix} -C-8 \\ 4-2C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 2) \begin{pmatrix} C-8 \\ 4-2C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R;$ $3) \begin{pmatrix} C+8 \\ 4-2C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 4) \begin{pmatrix} -C-8 \\ 2-2C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 5) \text{ другой}$ <p>ответ.</p>
10.	<p>Для данной однородной системы найти общее решение:</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$	$1) \begin{pmatrix} -\frac{2}{7}C \\ \frac{3}{7}C \\ \frac{C}{14} \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 2) \begin{pmatrix} \frac{2}{7}C \\ \frac{3}{7}C \\ \frac{C}{14} \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R;$ $3) \begin{pmatrix} -\frac{4}{7}C \\ \frac{3}{7}C \\ \frac{C}{14} \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 4) \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}C \\ \frac{3}{7}C \\ \frac{C}{14} \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 5) \text{ другой}$ <p>ответ.</p>

Тест 1. «Линейная алгебра»

Вариант 3

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Если A – квадратная матрица 4×4 , то главную диагональ составляют элементы	1) a_{11}, a_{44} ; 2) a_{22}, a_{33} ; 3) $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$; 4) $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$; 5) другой ответ.
2.	Из перечисленных матриц $F_{4 \times 3}, H_{4 \times 4}, G_{3 \times 2}$ можно перемножить	1) FH ; 2) GF ; 3) FGH ; 4) FG, HF ; 5) другой ответ.
3.	Элемент матрицы $C_{22}, C = AB$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$	1) -40; 2) -35; 3) -16; 4) -35; 5) другой ответ.
4.	Решением уравнения $XA = B$, где A, B – квадратные невырожденные матрицы одного и того же порядка, является матрица X , определяемая по формуле	1) $X = \frac{B}{A}$; 2) $X = BA^{-1}$; 3) $X = A^{-1}B$; 4) $X = B^{-1}A^{-1}$; 5) другой ответ.
5.	Вычислить определитель, разлагая его $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ по элементам 3-го столбца	1) 8; 2) -8; 3) 0; 4) 4; 5) другой ответ.
6.	Найти $\text{rang } A$ и указать какой-нибудь базисный минор $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.
7.	Решить систему $AX = B$ матричным способом. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	1) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1,5 \\ -14,5 \end{pmatrix}$; 4) $X = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 14,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$; 5) другой ответ.
8.	Решить систему методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 5 \\ -2x_1 + 7x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$	1) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{14}{9} \end{pmatrix}$;

		4) $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{14}{9} \end{pmatrix}$; 5) другой ответ.
9.	<p>Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти ее решение:</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$	<p>1) несовместна; 2) $\begin{pmatrix} \frac{5}{3}C \\ 4C \\ -\frac{1}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$;</p> <p>3) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5}C \\ 4C \\ -\frac{1}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 4) $\begin{pmatrix} C \\ 4C \\ -\frac{1}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 5) другой ответ.</p> <p>вет.</p>
10.	<p>Для данной однородной системы найти общее решение:</p> $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$	<p>1) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}C \\ \frac{2}{3}C \\ -\frac{1}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}C \\ \frac{2}{3}C \\ -\frac{1}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$;</p> <p>3) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}C \\ -\frac{2}{3}C \\ -\frac{1}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 4) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}C \\ \frac{2}{3}C \\ \frac{1}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 5) другой ответ.</p> <p>вет.</p>

Тест 1. «Линейная алгебра»

Вариант 4

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Если A – квадратная матрица 3×3 , то побочную диагональ составляют элементы	1) a_{11}, a_{22}, a_{33} ; 2) a_{11}, a_{12}, a_{13} ; 3) a_{31}, a_{22}, a_{13} ; 4) a_{31}, a_{32}, a_{33} ; 5) другой ответ.
2.	Из перечисленных матриц $H_{2 \times 1}, F_{3 \times 2}, G_{3 \times 3}$ можно перемножить	1) FG ; 2) HFG ; 3) FGH ; 4) FH, GF ; 5) другой ответ.
3.	Элемент матрицы $C_{31}, C = AB$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	1) - 10; 2) 19; 3) -19; 4) 20; 5) другой ответ.
4.	Решением уравнения $AXB^{-1} = B$, где A, B – квадратные невырожденные матрицы одного и того же порядка, является матрица X , определяемая по формуле	1) $X = AB$; 2) $X = A^{-1}B$; 3) $X = B^{-1}A$; 4) $X = A^{-1}B^2$; 5) другой ответ.
5.	Вычислить определитель, разлагая его по элементам 3-го столбца $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	1) 81; 2) -18; 3) 18; 4) 20; 5) другой ответ.
6.	Найти $\text{rang } A$ и указать какой-нибудь базисный минор $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.
7.	Решить систему $AX = B$ матричным способом. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	1) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$; 4) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; 5) другой ответ.

8.	<p>Решить систему методом Крамера</p> $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$	$1) X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}; 2) X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ -2 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}; 3) X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; 4)$ $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ <p>5) другой ответ.</p>
9.	<p>Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти ее решение:</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$	$1) \begin{pmatrix} -2C \\ \frac{2}{3} - \frac{7}{3}C \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 2) \begin{pmatrix} 2C \\ -\frac{2}{3} - \frac{7}{3}C \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R;$ $3) \begin{pmatrix} -2C \\ \frac{2}{3} - \frac{7}{3}C \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 4) \begin{pmatrix} -2C \\ -\frac{2}{3} - \frac{7}{3}C \\ \frac{1}{3} - \frac{5}{3}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 5)$ <p>другой ответ.</p>
10.	<p>Для данной однородной системы найти общее решение:</p> $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	$1) \begin{pmatrix} \frac{3}{2}C \\ \frac{1}{2}C \\ \frac{1}{2}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 2) \begin{pmatrix} 3C \\ \frac{1}{2}C \\ \frac{1}{2}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R;$ $3) \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}C \\ \frac{1}{2}C \\ \frac{1}{2}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 4) \begin{pmatrix} \frac{3}{2}C \\ -\frac{1}{2}C \\ \frac{1}{2}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R; 5) другой$ <p>ответ.</p>

Тест 1. «Линейная алгебра»

Вариант 5

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Если A – квадратная матрица 5×5 то побочную диагональ составляют элементы	1) a_{31}, a_{22}, a_{13} ; 2) a_{21}, a_{12} ; 3) $a_{51}, a_{42}, a_{33}, a_{24}$; 4) $a_{15}, a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{51}$; 5) другой ответ.
2.	Из перечисленных матриц $F_{3 \times 2}, E_{3 \times 3}, H_{3 \times 1}$ можно перемножить	1) FH ; 2) HE ; 3) FE ; 4) EH, EF ; 5) другой ответ.
3.	Элемент матрицы $C_{32}, C = AB$, где $A = \begin{pmatrix} 14 \\ 56 \\ 96 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$	1) -13; 2) -9; 3) 13; 4) 24; 5) другой ответ.
4.	Решением уравнения $XA = B^{-1}$, где A, B – квадратные невырожденные матрицы одного и того же порядка, является матрица X , определяемая по формуле	1) $X = A^{-1}B$; 2) $X = AB$; 3) $X = B^{-1}A^{-1}$; 4) $X = BA$; 5) другой ответ.
5.	Вычислить определитель, разлагая его $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ по элементам 3-го столбца	1) 21; 2) -21; 3) 12; 4) -12; 5) другой ответ.
6.	Найти $\text{rang } A$ и указать какой-нибудь базисный минор $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.
7.	Решить систему $AX = B$ матричным способом. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$	1) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; 5) другой ответ.
8.	Решить систему методом Крамера $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$	1) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$;

		4) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; 5) другой ответ.
9.	<p>Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти ее решение:</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$	<p>1) $\begin{pmatrix} 18C \\ -\frac{2}{3} + 33C \\ \frac{1}{3} - 21C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 2) $\begin{pmatrix} -18C \\ -\frac{2}{3} + 33C \\ \frac{1}{3} - 21C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$;</p> <p>3) $\begin{pmatrix} 18C \\ \frac{2}{3} + 33C \\ \frac{1}{3} - 21C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 4) $\begin{pmatrix} 18C \\ -\frac{2}{3} + 33C \\ -\frac{1}{3} - 21C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 5) другой ответ.</p>
10.	<p>Для данной однородной системы найти общее решение:</p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0 \\ -3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$	<p>1) $\begin{pmatrix} \frac{-67}{13}C \\ \frac{C}{13} \\ \frac{-36}{13}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 2) $\begin{pmatrix} \frac{67}{13}C \\ \frac{C}{13} \\ \frac{-36}{13}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$;</p> <p>3) $\begin{pmatrix} \frac{-67}{13}C \\ \frac{C}{13} \\ \frac{36}{13}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 4) $\begin{pmatrix} \frac{-66}{13}C \\ \frac{C}{13} \\ \frac{-36}{13}C \\ C \end{pmatrix} \forall C \in R$; 5) другой ответ.</p>

Тест 1. «Линейная алгебра»

Ответы

Варианты	Номера ответов заданий									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	3	4	2	3	2	3	1	1	1
2	4	3	2	2	4	2	2	1	1	1
3	4	4	3	2	2	2	4	4	1	1
4	3	4	3	4	3	2	4	2	1	1
5	4	4	3	3	2	2	3	4	1	1

Тест 2. «Аналитическая геометрия»

Вариант 1

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найти длину вектора \overline{AB} , если т. А(1, 2, 3), т. В(4, 5, 1).	1) $\sqrt{22}$; 2) 5; 3) 4; 4) $\sqrt{23}$; 5) $\sqrt{18}$.
2.	Найти синус угла между векторами $\vec{a} = (2; 1; 2)$ и $\vec{b} = (-2; 2; 1)$.	1) 1; 2) 0,5; 3) $\frac{2}{5}$; 4) 0,8; 5) $-0,3$.
3.	Сила $\vec{F} = (4; -3; -7)$ приложена в т. А(1, 6, 5). Найти момент этой силы относительно начала координат.	1) $(-27; 27; -27)$; 2) $(27; 27; -27)$; 3) $(-27; -27; -27)$; 4) $(-27; -27; 1)$; 5) $(1; 2; 3)$.
4.	Записать уравнение прямой АВ, если А(4; 3), В(-2; 5).	1) $2x + 6y = 26$; 2) $x - y = 5$; 3) $2x - 6y = 18$; 4) $x + 5y = 1$; 5) $3x + 4y = 8$.
5.	Найти угол между прямыми $y = 4x - 1$ и $y = x + 5$.	1) $\varphi = \arctg \frac{3}{5}$; 2) $\varphi = \arctg \frac{4}{7}$; 3) $\varphi = 0$; 4) $\cos \varphi = \frac{3}{7}$; 5) $\cos \varphi = \frac{2}{9}$.
6.	Составить уравнение плоскости, проходящей через т. $M_0(4; 3; -2) \perp \vec{n} = (1; -7; 5)$.	1) $x - 7y + 5z + 27 = 0$; 2) $2x - y + 5z - 27 = 0$; 3) $x + 7y - 5z + 27 = 0$; 4) $-x - 7y - 5z + 27 = 0$; 5) $x + 5y - 7z + 27 = 0$.
7.	Найти угол между плоскостями $5x + 4y - 2z - 3 = 0$ и $20x + 16y - 8z + 5 = 0$.	1) $\varphi = 0$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 3) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 4) $\varphi = \pi$; 5) $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
8.	Найти расстояние между прямыми $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 4 - 6t \\ y = -1 + 2t \\ z = 7 - 4t \end{cases}$.	1) $\sqrt{\frac{26}{7}}$; 2) $\sqrt{\frac{28}{9}}$; 3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{37}}{3}$; 5) 8.
9.	Найти координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$	1) $a = -3, b = 4; R = 6$; 2) $a = 3, b = 4; R = 4$; 3) $a = 3, b = -4; R = 5$; 4) $a = 2, b = 3; R = 6$; 5) $a = 3, b = 4; R = 7$.
10.	Записать уравнение директрисы параболы $y^2 = 8x$.	1) $x = -2$; 2) $x = 2$; 3) $y = 4$; 4) $y = -4$; 5) $x = \pm 1$.

Тест 2. «Аналитическая геометрия»

Вариант 2

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (1; 3; 4)$ и $\vec{b} = (-3; 2; 0)$.	1) 3; 2) 4; 3) - 3; 4) 2; 5) 1.
2.	Найти синус угла между векторами $\vec{a} = (2; - 4; 4)$ и $\vec{b} = (2; 1; - 2)$.	1) $\frac{\sqrt{65}}{9}$; 2) $\frac{\sqrt{65}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{65}}{5}$; 4) $\frac{\sqrt{63}}{9}$; 5) $\frac{\sqrt{67}}{9}$.
3.	Сила $\vec{F} = (2; 4; 6)$ приложена в т. А(3, - 5, 7). Найти момент этой силы относительно т. В(1; - 8; 9).	1) (20; 10; 5); 2) (26; - 16; 2); 3) (- 26; 16; - 2); 4) (26; 16; - 2); 5) (- 26; 2; - 26).
4.	Записать уравнение прямой в отрезках $2x - 7y = 8$.	1) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-\frac{8}{7}} = 1$; 2) $\frac{x}{8} - \frac{y}{7} = 1$; 3) $\frac{x}{8} - \frac{7y}{8} = 1$; 4) $\frac{x}{8} - \frac{y}{\frac{8}{7}} = 1$; 5) $\frac{x}{8} + \frac{y}{8} = 1$.
5.	Найти точку пересечения прямых $2x - 3y = 4$ $x + 2y = 7$	1) $M\left(\frac{29}{7}; \frac{10}{7}\right)$; 2) $M(10; 3)$; 3) $M\left(\frac{7}{20}; \frac{7}{10}\right)$; 4) $M(1; 2)$; 5) $M\left(-\frac{29}{7}; \frac{10}{7}\right)$.
6.	Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси ОХ и проходящей через т. $M_0(7; - 4; 3)$.	1) $x + y = 5$; 2) $y = 7$; 3) $x = 7$; 4) $x - 6 = 0$; 5) $x + 7 = 0$.
7.	Найти угол между плоскостями $3x - 2y + 5z + 2 = 0$ и $x + 4y + z - 4 = 0$.	1) $\varphi = 0$; 2) $\varphi = 90^\circ$; 3) $\varphi = 45^\circ$; 4) $\varphi = 70^\circ$; 5) $\varphi = 60^\circ$.
8.	Найти расстояние от точки $M(2; - 3; 5)$ до прямой $x = 5 + 2t$, $y = -4 - t$, $z = 6 - 2t$.	1) $\frac{\sqrt{74}}{3}$; 2) 28; 3) $\frac{\sqrt{63}}{5}$; 4) $\frac{3}{7}$; 5) $\frac{8}{\sqrt{7}}$.
9.	Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $M(1; 2)$.	1) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$; 2) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$; 3) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$; 4) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$; 5) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$.
10.	Записать каноническое уравнение параболы, фокус которой находится в точке $F(4; 0)$.	1) $y^2 = 16x$; 2) $y^2 = 8x$; 3) $y^2 = 4x$; 4) $x^2 = 4y$; 5) $x^2 = -4y$.

Тест 2. «Аналитическая геометрия»

Вариант 3

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найти угол между векторами $\vec{a} = (3; 0; 4)$ и $\vec{b} = (5; 1; -1)$.	1) $\cos \varphi = \frac{11}{15\sqrt{3}}$; 2) $\varphi = 0$; 3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 4) $\cos \varphi = \frac{15}{9\sqrt{41}}$; 5) $\cos \varphi = \frac{-11}{3\sqrt{15}}$.
2.	Упростить выражение $[(3\vec{a} - 4\vec{b}), (2\vec{a} + 5\vec{b})]$	1) $[\vec{a}, \vec{b}]$; 2) $32[\vec{a}, \vec{b}]$; 3) $23[\vec{a}, \vec{b}]$; 4) $16[\vec{a}, \vec{b}]$; 5) $6[\vec{a}, \vec{b}]$.
3.	Сила $\vec{F} = (3; -4; 2)$ приложена в т. А(2, 1, 2). Найти направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.	1) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\cos \beta = \frac{2}{15}$; $\cos \gamma = -\frac{11}{15}$; 2) $\cos \alpha = \frac{3}{2}$; $\cos \beta = \frac{3}{11}$; $\cos \gamma = \frac{4}{15}$; 3) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$; $\cos \beta = \frac{2}{15}$; $\cos \gamma = \frac{11}{15}$; 4) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; $\cos \beta = \frac{2}{3}$; $\cos \gamma = \frac{2}{3}$; 5) $\cos \alpha = 0$; $\cos \beta = \frac{1}{2}$; $\cos \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4.	Записать уравнение прямой, проходящей через т. М(4; 3) параллельно прямой $y = -3x + 1$.	1) $y = -3x + 15$; 2) $y = 3x - 15$; 3) $y = x - 15$; 4) $y = x + 15$; 5) $y = -3x + 4$.
5.	Найти угол между прямыми $2x + 3y - 1 = 0$ и $x - 4y + 5 = 0$.	1) $\cos \varphi = \frac{10}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 4) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$; 5) $\cos \varphi = \frac{10}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{17}}$.
6.	Записать уравнение плоскости, параллельной оси ОХ и проходящей через т. М(3; -5; 6) и N(2; 1; 1).	1) $6x + 5y = 0$; 2) $6x - z - 11 = 0$; 3) $z = 11$; 4) $5y + 6z - 11 = 0$; 5) $x = 7$.
7.	На оси ОУ найти точку, отстоящую от плоскости $2x + 3y - 6z + 7 = 0$ на расстоянии $d = 5$.	1) $M_1(0; \frac{28}{3}; 0)$, $M_2(0; -14; 0)$; 2) $M(0; \frac{28}{3}; 0)$; 3) $M(14; 0; 0)$; 4) $M(5; 14; 0)$; 5) $M(0; 0; 14)$.
8.	Найти угол между прямыми $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{7} = \frac{z+6}{8}$ и $\frac{x+1}{8} = \frac{y-5}{-11} = \frac{z+9}{-7}$	1) $\varphi = 135^\circ$; 2) $\varphi = 90^\circ$; 3) $\varphi = 45^\circ$; 4) $\varphi = 120^\circ$; 5) $\varphi = 60^\circ$.
9.	Составить уравнение окружности, касающейся оси ОУ и проходящей через точки М(1; 6) и N(5, - 2).	1) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$; 2) $(x+5)^2 + (y+3)^2 = 25$; 3) $(x-25)^2 + (y-13)^2 = 625$;

		4) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$; 5) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 1$.
10.	Записать уравнение директрис гиперболы $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{36} = 1$.	1) $x = \pm 3,5$; 2) $x = 5$; 3) $x = \pm 5$; 4) $x = \pm 6$; 5) $x = \pm 1$.

Тест 2. «Аналитическая геометрия»

Вариант 4

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны, причем $ \vec{a} = 4$; $ \vec{b} = 3$. Найти $ \vec{a} + \vec{b} $.	1) 5; 2) 9; 3) -5; 4) 2; 5) 3.
2.	Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = (1; 2; -2)$ и $\vec{b} = (8; 6; 4)$	1) (20; 20; -10); 2) (20; -20; -10); 3) (20; 20; 5); 4) (15; -20; -10); 5) (19; -20; -10).
3.	Вычислить смешанное произведение векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, если $\vec{a} = (-4; -3; -9)$, $\vec{b} = (1; 0; -1)$, $\vec{c} = (-5; -4; 3)$.	1) 35; 2) 40; 3) 46; 4) 20; 5) 0.
4.	Записать уравнение прямой, проходящей через т. А(3; 5) при $k=2$.	1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -2x + 1$; 3) $y = 4x - 3$; 4) $y = x + 1$; 5) $y = -x - 1$.
5.	Записать уравнение прямой в отрезках $2x + 4y - 5 = 0$.	1) $\frac{x}{2,5} + \frac{y}{1,25} = 1$; 2) $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$; 3) $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$; 4) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 5$; 5) $\frac{x}{10} + \frac{y}{12} = 1$.
6.	Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -2; -1)$, $M_2(4; 1; 1)$ и вектор $\vec{a} = (5; 3; 4)$.	1) $y - 3x + 4z - 2 = 0$; 2) $-3x + y - 3z + 9 = 0$; 3) $x + 4y = 11$; 4) $3x - y - 3z - 8 = 0$; 5) $3x + y - 3z + 9 = 0$.
7.	На оси ОХ найти точку, отстоящую от плоскости $6x + 2y + 3z - 12 = 0$ на расстоянии $d = 6$.	1) $M(9; 0; 0)$; 2) $M(0; 9; 0)$; 3) $M(-9; 0; 0)$; 4) $M(0; 0; 9)$; 5) $M(-9; 0; 1)$.
8.	Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через т. $M_0(4; 6; -7)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3; -1; 5)$.	1) $\frac{x+4}{3} = \frac{y+6}{1} = \frac{z+7}{5}$; 2) $\frac{x-4}{3} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+7}{5}$; 3) $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-7}{5}$; 4) $\frac{x+4}{-3} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+7}{-5}$; 5) $\frac{x-4}{4} = \frac{y+1}{8} = \frac{z+5}{7}$.

9.	Составить уравнение окружности, касающейся прямой $3x + 4y - 15 = 0$ и имеющей центр в т. $O(5; 5)$.	1) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 16$; 2) $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 16$; 3) $(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 16$; 4) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 12$; 5) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 16$.
10.	Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси OY , если расстояние между фокусами равно 24, малая ось равна 10.	1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$; 2) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$; 4) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{18} = 1$; 5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Тест 2. «Аналитическая геометрия»

Вариант 5

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить скалярное произведение векторов, если $ \vec{a} = 2$; $ \vec{b} = 5$; $\varphi = 0$.	1) 8; 2) 10; 3) 7; 4) 6; 5) 5.
2.	Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = (2; 11; -10)$ и $\vec{b} = (3; 6; -2)$	1) $38\vec{i} - 26\vec{j} - 21\vec{k}$; 2) $40\vec{i} - 10\vec{j} + 5\vec{k}$; 3) $30\vec{i} + 26\vec{j} + 21\vec{k}$; 4) $39\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$; 5) $38\vec{i} + 26\vec{j} + 21\vec{k}$.
3.	Определить, какой тройкой является тройка векторов $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (-2; 1; 1)$, $\vec{c} = (1; -2; 2)$.	1) левая; 2) правая; 3) произвольная.
4.	Записать уравнение прямой AB , если $A(3; 4)$; $B(6; 1)$.	1) $y = -x + 7$; 2) $y = x + 7$; 3) $y = x - 7$; 4) $y = 2x + 3$; 5) $y = 3x - 2$.
5.	Найти угол между прямыми $y = 2x + 3$ и $y = 4x - 1$.	1) $\varphi = 0$; 2) $\varphi = \arctg\left(-\frac{2}{9}\right)$; 3) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 4) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 5) $\varphi = \arctg\frac{9}{2}$.
6.	Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат $3x - 4y + 2z - 12 = 0$	1) $a = 4$; $b = -3$; $c = 6$; 2) $a = -4$; $b = 3$; $c = -6$; 3) $a = 3$; $b = 4$; $c = 6$; 4) $a = 4$; $b = 3$; $c = -6$; 5) $a = -2$; $b = 3$; $c = 6$.
7.	Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $2x + y - 2z - 6 = 0$, $2x + y - 2z - 15 = 0$.	1) 3; 2) 5; 3) 9; 4) 21; 5) 6.

8.	Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через т. $M_0(1; -2; 3)$ параллельно вектору $\vec{a} = (4; 5; -7)$.	$1) \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 5t \\ z = 3 - 7t \end{cases}; 2) \begin{cases} x = -t \\ y = 5 - 2t \\ z = 3t \end{cases}; 3) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 5t \\ z = 3 + 7t \end{cases}$ $4) \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 - 7t \end{cases}; 5) \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 2 - 5t \\ z = 3t \end{cases}$
9.	Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок прямой $3x + 4y - 12 = 0$, заключенный между осями координат.	$1) (x+1)^2 + (y-3)^2 = 5; 2) (x-2)^2 + (y-1,5)^2 = 6,25;$ $3) (x+2)^2 + (y+1,5)^2 = 6,25; 4) (x-3)^2 + (y+4)^2 = 1;$ $5) (x+3)^2 + (y-4)^2 = 5.$
10.	Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси OX , если $a = 9; b = 5$.	$1) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1; 2) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; 3) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1;$ $4) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1; 5) \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Тест 2. «Аналитическая геометрия»

Ответы

Варианты	Номера ответов заданий									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	1	1	3	2	1	2	1
3	1	3	1	1	1	4	1	1	3	1
4	1	2	3	1	1	4	1	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	1	1	2	4

Тест 3. «Предел функции»

Вариант 1

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найти $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3)$	1) 7; 2) 0; 3) 4; 4) - 1; 5) 2.
2.	Найти $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$	1) 10; 2) 12; 3) 8; 4) 5; 5) 6.
3.	Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 3}{x + 4}$.	1) - 0,8; 2) 1; 3) 0,9; 4) 0,85; 5) 2.
4.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^4 + 2}}{x^3 - 5}$	1) 10; 2) 0; 3) -1; 4) 2; 5) 6.
5.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2}$	1) $\frac{1}{4}$; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) $\frac{1}{8}$.
6.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x$	1) e^2 ; 2) e^{-1} ; 3) 2; 4) ∞ ; 5) 0.
7.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+4x}$	1) e^4 ; 2) e^3 ; 3) e ; 4) 0; 5) ∞ .
8.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4}$.	1) ∞ ; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 0.
9.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{e^{2x} - 1} \right)$	1) 1; 2) 3; 3) 0; 4) 5; 5) ∞ .
10.	Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}$.	1) 2; 2) 3; 3) - 3; 4) 0; 5) 1.

Тест 3. «Предел функции»

Вариант 2

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{x-4}$	1) 3; 2) $-\frac{7}{2}$; 3) 4; 4) - 1; 5) 6.
2.	Найти $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 - 64}{x+4}$	1) 3; 2) 5; 3) 48; 4) 32; 5) 24.
3.	Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 6}{x^2 - 5x + 6}$.	1) 7; 2) 4; 3) 5; 4) 0; 5) 8.
4.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x + 3}{x^3 - 4}$	1) 4; 2) 0; 3) 5; 4) 2; 5) - 6.
5.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}$	1) 2; 2) 1; 3) 4; 4) 0; 5) 6.
6.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{2x-1} \right)^x$	1) ∞ ; 2) 0; 3) e ; 4) e^2 ; 5) $\frac{1}{e}$..
7.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+5x)}{x}$	1) 4; 2) $5 \log_2 e$; 3) 0; 4) 1; 5) ∞ .
8.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{2^{4x}}$.	1) 0; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6.
9.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$	1) 2; 2) 0; 3) ∞ ; 4) 5; 5) 1.
10.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$.	1) 0; 2) 1; 3) ∞ ; 4) - 3; 5) 2.

Тест 3. «Предел функции»

Вариант 3

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-3}{x+4}$	1) 0; 2) 4; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) 2; 5) - 5.
2.	Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$	1) 2; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 0; 4) 5; 5) - 1.
3.	Найти $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 8}{x^2 + 2x + 3}$.	1) $\frac{16}{27}$; 2) $\frac{27}{16}$; 3) $\frac{8}{12}$; 4) $\frac{10}{13}$; 5) $\frac{13}{29}$.
4.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^4 + 5}}$	1) 1; 2) 0; 3) ∞ ; 4) 2; 5) - 3.
5.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x}$	1) 1; 2) 0; 3) $\frac{2}{5}$; 4) 3; 5) 6.
6.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{4x+5} \right)^x$	1) 2; 2) e^3 ; 3) 0; 4) 1; 5) ∞ .
7.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{x}$	1) $3 \ln 2$; 2) 4; 3) 0; 4) ∞ ; 5) 1.
8.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin 2x - 2x}{3x^2 - x^3}$.	1) 0; 2) ∞ ; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 4; 5) 2.
9.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \cdot \sin x} \right)$	1) 5; 2) 0; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $-\frac{1}{3}$.
10.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.	1) $e^{-\frac{1}{8}}$; 2) e^8 ; 3) e^{-8} ; 4) 1; 5) ∞ .

Тест 3. «Предел функции»

Вариант 4

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найти $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{2x+3}$	1) 0; 2) 5; 3) - 1; 4) 2; 5) - 6.
2.	Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2}$	1) 12; 2) 0; 3) 8; 4) 10; 5) - 6.
3.	Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^4-5x^3+4x^2-7}{x^4+6x^2-8}$.	1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 3; 5) 8.
4.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-3x^2-2}{x^5-x^2+1}$	1) 0; 2) 3; 3) 2; 4) - 3; 5) 4.
5.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} 4x}$	1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{4}{7}$; 4) $\frac{2}{9}$; 5) 1.
6.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2}\right)^x$	1) e ; 2) ∞ ; 3) 0; 4) 2; 5) e^3 .
7.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$	1) e ; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 1; 4) ∞ ; 5) 3.
8.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - 1}{x^2 + 5x}$.	1) 0; 2) $\frac{1}{5}$; 3) 2; 4) 4; 5) - 1.
9.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$	1) 0; 2) ∞ ; 3) 4; 4) 5; 5) $\frac{1}{3}$.
10.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{4}$.	1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 4; 4) 0; 5) 1.

Тест 3. «Предел функции»

Вариант 5

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найти $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x+5}{x-5}$	1) 0; 2) ∞ ; 3) 4; 4) - 2; 5) 6.
2.	Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$	1) 2; 2) 4; 3) 0; 4) 5; 5) 3.
3.	Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-5x+4}{x-1}$.	1) 2; 2) 4; 3) - 3; 4) 5; 5) 0.
4.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x^2+5}{2x^3-8x-3}$	1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) ∞ .
5.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 8x}$	1) 2; 2) $\frac{7}{8}$; 3) 4; 4) $\frac{5}{6}$; 5) 2.
6.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^x$	1) e^2 ; 2) 3; 3) 4; 4) e^3 ; 5) e .
7.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{x}$	1) e ; 2) 1; 3) 7; 4) 6; 5) 5.
8.	Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{3x}}{\ln 5x}$.	1) ∞ ; 2) 3; 3) 4; 4) 0; 5) 5.
9.	Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 0; 3) 4; 4) ∞ ; 5) 1.
10.	Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(1-x)$.	1) 0; 2) 3; 3) 4; 4) ∞ ; 5) 2.

Тест 3. «Предел функции»

Ответы

Варианты	Номера ответов заданий									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	2
2	2	3	1	2	2	1	2	2	2	2
3	3	2	1	1	3	3	1	3	3	1
4	1	1	3	1	1	2	2	1	5	3
5	2	2	3	2	2	1	3	1	1	1

Тест 4: «Непрерывность и дифференцируемость функции одной переменной»

Вариант 1

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Указать тип точки разрыва функции $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$	1) $x_0 = 3$ -точка разрыва первого рода; 2) $x_0 = 3$ -точка разрыва второго рода; 3) $x_0 = 3$ -точка устранимого разрыва; 4) $x_0 = 3$ -точка непрерывности функции; 5) ни одно утверждение не верно.
2.	Найти производную функции: $y = x \cdot \cos 5x$	1) $\cos 5x - 5x \sin 5x$; 2) $\cos 5x$; 3) $5 \cos 5x$; 4) $x \sin 5x$; 5) $5x \sin 5x$
3.	Найти производную функции: $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 \end{cases}$	1) $\frac{t^3}{t^2 + 1}$; 2) $\frac{3t^2}{2t + 1}$; 3) $\frac{3}{2}t$; 4) $\frac{2t + 1}{3t^2}$; 5) $\frac{2t + 1}{t^3}$.
4.	Найти производную неявно заданной функции: $2^x + 3^y + 2x - 3y = 0$	1) $\frac{-2 - 2^x \ln 2}{3^y \ln y - 3}$; 2) $\frac{2^x - 2x}{3^y - 3y}$; 3) $\frac{2 + 2^x}{3^y - 3}$; 4) $\frac{2 + 2^x \ln 2}{3^y \ln 3}$; 5) $\frac{2 + 2^x \ln 2}{3^y \cdot y}$.
5.	Найти дифференциал функции: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$	1) $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx$; 2) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}dx$; 3) $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx$; 4) $-\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}dx$; 5) $-\frac{2}{3}x^3dx$.
6.	Найти производную 2-ого порядка функции: $y = \ln 6x$	1) $\frac{1}{x}$; 2) $-\frac{1}{x^2}$; 3) $-\frac{1}{x^3}$; 4) $\frac{1}{6x}$; 5) $6x$.
7.	Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7$	1) Возрастает в интервале $(-\infty; -2)$; 2) убывает в интервале $(\frac{8}{3}; +\infty)$; 3) возрастает в интервалах $(-\infty; -\frac{8}{3}) \cup (0; +\infty)$; убывает $(-\frac{8}{3}; 0)$; 4) возрастает $(\frac{8}{3}; 5)$; 5) убывает $(-\infty; -\frac{8}{3})$.
8.	Найти экстремум функции $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 4$	1) $\min f(x) = f(3) = -23$; $\max f(x) = f(1) = 5$; 2) $\min f(x) = f(1) = -3$; $\max f(x) = f(-3) = 20$; 3) $\min f(x) = f(4) = 25$; 4) $\max f(x) = f(5) = -30$; 5) экстремума нет.

9.	Найти точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$	1) M(2; 3); 2) M(-4; 1); 3) M(1; -4); 4) M(2; -4); 5) M(0; 5).
10.	Найти асимптоты графика функции $y = \sqrt{x^2 - 4}$	1) $y = -x$; $y = x$; 2) $y = 2x$; 3) $y = x - 5$; 4) $y = 3x + 1$; 5) $y = x + 1$.

Тест 4: «Непрерывность и дифференцируемость функции одной переменной»

Вариант 2

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Указать тип точки разрыва функции $f(x) = \frac{2}{1 - 3^x}$	1) $x_0 = 0$ -точка разрыва первого рода; 2) $x_0 = 0$ -точка разрыва второго рода; 3) $x_0 = 0$ -точка устранимого разрыва; 4) $x_0 = 0$ -точка непрерывности функции; 5) ни одно утверждение не верно.
2.	Найти производную функции: $y = \sqrt{\operatorname{ctg} 2x}$	1) $\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} 2x}} \cdot \frac{2}{\cos^2 2x}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} 2x}}$; 4) $\operatorname{ctg} 2x$; 5) $\sqrt{\operatorname{tg} 2x}$
3.	Найти производную функции: $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 3t \end{cases}$	1) $-\frac{2 \sin 2t}{3 \cos 3t}$; 2) $\frac{\sin 2t}{\cos 3t}$; 3) $\frac{\sin t}{\cos t}$; 4) $\frac{\cos 3t}{\sin 2t}$; 5) $\frac{2 \sin 2t}{3 \cos 3t}$.
4.	Найти производную неявно заданной функции: $\ln x + e^y + 5y = 0$	1) $-\frac{\ln x - e^y}{5}$; 2) $\frac{\frac{1}{x} + y}{5}$; 3) $\frac{\ln x + e^y}{5}$; 4) $-\frac{1}{x(e^y + 5)}$; 5) $\frac{\ln x}{e^y + 5}$.
5.	Найти дифференциал функции: $f(x) = 3 + x^2 + 5x$.	1) $(3 + 2x)dx$; 2) $(2x + 5)dx$; 3) $(3 + x^2 + 5x)dx$; 4) $2x dx$; 5) $(2x + 5)dx$.
6.	Найти производную 2-ого порядка функции: $y = e^{7x}$.	1) $49e^{7x}$; 2) $7e^{7x}$; 3) e^{7x} ; 4) $e^{7x} + 7$; 5) $e^{7x} \cdot 7 + 7$.
7.	Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 12$.	1) Возрастает в интервалах $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$; убывает в интервале $(-3; -1)$; 2) возрастает в интервале $(-\infty; -3)$; 3) убывает в интервале $(-3; -1)$; 4) возрастает $(-\infty; -1)$; 5) убывает $(-1; +\infty)$.
8.	Найти экстремум функции $f(x) = x^4 - 10x^2 + 15$	1) $\max f(x) = 10$; 2) $\min f(x) = -3$;

		3) $\max f(x) = 1$; 4) $\min f(x) = f(\pm\sqrt{5}) = -10$; $\max f(x) = f(0) = 15$ 5) экстремума нет.
9.	Найти точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 6x + 7$	1) M(0; 7); 2) M(1; 6); 3) M(0; 5); 4) M(1; 7); 5) M(-1; -7).
10.	Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 5}{x^2}$	1) $x = 0$; 2) $y = x$; 3) $x = 0$; $y = x + 2$; 4) $y = x - 2$; 5) $x = 2$.

Тест 4: «Непрерывность и дифференцируемость функции одной переменной»

Вариант 3

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Указать тип точки разрыва функции $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+5}$	1) $x_0 = -5$ -точка разрыва первого рода; 2) $x_0 = -5$ -точка разрыва второго рода; 3) $x_0 = -5$ -точка устранимого разрыва; 4) $x_0 = -5$ -точка непрерывности функции; 5) ни одно утверждение не верно.
2.	Найти производную функции: $y = \operatorname{arctg}^2 5x$	1) $\frac{1}{1+x^2} \cdot 5$; 2) $2 \operatorname{arctg} 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 3) $2 \operatorname{arctg} 5x \cdot \frac{5}{1+25x^2}$; 4) $\operatorname{arctg}^2 5x$; 5) $2 \operatorname{arctg} 5x$
3.	Найти производную функции: $\begin{cases} x = 2^{3t} \\ y = \ln 4t \end{cases}$	1) $\frac{1}{3t \cdot 2^{3t} \cdot \ln 2}$; 2) $\frac{1}{2^{3t} \cdot \ln 2}$; 3) $\frac{2^{3t}}{4t}$; 4) $\frac{2^{3t} \cdot \ln 2 \cdot 3}{4t}$; 5) $\frac{2^{3t}}{4}$.
4.	Найти производную неявно заданной функции: $\sin 4x + \cos 5y - 4x = 0$	1) $\frac{4 \cos 4x - 4}{5 \sin 5y}$; 2) $\frac{\cos 4x - 4}{\sin 5y}$; 3) $\frac{\sin 4x - 4}{\sin 5x}$; 4) $\frac{\cos 4x + 4}{5}$; 5) $\frac{1}{\sin 5y}$.
5.	Найти дифференциал функции: $y = 4^{\operatorname{ctg} x}$.	1) $\frac{-4^{\operatorname{ctg} x} \cdot \ln 4}{\sin^2 x} dx$; 2) $4^{\operatorname{ctg} x} \cdot \operatorname{tg} x dx$; 3) $4^{\operatorname{ctg} x} \cdot \ln 4 dx$; 4) $4^{\operatorname{ctg} x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$; 5) $4^{\operatorname{ctg} x} \cdot \ln 4 \cdot \operatorname{tg} x dx$.
6.	Найти производную 2-ого порядка функции: $y = \frac{x^2 + x}{x-1}$.	1) $\frac{x+1}{x}$; 2) $\frac{4}{(x-1)^2}$; 3) $\frac{4}{x-1}$; 4) $\frac{1}{2x+1}$; 5) $(2x+1) \cdot x$.

7.	Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$.	1) Возрастает $(-\infty; -3)$; 2) убывает $(3; +\infty)$; 3) убывает в интервалах $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (0; \sqrt{2})$; возрастает в интервалах $(-\sqrt{2}; 0) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$; 4) возрастает $(-\infty; \sqrt{2})$; 5) убывает $(-\sqrt{2}; +\infty)$.
8.	Найти экстремум функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$	1) $\min f(x) = f(3) = 5$; 2) $\min f(x) = f(1) = -5$; $\max f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{27}$; 3) $\max f(x) = f(0) = -5$; 4) $\min f(x) = f(3) = 7$; 5) $\max f(x) = f(2) = -3$.
9.	Найти точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$	1) M(1; -3); 2) M(-3; 1); 3) M(1; 0); 4) M(3; 0); 5) M(1; 4).
10.	Найти асимптоты графика функции $y = \frac{4 + 2x - x^2}{x}$	1) $x = -1$; 2) $x = 2$; 3) $x = 0$; $y = 2 - x$; 4) $x = 0$; 5) $y = 4 - 3x$.

Тест 4: «Непрерывность и дифференцируемость функции одной переменной»

Вариант 4

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Указать тип точки разрыва функции $f(x) = \frac{1}{x+2}$.	1) $x_0 = -2$ -точка разрыва первого рода; 2) $x_0 = -2$ -точка разрыва второго рода; 3) $x_0 = -2$ -точка устранимого разрыва; 4) $x_0 = -2$ -точка непрерывности функции; 5) ни одно утверждение не верно.
2.	Найти производную функции: $y = 4^{\arcsin x}$	1) $4^{\arcsin x} \cdot \ln 4$; 2) $\frac{4^{\arcsin x} \cdot \ln 4}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $4^{\arccos x}$; 4) $4^{\arccos x} \cdot \ln 4$; 5) $4^{\arccos x} \cdot 4$.
3.	Найти производную функции: $\begin{cases} x = \operatorname{tg} 5t \\ y = t \end{cases}$	1) $\frac{t}{\cos^2 5t}$; 2) $\frac{\cos^2 5t}{5}$; 3) $\cos^2 5t \cdot 5$; 4) $\frac{1}{\sin 5t}$; 5) $\frac{1}{\operatorname{ctg} 5t} \cdot 5$.
4.	Найти производную неявно заданной функции: $\cos x + \operatorname{tg} y + 3x + 6y = 0$.	1) $\frac{(\sin x - 3)\cos^2 y}{1 + 6\cos^2 y}$; 2) $\frac{\sin x - 3}{\cos^2 y}$; 3) $\frac{(\sin x - 3)\cos^2 y}{6(\cos^2 y + 1)}$; 4) $\frac{\sin x - 3}{6\cos^2 y}$; 5) $\frac{\sin x - 3}{6 + 6\cos^2 y}$.
5.	Найти дифференциал функции: $y = \sqrt{\cos 3x}$.	1) $\frac{\cos 3x}{3} dx$; 2) $\frac{-3\sin 3x}{2\sqrt{\cos 3x}} dx$; 3) $\frac{3\sin 3x}{2\cos^2 3x} dx$;

		4) $\frac{3\sin 3x}{2\cos^3 2x} dx$; 5) $3\sin 3x \cdot \cos 3x dx$.
6.	Найти производную 2-ого порядка функции: $y = \operatorname{ctg} x$.	1) $\frac{2\cos x}{\sin^2 x}$; 2) $\frac{\sin x}{\operatorname{ctg} x}$; 3) $\frac{2\cos x}{\sin x}$; 4) $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$; 5) $\frac{3\cos x}{\sin^3 x}$.
7.	Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.	1) Возрастает $(-\infty; 1)$; убывает $(1; +\infty)$; 2) возрастает $(-\infty; 2)$; 3) убывает $(4; +\infty)$; 4) возрастает $(-1; 2)$; убывает в интервалах $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 5) возрастает $(-\infty; +\infty)$.
8.	Найти экстремум функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$	1) $\max f(x) = f(1) = 0$; 2) $\min f(x) = f(0) = -4$; $\max f(x) = f(-2) = 0$; 3) $\max f(x) = f(2) = 16$; 4) $\min f(x) = f(-1) = -2$; 5) $\max f(x) = f(3) = 50$.
9.	Найти точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$	1) $M(-7; 2)$; 2) $M(1; 3)$; 3) $M(4; 2)$; 4) $M(2; -7)$; 5) $M(0; 6)$.
10.	Найти асимптоты графика функции $y = \frac{3}{x^3 - x}$.	1) $x = 0$; $x = \pm 1$; 2) $x = 1$; 3) $x = 0$; 4) $x = \pm 1$; 5) $x = 2$.

Тест 4: «Непрерывность и дифференцируемость функции одной переменной»

Вариант 5

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Указать тип точки разрыва функции $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.	1) $x_0 = 2$ -точка разрыва первого рода; 2) $x_0 = 2$ -точка разрыва второго рода; 3) $x_0 = 2$ -точка устранимого разрыва; 4) $x_0 = 2$ -точка непрерывности функции; 5) ни одно утверждение не верно.
2.	Найти производную функции: $y = 2^{\frac{3}{x}}$	1) $2^{\frac{3}{x}} \cdot \ln 2$; 2) $2^{\frac{3}{x}}$; 3) $2^{\frac{3}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{-3}{x^2}\right)$; 4) $2^{\frac{3}{x}} \cdot 3$; 5) $2^{\frac{3}{x}} \cdot \ln \frac{3}{x}$.
3.	Найти производную функции: $\begin{cases} x = \sin 5t \\ y = t^3 \end{cases}$.	1) $\frac{3t^2}{5\cos 5t}$; 2) $\frac{\cos 5t}{3t^2}$; 3) $\frac{3t}{\sin 5t}$; 4) $\frac{3t^2}{\cos 5t} \cdot 5$; 5) $\frac{\cos 5t \cdot 5}{3t^2}$.

4.	Найти производную неявно заданной функции: $x^2 + y^2 + 4x - 5y = 0$.	1) $\frac{2x+4}{2y}$; 2) $\frac{2x+4}{5-2y}$; 3) $\frac{2x+4}{2y-1}$; 4) $\frac{2x+4}{2y-5}$; 5) $\frac{2x-4}{y+5}$.
5.	Найти дифференциал функции: $y = \arcsin 5x$.	1) $\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}} dx$; 2) $\arccos 5x dx$; 3) $\frac{1}{1+5x^2} dx$; 4) $\frac{1}{1-25x^2} dx$; 5) $\frac{1}{5+x^2} dx$.
6.	Найти производную 2-ого порядка функции: $y = x^3 + 6x^2 - 5x + 8$.	1) $x = 1$; 2) $x = 0$; 3) $x = 2x + 3$; 4) $6x + 12$; 5) $6x + 1$.
7.	Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = e^x$.	1) Возрастает $(-\infty; +\infty)$; 2) возрастает $(-\infty; 0)$; 3) возрастает $(0; +\infty)$; 4) убывает $(0; +\infty)$; 5) возрастает $(1; 2)$.
8.	Найти экстремум функции $f(x) = x^3 - 3x + 5$	1) $\min f(x) = f(1) = 3$; $\max f(x) = f(-1) = 7$; 2) $\max f(x) = f(0) = 5$; 3) $\min f(x) = f(1) = 3$; 4) $\max f(x) = f(2) = 7$; 5) $\min f(x) = f(3) = 23$.
9.	Найти точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 + 6x^2 - 7x + 8$	1) M(38; 4); 2) M(-2; 38); 3) M(1; 2); 4) M(2; 3); 5) M(0; 1).
10.	Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.	1) $x = \pm 1$; 2) $x = 0$; 3) $x + 2$; 4) $x - 2$; 5) $x = -1$.

Тест 4: «Непрерывность и дифференцируемость функции одной переменной»

Ответы

Варианты	Номера ответов заданий									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	1	3	1	1	2	3	1	3	1
2	1	2	1	4	2	1	1	4	1	3
3	1	3	1	1	1	2	3	2	1	3
4	2	2	2	1	2	1	1	2	4	1
5	3	3	1	2	1	4	1	1	2	1

IV ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ I»

Программа дисциплины

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

1. Матрицы. Основные определения. Операции над матрицами.
2. Определители 2-го и 3-го порядков, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Понятие об определителе n -го порядка. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).
3. Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров и элементарными преобразованиями.
4. Системы линейных уравнений. Основные определения. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера. Матричный способ решения невырожденных систем.
5. Решение произвольных систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса. Системы однородных уравнений.
6. Векторы. Линейные операции над векторами. Базис. Координаты вектора.
7. Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора. Проекция вектора на ось. Направляющие косинусы вектора. Угол между двумя векторами в координатной форме. Условие ортогональности двух векторов. Механический смысл скалярного произведения.
8. Векторное произведение двух векторов, его свойства. Условие коллинеарности двух векторов. Геометрический и механический смысл векторного произведения.
9. Смешанное произведение векторов и его свойства. Геометрический смысл смешанного произведения векторов.
10. Уравнение линии на плоскости. Общие уравнения прямой на плоскости и в пространстве, плоскости в пространстве. Векторные, параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
11. Угол между прямыми, между плоскостью и прямой, между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Расстояние от точки до плоскости и от точки до прямой на плоскости.
12. Кривые второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), их канонические уравнения и исследование геометрических свойств. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду в случае отсутствия члена с произведением переменных.

13. Уравнение поверхности в пространстве. Сфера. Эллипсоид. Гиперboloиды. Параболоиды. Цилиндрические и конические поверхности. Геометрические свойства этих поверхностей, исследование их формы методом сечений.

Введение в математический анализ

14. Множество действительных чисел. Комплексные числа, формы их записи. Действия над комплексными числами.
15. Ограниченные числовые множества. Верхние и нижние грани множеств. Числовые последовательности. Основные понятия и определения. Предел числовой последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности. Число « e ». Натуральные логарифмы.
16. Функция. Предел функции в точке. Односторонние пределы функции. Предел функции на бесконечности. Бесконечные пределы. Теорема о единственности предела. Бесконечно малые функции. Теорема о представлении функции, имеющей предел, в виде суммы ее предела и бесконечно малой функции. Ограниченность функции, имеющей предел. Предел промежуточной функции. Переход к пределу в неравенствах.
17. Первый и второй замечательные пределы.
18. Бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями. Теоремы о пределах. Сравнение бесконечно малых функций. Символы 0 и O .
19. Непрерывность функций, их свойства в точке и на отрезке. Точки разрыва функции и их классификация.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

20. Производная функции. Геометрический и механический смысл производной. Правила дифференцирования. Теорема о непрерывности дифференцируемых функций. Производная сложной функции. Непрерывность и дифференцируемость обратной функции.
21. Производные степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических, обратных тригонометрических, неявно и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производная степенно-показательной функции.
22. Производные и дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы дифференциала выше первого порядка.
23. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталю.
24. Формула Тейлора. Разложение функций по формуле Тейлора.

Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков

25. Возрастание и убывание функции на заданном промежутке. Условия возрастания и убывания функции на данном промежутке. Точки экстремума функции. Необходимый признак экстремума. Достаточные признаки экстремума функции.
26. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на данном отрезке. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Признаки выпуклости и вогнутости графика функции. Необходимый и достаточный признаки существования точки перегиба. Асимптоты кривой. Общая схема исследования функции и построения графика.

Экзаменационные вопросы для студентов 1 курса (1 семестр)

I. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1. Матрицы, основные определения. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц.
2. Определители 2-го и 3-го порядков, их основные свойства. Понятие об определителе n -го порядка.
3. Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.
4. Формулы Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений.
5. Ранг матрицы, способы его вычисления. Теорема о базисном миноре.
6. Решение произвольных систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли (без доказательства). Решение однородных систем.
7. Векторы, основные определения. Линейные операции над векторами. Базис. Координаты вектора.
8. Скалярное произведение векторов, основные свойства.
9. Выражение скалярного произведения через координаты векторов.
10. Векторное произведение векторов, основные свойства.
11. Выражение векторного произведения через координаты векторов.
12. Смешанное произведение векторов, основные свойства.
13. Выражение смешанного произведения через координаты векторов.
14. Уравнение линии на плоскости и в пространстве.
15. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках.
16. Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой в отрезках.
17. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
18. Векторное, параметрическое и каноническое уравнения прямой в пространстве и на плоскости.
19. Уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве и на плоскости.
20. Эллипс, его каноническое уравнение и исследование геометрических свойств.
21. Гипербола, ее каноническое уравнение и исследование геометрических свойств.
22. Парабола, ее каноническое уравнение и исследование геометрических свойств.
23. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду в случае отсутствия члена с произведением переменных.

24. Простейшие поверхности второго порядка, исследование их уравнений методом сечений на примерах эллипсоида и гиперболоидов.

25. Простейшие поверхности второго порядка, исследование их уравнений методом сечений на примерах конуса и параболоидов.

26. Простейшие поверхности второго порядка, исследование их уравнений методом сечений на примерах цилиндров.

27. Действительные числа. Комплексные числа, формы их записи.

28. Действия над комплексными числами.

II. Введение в математический анализ

29. Ограниченные числовые множества. Верхние и нижние грани множеств.

30. Предел числовой последовательности, основные определения. Теорема о единственности предела.

31. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Теорема о существовании предела монотонно ограниченной последовательности.

32. Функции. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности. Бесконечные пределы.

33. Теорема о представлении функции, имеющей предел, в виде суммы ее предела и бесконечно малой функции. Ограниченность функции, имеющей предел.

34. Предел промежуточной функции. Переход к пределу в неравенствах.

35. Основные теоремы о пределах.

36. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.

37. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые.

38. Первый замечательный предел.

39. Второй замечательный предел. Число e . Натуральные логарифмы.

40. Непрерывность функции, их свойства в точке и на отрезке.

41. Точки разрыва функции и их классификация.

III. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

42. Производная функции. Геометрический и механический смысл производной.

43. Правила дифференцирования.

44. Теорема о непрерывности дифференцируемых функций.

45. Производная сложной функции.

46. Производная обратной функции и функции, заданной неявно и параметрически.

47. Производные степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических, обратных тригонометрических функций.

48. Логарифмическое дифференцирование. Производная степенно-показательной функции.
49. Производные высших порядков.
50. Производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически.
51. Дифференциал функции. Его связь с производной. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
52. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы дифф-ла выше первого порядка.
53. Теорема Ферма. Теорема Ролля.
54. Теорема Лагранжа. Теорема Коши.
55. Правило Лопиталья.
56. Формула Тейлора.
57. Разложение по формуле Тейлора основных элементарных функций.
58. Применение формулы Тейлора в приближенных вычислениях.
59. Монотонные функции. Условия постоянства, возрастания и убывания функции на заданном промежутке.
60. Экстремум функций. Необходимые условия экстремума функции.
61. Достаточные признаки существования экстремума функции.
62. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на данном отрезке.
63. Выпуклость и вогнутость, точки перегиба. Признаки выпуклости и вогнутости графика функции.
64. Необходимый и достаточный признаки существования точки перегиба.
65. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения графика.
66. Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой.

Рекомендуемая литература

1. Минюк, С. А. Математика для инженеров: учебник в 2 т. / С. А. Минюк, Н. С. Березкина, А. В. Метельский. – Т. 1. – Минск: Элайда, 2006.
2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов): в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Т. 1. – М.: Наука, 1985.
3. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1992.
4. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко [и др.]. – М.: Оникс, 2005.
5. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – Минск: Вышэйшая школа, 1986.
6. Гусак, А. А. Высшая математика: в 2 т. / А. А. Гусак. – Т. 1. – Минск: ТетраСистемс, 2009.
7. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009.
8. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009.
9. Сухая, Т. А. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие: в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1993.
10. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие: в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Ч. 1. – Минск: Вышэйшая школа, 2009.
11. Высшая математика: сборник заданий для аудиторной и самостоятельной работы студентов инженерно-технических специальностей втузов: в 2 ч. / А. Н. Андриянчик [и др.]. – Ч. 1. – Минск: БНТУ, 2010.
12. Письменный, Д. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. / Д. Письменный. – Ч. 1. – М.: Айрис-пресс, 2009.