



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Теоретическая механика»

П. И. Ширвель

**МЕХАНИКА НЕОБРАТИМЫХ
ДЕФОРМАЦИЙ**

Методическое пособие к лабораторным работам

В 2 частях

Часть 1

Минск
БНТУ
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Теоретическая механика»

П. И. Ширвель

МЕХАНИКА НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Методическое пособие к лабораторным работам

В 2 частях

Часть 1

Рекомендовано учебно-методическим объединением в сфере высшего образования Республики Беларусь по образованию в области машиностроительного оборудования и технологий для студентов технических специальностей высших учебных заведений

Минск
БНТУ
2014

УДК 372.853+372.862+539.3/539.5+539.8

ББК 22.2+22.3

Ш64

Рецензенты:

М. Г. Ботогова, Т. М. Мартыненко

Ширвель, П. И.

Ш64 **Механика необратимых деформаций : методическое пособие к лабораторным работам : в 2 ч. / П. И. Ширвель. – Минск : БНТУ, 2014 – . – Ч 1. – 176 с.**

ISBN 978-985-550-350-8 (Ч. 1).

В методическом пособии к лабораторным работам включено краткое изложение основных теоретических сведений, знание которых необходимо для сознательного решения задач механики по расчету напряженно-деформированного состояния элементов конструкций и компонентов оборудования, эксплуатируемых в экстремальных условиях нагружения (включая неоднородное термосиловое и радиационное воздействие). Основное внимание уделено обобщению и систематизации данных по деформированию и изменению свойств, построению механико-математических моделей, использованию эффективных расчетных методов и т. д. Для решения конкретных задач применяются комплексы виртуального моделирования механических процессов (ANSYS, ABAQUS), пакеты вычислительных программ (MathCAD, MatLAB, Maple, Mathematics), средства программирования Microsoft Visual Studio 2012. Это способствует развитию у студентов здорового интереса к механико-математическим аспектам решения прикладных научно-технических задач.

Пособие может быть использовано студентами, магистрантами и аспирантами машиностроительных и энергетических специальностей, связанных с компьютерным моделированием необратимых механических процессов, а также преподавателями и инженерно-техническими работниками в целях повышения квалификации.

УДК 372.853+372.862+539.3/539.5+539.8

ББК 22.2+22.3

ISBN 978-985-550-350-8 (Ч. 1)

ISBN 978-985-550-351-5

© Ширвель П. И., 2014

© Белорусский национальный
технический университет, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

В различных областях высокотехнологической промышленности (энергетическое и атомное машиностроение, аэрокосмическая отрасль, двигателестроение, теплоэнергетическое строительство) находят широкое применение конструкционные элементы и компоненты оборудования, способные работать в различных режимах экстремального нагружения. Повышенные требования, предъявляемые к прочности и надежности таких элементов, могут быть обеспечены лишь при наличии достоверной информации об их напряженно-деформированном состоянии (НДС). Последующий расчет на прочность и оценка долговечности основаны на анализе НДС с учетом особенностей свойств и поведения материала в реальных условиях эксплуатации. Отметим, что современная постановка задач механики в настоящее время требует исследования НДС при всевозможных условиях, как правило, экстремальной эксплуатации, включая аварийные ситуации, вплоть до разрушения. Создание механико-математических моделей и методов расчета, в полной мере удовлетворяющих этим зачастую противоречивым требованиям, является одним из важнейших направлений механики деформируемого твердого тела [1]. Именно поэтому моделирование процессов деформирования твердых тел в сложных условиях физического и механического нагружения актуально как в теоретическом, так и в прикладном плане, что подтверждается ростом числа публикаций в отечественной и зарубежной литературе (по данным индекса цитируемости электронных систем научного поиска Web of Science, Scopus, SciVerse Science Direct). Здесь следует также подчеркнуть, что для текущего этапа развития механики характерна тесная взаимозависимость в постановке и решении общетеоретических проблем и прикладных наукоемких инженерных задач. Так, при решении задач продления эксплуатации компонентов оборудования, внедрения новых материалов в элементы конструкции, подверженные сложным техногенным воздействиям, возникает необходимость в более адекватном описании и имитационном моделировании. К примеру, многие компоненты оборудования и элементы конструкций энергетического машиностроения в процессе эксплуатации подвергаются воздействию различных немеханических факторов, которые могут существенно изменить как физико-

механические свойства, так и НДС. К таким факторам можно отнести неоднородное поле высоких температур, облучение потоком частиц с большой энергией, изменение внутренней структуры материала (образование пор и включений) и другие. Учет этих факторов становится определяющим, в частности, для конструктивных элементов, используемых в атомной промышленности, которые работают продолжительное время в совместных условиях механических и физических нелинейных воздействий, что приводит к необходимости дополнительного исследования в процессе эксплуатации НДС наиболее ответственных из них. Это становится крайне важной задачей, так как непредвиденное поведение элементов конструкций и компонентов оборудования в зоне высокой радиации может привести к катастрофе.

Лабораторная работа № 1

РАСЧЕТ НДС В КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ СРЕДСТВАМИ ВИРТУАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Цель: научиться решать классические задачи механики деформируемого твердого тела с помощью современных компьютерных технологий; отработать основные этапы виртуального моделирования напряженного и деформированного состояния элементов конструкций при механическом нагружении (задание свойств модели, построение геометрии, приложение нагрузки, проведение расчета, обработка и анализ полученных результатов, проведение численных экспериментов и другое); сравнить полученные численные решения с известными аналитическими результатами.

Задание. Определить НДС заданного элемента конструкции (табл. 1.1) при механическом нагружении средствами ANSYS [2]. Сравнить результаты с известными аналитическими решениями по теории упругости. Механическую нагрузку на внутренней и внешней поверхности принять равной 1 и 3 МПа соответственно. Рассмотреть решение задачи на примере двух материалов: конструкционная сталь и диоксид урана.

Таблица 1.1

Номера индивидуальных вариантов к заданию
лабораторной работы № 1

Номер варианта	Геометрия твердого тела	Номер варианта	Геометрия твердого тела
1	Сплошная сфера	9	Сплошной тонкий диск
2	Полая сфера	10	Двуслойный полый цилиндр
3	Сплошной цилиндр	11	Трехслойная сплошная сфера
4	Полый цилиндр	12	Тонкое кольцо
5	Тонкостенная цилиндрическая оболочка	13	Двуслойная сплошная сфера

Номер варианта	Геометрия твердого тела	Номер варианта	Геометрия твердого тела
6	Круглая пластинка	14	Четырехслойный сплошной цилиндр
7	Прямоугольная пластина	15	Тонкостенная сферическая оболочка
8	Пластина с цилиндрическим отверстием	16	Длинный стержень

Пример 1. Смоделируем деформирование длинного полого цилиндра из конструкционного материала (без внутренних источников тепловыделения) под действием внешней равномерной распределенной механической нагрузки (**задача Ламе**). Задачу будем решать в виртуальной среде программы ANSYS 9.0 Ed (Student Edition).

Порядок выполнения основных этапов работы

1. Запускаем ANSYS 9.0 ed.(student edition). Определяем тип проводимого анализа:

MAIN MENU => PREFERENCES...=> STRUCTURAL=> OK.

2. Выбираем тип используемого элемента и определяем свойства материала.

Выбор типа конечного элемента:

M.M. => PREPROCESSOR => ELEMENT TYPE => ADD/EDIT/DELETE => ADD... => SOLID 20 NODE 186 => OK => CLOSE.

Выбор материала:

M.M. => PREPROCESSOR => MATERIAL PROPS => MATERIAL MODELS.

В появившемся окне следуем нижеприведенной последовательности (рис. 1.1):

STRUCTURAL => LINEAR => ELASTIC => ISOTROPIC: EX => 2 E11, PRXY = 0.3 => OK;

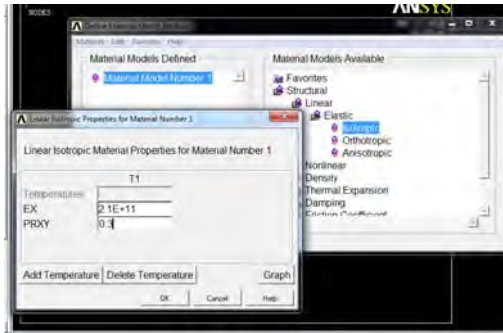


Рис. 1.1. Задание свойств материала

3. Создание геометрии.

Для начала создаем две концентричные окружности:

M.M. => PREPROCESSOR => MODELING => CREATE => AREAS => CIRCLE => SOLID CIRCLE.

Требуемые числовые значения для первой окружности:

WP X =0; WP Y =0; Radius =1.

После ввода данных нажимаем **Apply**. Затем вводим данные для второй окружности: ***WP X =0; WP Y =0; Radius =0.7.***

Далее вычтем меньшую окружность из большей:

M.M. => PREPROCESSOR => MODELING => OPERATE => BOOLEANS => DIVIDE => AREA BY AREA.

Левой кнопкой мыши выбираем полученную геометрию и в появившемся окошке нажимаем **ОК** (рис. 1.2).

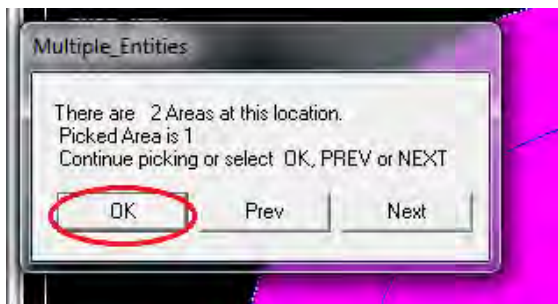


Рис. 1.2

Далее в окошке слева нажимаем **Apply** и выбираем внутреннюю окружность геометрии. В появившемся окне выбираем **Next => OK** и теперь в окошке слева также нажимаем **OK**.

После проведенных преобразований окончательно геометрия примет вид (рис. 1.3):

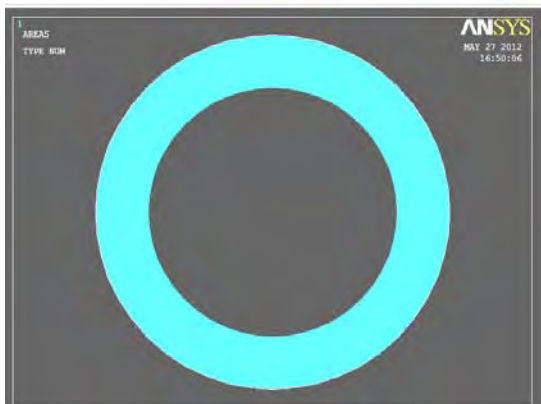


Рис. 1.3. Вид геометрии после вычитания окружности меньшего диаметра

Так как рассматриваемое твердое тело обладает симметричной геометрией, очевидно, что при равномерном механическом нагружении будет возникать осесимметричное напряженное и деформированное состояние. Следовательно, можно рассматривать часть модели твердого тела. Для того чтобы оставить лишь четвертую часть кольца, выполним: **UTILITY MENU => PLOT => LINES**. После чего создадим две линии, как показано на рис. 1.4 (привязки к нужным точкам будут создаваться автоматически), используя следующую последовательность команд: **M.M. => PREPROCESSOR => MODELING => CREATE => LINES => LINES => STRAIGHT LINE**.

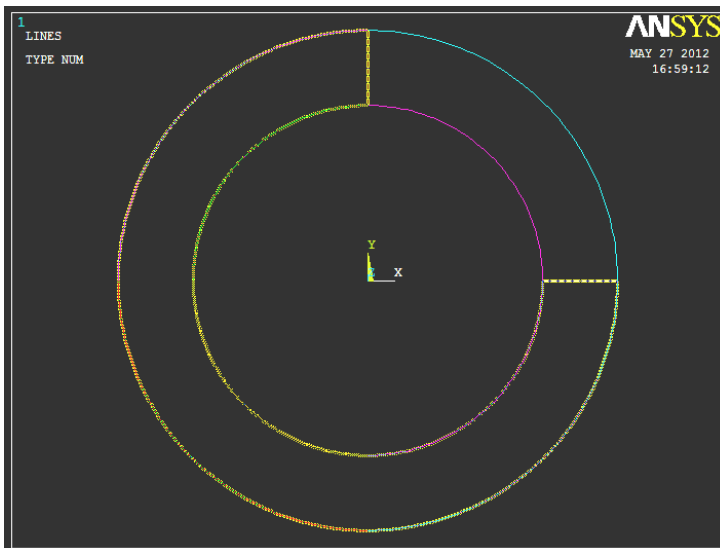


Рис. 1.4. Вид геометрии твердого тела после создания прямых линий и выделение необходимых линий для разделения поверхности

Далее разделяем поверхность кольца на две части, используя созданные линии: **M.M. => PREPROCESSOR => MODELING => OPERATE => BOOLEANS => DIVIDE => AREA BY LINE. UTILITY MENU => PLOT => AREAS.**

Далее удалим ненужную часть кольца (рис. 1.5):

M.M. => PREPROCESSOR => MODELING => DELETE => AREAS ONLY.

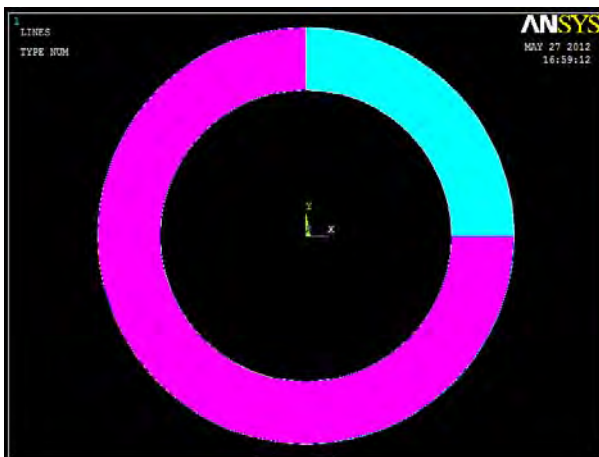


Рис. 1.5. Удаление ненужной области

Нажимаем **ОК**.

UTILITY MENU => PLOT => LINES.

Теперь можно удалить все ненужные линии:

M.M. => PREPROCESSOR => MODELING => DELETE => LINES ONLY.

Выбираем те же линии что и на рис. 1.4, исключая вертикальную и горизонтальную прямые. Нажимаем **ОК**. **RBM (правая кнопка мыши) => REPLOT.**

Таким образом, геометрия примет следующий вид: **U.M. => PLOT => AREAS.**

Далее вытягиваем полученную поверхность вдоль оси **Z** на **5 мм**.

M.M. => PREPROCESSOR => MODELING => OPERATE => EXTRUDE => AREAS => BY XYZ OFFSET. Выбираем поверхность, и в появившемся окне вводим следующие данные:

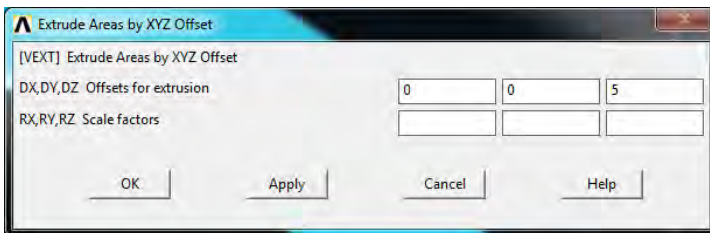


Рис. 1.6. Меню вытягивания твердотельной модели

Далее в графической области нажимаем правой клавишей мыши для просмотра созданной геометрии твердого тела – **View => Isometric**.

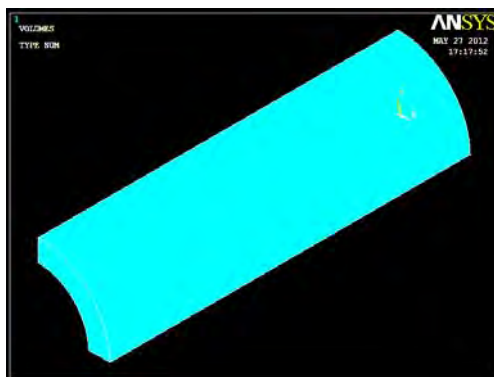


Рис. 1.7. Изометрический вид геометрии после вытягивания области

4. Разбиение полученной модели на конечные элементы.

Выбираем: **M.M. => PREPROCESSOR => MESHING => MESH TOOL**.

В появившемся окне в разделе **Size Controls** напротив пункта **Global** выбираем **Set**.

Далее в ячейку напротив **SIZE Element edge length** вводим значение **(1-0.7)/5** и нажимаем **OK**. Данными действиями мы задали размер элемента.

В разделе **Shape** выбираем пункт **Hex**, жмем **Mesh** и выбираем геометрию созданной модели, **OK**.

5. Задание граничных условий симметрии.

Выбираем *U.M.* => *PLOT* => *LINES*.

Выполняем следующую последовательность команд:

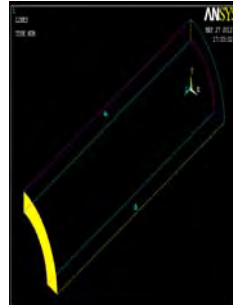
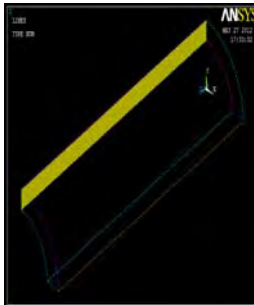
M.M. => *PREPROCESSOR* => *LOADS* => *DEFINE LOADS* => *APPLY* => *STRUCTURAL* => *DISPLACEMENT* => *ON AREAS*.

Выбираем курсором грань, указанную на рисунке ниже, **OK**. В появившемся окне в разделе **DOFs to be constrained** выбираем **UY**. Жмем **OK**. Такую же последовательность действий произведем для еще двух граней:

M.M. => *PREPROCESSOR* => *LOADS* => *DEFINE LOADS* => *APPLY* => *STRUCTURAL* => *DISPLACEMENT* => *ON AREAS*.

В появившемся окне в разделе **DOFs to be constrained** выбираем **UX, OK**.

M.M. => *PREPROCESSOR* => *LOADS* => *DEFINE LOADS* => *APPLY* => *STRUCTURAL* => *DISPLACEMENT* => *ON AREAS*.



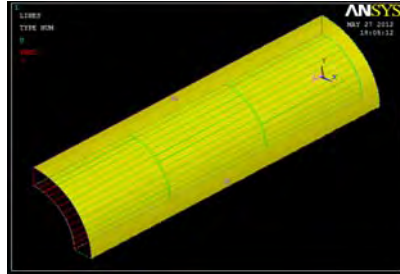
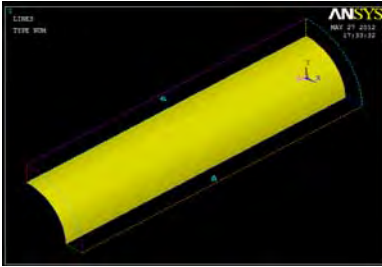
В появившемся окне в разделе **DOFs to be constrained** выбираем **UZ**. Нажимаем **OK**.

6. Нагружение модели твердого тела.

Прикладываем давление к указанным граням:

M.M. => *PREPROCESSOR* => *LOADS* => *DEFINE LOADS* => *APPLY* => *STRUCTURAL* => *PRESSURE* => *ON AREAS*. Нажимаем **OK** и в появившемся окне в графе **VALUE Load PRES value** вводим значение **0**. **OK**.

M.M. => *PREPROCESSOR* => *LOADS* => *DEFINE LOADS* => *APPLY* => *STRUCTURAL* => *PRESSURE* => *ON AREAS*.



Нажимаем **OK** и в появившемся окне в графе **VALUE Load PRES value** вводим значение **100**. Выбираем **OK**.

Применим опцию отображения давления при помощи стрелок. Для этого **U.M.** => **PLOT CNTRLS** => **SYMBOLS**. В появившемся окне вместо **Face Outlines** выбираем **Arrows**.

7. Запускаем на расчет рассматриваемую задачу:
M.M. => **SOLUTION** => **SOLVE** => **CURRENT LS**.

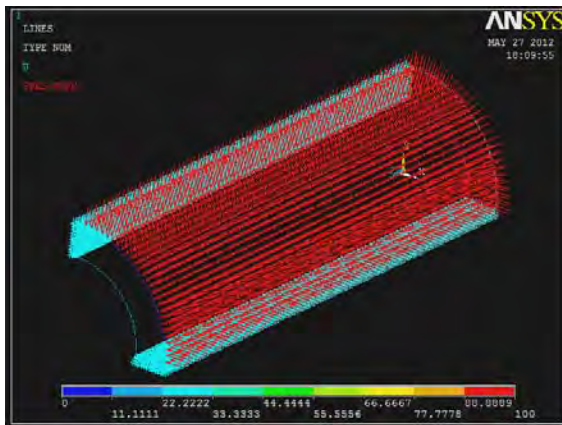


Рис. 1.8. Вид геометрии после произведенного расчета

8. Просмотр результатов:

M.M. => **GENERAL POSTPROC** => **PLOT RESULTS** => **CONTOUR PLOT** => **NODAL SOLUTION**.

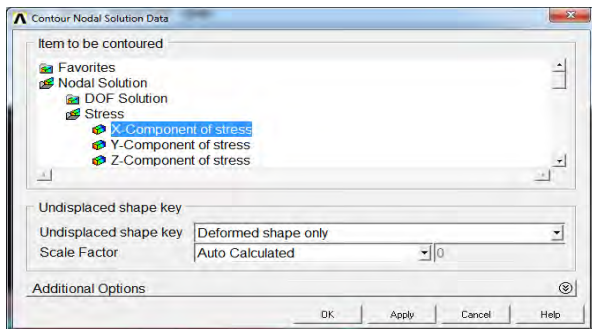


Рис. 1.9

Для того чтобы отобразить распределение нормальных напряжений по радиусу, выбираем *M.M.* => **GENERAL POSTPROC** => **OPTIONS FOR OUTPUT**.

Меняем значение **Results Coordinate System** на **Global Cylindrical**.

UTILITY MENU => **PLOT** => **REPLOT**.

Выполним переход из прямоугольной системы координат в цилиндрическую:

M.M. => **GENERAL POSTPROC** => **OPTIONS FOR OUTP**

Выбираем просмотр результатов в цилиндрической системе координат (рис. 1.10).



Рис. 1.10. Переход к цилиндрической системе координат

Нажимаем правой клавишей мыши в области рабочего окна и перерисовываем область (рис. 1.11).

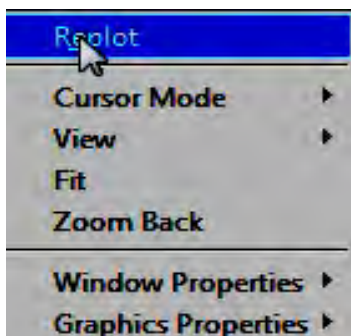


Рис. 1.11

Результат расчетов в цилиндрической системе координат представлен на рис. 1.12.

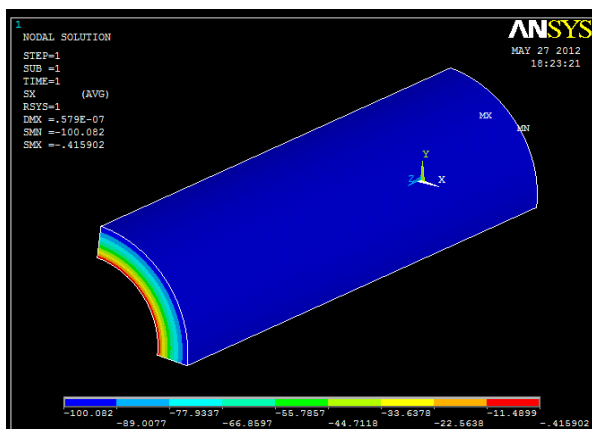


Рис. 1.12. Результат расчетов в цилиндрической системе координат

9. Проанализируем напряжение в определенных точках. Необходимо отключить опцию POWERGRPH.

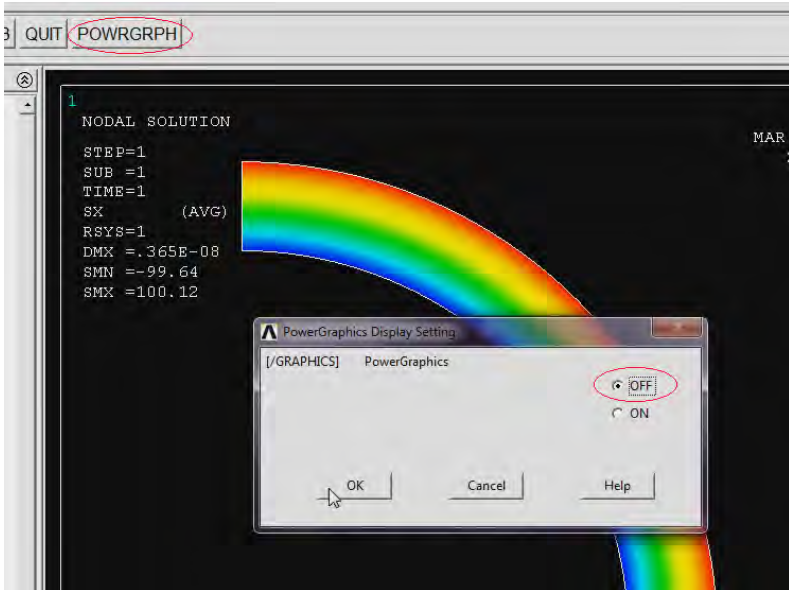


Рис. 1.13. Отключение опции POWERGRPH

***M.M. => GENERAL POSTPROC => QUERY RESULTS => NODAL SOLUTION.
STRES => Y direction SY***

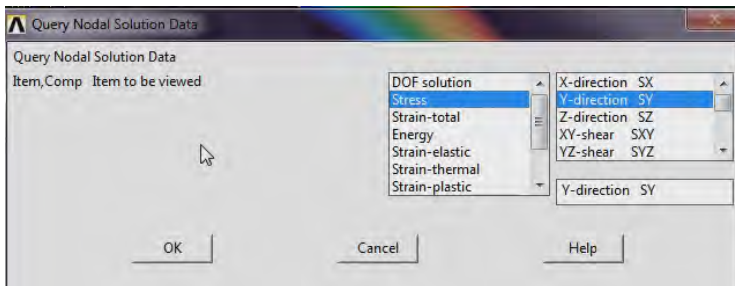


Рис. 1.14. Окно переключения координатных осей

Теперь выбираем любую точку и можем видеть результат: напряжение, координаты точки и номер узла.

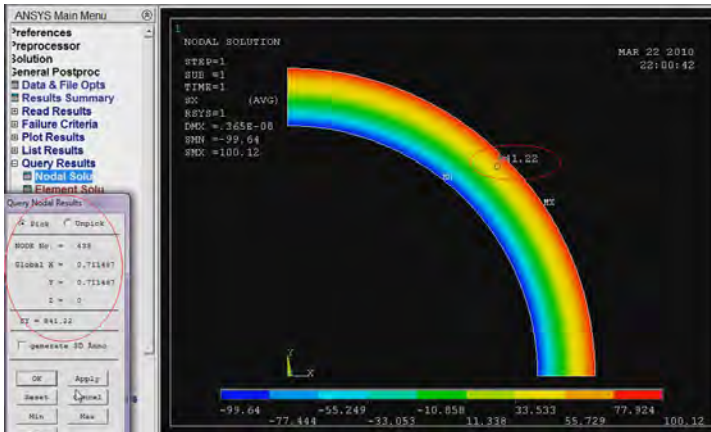


Рис. 1.15. Значение напряжения в определенной точке

Также можно узнать, где расположено максимальное/минимальное напряжение с их координатами и номером узла (рис. 1.16).

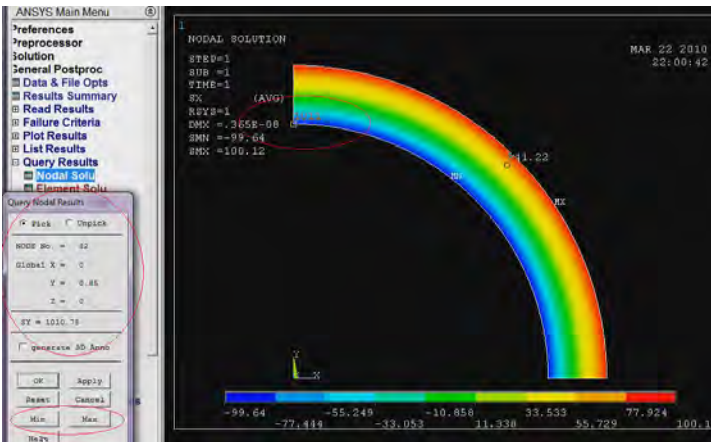


Рис. 1.16. Просмотр минимальных и максимальных значений напряжений

ПРИМЕР 2. Смоделируем деформирование пластины (без внутренних источников тепла) под действием внешней механической нагрузки. Считается, что бесконечная пластина с отверстием подвержена растягивающим усилиям (задача **Кирша**).

Порядок выполнения работы

1. Определяем тип анализа:

MAIN MENU => PREFERENCES => STRUCTURAL.

2. Выбираем тип используемого конечного элемента:

M.M. => ELEMENT TYPE => ADD/EDIT/DELETE => ADD => SOLID 8node 82 => OK => CLOSE.

3. Задаем свойства материала:

M.M. => MATERIAL PROPS => MATERIAL MODELS. Далее выбираем следующие пункты: **STRUCTURAL => LINEAR => ELASTIC => ISOTROPIC.** Задаем модуль Юнга и число Пуассона для рассматриваемого материала.

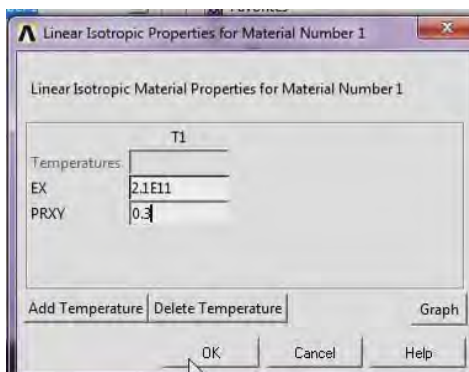


Рис. 1.17. Задание свойств материала

4. Создание геометрии модели:

M.M. => MODELING => CREATE => AREAS => RECTANGLE => BY DIMENSIONS.

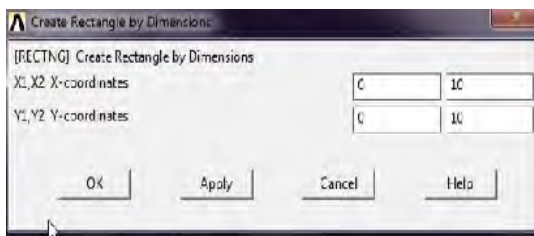


Рис. 1.18. Параметры ввода для создания прямоугольной области

Построим окружность:

M.M. => MODELING => CREATE => AREAS => CIRCLE => SOLID CIRCLE.

Wp X = 0; Wp Y = 0; Radius = 0.5.

Далее вычтем окружность из прямоугольника:

M.M. => MODELING => OPERATE => BOOLEANS => DIVIDE => AREA BY AREA.

Курсором мыши выбираем прямоугольник, нажимаем **Apply**, после этого выбираем окружность и **ОК**. В итоге получим следующую картину.



Рис. 1.19. Вид полученной области после вычета окружности из прямоугольной области

5. Разбиение модели на конечно-элементную сетку:

M.M. => MESHING => MESH TOOL.

В появившемся окне в разделе **Shape** устанавливаем маркеры на значения **Quad** и **Free**. В разделе **Size controls => Global** нажимаем кнопку **Set** и вводим значение **0.25** в ячейке **SIZE Element edge length**. Далее жмем кнопку **Mesh** и выбираем созданную геометрию твердого тела.

6. Наложение граничных условий симметрии.

Наложение ограничений по осям будем проводить по линиям, указанным на рис. 1.20.

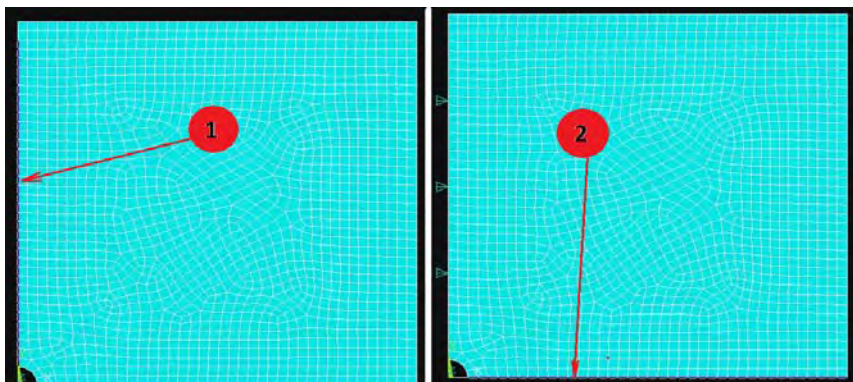


Рис. 1.20. Линии для наложения граничных условий

Для первого случая **M.M. => LOADS => DEFINE LOADS => APPLY => STRUCTURAL => DISPLACEMENT => ON LINES.** В появившемся окне в разделе **DOFs to be constrained** выбираем **UX, OK.**

Для второго случая **M.M. => LOADS => DEFINE LOADS => APPLY => STRUCTURAL => DISPLACEMENT => ON LINES.** В появившемся окне в разделе **DOFs to be constrained** выбираем **UY, K.**

Теперь прикладываем нагрузку в виде давления на линию, указанную на рис. 1.21.

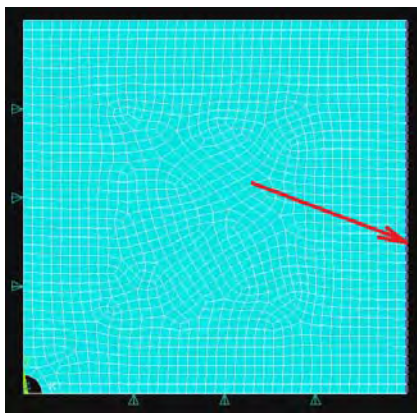


Рис. 1.21. Линия для наложения давления

M.M. => LOADS => DEFINE LOADS => APPLY => STRUCTURAL => PRESSURE => ON LINES и вводим значение **-100** в поле **VALUE Load PRESS value**.

Замечание. Знак «минус» обусловлен тем, что по умолчанию давление является сжимающей нагрузкой, но в нашем случае необходимо обеспечить растяжение.

7. Выполнение решения (запуск на расчет).

M.M. => SOLUTION => SOLVE => CURRENT LS.

Просмотрим результаты решения:

M.M. => PLOT RESULTS => CONTOUR PLOT => NODAL SOLUTION и в окне **Item to be contoured** выберем пункт **Von Mises stress**.

В результате получим картину распределения напряженного состояния модели (рис. 1.22).

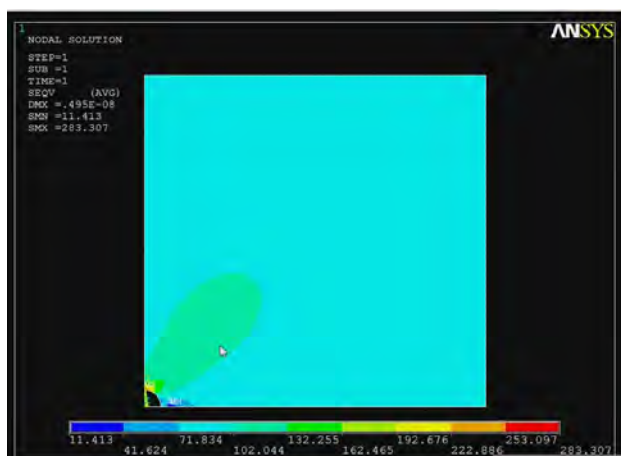


Рис. 1.22. Результаты выполнения расчета. Эквивалентные напряжения (Von Mises stress)

Очевидно, что область непосредственно возле выреза следует рассмотреть более подробно. Для этого необходимо построить там более точную сетку.

8. Создание подмодели.

Сменим имя базы данных (предварительно сохраним базу данных (рис. 1.23), нажав клавишу **SAVE_DB** и задав имя “file”).

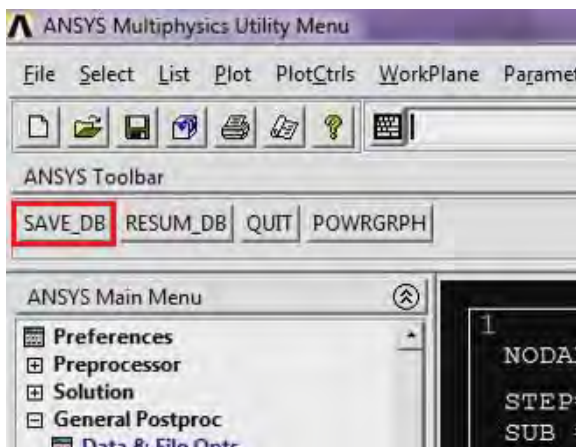


Рис. 1.23. Сохранение базы данных

U.M. => FILE => CHANGE JOBNAME. Меняем имя на «**file_2**».

Далее «сносим» всю созданную сетку: ***M.M. => MESHING => MESH TOOL.***

При появлении соответствующего окна нажимаем на кнопку **Clear** и выделяем геометрию модели.

Создаем точки для новой разметки разреза: ***U.M. => PLOT => LINES***

M.M. => MODELING => CREATE => KEYPOINTS => IN ACTIVE CS

Задаем первой точке значения для координат **X** и **Y (2.5;0)**, второй точке – **(0;2.5)**. Далее строим линии разреза:

M.M. => MODELING => CREATE => LINES => NORMAL TO LINE

Первоначально выбираем линию, перпендикулярно которой будет проходить создаваемая линия, затем выбираем точку.

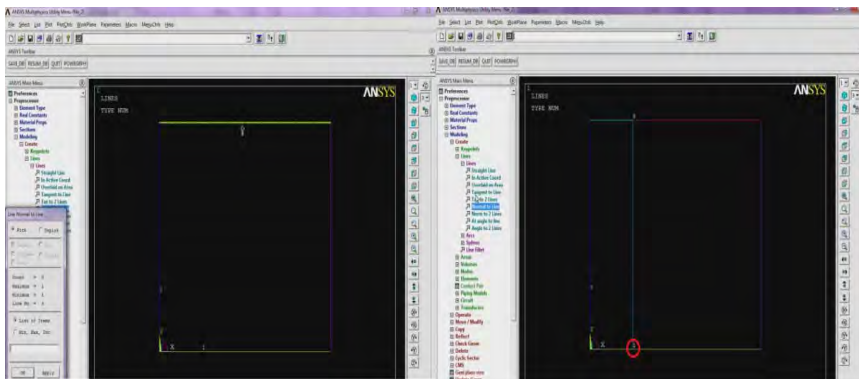


Рис. 1.24. Создание линий разреза

Линия создается автоматически. Точно так же поступаем для создания горизонтальной линии разреза. В итоге получим следующую картину (рис. 1.25).

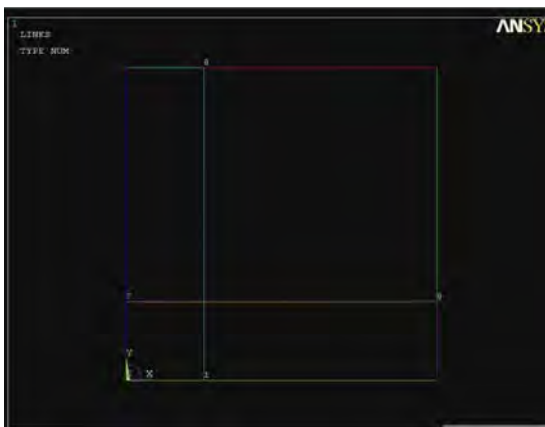


Рис. 1.25. Созданные линии разреза

Далее необходимо удалить лишнюю часть геометрии твердого тела. Для этого сначала разделим полученную геометрию нарисованными линиями:

M.M. => MODELING => OPERATE => BOOLEANS => DIVIDE => AREA BY LINE.

Первоначально выбираем геометрию модели, а затем две созданные линии разреза. Удаляем лишние части геометрии модели:

M.M. => MODELING => OPERATE => DELETE => AREA AND BELOW.

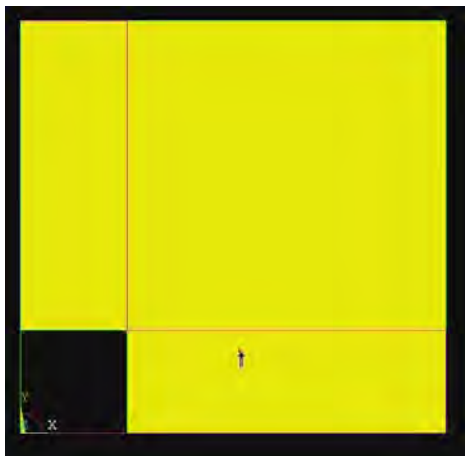


Рис. 1.26. Выбор лишних областей для удаления

В итоге получим следующую картину:

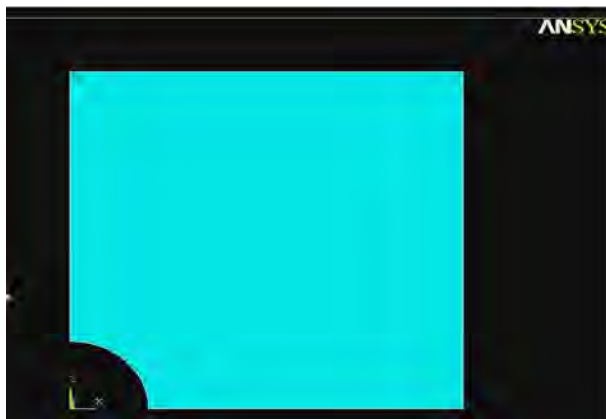


Рис. 1.27. Окончательный вид геометрии модели

Обрисует линии: **U.M. => PLOT => LINES**. Таким образом, в данный момент у нас есть геометрия, состоящая из пяти линий.

Замечание: ANSYS не сможет построить регулярную сетку для такой модели. Поэтому создадим вспомогательную линию перпендикулярную дуге окружности, которая разделит геометрию на две части:

**M.M. => MODELING => CREATE => LINES =>
=> NORMAL TO LINE.**

Для начала выберем линию дуги окружности для задания ориентира, а затем точку для завершения прямой. В итоге геометрия примет вид (рис. 1.28):



Рис. 1.28. Создание дополнительной линии для успешного разбиения регулярной сетки

При помощи созданной линии разобьем область на две подобласти:

**M.M. => MODELING => OPERATE => BOOLEANS =>
=> DIVIDE => AREA BY LINE.**

После выбора данной команды выбираем геометрию, а затем линию, перпендикулярную дуге окружности. Теперь создаем регулярную сетку для каждой подобласти: **M.M. => MESHING => MESH TOOL.**

В разделе **Mesh** выбираем **3 or 4 sides** для создания регулярной сетки. И выбираем обе подобласти. Прикладываем граничные условия симметрии точно также, как и для глобальной модели:

M.M. => LOADS => DEFINE LOADS => APPLY => STRUCTURAL => DISPLACEMENT => ON LINES. В появившемся окне в разделе **DOFs to be constrained** выбираем **UX**. Нажимаем **OK**.

M.M. => LOADS => DEFINE LOADS => APPLY => STRUCTURAL => DISPLACEMENT => ON LINES. В появившемся окне в разделе **DOFs to be constrained** выбираем **UY**. Нажимаем **OK**. После проведенных операций модель примет вид (рис. 1.29):

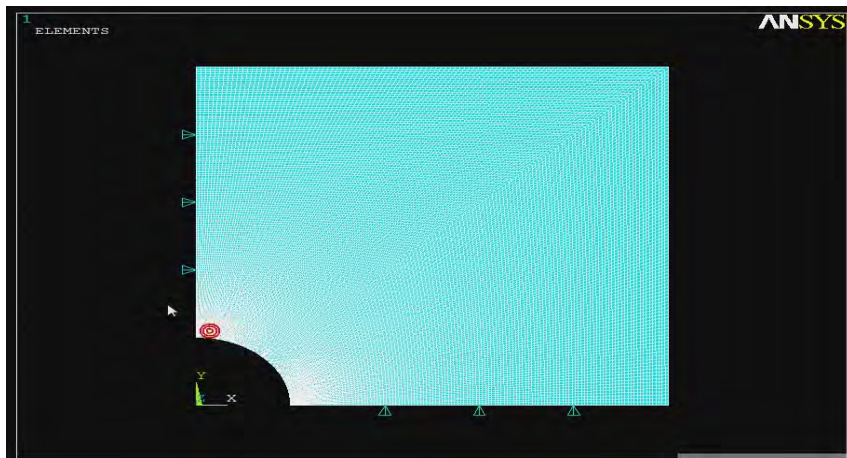


Рис. 1.29. Полученная сетка КЭ

Далее следует перенести результаты напряжений на линии отрезков с глобальной модели: **U.M. => SELECT => ENTETIES**.

Выбираем необходимые линии разрезов (горизонтальную и вертикальную линии, на которые не наложены граничные условия, согласно рис. 1.30).

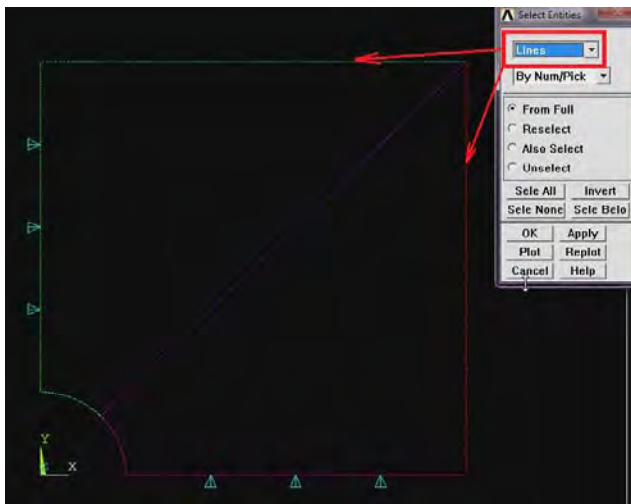


Рис. 1.30. Выбор линий отрезков

U.M. => SELECT => ENTITIES.

Выбираем узлы, принадлежащие выбранным ранее линиям (рис. 1.31).

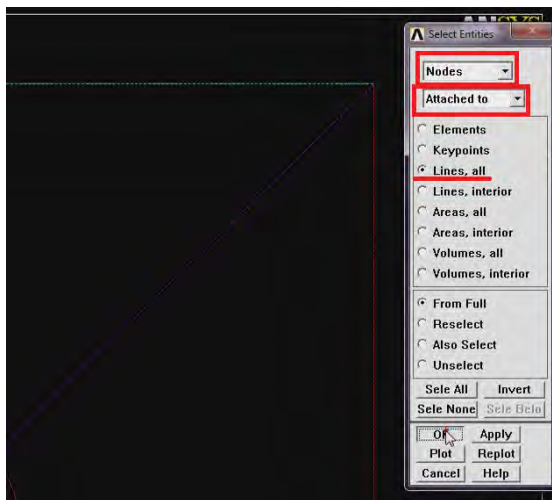


Рис. 1.31. Выбор узлов линий отрезков

Переписываем в файл координаты данных узлов:

M.M. => MODELING => CREATE => NODES => WRITE NODE FILE.

Задаем имя файла **nodes.txt** и сохраняем в персональную папку.

Сохраняем созданную подмодель.

Переходим в глобальную модель, меняя имя базы данных на **file**.

U.M. => FILE => CHANGE JOBNAME.

Теперь восстановим базу данных, нажав кнопку **RESUME_DB**.

M.M. => GENERAL POSTPROC => DATA & FILE OPTS.

Считываем имеющиеся у нас решения (проведенного расчета), выбрав файл **file.rst**.

M.M. => GENERAL POSTPROC => READ RESULTS => LAST SET => SUBMODELING => INTERPOLATE DOF.

В появившемся окне вводим следующие данные (рис. 1.32):

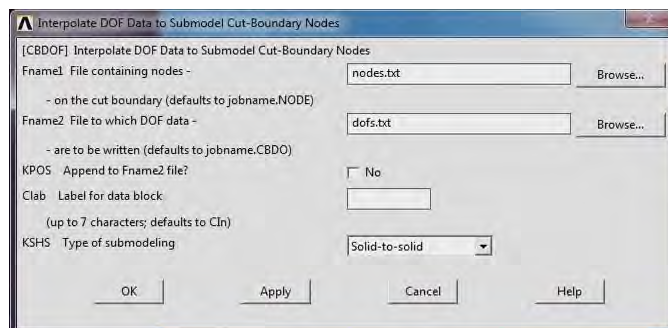


Рис. 1.32. Считывание решений

Снова включаем подмодель, меняя имя проекта на **file_2**.

Далее жмем кнопку **“RESUME_DB”**.

U.M. => FILE => READ INPUT FROM

В появившемся списке выбираем ранее записанный файл **dofs.txt**.

U.M. => SELECT => EVERYTHING.

Выполняем решение: **M.M. => SOLUTION => SOLVE => CURRENT LS.**

Просмотр результатов: **M.M. => PLOT RESULTS => CONTOUR PLOT => NODAL SOLUTION**. В окне **Item to be contoured**, например, выбираем пункт **Von Mises stress**.

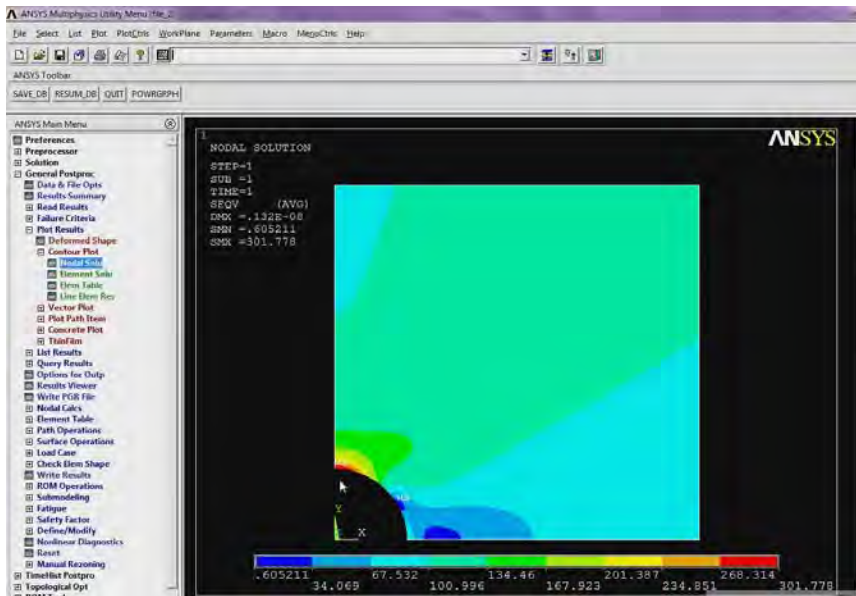


Рис. 1.33. Полученное уточненное решение (подмодель) для задачи Кирша

Замечание. В содержание отчета о проделанной лабораторной работе № 1 должны входить: краткие теоретические сведения; подробное описание всех шагов расчета с помощью ANSYS при проведении структурного прочностного анализа [2], рисунки состояний твердого тела. Краткие выводы. Рекомендуемое оформление отчета см. прил. А, Б.

Задачи для практической работы

1. Толстостенная труба подвергается действию внешнего p_b и внутреннего p_a давлений (рис. 1.34). Требуется:

- а) приняв функцию напряжений в виде $\varphi = B_0 \ln r + C_0 r^2$, проверить, удовлетворяется ли бигармоническое уравнение;
- б) найти компоненты напряженного состояния σ_r , σ_θ , $\sigma_{r\theta}$;
- в) проверить, удовлетворяются ли дифференциальные уравнения равновесия;
- г) используя граничные условия, определить постоянные А, В;

д) построить эпюры напряжений σ_r , σ_θ для случаев $p_a = 0$ ($p_b = 0$);
 е) определить, в каких точках трубы при наличии только внутреннего давления ($p_a = 0$) начнутся, прежде всего, пластические деформации.

Подсчитать давление и полученный результат сравнить со случаем, когда $b \rightarrow \infty$.

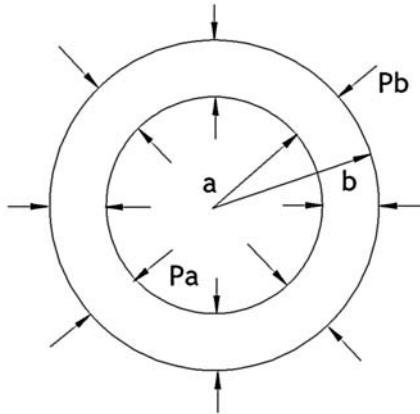


Рис. 1.34

2. Полный круговой полуцилиндр большой длины (рис. 1.35) лежит на абсолютно жестком и гладком основании. Требуется:

а) приняв функцию напряжения φ в виде

$$\varphi = A_0 r^2 + B_0 \ln r + \left(A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2 \right) \cos 2\theta,$$

проверить, является ли она решением плоской задачи;

б) определить напряжения σ_r , σ_θ , $\sigma_{r\theta}$;

в) проверить, удовлетворяются ли дифференциальные уравнения равновесия;

г) составить граничные условия и определить постоянные интегрирования;

д) построить эпюры напряжений σ_r , σ_θ , $\sigma_{r\theta}$ для следующих частных случаев: $\theta = 0, 45^\circ, 90^\circ$.

Замечание: при определении произвольных постоянных, представить $\sin\theta$ в выражении для q в виде $\sin\theta = 2/\pi - 4\cos 2\theta/3\pi - \dots$

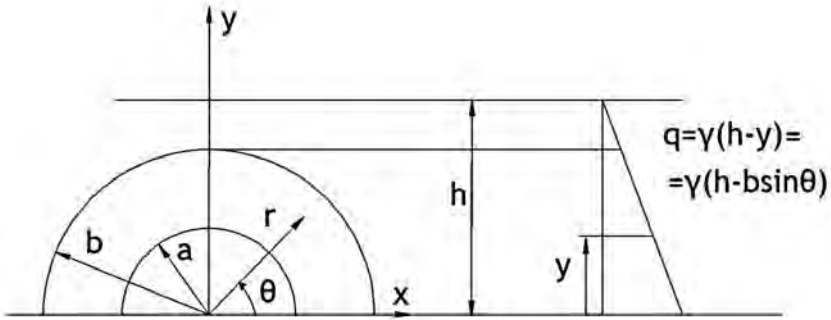


Рис. 1.35

3. Решить задачу № 2 для случая $a = 0$. Функцию напряжений принять в виде $\varphi = A_0 r^2 + (A_2 r^2 + B_2 r^4) \cos 2\theta$,

4. Стержень узкого прямоугольного поперечного сечения с круговой осевой линией заделан одним концом и нагружен касательными усилиями на другом (рис. 1.36). Равнодействующая последних равна P . Требуется:

а) приняв функцию напряжений в виде

$$\varphi = \left(A_1 r^3 + \frac{B_1}{r} + C_1 r \ln r \right) \sin \theta,$$

проверить, удовлетворяется ли бигармоническое уравнение;

б) определить компоненты напряженного состояния $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$;

в) проверить, удовлетворяются ли дифференциальные уравнения равновесия;

г) составить граничные условия и определить постоянный интегрирования;

д) построить эпюры напряжений для $\theta = \text{const}, a \leq r \leq b$.

5. На край полубесконечной пластины действует сосредоточенная сила P (рис. 1.37).

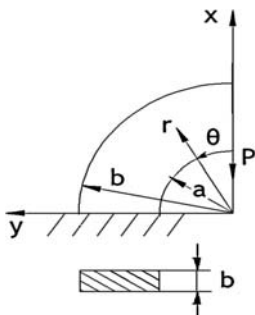


Рис. 1.36

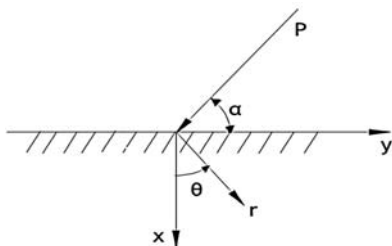


Рис. 1.37

Требуется:

а) приняв функцию напряжений в виде $\varphi = rB(A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta)$, проверить, является ли она решением плоской задачи теории упругости;

б) определить напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$;

в) проверить, удовлетворяются ли дифференциальные уравнения равновесия;

г) определить постоянные из условия равновесия части пластины в виде полуокружности;

д) найти геометрическое место точек, в которых радиальные напряжения отсутствуют;

е) построить эпюру напряжений σ_r для сечения $r = \text{const}$;

ж) найти напряжения в плоскости пластины и для сечения $x = \text{const}$ построить их эпюры.

6. Балка на двух опорах подвергается изгибу равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 1.38).

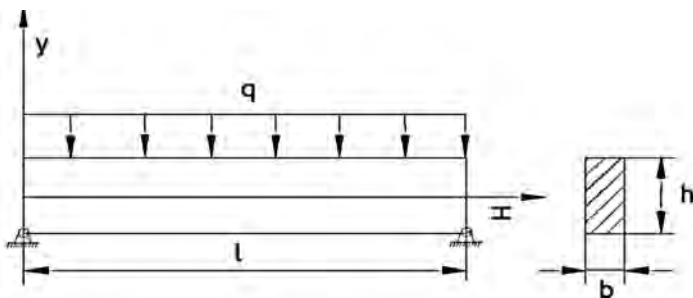


Рис. 1.38

Требуется:

а) приняв функцию напряжений в виде

$$\varphi = \frac{A}{2} y^2 + M(x) \left(\frac{1}{6} B y^3 + C y + D \right) + \frac{qB}{60} y^3 + C_1 y^3,$$

проверить, удовлетворяется ли бигармоническое уравнение;

б) определить напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} ;

в) ставить граничные условия и определить необходимые постоянные. Условиям на торцах удовлетворить интегрально по Сен-Венану;

г) построить эпюры напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} для произвольных сечений $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и сравнить их с аналогичными эпюрами в сопротивлении материалов.

7. Пластинка с отверстием малого радиуса a растягивается в направлении оси x (рис. 1.39). Требуется:

а) определить напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ в пластинке без отверстия, приняв функцию напряжений в виде

$$\varphi = \left(A_0 r^2 \ln r + C_0 r^2 + B_0 \ln r \right) + \left(A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2 \right) \cos 2\theta,$$

проверить, удовлетворяется ли бигармоническое уравнение;

б) определить напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$;

в) составить граничные условия и определить необходимые постоянные (принять значения напряжений при $r \rightarrow \infty$ равными напряжениям в задаче без отверстия);

г) построить эпюры σ_r , σ_θ для сечений $x = 0$, $y = 0$, т. е. $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = 0$.

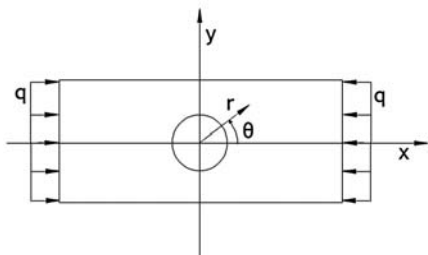


Рис. 1.39

8. Пластинка с отверстием малого радиуса a растягивается в направлениях X и Y соответственно усилиями q_1 и q_2 (рис. 1.40). Требуется:

а) определить напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ в пластинке без отверстия, приняв функцию напряжений в том же виде, что и в задаче № 7, проверить, удовлетворяется ли бигармоническое уравнение;

б) определить напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$;

в) составить граничные условия и определить необходимые постоянные (при $r \rightarrow \infty$ значения напряжений принять равными их значениям при $a = 0$);

г) построить эпюры σ_r , σ_θ для сечений $x = 0$, $y = 0$, т. е. $\theta = \pi/2$, $\theta = 0$.

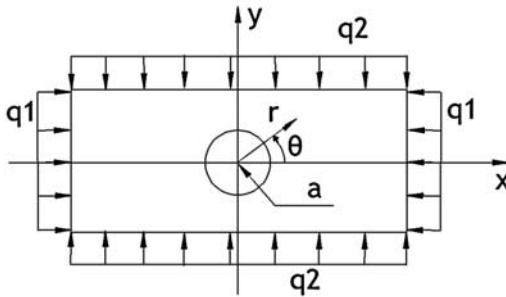


Рис. 1.40

9. Пластинка с отверстием малого радиуса a растягивается в направлении X равномерно-распределенными усилиями q и сжимается в направлении Y такими же усилиями (рис. 1.41). Требуется:

а) определить напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ в пластинке без отверстия, приняв функцию напряжений в виде

$$\varphi = \left(A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2 \right) \cos 2\theta,$$

проверить, удовлетворяется ли бигармоническое уравнение;

б) определить напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$;

в) составить граничные условия и определить постоянные (при $r \rightarrow \infty$ значения напряжений принять равными напряжениям по пункту 1);

г) построить эпюру напряжений $\tau_{r\theta}$ для сечения $\theta = \pi/4$.

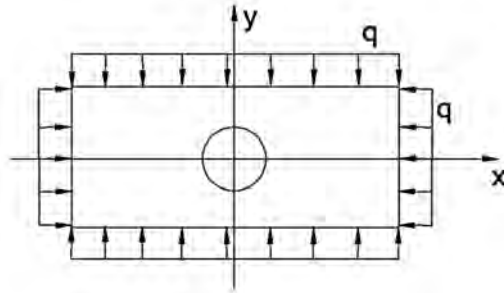


Рис. 1.41

10. Кольцевая пластинка, защемленная по внешнему контуру, подвергается действию давления p по внутреннему вырезу и скручивающего момента $M_{кр.} = S \cdot 2\pi a$. Требуется:

а) приняв функцию напряжений в виде $\varphi = A\theta + Br^2 + C \ln r$, проверить, является ли она решением плоской задачи;

б) найти напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$;

в) проверить, удовлетворяются ли дифференциальные уравнения равновесия;

г) составить граничные условия и определить необходимые постоянные. *Замечание:* при определении реактивного давления в зазмещении принять во внимание, что радиальное смещение точек

пластины задается формулой $u = \frac{1}{E} r [2B(1 - \mu) - \frac{C}{r^2}(1 + \mu)]$, где $E =$

$= 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$;

д) для радиального сечения построить эпюры σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$.

11. Диск радиуса R сжимается двумя силами P (рис. 1.42).

Требуется:

а) приняв функцию напряжений в виде

$$\varphi = -\frac{P}{\pi} \left[x \left(\arctg \frac{x}{R-y} + \arctg \frac{x}{R+y} \right) - \frac{1}{2R} (x^2 + y^2) \right],$$

проверить, является ли она решением плоской задачи;

- б) найти напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$;
- в) составить граничные условия и проверить их выполнение;
- г) построить эпюры напряжений σ_y, τ_{xy} для сечения $y = 0$ и сравнить их с эпюрами, найденными методом сопротивления материалов.

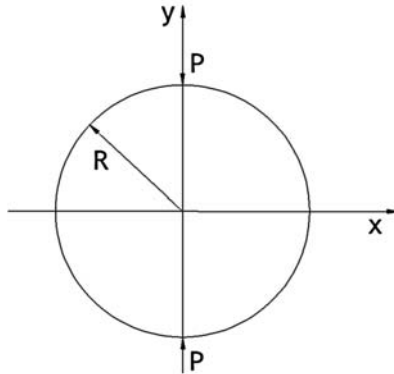


Рис. 1.42

12. Тонкий диск (или каток) сжимается двумя силами P (рис. 1.43). Требуется:

- а) заменить сосредоточенные силы распределенной нагрузкой интенсивности $q = P/aR$ на участках длиной aR , где a – малый угол. Приняв функцию напряжений в виде

$$\varphi = C_0 r^2 + B_0 \ln r + \left(A_2 r^2 + B_2 r^4 + C_2 / r^2 + D_2 \right) \cos 2\theta,$$

и проверить, является ли она решением плоской задачи;

- б) найти напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$;
- в) составить граничные условия и найти постоянные;
- г) найти напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и перейти к декартовым координатам;
- д) построить эпюры напряжений σ_y, τ_{xy} для сечения $y = 0$.

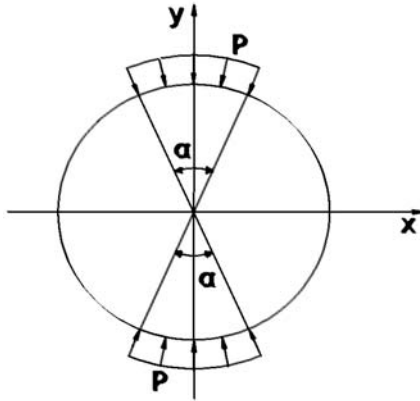


Рис. 1.43

13. Круговая арка или сектор цилиндрического свода подвергается действию внешней нагрузки интенсивности q (рис. 1.44). Требуется:

- а) приняв функцию напряжений в виде $\varphi = A \ln r + Br^2$, проверить, является ли она решением плоской задачи;
- б) найти напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$;
- в) проверить удовлетворяются ли дифференциальные уравнения равновесия;
- г) составить граничные условия и найти постоянные. Построить эпюры напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$.

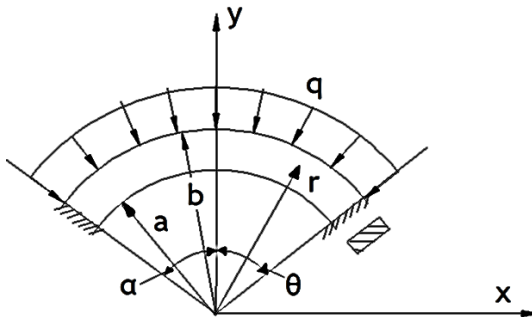


Рис. 1.44

14. Для плоского кольца (рис. 1.45) известны следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_{\theta} = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \sigma_r = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \tau_{r\theta} = 0.$$

Возможна ли такая система напряжений с точки зрения условий равновесия и сплошности, а если возможна, то выяснить, какому нагружению кольца она соответствует?

15. Для кольца из предыдущей задачи заданы напряжения $\sigma_{\theta} = \sigma_r = 0$, $\tau_{r\theta} = A / 2\pi r^2$. Проверить возможность существования такой системы напряжений и выяснить контурные условия.

16. Для полукольца (рис. 1.46) известна система напряжений $\sigma_r = -(A/r) \cdot \sin \theta$, $\sigma_{\theta} = -\frac{B}{r} \sin \theta$, $\tau_{r\theta} = -\frac{B}{r} \cos \theta$. Возможна ли такая система напряжений и каким условиям она отвечает?

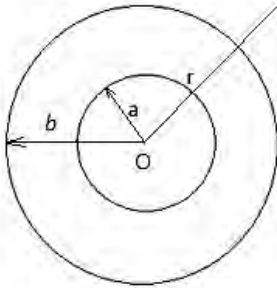


Рис. 1.45

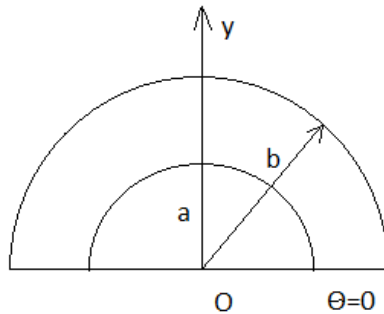


Рис. 1.46

17. Стальной цилиндр, внешний диаметр которого 35,2 см и толщина стенок 5 см, подвергнут внутреннему давлению 244 МПа. Определить величину наибольших растягивающих, сжимающих и касательных напряжений. Построить эпюры σ_t , σ_r и τ_{\max} . Цилиндр предполагать без доньев, т. е. осевые напряжения в цилиндре отсутствуют.

18. Для стального цилиндра предыдущей задачи вычислить предел упругого сопротивления, т. е. наибольшее давление газов внутри цилиндра, при котором наступает предельное упругое состояние цилиндра. Предел упругости металла – 600 МПа. Вычисление произвести по различным теориям прочности, сопоставить результаты.

19. Принять, что стальной цилиндр из задачи № 17 подвергается наружному давлению $P = 200$ МПа. Построить эпюру распределения тангенциальных и нормальных напряжений и вычислить, насколько изменится по абсолютной величине наибольшее тангенциальное напряжение против результатов предыдущей задачи вследствие того, что сейчас принято меньшее давление (на 18 %).

20. Стальной цилиндр с внутренним радиусом a и наружным b без доньев подвергается снаружи и изнутри одинаковым давлениям p , т. е. $p_a = p_b = p$. Построить эпюры σ_t и σ_r . Установить выражение для предела упругого сопротивления по третьей теории прочности (теории наибольших касательных напряжений).

21. В отличие от условий предыдущей задачи предположить трубу с доньями, причем полагать, что на днище газы оказывают давление только изнутри, снаружи трубы давления на днище нет.

22. Показать, что в цилиндрической трубе, подвергнутой внутреннему постоянному по оси трубы радиальному давлению p_a при $\nu = 0,5$ осевая деформация ε_z отсутствует, а при $\nu < 0,5$ не зависит от координаты r (постоянна в сечении и по длине трубы). Найти объемную деформацию.

23. На медный цилиндр с внешним диаметром 40 см и толщиной стенок 10 см плотно надет стальной цилиндр с внутренним диаметром 40 см и внешним 60 см. Медный цилиндр подвергается внутреннему давлению $P = 80$ МПа. Найти давление, передаваемое с медного цилиндра на стальной, и наибольшие напряжения в медном и стальном цилиндрах. Вычислить запас прочности в стальном цилиндре по теории наибольших касательных напряжений, если предел упругости стали равен 600 МПа. Модуль упругости меди – $1 \cdot 10^5$ МПа, стали – $2 \cdot 10^5$ МПа. Коэффициент Пуассона для обоих материалов – $\nu = 0,25$.

24. Определить напряжения в стенках составного стального цилиндра, если внутреннее давление $P_a = 210$ МПа, $a = 10$ см, $b = 15$ см, $c = 20$ см и разность радиусов до насаживания $\delta = 0,127$ мм.

Замечание. По возможности, сравнить полученные общие аналитические решения задач 1–24 с соответствующими результатами численного моделирования в программе *ANSYS (ABAQUS)* для некоторых частных случаев.

Лабораторная работа № 2

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Цель: показать, как используются эллиптические и параболические уравнения при решении задач теплопроводности для простейших конструктивных тел как с источниками тепла, так и без внутреннего тепловыделения; на конкретных примерах рассмотреть решение задач теплопроводности для конструкционных и делящихся (топливных) материалов. Получить функциональные зависимости распределения температур при различных граничных условиях.

Основные понятия. Краткие теоретические сведения. Распределение температурных полей в твердых телах любой формы с действующими источниками тепла описывается дифференциальным уравнением теплопроводности:

$$C_p \gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_v. \quad (2.1)$$

В общем случае решение его может быть получено численными методами, если известны теплофизические характеристики вещества (теплоемкость C_p , теплопроводность λ , удельный вес γ), функция плотности объемного тепловыделения q_v и если заданы граничные и начальные условия.

Начальное условие определяется заданием функции распределения температуры в теле в начальный момент времени:

$$t(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = f(x, y, z). \quad (2.2)$$

Граничные условия для данного уравнения могут быть заданы тремя способами:

а) граничное условие первого рода задается функцией распределения температуры по поверхности твердого тела в любой момент времени:

$$T(t)|_{\Pi} = f(t); \quad (2.3)$$

б) граничное условие второго рода задается функцией плотности теплового потока на поверхности тела во времени

$$q_S(t)|_{\Pi} = f(t); \quad (2.4)$$

в) граничное условие третьего рода характеризуется заданием температуры окружающей среды и законом теплообмена поверхности с этой средой.

Для упрощения решения задачи будем считать в дальнейшем, что теплообмен происходит по закону Ньютона:

$$q_S = \alpha(T_f - T_{\omega}), \quad (2.5)$$

что приводит к граничному условию вида:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Pi} = -\alpha [T_f(t) - T_{\omega}], \quad (2.6)$$

где производная взята по нормали к поверхности.

Задача о нахождении распределения температур значительно упрощается для тел простых форм (шар, цилиндр, труба, пластина и т. д.), в особенности если можно принять постоянными теплофизические характеристики веществ. Однако отметим, что решения в аналитическом виде как для нестационарного, так и для стационарного режима могут быть получены лишь в том случае, если функция распределения источников тепла допускает интегрирование уравнения теплопроводности (закона Фурье). Частные случаи решения уравнения теплопроводности для различных тел как с источниками тепла, так и без них рассмотрены во многих работах и могут быть использованы в готовом виде при решении конкретных практических задач. В приложении приведены решения стационарных

задач для некоторых тел простейших форм. Эти формулы могут быть использованы для отыскания температурных полей и максимальных значений температур в исследуемых конструктивных элементах (в соответствии с номером своего варианта). Заметим, что в решениях принято, что среда сплошная и теплофизические характеристики веществ постоянны, так же как и плотность энерговыделения по объему q_v . Последнее допущение может приводить к заметной ошибке в определении температур. Однако ошибка выразится в завышении температуры и ее градиента и пойдет в запас расчета.

Задание. Требуется вывести функциональную зависимость распределения температурного поля для исследуемого конструктивного элемента в соответствии с номером варианта (табл. 2.1). Используя полученные зависимости распределения температур, с помощью соотношения для теплообмена получить перепад температуры между охлаждаемой стенкой и охлаждающей средой $T_f - T_\omega$, а также выразить температуру тепловыделяющей стенки (поверхности) через среднюю температуру теплоносителя $T_f = T_\omega - \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_П$.

Получить числовые результаты для конкретных видов конструктивных и тепловыделяющих (топливных) материалов. Построить графическую иллюстрацию указанных полей в пакете Mathcad или других программах (например, Matlab, Maple, Mathematics). *Замечание:* при рассмотрении цилиндров и пластин теплоотводом с торцов можно пренебречь.

Таблица 2.1

Номера индивидуальных вариантов к заданию лабораторной работы № 2

№ варианта	Геометрия твердого тела	Условия нагрева/охлаждения	Материал
1	Сплошная сфера	Охлаждение с внешней поверхности	Тепловыделяющий (UO ₂)
2	Полая сфера	Охлаждение с внешней поверхности	Тепловыделяющий (PuO ₂)
3	Сплошной цилиндр	Охлаждение с внешней поверхности	Тепловыделяющий (ThO)

Окончание табл. 2.1

№ варианта	Геометрия твердого тела	Условия нагрева/охлаждения	Материал
3	Сплошной цилиндр	Охлаждение с внешней поверхности	Тепловыделяющий (ThO)
4	Полый цилиндр	Охлаждение с наружной поверхности	Тепловыделяющий (UC ₂)
5	Полый цилиндр	Охлаждение с внутренней поверхности	Тепловыделяющий (UN)
6	Полый цилиндр	Охлаждение с внутренней и наружной поверхностей	Тепловыделяющий (UC)
7	Пластина	Охлаждение с двух сторон	Тепловыделяющий (U ₃ Si)
8	Пластина	Охлаждение с одной стороны	Тепловыделяющий (USi)
9	Пластина	Нагрев с двух сторон	Конструкционный (никель, чугун)
10	Пластина	Нагрев с двух сторон (известен тепловой поток q_S в направлении оси абсцисс)	Конструкционный (вольфрам, железо)
11	Полый цилиндр	Охлаждение с внутренней стороны, нагрев с наружной поверхности (тепловой поток q_S известен)	Конструкционный (олово, цирконий)
12	Полый цилиндр	Охлаждение с наружной поверхности, нагрев с внутренней стороны (тепловой поток q_S известен)	Конструкционный (серебро, титан)
13	Полая сфера	Охлаждение снаружи (тепловой поток, подводимый с внутренней поверхности, известен)	Конструкционный (алюминий, тантал)
14	Полая сфера	Охлаждение снаружи (известна температура внутренней поверхности сферы)	Конструкционный (медь, бериллий)
15	Полый цилиндр	Охлаждение с наружной поверхности, нагрев с внутренней стороны (известны одновременно температуры наружной и внутренней поверхностей цилиндра)	Конструкционный (сталь, молибден)

Пример 1. Рассмотрим сплошной цилиндр с внутренними источниками тепла. Определение температурного поля длинного сплошного цилиндра с внутренним тепловыделением сводится к решению стационарного уравнения теплопроводности при следующих граничных условиях: $\Delta T = -\frac{q_v}{\lambda}$, $T = T_H$ при $r = R$, $T < \infty$ при $r \rightarrow 0$. Применяем оператор Лапласа к функции температур:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{q_v}{\lambda}.$$

После двукратного интегрирования получаем

$$T = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2,$$

где C_1 , C_2 – постоянные интегрирования. Причем постоянная $C_1 = 0$ из-за ограниченности температуры в центре цилиндра, то есть $T < \infty$ при $r \rightarrow 0$. А постоянную C_2 находим из граничных условий на поверхности цилиндра:

$$T_H = -\frac{q_v R^2}{4\lambda} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_H + \frac{q_v R^2}{4\lambda}.$$

С учетом полученного ранее общего решения имеем

$$T = \frac{q_v}{4\lambda} (R^2 - r^2) + T_H.$$

Таким образом, температурный перепад между центром цилиндра и его поверхностью выражается функциональной зависимостью

$$T_0 - T_H = \frac{q_v R^2}{4\lambda},$$

где T_0 – температура в центре цилиндра, T_H – температура на поверхности цилиндра.

Как видно из полученных результатов, перепад температуры между центром и поверхностью цилиндра не зависит от граничных условий, а полностью определяется внутренним тепловыделением и коэффициентом теплопроводности.

Пример 2. Рассмотрим сплошную сферу с внутренними источниками тепла. Определение температурного поля сферы с внутренним тепловыделением сводится к решению стационарного уравнения теплопроводности при следующих граничных условиях:

$$\Delta T = -\frac{q_v}{\lambda}, \quad T = T_H \text{ при } r = R, \quad T < \infty \text{ при } r \rightarrow 0.$$

Оператор Лапласа в сферической системе координат записывается в виде

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

После двукратного интегрирования

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{q_v}{\lambda}$$

окончательно получим

$$T = -\frac{q_v r^2}{6\lambda} - \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1 , C_2 – постоянные интегрирования. Постоянная $C_1 = 0$ из-за ограниченности температуры в центре сферы, то есть $T < \infty$ при $r \rightarrow 0$. А постоянную C_2 находим из граничных условий на поверхности:

$$T_H = -\frac{q_v R^2}{6\lambda} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_H + \frac{q_v R^2}{6\lambda}.$$

Откуда с учетом полученного ранее общего решения имеем

$$T = \frac{q_v}{6\lambda} (R^2 - r^2) + T_H.$$

Температурный перепад между центром сферы и ее поверхностью

$$T_0 - T_H = \frac{q_v R^2}{6\lambda},$$

где T_0 – температура в центре тепловыделяющей сферы; T_H – температура на поверхности.

Также как и в рассмотренном предыдущем примере для цилиндра видно, что перепад температуры между центром и поверхностью сферы не зависит от граничных условий, а полностью определяется внутренним тепловыделением и коэффициентом теплопроводности тепловыделяющего материала.

Аналогично вышеописанным процедурам можно получить функциональные зависимости распределения температурного поля для твердых тел другой формы как с внутренним тепловыделением, так и без внутренних источников тепла. *Замечание:* в соответствии со своим вариантом (см. табл. 2.1) при выполнении задания особое внимание необходимо обратить:

- на определяющее уравнение теплопроводности (уравнение Лапласа или Пуассона);
- вид оператора Лапласа, зависящий от формы рассматриваемого примитива (сферические, цилиндрические или прямоугольные координаты);
- граничные условия в соответствии с количеством слоев и условий охлаждения и нагрева.

Замечание. В приложении В, в справочных целях, приведены в окончательном виде основные температурные зависимости для твердых тел простой формы (как для конструкционных, так и для

тепловыделяющих материалов), которые можно использовать в проводимых расчетах с целью контроля правильности получаемых результатов и своих промежуточных выкладок.

Задачи для практической работы

1. Урановый шар радиуса $R = 7$ см, помещенный в сосуд с водой, облучается равномерным потоком нейтронов. В результате реакций деления ядер урана в шаре выделяется энергия $q_v = 100$ Вт/см³. Температура воды $T = 371$ К, теплопроводность урана $\lambda = 410$ Вт/(м·К·с). Найти стационарное распределение температуры в шаре, а также температуру в его центре.

2. По однородному цилиндрическому проводу без изоляции течет постоянный электрический ток. Определить стационарное распределение температуры в проводе, если его поверхность поддерживается при постоянной температуре T_s . Силу тока, удельное сопротивление провода и его радиус считать известными.

Лабораторная работа №3

РАСЧЕТ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

Цель: научиться определять температурные напряжения в элементах конструкций простой формы как без внутреннего тепловыделения, так и с наличием равномерно распределенных источников тепла; отработать вывод определяющих уравнений; получить функциональные зависимости распределения стационарных температурных напряжений; представить методы и результаты численно-аналитического решения конкретных задач о НДС (для сферы, цилиндра, трубы, пластины и т. д.) при неравномерном нагреве/охлаждении; построить эпюры распределения напряжений в пакете Mathcad (Matlab, Maple, Mathematics); провести проверку полученных результатов, сопоставляя их с известными аналитическими решениями.

Основные теоретические сведения. Как уже было отмечено выше, наиболее важное место в оценке работоспособности элементов конструкций и компонентов оборудования, эксплуатируемых в

сложных условиях, занимают термические напряжения (называемые также тепловыми или термическими), которые создаются в детали, если затруднена свободная деформация этой детали или ее частей в соответствии с изменением температуры. Чаще всего температурные напряжения возникают при неодинаковой температуре в различных точках объема тела, когда отдельные его элементы стремятся увеличиться или уменьшиться в размерах на разную величину, что и приводит к возникновению сжимающих и растягивающих напряжений. Также возможны температурные напряжения при постоянной температуре по объему отдельных деталей при наличии связей между ними, в случае если детали выполнены из нескольких материалов с различными коэффициентами литейного термического расширения. Заметим, что параллельно с определением температурных напряжений возникает также очень важная задача о перемещениях, вызванных изменением температуры и определяющих относительное положение отдельных частей различных ответственных элементов конструкций при их работе.

В приложении Д приведены функции распределения упругих термических напряжений в твердых телах простых форм (сплошной и полый цилиндры, шар, пластина) с равномерно распределенными источниками тепла и формулы для расчета максимальных термических напряжений. Ниже представлены расчетные соотношения для некоторых твердых тел, в которых отсутствуют внутренние источники тепла (конструкционные материалы).

Полый цилиндр без источников тепла, охлаждаемый с наружной поверхности:

$$\sigma_r = \frac{\alpha E \Delta T}{2(1-\mu) \ln \frac{R_H}{R_B}} \left[-\ln \frac{R_H}{r} - \frac{R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} \left(1 - \frac{R_H^2}{r^2} \right) \ln \frac{R_H}{R_B} \right]; \quad (3.1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E \Delta T}{2(1-\mu) \ln \frac{R_H}{R_B}} \left[1 - \ln \frac{R_H}{r} - \frac{R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} \left(1 + \frac{R_H^2}{r^2} \right) \ln \frac{R_H}{R_B} \right]; \quad (3.2)$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E \Delta T}{2(1-\mu) \ln \frac{R_H}{R_B}} \left[1 - 2 \ln \frac{R_H}{r} - \frac{2R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} \ln \frac{R_H}{R_B} \right]. \quad (3.3)$$

Максимальные окружные напряжения:
на наружной поверхности полого цилиндра (растяжение)

$$\sigma_{\theta_{\max}} = \frac{\alpha E \Delta T}{2(1-\mu) \ln \frac{R_H}{R_B}} \left[1 - \frac{2R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} \ln \frac{R_H}{R_B} \right]; \quad (3.4)$$

на внутренней поверхности (сжатие)

$$\sigma_{\theta_{\max}} = \frac{\alpha E \Delta T}{2(1-\mu) \ln \frac{R_H}{R_B}} \left[1 - \frac{2R_H^2}{R_H^2 - R_B^2} \ln \frac{R_H}{R_B} \right]. \quad (3.5)$$

Максимальное напряжение на поверхности пластины без источников тепла

$$\sigma_{\theta_{\max}} = \frac{\alpha E \Delta T}{2(1-\mu)}. \quad (3.6)$$

В формулах (3.1) – (3.6) ΔT – перепад температуры по толщине стенки; μ – коэффициент Пуассона; α – коэффициент термического расширения.

Подчеркнем, что все упомянутые формулы получены из интегральных соотношений, выведенных применительно к телам, не испытывающим внешних нагрузок. Примером может служить вывод формул для термических напряжений в полом цилиндре, приведенный в книге С. П. Тимошенко [3].

Пример. Рассмотрим упругое, изотропное неравномерно нагретое твердое тело в виде сплошного однородного длинного цилиндра. Температурное поле предполагается известным (из результатов

предыдущей лабораторной работы). Также считаем его независимым от напряженного состояния: влияние изменений объема, вызванных напряжениями, на тепловое поле крайне незначительно и в задаче не учитывается. Таким образом, в длинном цилиндрическом теле (с осью z) имеет место плоская деформация при условии, что составляющая смещения вдоль продольной оси $w = 0$, а распределение внешней тепловой нагрузки не зависит от координаты z , т. е. $T = T(r)$. Считается, что все поперечные сечения находятся в одних и тех же условиях. Уравнение равновесия в напряжениях для данных условий нагружения в общем виде записывается равенством

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{E}{1-\nu} \Delta[\alpha T(x, y)] = 0,$$

где Δ – оператор для Лапласа для функции двух переменных $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; E – модуль Юнга; α – коэффициент линейного термического расширения; ν – коэффициент Пуассона.

Общеизвестно, что дифференциальные уравнения равновесия удовлетворяются при подстановке равенств:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

где F – функция напряжений (функция Эри).

Подставляя эти равенства в (3.7), получаем условия сплошности Сен-Венана, записанные через функцию напряжений Эри. Из полученных условий вытекает, что функция напряжений F удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению сплошности:

$$\Delta \Delta F + \frac{E}{1-\nu} \Delta(\alpha T(x, y)) = 0.$$

Таким образом, все компоненты тензора напряжений можно вычислить путем интегрирования функции напряжений Эри (F).

Выражение (3.7) для осесимметричной плоской задачи термоупругости будет иметь следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) F = -\frac{E\alpha}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) T(r). \quad (3.8)$$

Правая часть уравнения равновесия с учетом распределения температурного поля примет вид

$$-\frac{E\alpha}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(T_H + \frac{q_v}{4 \cdot \lambda} (R^2 - r^2)\right) = -\frac{E\alpha}{1-\nu} \left(\frac{-q_v}{\lambda}\right). \quad (3.9)$$

Операторное перемножение в левой части даст следующее выражение, определяющее термонапряженное состояние сплошного цилиндра с внутренними источниками тепла:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{E\alpha q_v}{(1-\nu)\lambda}. \quad (3.10)$$

Теперь для нахождения главных напряжений необходимо подобрать функцию напряжений Эри $F(r)$, удовлетворяющую последнему выражению (3.10). Предположим, что функция напряжений может быть задана в общем виде как

$$F = C(R^2 - r^2)^2,$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая в общем виде от r , а E, ν принимаем константами ($E = \text{const}, \nu = \text{const}$) и считаем, что свойства материала не изменяются. То есть результаты будут получены в предположении, что в рассматриваемом интервале температур упругие постоянные и коэффициент линейного расширения постоянны.

Запишем функцию Эри и подставим в определяющее равенство. После ряда упрощений и преобразований в конечном итоге получаем $C = \frac{E\alpha q_v}{64(1-\nu)\lambda}$. Откуда очевидно, что подобранная функция

напряжений $F = C(R^2 - r^2)^2$, удовлетворяющая неоднородному бигармоническому уравнению, равна

$$F = \frac{E\alpha q_v}{64\lambda(1-\nu)}(R^2 - r^2)^2. \quad (3.11)$$

Напряжения в полярной системе координат через функцию Эри запишутся в виде

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}; \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = 0. \quad (3.12)$$

По последним записанным выражениям определение термоупругих напряжений в сплошном тепловыделяющем цилиндре сводится к дифференцированию найденной функции напряжений Эри, что не составляет большого труда и приводит к следующему окончательному результату:

$$\sigma_r = \frac{E\alpha q_v}{16\lambda(\nu-1)}(R^2 - r^2); \quad \sigma_\theta = \frac{E\alpha q_v}{16\lambda(\nu-1)}(R^2 - 3r^2);$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha q_v}{4\lambda(1-\nu)}\left(R^2\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) - r^2\right). \quad (3.13)$$

Последние выражения и определяют напряжения в сплошном тепловыделяющем цилиндре в условиях плоской деформации (рис. 3.1). Далее, задавая свойства делящегося (топливного) материала (в качестве топлива рассматривается керметная композиция [10]: 60 % UO_2 + 40 % Cr, табл. 3.2), получаем область распределения термонапряжений в тепловыделяющем цилиндрическом сечении, достаточно удаленном от торцов.

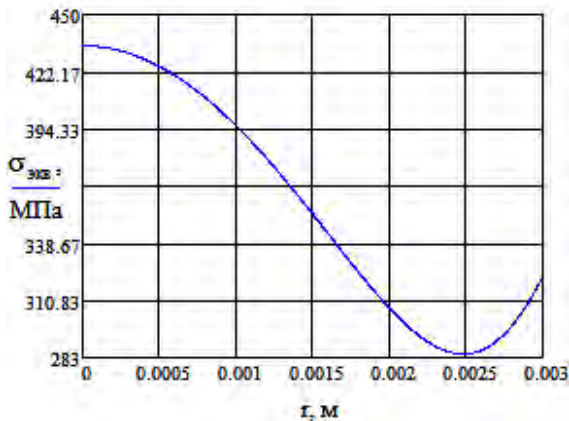


Рис. 3.1. Интенсивность напряжений в тепловыделяющем цилиндре

Таблица 3.2

Исходные данные для расчета термонапряженного состояния

Величина	Значение
R – радиус цилиндра с внутренними источниками тепловыделения	0,003 м
E – модуль упругости топливной композиции (60 % UO_2 + 40 % Cr)	$1,85 \cdot 10^5$ МПа
ν – коэффициент Пуассона топлива (60 % UO_2 + 40 % Cr)	0,29
λ – коэффициент теплопроводности топливной композиции	18 Вт/(м · К)
q_v – тепловыделение в единице объема цилиндра	$2.234 \cdot 10^9$ Вт/м ³
α – коэффициент линейного расширения 60 % UO_2 + 40 % Cr	$11,3 \cdot 10^{-6}$ град ⁻¹
T_H – температура поверхности цилиндра	600(873) °C(K)

Отметим, что известно аналитическое решение температурной задачи для длинного круглого осесимметричного цилиндра [3]. Компоненты тензора напряжений этого решения имеют следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{R^2} \int_0^R T \cdot r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T \cdot r dr \right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{R^2} \int_0^R T \cdot r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T \cdot r dr - T \right), \quad (3.14)$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2\nu}{R^2} \int_0^R T \cdot r dr - T \right),$$

где T – функция распределения температур, известная из решения задачи теплопроводности (или полученная интерполяцией экспериментальных результатов).

Сопоставим результаты расчета термонапряжений через функцию Эри с аналитическими результатами, полученными в [3]. Как видно из рисунков 3.1 и 3.2, решение, полученное с помощью функции напряжений, достаточно корректно отображает картину распределения термонапряжений: максимальное расхождение результатов проводимого расчета с аналитическим решением составило для радиальных напряжений 1,9 МПа; для окружных 1,36 МПа; для осевых 1 МПа, что менее 1 %. Кроме того, забегая наперед, отметим, что полученные значения основных характеристик напряженного состояния сопоставимы с результатами численного виртуального моделирования в программном комплексе ANSYS Workbench (лабораторная работа № 4). Таким образом, привлекательность полученных с помощью функции напряжения Эри соотношений для определения термонапряжений в тепловыделяющем цилиндре несомненна: они позволяют определить стационарные термонапряжения в твердом теле без решения задачи теплопроводности. По этим выражениям легко построить тензоры напряжений и деформаций с дальнейшей оценкой прочности любого конструкционного элемента по тому или иному критерию.

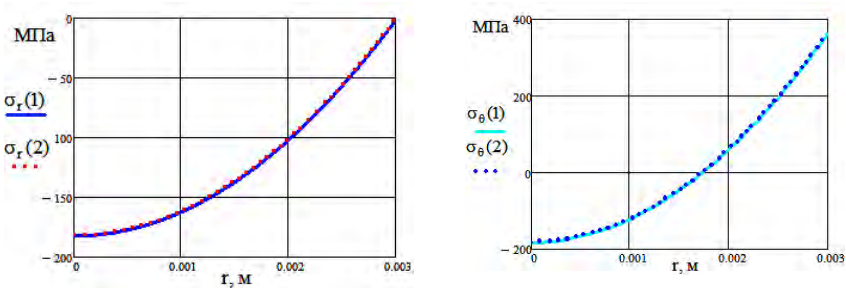


Рис. 3.2. Распределение радиальных и окружных напряжений в цилиндре с внутренними источниками тепла:

1 – расчет через функцию Эри; 2 – аналитическое решение [1]

Задание. Выполнить вывод определяющих зависимостей термического деформирования, а также решение соответствующих уравнений, используя функцию напряжений или термоупругий потенциал. Получить функцию распределения температурных напряжений для исследуемого конструктивного элемента в соответствии с номером варианта (см. табл. 3.1). Определить, какое значение принимают напряжения в центре тела, на внутренней и наружной поверхности, учитывая различные условия охлаждения (тепло отводится равномерно). Используя полученные зависимости распределения термических напряжений получить числовые результаты для конкретных видов конструкционных или тепловыделяющих (топливных) материалов. Построить графическую иллюстрацию в пакете Mathcad (Matlab, Maple, Mathematics). Сравнить графически результаты с интегральными соотношениями, полученными С. П. Тимошенко для стационарных термонапряжений [3]. *Замечание:* при рассмотрении цилиндров и пластин принять допущение о плоской деформации и плоском напряженном состоянии соответственно.

Задачи для практической работы

1. Стальной стержень длиной 50 см закреплен между двумя стенками без предварительной нагрузки при температуре 35 °С. Каковы будут напряжения в стержне при –40 °С? Как изменятся эти напряжения, если при этом стенки переместятся на 0,25 мм одна относительно другой? Принять $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ и $E = 2,04 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

2. Стержень из алюминиевого сплава с площадью сечения 3,2 см² закреплен между стенками при 33 °С с предварительным усилием 1800 кг. Определить: а) каковы будут напряжения при 21 °С; б) при какой температуре напряжения равны нулю.

3. Определить, какое перемещение стенок в задаче № 1 обеспечит отсутствие напряжений. Каково будет это перемещение, если длина стержня равна 250 см?

4. Стальной провод закреплен между двумя жесткими стенками и испытывает растягивающую нагрузку 1800 кг при 45 °С. Построить кривую минимального допустимого диаметра в зависимости от температуры, если допускаемое напряжение равно 350 МПа. Определить, при какой температуре величина допустимого диаметра становится неограниченной.

5. Труба из алюминиевого сплава длиной 1,5 м, внутренним диаметром 5 см и толщиной стенок 0,3 см закреплена между жесткими стенками при 20 °С. Используя данные из курсов механики материалов и прикладной теории упругости, определить при какой температуре достигается Эйлерова критическая сила для потери устойчивости? Концы трубы считать закрепленными.

6. Решить задачу № 5 при условии, что между одним из концов трубы и стенкой при 28 °С имеется зазор 1,3 мм.

7. Жесткий брус весом 9100 кг поддерживается тремя симметрично расположенными стержнями. Полагая, что брус сохраняет горизонтальное положение, найти напряжение в каждом из стержней при нагревании их на 60 °С. Для двух стальных стержней принять поперечное сечение равным 5,2 см², модуль упругости 2,11·10⁵ МПа, а коэффициент линейного термического расширения 11,5·10⁻⁶ °С⁻¹. Для алюминиевого стержня поперечное сечение – 10,3 см², модуль упругости – 0,7·10⁵ МПа, коэффициент линейного термического расширения 21,5·10⁻⁶ °С⁻¹.

8. Стальной стержень с площадью сечения 1,3 см² скреплен со стержнем из алюминиевого сплава с площадью сечения 2,6 см² при 23 °С. Найти возникающие напряжения в стержнях при нагревании их до 123 °С.

9. Определить для задачи № 7, при каком увеличении температуры вся нагрузка воспринимается стальными стержнями.

10. Труба из алюминиевого сплава с внутренним диаметром 13 мм и стенками толщиной 2,5 мм надета на стальной болт и удерживается гайкой, завернутой до отказа. Найти повышение температуры, которое вызовет напряжение в 70 МПа в материале трубы.

11. Решить задачу № 10 при следующих условиях: а) имеется зазор между гайкой и трубой 0,13 мм; б) предварительная затяжка гайки равна 140 кг. Длина трубы – 25 см.

12. Найти напряжения в свободной толстой пластине, если температура распределена по закону: $T = T_0(1 + y/c)$ при $-c \leq y \leq 0$, $T = T_0(1 - y/c)$ при $0 \leq y \leq c$.

13. Общеизвестно, что при стационарном двумерном распределении температуры имеет место условие $\Delta T = 0$. Доказать, что при таком распределении температуры термические напряжения в

сплошной свободной пластине равны нулю. Будет ли это верно для пластины с отверстием?

14. Тонкий круговой диск подвергается воздействию температуры, неравномерно распределенной вдоль радиуса по закону

$$\Delta T = T - T_0 = (T_1 - T_0) \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right),$$

где T_0 , T_1 – температура у контура и в центре диска соответственно (рис. 3.3).

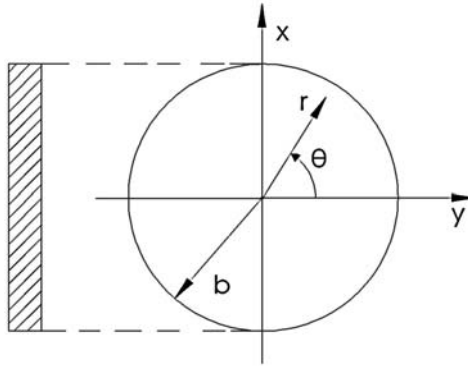


Рис. 3.3. Условие к задаче № 14

Требуется:

- а) определить напряжения σ_r , σ_θ ;
- б) проверить полученное решение, подставив выражения для напряжений в дифференциальное уравнение равновесия;
- в) составить граничное условие на контуре диска и предельное условие при $r = 0$, считая напряжения ограниченными, и определить постоянные интегрирования;
- г) построить эпюры напряжений σ_r , σ_θ и интенсивности напряжений в зависимости от радиуса текущего r ;
- д) определить температуру, при которой в наиболее напряженной точке диска возникнут пластические деформации.

15. Длинный круговой цилиндр с закрепленными концами (рис. 3.4) подвергается осесимметричному воздействию температуры T , распределенной по тому же закону, что и в задаче № 14. Выполнить те же требования, что и в задаче № 14.

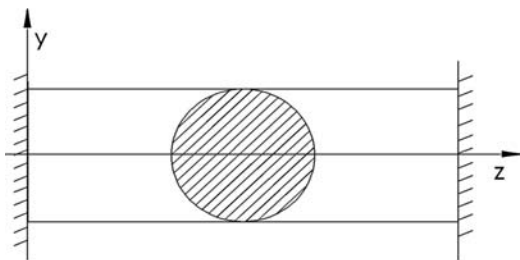


Рис. 3.4. Условие к задаче № 15

16. Тонкий круговой диск с отверстием в центре (рис. 3.5) подвергается воздействию температуры T , неравномерно распределенной вдоль радиуса r по закону

$$\Delta T = T - T_0 = (T_1 - T_0) \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)},$$

где T_0 , T_1 – температура на внешнем и внутреннем контурах диска соответственно.

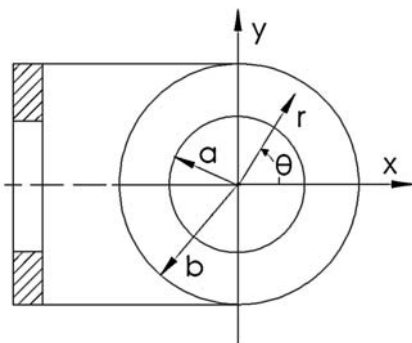


Рис. 3.5. Условие к задаче № 16

Требуется:

а) определить напряжения σ_r , σ_θ ;

б) проверить полученное решение, подставив выражения для напряжений в дифференциальное уравнение равновесия;

в) составить граничное условие на внешнем и внутреннем контуре диска и определить постоянные интегрирования;

г) построить эпюры напряжений σ_r , σ_θ , и интенсивности напряжений в зависимости от радиуса текущего r ;

д) определить температуру, при которой в наиболее напряженной точке диска возникнут пластические деформации.

17. Длинный полый цилиндр с закрепленными концами подвергается осесимметричному воздействию температуры T , распределенной по тому же закону, что и в задаче № 16 (рис. 3.6). Выполнить требования, что в задаче № 16.

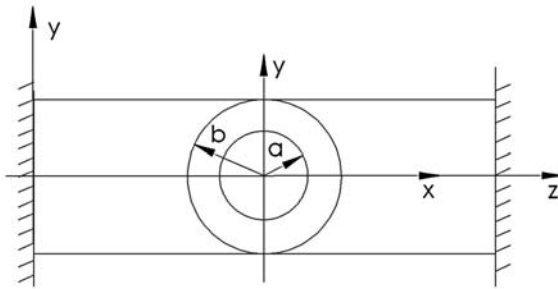


Рис. 3.6. Условие к задаче № 17

18. Длинный круговой цилиндр со свободными концами подвергается осесимметричному воздействию температуры T , распределенной вдоль радиуса r по тому же закону что и в задаче № 14 (рис. 3.7).

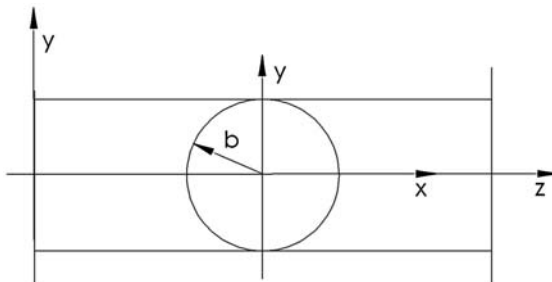


Рис. 3.7. Условие к задаче № 18

Выполнить требования задачи № 14. При определении напряжения σ_z учесть, что в цилиндре возникает обобщенная плоская деформация ($\varepsilon_z = \text{const}$) и согласно обобщенному закону Гука: $\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\theta) - \alpha E \Delta T + E \varepsilon_z$. Указание. Для определения ε_z использовать то обстоятельство, что торцы цилиндра свободны, поэтому нормальное усилие равно $N = \int_0^b \sigma_z 2\pi r dz = 0$.

19. Труба, внутренний радиус которой $a = 10$ см, наружный $b = 25$ см, находится в состоянии стационарного неравномерного нагрева, причем температура на внутренней поверхности трубы на 150 °С больше, чем на наружной поверхности. Построить в пакете Mathcad (MathLAB, Maple или других расчетных программах) для напряжений $\sigma_\theta, \sigma_r, \sigma_z, \tau_{\max}$ эпюры, изображающие эти величины в функции r . В расчетах для материала трубы – незакаленной стали – полагать $\alpha = 0,0000176$ град⁻¹, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$.

20. Определить тепловые напряжения для тонкостенной трубы, у которой $b = 25$ см, $a = 22$ см, $T_b - T_a = 150$ °С.

21. Найти тепловые напряжения в полой сфере, нагретой симметрично относительно центра, считая тепловое состояние сферы стационарным. Данные: $a = 10$ см, $b = 25$ см, $T_b - T_a = 150$ °С.

22. Предполагая, что заданное тело (см. табл. 1.1 из лабораторной работы № 1) нагрето неравномерно и настолько, что упругие характеристики материала (модуль упругости, коэффициент Пуассона) существенно изменяются (против обычных при нормальных температурах), но все же при этом процесс деформации остается линейно-упругим, проследить известный в литературе вывод уравнений термоупругости и внести в них надлежащие поправки за счет изменения параметров упругости (E^* , ν^*) при переходе от одной точки к другой точке тела.

Лабораторная работа № 4

РАСЧЕТ ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ВИРТУАЛЬНОЙ СРЕДЕ ANSYS WORKBENCH

Цель: выполнить решение связанной тепловой и прочностной задач для элемента конструкции в соответствии со своим вариантом (см. табл. 4.1); отработать основные этапы связанного теплового и прочностного расчета для неоднородной конструкции на базе МКЭ в пакете ANSYS; рассмотреть особенности наложения температурного поля в качестве внешней нагрузки при проведении прочностного анализа.

Таблица 4.1

Номера индивидуальных вариантов условий задания
к лабораторной работе № 4

№	Геометрия твердого тела	Условие нагрева	Материал	Число слоев	Внешнее/внутреннее давление, МПа
1	Сплошная сфера	Охлаждение с внешней поверхности	Тепловыделяющий (UO ₂)	1	6
2	Полая сфера	Охлаждение с внешней поверхности	Тепловыделяющий (PuO ₂)	1	14/3
3	Сплошной цилиндр	Охлаждение с внешней поверхности	Тепловыделяющий (ThO)	1	7
4	Полый цилиндр	Охлаждение с внешней поверхности	Тепловыделяющий (UC ₂)	1	16/3
5	Полый цилиндр	Охлаждение с внешней поверхности	Тепловыделяющий (UN)	1	12/4
6	Полый цилиндр	Охлаждение с внешней и наружной поверхностей	Тепловыделяющий (UC)	1	5/9
7	Пластина	Охлаждение с двух сторон	Тепловыделяющий (U ₃ Si)	1	7
8	Пластина	Охлаждение с одной стороны	Тепловыделяющий (USi)	1	5

Продолжение табл. 4.1

№	Геометрия твердого тела	Условие нагрева	Материал	Число слоев	Внешнее/ внутреннее давление, МПа
9	Пластина	Нагрев с двух сторон	Конструкционный (никель, чугун)	2	3
10	Пластина	Нагрев с двух сторон (известен тепловой поток q_s в направлении оси абсцисс)	Конструкционный (вольфрам, железо)	2	8
11	Полый цилиндр	Охлаждение с внутренней стороны, нагрев с наружной поверхности (тепловой поток известен)	Конструкционный (олово, цирконий)	2	5/8
12	Полый ци- линдр	Охлаждение с наружной по- верхности, нагрев с внут- ренней стороны (тепловой поток q_s известен)	Конструкционный (серебро, титан)	2	6/4
13	Полая сфера	Охлаждение снаружи (тепло- вой поток, под- водимый с внут- ренней поверх- ности известен)	Конструкционный (алюминий, тан- тал)	2	15/9
14	Полая сфера	Охлаждение снаружи (извест- на температура внутренней по- верхности сферы)	Конструкционный (медь, бериллий)	2	13/5
15	Полый цилиндр	Охлаждение с наружной по- верхности, нагрев с внут- ренней стороны (известны одно- временно темпе- ратуры наружной и внутренней поверхностей)	Конструкционный (сталь, молибден)	2	18/6

№	Геометрия твердого тела	Условие нагрева	Материал	Число слоев	Внешнее/внутреннее давление, МПа
16	Тонкостенная оболочка	Охлаждение с наружной поверхности	Конструкционный (алюминий, тантал)	2	16/3
17	Многослойный сплошной цилиндр	Охлаждение с наружной поверхности	Конструкционный и тепловыделяющий (топливный)	2	16
18	Многослойная сплошная сфера	Охлаждение с наружной поверхности	Конструкционный и тепловыделяющий (топливный)	2	16
17	Многослойный полый цилиндр	Охлаждение с внутренней поверхности	Сталь 316L и UO ₂	2	16/3
18	Многослойная полая сфера	Охлаждение внутри и снаружи	Сталь 316L и UO ₂	2	10/4

Из лабораторной работы № 1, выполненной в среде ANSYS 9.0 Ed (Student Edition), мы увидели, что особенностью конечно-элементного анализа является точный учет геометрической формы исследуемых конструктивных элементов и закономерностей механического взаимодействия. При этом представляется возможным получить картину НДС как на поверхности, так и во внутренних областях исследуемых объектов. Средства термopрочностного анализа программы ANSYS позволяют использовать результаты решения задачи теплообмена для дальнейшего проведения прочностного анализа [2]. Такая возможность удобна при определении влияния температурного поля на прочность конструкции: можно задать тепловую нагрузку отдельно или в совокупности с механическими нагрузками.

Смоделируем сечение конструктивного элемента с последующим решением температурной и термоупругой задачи. Решение поставленной термopрочностной задачи определения НДС будет выполняться с помощью МКЭ в пакете ANSYS Workbench 11.0. Исторически программная платформа Workbench была создана для разработки и интеграции линейки программных продуктов ANSYS, прикладных пользовательских и написанных сторонними разработчиками программ инженерного анализа в едином информационном пространстве проекта. При создании Workbench были использованы

передовые средства разработки программных продуктов, заложены широкие возможности по обмену данными, учтены требования с точки зрения работы с веб-технологиями, относительной простоты работы с программой, «дружелюбный» интерфейс и многое другое.

Пример. Выполним симуляцию термомеханического поведения сечения тепловыделяющего цилиндра (см. табл. 3.2 лабораторной работы № 3) с последующим решением температурной и термоупругой задачи. Считаем, что равномерное механическое давление на внешнюю стенку цилиндра составляет 3 МПа. *Замечание.* При этом предполагаем, что теплофизические и механические характеристики материала остаются неизменными. Абсолютное значение и характер распределения поля температуры определяются мощностью внутреннего тепловыделения, теплофизическими свойствами материала и условиями теплоотвода с поверхности цилиндра.

Проведем конечно-элементное моделирование в среде программы ANSYS.

Анализ напряженно-деформированного состояния тела с использованием метода конечных элементов будет включать в себя следующие этапы:

- построение геометрической модели сечения единичной толщины;
- разбиение модели сечения на конечные элементы;
- моделирование виртуальной нагрузки и граничных условий;
- расчет и анализ полученных результатов НДС твердого тела.

1. Построение геометрической модели твердого тела

Для построения сечения тепловыделяющего цилиндра в ANSYS Workbench выбираем вкладку Geometry в открывшемся окне при загрузке программы (рис. 4.1).

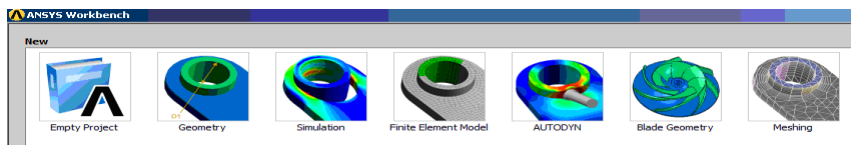


Рис. 4.1. Главное меню ANSYS Workbench

Выбираем единицы измерения для геометрии модели сечения длинного тепловыделяющего цилиндра (рис. 4.2).

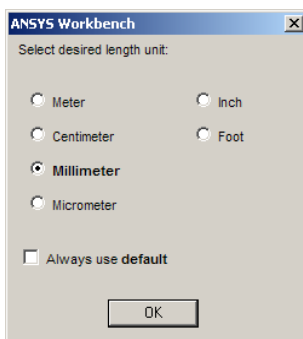


Рис. 4.2. Меню выбора единиц измерения

Задаем плоскость для эскиза сечения сердечника (рис. 4.3).

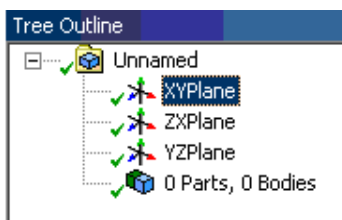



Рис. 4.3. Выбор плоскости построения геометрии модели

Переходим на вкладку **Sketching** и выбираем на панели **Draw** пункт **Circle** (рис. 4.4). С помощью пункта **Dimensions** (рис. 4.5) задаем размер сечения 6 мм. В результате получаем эскиз сечения, который с помощью команды **Extrude** (пиктограмма  Extrude) в главном меню вытягиваем вдоль оси **OZ** на единичную толщину (рис. 4.6).

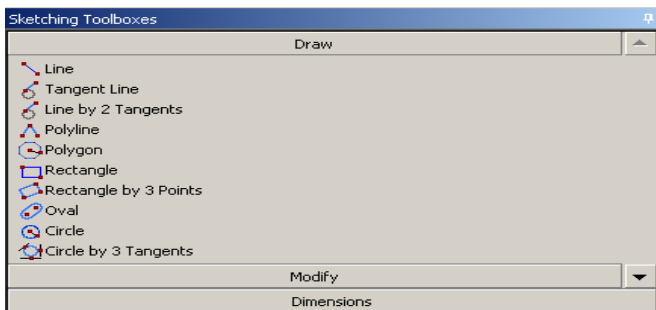


Рис. 4.4. Меню выбора элементов эскиза

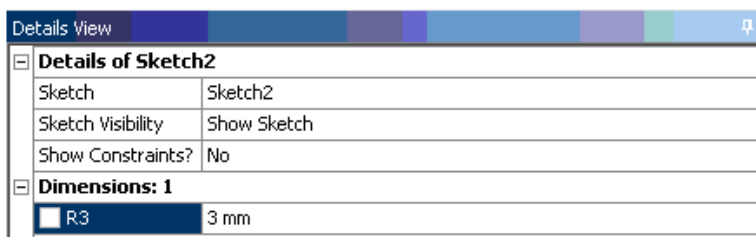


Рис. 4.5. Задание радиуса сечения

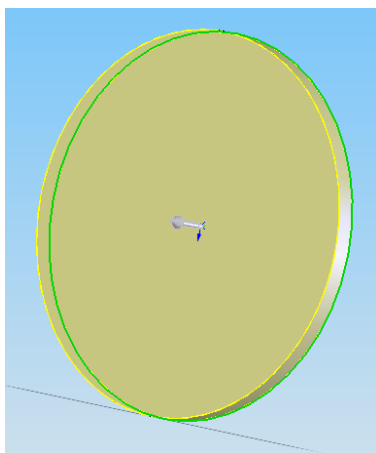


Рис. 4.6. Вытягивание модели сечения

2. Разбиение на конечные элементы

Накладываем на модель сетку, используя пункт панели **Meshing** (рис. 4.7). Затем задаем полный размер элемента и разбиваем модель на конечные элементы (рис. 4.8), получая в итоге следующую картину (рис. 4.9)



Рис. 4.7. Пункт Meshing в дереве расчетов ANSYS Workbench

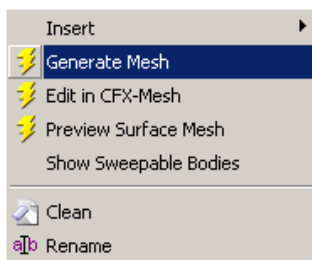


Рис. 4.8. Генерация сетки в ANSYS Workbench

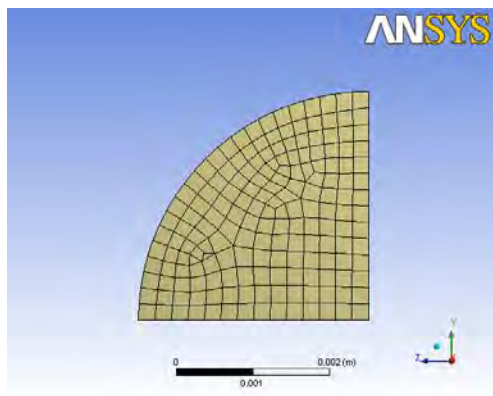


Рис. 4.9. Вид модели, разбитой на конечные элементы

3. Моделирование виртуальной нагрузки

Задаем давление P , равное 3 МПа, на внешней поверхности цилиндрического сечения (рис. 4.10), используя меню приложения нагрузок **Loads**, в котором выбираем пункт **Pressure** (рис. 4.11).

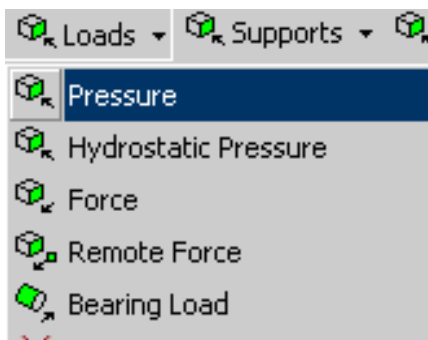


Рис. 4.10. Меню приложения нагрузок в ANSYS Workbench

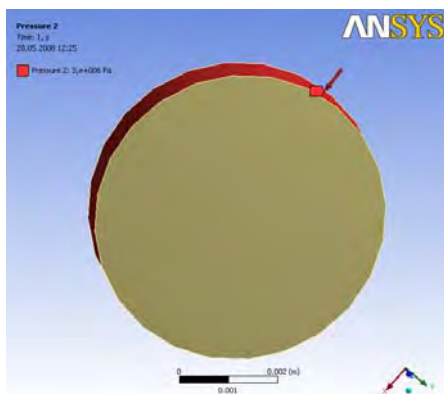



Рис. 4.11. Нагружение модели боковым усилием

Температура на поверхности тепловыделяющего цилиндра $T_s = 600$ °С (по условию термоупругой задачи). С помощью пиктограммы  Temperature задаем величину температуры на поверхности (рис. 4.12).

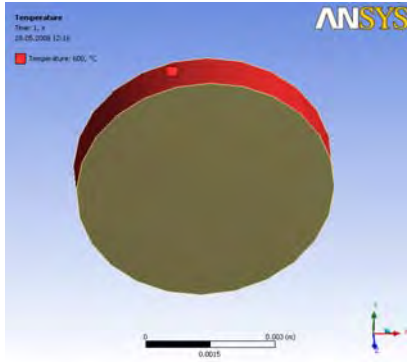


Рис. 4.12. Задание температуры на поверхности тепловыделяющего цилиндра

Задаем тепловыделение в единице объема цилиндра $q_v = 2,234 \cdot 10^9 \text{ Вт/м}^3$. Для этого в выпадающем меню **Heat** выбираем пункт **Internal Heat Generation** (рис. 4.13), указываем величину коэффициента q_v и расчетную модель (рис. 4.14).

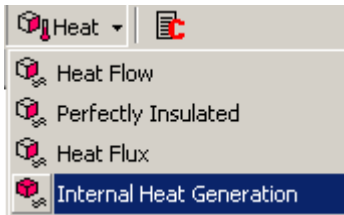


Рис. 4.13. Меню задания тепловыделения материала

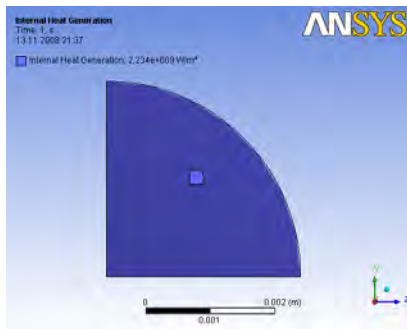


Рис. 4.14. Задание тепловыделения в цилиндре с источниками тепла

Каждый слой топливного сердечника находится в одинаковых условиях, где слой как бы зажат между двумя абсолютно жесткими поверхностями и благодаря взаимодействию соседних слоев принудительно обеспечивается условие неизменности толщины слоя (случай плоской деформации). Поэтому перемещения вдоль оси Oz модели сечения задаем равными нулю (рис. 4.15). Также фиксируем перемещения по осям Ox и Oz (рис. 4.16) граней сечения (т. к. задача осесимметрична). Также заметим, что вследствие равномерного механического давления и действующего радиального температурного поля возникающее напряженное и деформируемое состояние цилиндра осесимметрично.

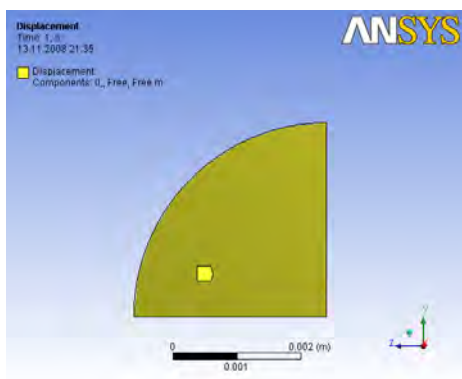


Рис. 4.15. Задание продольных перемещений

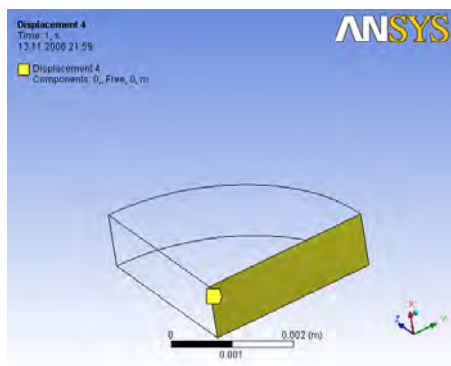




Рис. 4.16. Задание поперечных перемещений

4. Расчет и анализ полученных результатов напряженно-деформированного состояния топливного сердечника

Задаем материал модели, нажимая пиктограмму  [Engineering Data] . На открывшейся вкладке создаем новый материал DioksidUrana (рис. 4.17).

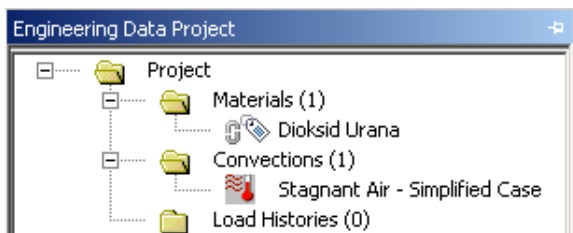


Рис. 4.17. Сведения для конструирования модели

Задаем свойства материала на вкладке **Data Overview** (рис. 4.18).

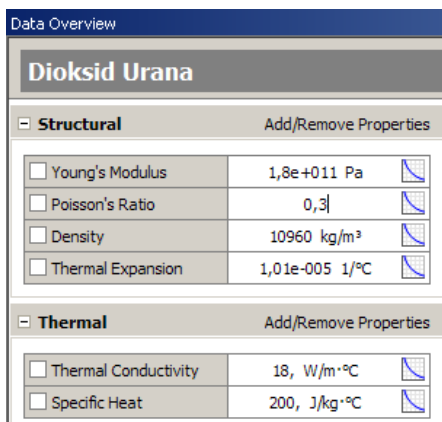


Рис. 4.18. Создания материала модели

Выбираем тип решаемой задачи в меню New Analysis (рис. 4.19).

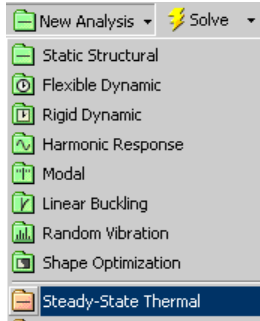
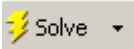


Рис. 4.19. Типы решаемых задач

Запускаем на расчет, используя пиктограмму .

Необходимо связать процессы теплового и прочностного анализов. Выбираем тип решаемой задачи в меню **New Analysis**: причем сначала, выполняя температурный анализ (**Steady-State Thermal**), получаем температурное поле в модели для заданных граничных условий теплообмена, а затем, опираясь на найденные значения распределения температуры, проводим расчет НДС сечения сердечника (**Static Structural**), в котором в качестве одного из условий **Thermal Condition** (рис. 4.20) ссылаемся на проведенный **Steady-State Thermal** анализ (значения температур используются в виде нагрузок на стадиях препроцессорной подготовки и получения решения при последующем прочностном анализе).

Thermal Condition				
Step	Condition	Uniform Temp (°C)	Thermal Environment	Time (s)
1	Non-Uniform Temperature	N/A	Steady-State Thermal	0,

Рис. 4.20. Температурные условия

Последовательность расчета НДС сечения тепловыделяющего цилиндра в пакете ANSYS Workbench 11.0 представлена на рис. 4.21.

Ниже (рис. 4.22) представлено распределение температуры по сечению. Как видно, максимальная температура в центре сечения топливного сердечника достигает $T = 879,25$ °C, а минимальная на поверхности (при $r = R$) – $T = 600$ °C.

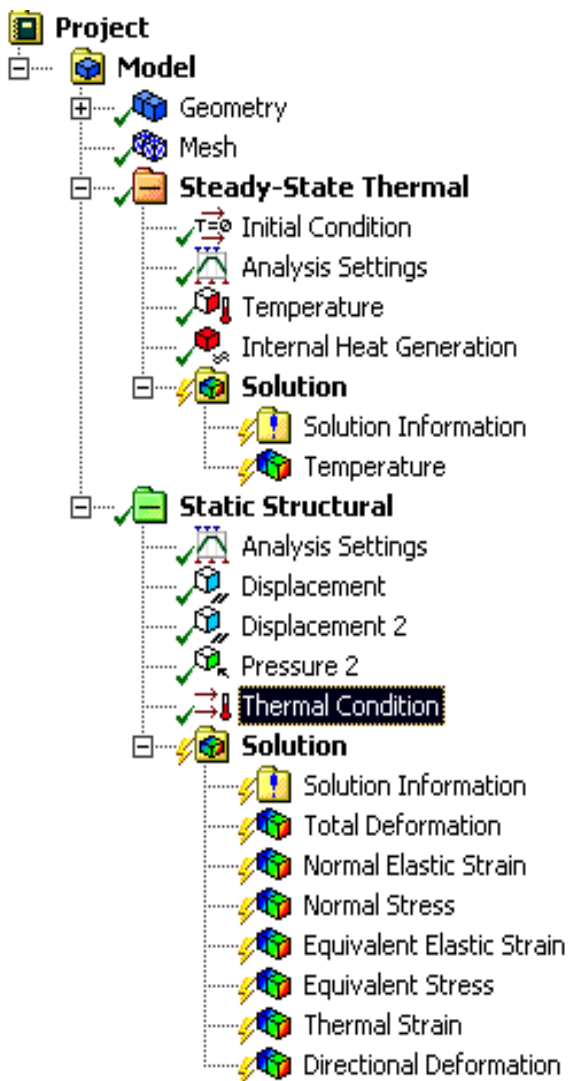


Рис. 4.21. Дерево расчета НДС тепловыделяющего цилиндра

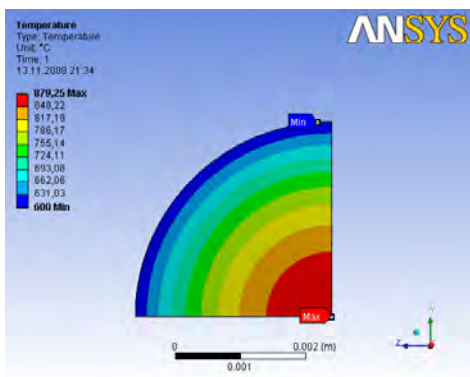


Рис. 4.22. Распределение температурных полей по сечению

В среде конечно-элементного моделирования ANSYS Workbench получены следующие результаты: распределение температурных деформаций (**Thermal Strain**) по сечению модели (рис. 4.23); совокупные (общие) перемещения точек сечения (**Total Deformation**) (рис. 4.24); интенсивность напряжений (**Equivalent Stress**) в сечении модели (рис. 4.25); интенсивность деформаций (**Equivalent Elastic Strain**) в тепловыделяющем цилиндре (рис. 4.26).

Как видно из рис. 4.22, действующее на цилиндр неоднородное температурное поле обуславливает появление значительных термонапряжений, физическая сущность которых связана с неоднородной температурной деформацией различных участков сердечника: в условиях неоднородного температурного поля горячие участки стремятся расшириться, а соседние холодные участки не допускают этого, поэтому горячие участки материала находятся в состоянии сжатия, а холодные области – в состоянии растяжения. И когда на поверхности тепловыделяющего цилиндра со временем выгорания топлива появятся трещины или выемки, то макроскопические дефекты сконцентрируют все термонапряжения.

Таким образом, изучение термонапряженного состояния топливного урансодержащего цилиндра при выгорании ядерного топлива имеет большое значение и определяет кинетику изменений напряжений и деформаций.

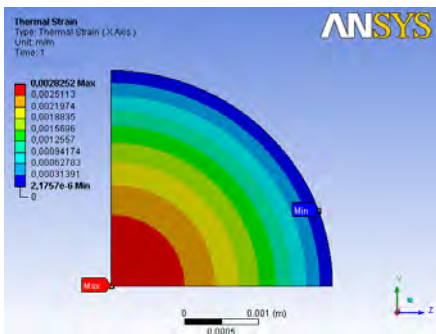


Рис. 4.23

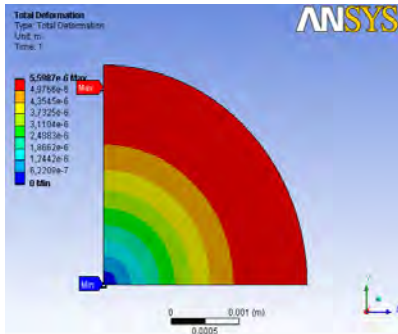


Рис. 4.24

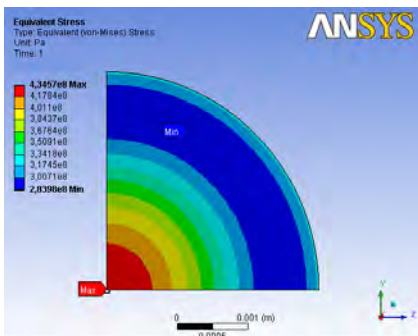


Рис. 4.25

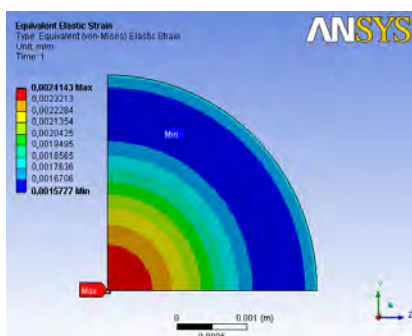


Рис. 4.26

Графические результаты решения аналогичной поставленной термоупругой задачи представлены ниже. Значения всех постоянных указаны в табл. 3.2.

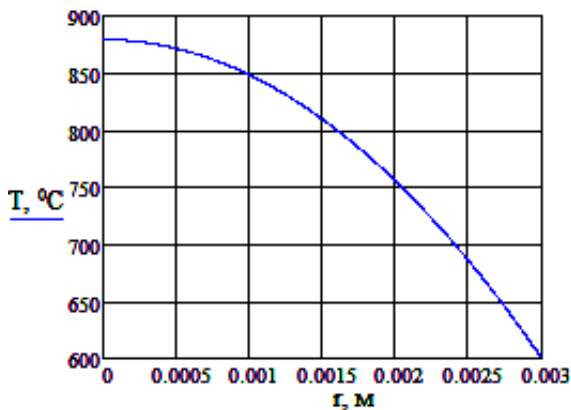


Рис. 4.27. Распределение температуры по сечению вдоль радиуса цилиндра

Температурные деформации представлены на рис. 4.28, перемещения точек сечения вдоль радиуса – на рис. 4.29. Распределение интенсивности напряжений и деформаций материальных точек тепловыделяющего цилиндра представлены на рис. 4.30 и 4.31 соответственно.

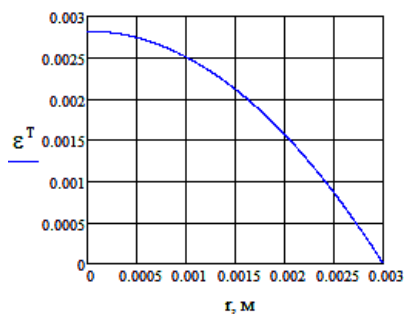


Рис. 4.28

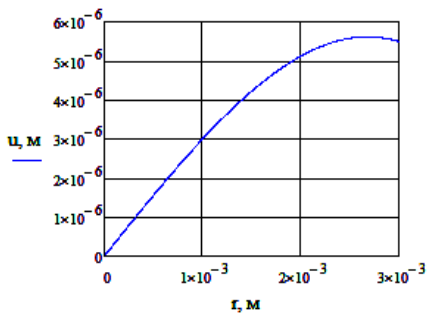


Рис. 4.29

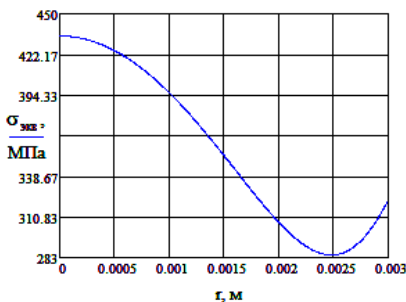


Рис. 4.30

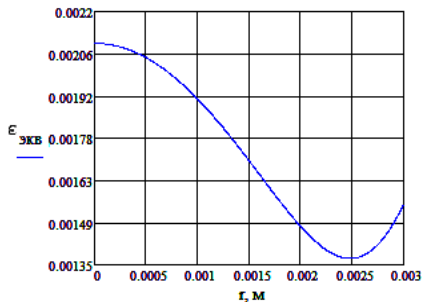


Рис. 4.31

Анализируя результаты, полученные на базе численно-аналитического метода и МКЭ в ANSYS Workbench, приходим к полному совпадению результатов распределения температуры, температурных деформаций и эквивалентных напряжений по сечению. Незначительное расхождение значений общих перемещений и эквивалентных деформаций связано в первую очередь с ориентацией их в пространстве и принятой изначально осесимметричностью решаемой численно задачи. Таким образом, полученные в ANSYS Workbench значения основных характеристик НДС достаточно корректны и сопоставимы с аналитическими результатами. Кроме того, распределения напряжений и деформаций, полученные с помощью расчета на базе комплекса ANSYS, позволяют довольно быстро получить наглядное представление о наиболее нагруженных и опасных местах.

Задание. На первом этапе лабораторного исследования требуется разработать математическую модель для нахождения деформаций и напряжений, а также обосновать метод численного или численно-аналитического решения задачи. На основе численного решения найти значения основных характеристик НДС данной задачи (табл. 4.1). Решение исходной задачи запрограммировать в пакете Mathcad (Matlab, Maple, Mathematics). Построить графические зависимости деформаций и напряжений в каждой точке твердого тела.

На втором этапе исследования провести конечно-элементное моделирование в среде программы ANSYS Workbench. Смоделировать деформирование твердого тела с последующим решением температурной и термоупругой задачи. Сопоставить результаты МКЭ с аналитическим методом.

Замечание. В содержание отчета о проделанной лабораторной работе № 4 должно входить: краткие теоретические сведения; подробное описание всех шагов расчета с помощью ANSYS при проведении структурного прочностного анализа, рисунки состояния твердого тела после приложения нагрузок. Краткие выводы.

Лабораторная работа № 5

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Цель: изучить основные модели линейного и нелинейного поведения деформируемых твердых тел; рассмотреть идеализированные диаграммы деформирования при растяжении/сжатии и кручении основных конструкционных материалов; проиллюстрировать основные процессы при нагружении и разгрузке; отработать вывод определяющих зависимостей для упругопластических твердых тел.

Основные теоретические сведения. Как известно из экспериментов, различные материалы обладают тремя основными механическими свойствами – упругостью, пластичность [4] и вязкостью. Эти свойства проявляются в разной степени в зависимости от структуры материала, условий работы (температуры, облучения, влажности, электромагнитного излучения) и типа нагрузки (статической, динамической, импульсной или длительной и т. п.). При различных комбинациях этих трех факторов один и тот же материал может проявлять одно из трех основных механических свойств или некоторую комбинацию из них. При изменении некоторых из названных факторов можно изменить поведение материала и получить другую преобладающую комбинацию механических свойств. Теоретическое описание этого многообразного поведения материалов производится посредством механико-математических моделей, которые идеализируют реальное поведение материала, отражая его наиболее характерные свойства. Большое разнообразие материалов и свойств, проявляющихся при различных условиях работы, а также стремление к более подходящему описанию этого многообразия породили до сих пор и продолжают порождать многие механико-математические модели. Одномерные эксперименты являются ос-

новой для создания одномерных механико-математических моделей. При помощи идеализации полученной экспериментальным путем зависимости между основными напряжениями и деформациями получается определяющая связь между ними для соответствующей механико-математической модели. Рассмотрим последовательно одномерные механико-математические модели, которые встречаются чаще всего [5].

Модель линейно-упругого тела. Эксперименты при одномерном растяжении, сжатии и кручении показали, что существуют материалы, обладающие линейно-упругими свойствами. Связь между напряжениями и деформациями представляется для них в виде идеализированной диаграммы – прямой линии. В аналитическом виде это выражается при помощи определяющей связи между основными напряжениями и деформациями:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \text{ (при растяжении/сжатии)}, \quad (5.1)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \text{ (при кручении)}. \quad (5.2)$$

Диаграмма растяжения/сжатия и кручения представлена на рис. 5.1.

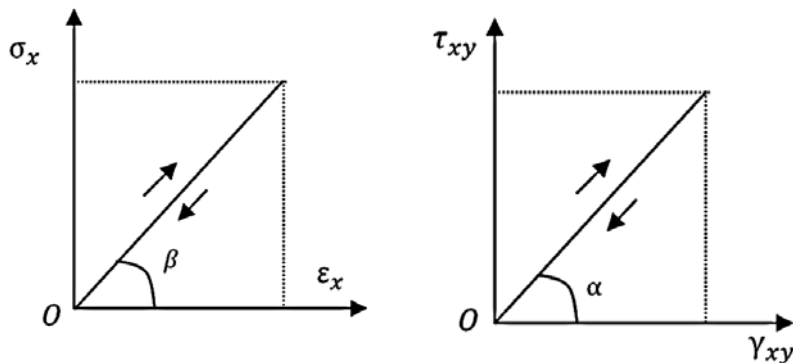


Рис. 5.1. Линейно-упругое тело

Здесь $E = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{const}$ – модуль упругости Юнга, а $G = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{const}$ – упругий модуль сдвига. В этом случае коэффициент поперечной деформации также является константой и называется коэффициентом

том Пуассона $\nu = \text{const}$. *Замечание:* уравнения (5.1) и (5.2) – суть математического выражения линейного закона Гука.

Линейно-упругие материалы, имеющие различные модули упругости при растяжении и сжатии, называются разномодульными. Идеализированная диаграмма таких материалов представлена на рис. 5.2.

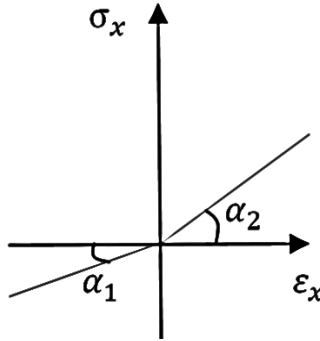


Рис. 5.2. Разномодульное твердое тело

Определяющая связь между напряжениями и деформациями имеет вид:

$$\sigma_x = \begin{cases} E^+ \varepsilon_x, E^+ \operatorname{tg} \alpha_1 = \text{const} \text{ (растяжение),} \\ E^- \varepsilon_x, E^+ \operatorname{tg} \alpha_2 = \text{const} \text{ (сжатие).} \end{cases} \quad (5.3)$$

Модель нелинейно-упругого тела. Связь между напряжениями и деформациями в телах с нелинейно-упругими свойствами дается идеализированной кривой, показанной на рис. 5.3. Соответствующая определяющая связь

при растяжении (сжатии):

$$\sigma_x = f_1(\varepsilon_x), \quad (5.4)$$

при кручении:

$$\tau_{x\varphi} = f_2(\gamma_{x\varphi}). \quad (5.5)$$

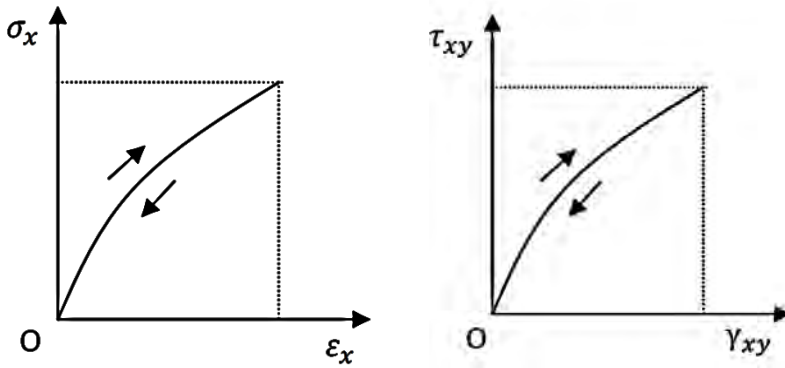


Рис. 5.3. Нелинейно-упругое тело

Для сопротивляющихся нелинейно-упругих тел определяющая связь имеет вид:

$$\sigma_x = \begin{cases} f^+(\varepsilon_x), \\ f^-(\varepsilon_x). \end{cases} \quad (5.6)$$

Замечание. Здесь знак «+» означает процесс растяжения, а «-» – сжатие.

Соответствующая идеализированная кривая показана на рис. 5.4.

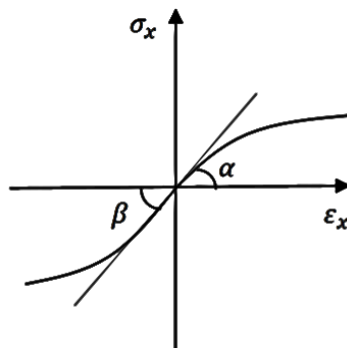


Рис. 5.4. Сопротивляющееся (разнопрочное) нелинейно-упругое твердое тело

Модели пластических тел. Материалы, проявляющие пластические свойства, в зависимости от вида этого проявления могут аппроксимироваться различными механико-математическими моделями. *Модель упругоидеально пластического тела* (рис. 5.5) характеризуется определенной граничной величиной напряжений $\sigma_x = \sigma_p$, называемой пределом текучести при чистом растяжении или сжатии, соответственно $\tau_{xy} = \tau_p$ – пределом текучести при чистом сдвиге. До этого предела материал является линейно-упругим, а после его достижения он деформируется при постоянном напряжении, т. е. течет пластически. При разгрузке (уменьшении нагрузки) тело обладает линейно-упругим поведением с модулем упругости, равным начальному, и, кроме того, возникает остаточная деформация. При повторном нагружении материал снова деформируется упруго до достижения предшествующего предела текучести, после чего снова начинает пластически течь.

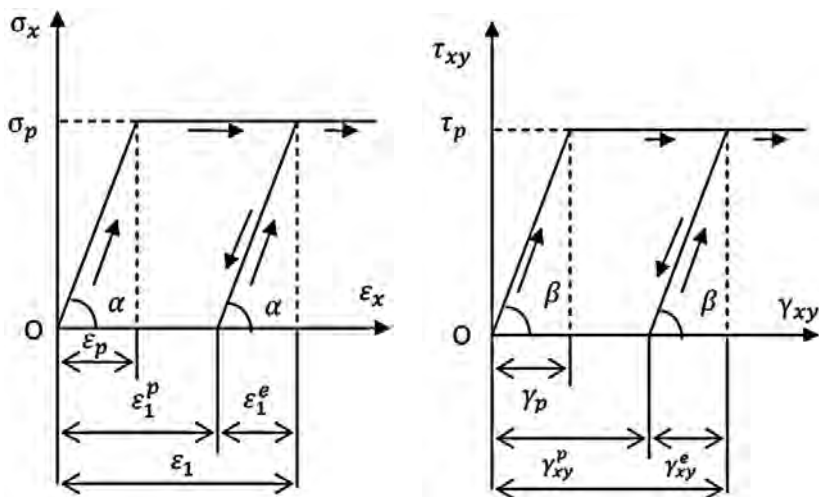


Рис. 5.5. Модель упругоидеально пластического тела

Материал *модели упругопластического тела с линейным упрочнением* (рис. 5.6) также деформируется упруго до достижения предела текучести. При превышении этого предела при нагружении (увеличении нагрузки) связь между напряжениями и деформациями

также будет линейной, но с другим угловым коэффициентом. При разгрузке материал является линейно-упругим с образованием остаточных деформаций. При повторном нагружении материал будет деформироваться линейно-упруго до достижения напряжения, с которого началась разгрузка. Это напряжение играет роль нового предела текучести, превышающего первоначальный, вследствие чего мы считаем, что материал получил пластическое упрочнение. Если продолжить нагружение, то связь между напряжениями и деформациями будет следовать первоначальной линейной зависимости. Поэтому и говорят, что упрочнение является линейным.

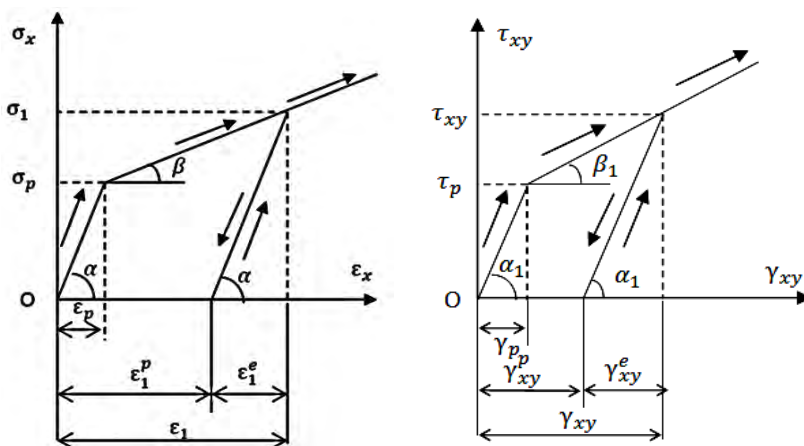


Рис. 5.6. Модель упругопластического тела с линейным упрочнением

Модель упругопластического тела с нелинейным упрочнением (рис. 5.7) обладает свойствами, подобными свойствам предыдущей модели. В обоих случаях материал характеризуется двумя различными зависимостями между напряжениями и деформациями при нагружении и разгрузке. Отличие от предшествующей модели состоит в том, что при превышении предела текучести связь между напряжениями и деформациями является нелинейной, т. е. материал упрочняется нелинейно.

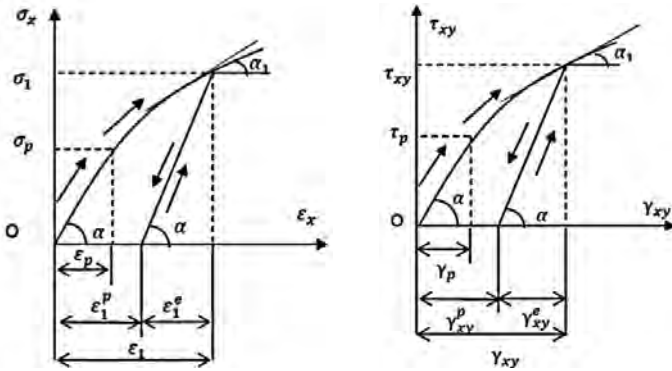


Рис. 5.7. Модели уругопластического тела с нелинейным упрочнением

Модель нелинейно-уругопластического тела. В случае модели нелинейно-уругопластического тела (рис. 5.8) предел текучести отсутствует, и пластические деформации возникают с самого начала нагружения. При нагружении связь между напряжениями и деформациями является нелинейной, и материал упрочняется нелинейно. Разгрузка дает линейно-уругую зависимость между напряжениями и деформациями с наклоном, равным наклону касательной в начальной точке к кривой $\sigma_x(\epsilon_x)$ (соответственно $\tau_{xy}(\gamma_{xy})$). При повторном нагружении пластические деформации начинаются после достижения напряжений, при которых началась разгрузка.

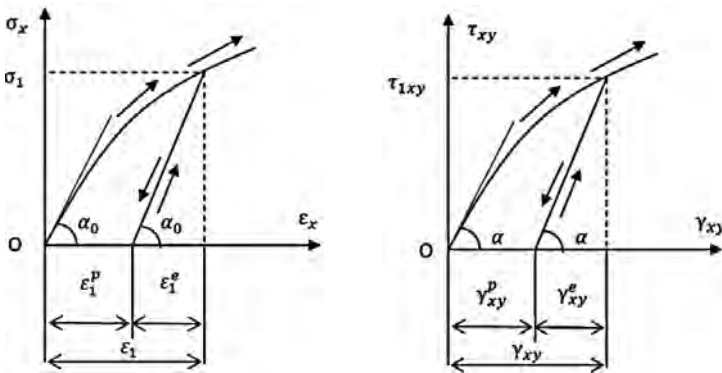


Рис. 5.8. Модели нелинейно-уругопластического тела

Если пластические деформации тела достаточно развиты и в значительной степени превышают упругие, то последними можно пренебречь и пользоваться моделями жесткопластических тел (рис. 5.9–5.11).

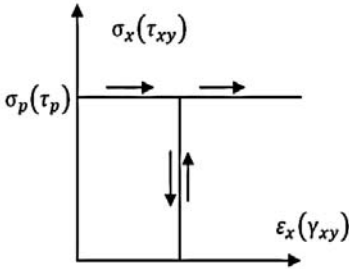


Рис. 5.9. Жесткоидеально пластическое тело

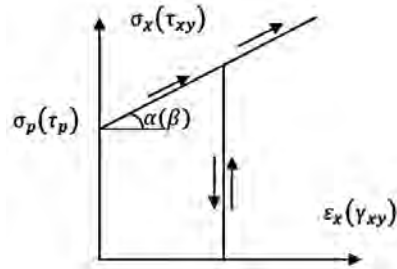


Рис. 5.10. Жесткопластическое тело с линейным упрочнением

Модель нелинейно-упругопластического тела может обладать и нелинейной пластической разгрузкой (рис. 5.12).

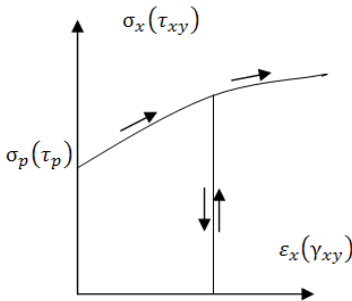


Рис. 5.11. Жесткопластическое тело с нелинейным упрочнением

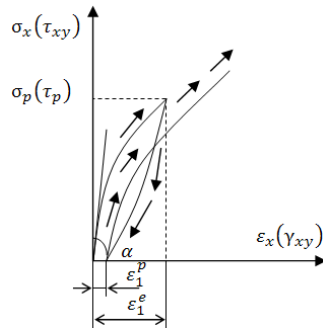


Рис. 5.12. Уругопластическое тело с нелинейным разгрузением

Если материалы обладают более сложными пластическими свойствами, можно пользоваться некоторыми модификациями указанных выше моделей. Так, например, в случае разносопротивляющихся материалов, имеющих различные модули упругости и пределы текучести при растяжении и сжатии, используются модели с идеализированными диаграммами типа диаграммы, представленной на рис. 5.13.

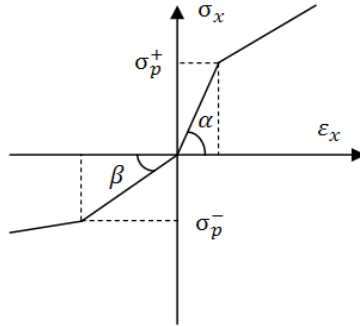


Рис. 5.13. Разнопрочные упругопластичные твердые тела

Задания для лабораторной работы № 5

1. Материал некоторого упругопластического тела деформируется. Известно, что упрочнения материала не происходит – механико-математическая модель упругоидеально пластического (модель Прандтля). Требуется изобразить графически идеализованную диаграмму деформирования для данного тела. Необходимо указать определяющие зависимости (закон деформирования), обозначить и подписать различные участки диаграммы с последующей краткой характеристикой процессов, происходящих на каждом из них как при нагружении, так и при разгрузке. Сформулировать и предложить связь деформаций и напряжений для рассматриваемого случая.

2. Упругопластическое твердого тела деформируется. Известно, что упрочнение имеет место и задается линейно (механико-математическая модель упругопластического тела с линейным упрочнением). Требуется изобразить графически идеализованную диаграмму деформирования данного тела. Необходимо указать определяющие зависимости (закон деформирования), обозначить и подписать различные участки диаграммы с последующей краткой характеристикой процессов, происходящих на каждом из них как при нагружении, так и при разгрузке. Сформулировать и предложить связь деформаций и напряжений для рассматриваемого случая.

3. Материал некоторого упругопластического тела деформируется. Известно, что упрочнение имеет место и задается по нелинейному закону (механико-математическая модель упругопластическо-

го тела с нелинейным упрочнением). Требуется изобразить графически идеализированную диаграмму деформирования данного тела. Необходимо указать определяющие зависимости (закон деформирования), обозначить и подписать различные участки диаграммы с последующей краткой характеристикой процессов, происходящих на каждом из них как при нагружении, так и при разгрузке. Сформулировать и предложить связь деформаций и напряжений для рассматриваемого случая.

4. Рассмотреть модель нелинейно-упругопластического тела в процессе деформирования (растяжение/сжатие). Считая, что упрочнение материала имеет место (механико-математическая модель нелинейно-упругопластического тела). Требуется изобразить графически идеализированную диаграмму деформирования данного тела. Необходимо указать определяющие зависимости (закон деформирования), обозначить и подписать различные участки диаграммы с последующей краткой характеристикой процессов, происходящих на каждом из них как при нагружении, так и при разгрузке. Сформулировать и предложить связь деформаций и напряжений для рассматриваемого случая.

5. Для некоторой модели жесткопластического тела, считая, что упрочнение материала не происходит (механико-математическая модель жестко-идеально-пластического тела), требуется изобразить графически идеализированную диаграмму деформирования твердого тела при растяжении/сжатии. Необходимо указать определяющие зависимости (закон деформирования), обозначить и подписать различные участки диаграммы с последующей краткой характеристикой процессов, происходящих на каждом из них как при нагружении, так и при разгрузке. Сформулировать и предложить связь деформаций и напряжений для рассматриваемого случая.

6. Материал некоторой модели жесткопластического тела деформируется. Известно, что упрочнение материала имеет место и задается линейно (механико-математическая модель жесткопластического тела с линейным упрочнением). Требуется изобразить графически идеализированную диаграмму деформирования данного тела. Необходимо указать определяющие зависимости (закон деформирования), обозначить и подписать различные участки диаграммы с последующей краткой характеристикой процессов, происходящих на каждом из них как при нагружении, так и при раз-

грузке. Сформулировать и предложить связь деформаций и напряжений для рассматриваемого случая.

7. Для некоторого жесткопластического твердого тела, считая, что упрочнение материала имеет место и задается нелинейно (механико-математическая модель жесткопластического тела с нелинейным упрочнением), требуется изобразить графически идеализированную диаграмму деформирования при растяжении/сжатии. Необходимо указать определяющие зависимости (закон деформирования), обозначить и подписать различные участки диаграммы с последующей краткой характеристикой процессов, происходящих на каждом из них (как при нагружении, так и при разгрузке). Сформулировать и предложить связь деформаций и напряжений для рассматриваемого случая.

8. Материал некоторого упругопластического тела деформируется. Известно, что упрочнение материала имеет место и задается нелинейно, вдобавок тело обладает нелинейной пластической разгрузкой (механико-математическая модель нелинейного упругопластического тела с нелинейным разгрузением). Требуется изобразить графически идеализированную диаграмму деформирования данного тела. Необходимо указать определяющие зависимости (закон деформирования), обозначить и подписать различные участки диаграммы с последующей краткой характеристикой процессов, происходящих на каждом из них (как при нагружении, так и при разгрузке). Сформулировать и предложить связь деформаций и напряжений для рассматриваемого случая.

9. Материал твердого упругого тела деформируется линейно (механико-математическая модель линейно-упругого тела). Требуется изобразить графически идеализированную диаграмму деформирования данного тела как при растяжении/сжатии, так и при кручении. Необходимо указать определяющие зависимости (закон деформирования), обозначить и подписать различные участки диаграммы с последующей краткой характеристикой процессов, происходящих на каждом из них (как при нагружении, так и при разгрузке). Сформулировать и предложить связь деформаций и напряжений.

10. Материал некоторой модели упругого тела деформируется нелинейно (механико-математическая модель нелинейно-упругого тела). Требуется изобразить графически идеализированную диаграмму деформирования данного тела как при растяжении/сжатии, так и при

кручении. Необходимо указать определяющие зависимости (закон деформирования), обозначить и подписать различные участки диаграммы с последующей краткой характеристикой процессов, происходящих на каждом из них (как при нагружении, так и при разгрузке). Сформулировать и предложить связь деформаций и напряжений.

11. Вывести определяющие зависимости, связывающие действительное и условное напряжения, а также обычную деформацию при одноосном растяжении, не используя предположение о несжимаемости материала и принимая, что объемная деформация прямо пропорциональна среднему (гидростатическому) условному напряжению. Считать, что коэффициент пропорциональности тот же, что и в пределах упругости.

12. Вывести уравнения диаграммы деформирования, если диаграмма растяжения материала имеет площадку текучести и линейное упрочнение.

13. Вывести уравнения диаграммы сдвига, если диаграмма растяжения материала имеет площадку текучести и линейное упрочнение.

14. Вывести уравнения диаграммы деформирования, если диаграмма растяжения материала имеет площадку текучести и степенное упрочнение. Применять модуль упругости E , модуль упрочнения E_T , предел текучести σ_T , деформация, соответствующая концу площадки текучести ε_{T^*} , коэффициент Пуассона ν . Принять, что уравнение диаграммы растяжения при $\varepsilon \geq \varepsilon_{T^*}$, $\sigma = \sigma_T \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{T^*}} \right)^m$.

15. Вывести формулы, позволяющие построить диаграмму сдвига по диаграмме растяжения.

16. Как известно, условным пределом текучести при одноосном растяжении называется напряжение, при котором остаточная деформация равна 0,2 % ($\varepsilon = 0,002$). Определить остаточную деформацию для предела текучести при сдвиге.

Задачи для самостоятельной практической работы

1. Используя теорию малых упругопластических деформаций и теорию течения, определить напряжения, возникающие в растянутой и скрученной тонкостенной трубке при нагружении ее по путям диаграмм следующих механико-математических моделей: а) упругоидеально пластического тела; б) упругопластического тела с ли-

нейным упрочнением; в) упругопластического тела с нелинейным упрочнением. Сопоставить напряжения по указанным теориям.

2. Используя теорию малых упругопластических деформаций и теорию течения, определить напряжения, возникающие в тонкостенной трубке с днищами, нагруженной внутренним давлением p и крутящим моментом T при деформировании ее. Сопоставить напряжения по указанным теориям. Принять, что материал несжимаем и не имеет упрочнения.

3. При испытании стального цилиндрического образца диаметром $d_0 = 6$ мм измерены радиус кривизны контура шейки в точке наименьшего поперечного сечения $R = 1,52$ мм и диаметр этого сечения $d_1 = 2r_1 = 3,24$ мм. Определить интенсивность деформаций, отношение интенсивности напряжений к среднему осевому напряжению, а также отношение осевого напряжения в центре поперечного сечения к осевому напряжению в точках контура и радиальному (окружному) напряжению в центре.

4. Стержень АВ постоянного поперечного сечения А длиной l нагружен в сечении С на расстоянии $2 \cdot l/5$ от верхнего торца силой F . Верхний А и нижний В торцы стержня закреплены неподвижно. Диаграмма растяжения (сжатия) материала схематизирована в виде диаграммы идеального упругопластического тела. Определить силу F_T , при которой начинается образование пластических деформаций, предельную силу $F_{пр}$, при которой исчерпывается несущая способность стержня, остаточные напряжения после нагружения стержня силой $F^* = (F_T + F_{пр})/2$ разгрузки. Построить график зависимости силы F от перемещения сечения и определить остаточное перемещение этого сечения после нагружения стержней силой F и разгрузки.

5. Круглый чугунный стержень с закрепленными концами нагружен силой F , действующей вдоль его оси и приложенной в среднем сечении. Определить силу, разрушающую стержень, если его диаметр $d = 4$ см.

6. Три стержня одинаковой длины и одинаковой площади поперечного сечения нагружены с помощью абсолютно жесткой плиты силой F . Диаграмма растяжения материала стержней схематизирована в виде диаграммы идеального упругопластического тела. Определить силу F_T , при которой начинается образование пластических деформаций, предельную силу $F_{пр}$, при которой исчерпывается несущая способность конструкции, остаточные напряжения,

возникающие после нагружения стержней силой $F^* = (F_T + F_{np})/2$ разгрузки. Построить график зависимости силы F от перемещения точки ее приложения δ . Определить положение плиты после нагружения ее силой F^* и последующей разгрузки.

7. Толстостенная цилиндрическая труба, внутренний и наружный радиусы которой r_1 и r_2 соответственно, нагружена осевой силой N , внутренним p_1 и наружным p_2 давлениями. Материал несжимаем, упрочнение линейное. Вывести формулы для напряжений, осевой силы и радиального перемещения, если осевая деформация $\varepsilon_z = 0$. При решении использовать теорию малых упругопластических деформаций и условие пластичности Хубера-Мизеса. Определить значение внутреннего давления, если $p_1/p_2 = 2$; $r_2/r_1 = 2$; отношение радиуса границы пластической области к внутреннему радиусу $r_2/r_1 = 1,4$; отношение модуля упрочнения к модулю упругости $E_T/E = 0,1$; предел текучести материала $\sigma_T = 800$ МПа. Для найденного давления построить эпюры напряжений.

8. Толстостенная цилиндрическая труба нагружена осевой силой N и внутренним давлением p . Осевая деформация $\varepsilon_z = 0$. Материал несжимаем, упрочнение степенное. Вывести формулы для напряжений и радиального перемещения, используя теорию малых упругопластических деформаций и условие пластичности Хубера-Мизеса. Установить зависимость перемещения точек внутренней поверхности u_1 от давления p . Определить давление p^* , при котором пластические деформации возникают во всех точках трубы. Отношение наружного радиуса трубы к внутреннему $r_2/r_1 = 2$, $m = 0,2$.

9. Толстостенная труба, наружный радиус которой значительно больше внутреннего, нагружена осевой силой N и внутренним давлением p . Осевая деформация $\varepsilon_z = 0$. Материал несжимаем, упрочнение линейное. Вывести формулы для напряжений, используя теорию малых упругопластических деформаций и условие пластичности Хубера-Мизеса.

10. Толстостенная труба из несжимаемого упрочняющегося материала нагружена внутренним давлением и осевой силой. Осевая деформация равна нулю. Упрочнение аппроксимируется степенной функцией. Проанализировать влияние упругого участка при схематизации диаграмм деформирования на распределение напряжений по толщине трубы и на радиальное перемещение точек внутренней поверхности. Использовать теорию малых упругопластических де-

формаций и условие пластичности Хубера-Мизеса. Построить эпюру напряжений, если отношение радиуса к внутреннему $r_2/r_1 = 2$, $p = 300$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 400$ МПа, $m = 0,2$.

11. Толстостенная сфера нагружена внутренним и p_1 и p_2 давлениями. Материал несжимаем, упрочнение отсутствует. Вывести формулы для напряжений и радиального перемещения, использовать теорию малых упругопластических деформаций и условие пластичности Хубера-Мизеса. Определить соотношение между давлениями, при котором появляются пластические деформации и возникает предельное состояние, считая отношение наружного радиуса r_2 к внутреннему r_1 заданным.

12. Толстостенная сфера, внутренний и наружный радиусы которой r_1 и r_2 соответственно, нагружена внутренним давлением p . Материал несжимаем, упрочнение линейное. Вывести формулы для напряжений и радиального перемещения. Построить эпюру напряжений, если $r_2/r_1 = 2$, отношение радиуса границы пластической области к внутреннему радиусу $r_2/r_1 = 1,4$ и отношение модуля упрочнения к модулю упругости $E_T/E = 0,1$. Определить давление p^* , при котором пластическая область распространится на всю сферу.

13. Толстостенная сфера нагружена внешним давлением p . Материал несжимаем, диаграмма деформирования аппроксимирована степенной функцией. Вывести формулы для напряжений и радиального перемещения. В решении использовать теорию малых упругопластических деформаций и условие пластичности Хубера-Мизеса.

14. В сфере имеется сферическая полость, радиус которой значительно меньше размеров тела. Внутри полости создано давление p . Материал несжимаем, упрочнение описывается степенной функцией. Вывести формулы для напряжений и перемещений, используя теорию малых упругопластических деформаций и условие пластичности Хубера-Мизеса.

15. Неподвижный диск постоянной толщины нагружен по внешнему контуру равномерным давлением p . Материал несжимаем, упрочнение отсутствует. Вывести формулы для напряжений и радиального перемещения, используя теорию малых упругопластических деформаций и условие пластичности Хубера-Мизеса. Определить давление начала текучести p_T и предельное давление p_{np} , считая отношение наружного радиуса r_2 к внутреннему r_1 заданным.

Построить эпюры напряжений для диска с отношениями $r_2/r_1 = 3$, $r_T/r_1 = 2$, где r_T – радиус границы пластической области.

16. Получить решение предыдущей задачи с использованием условия пластичности Треска–Сен-Венана.

17. Диск постоянной толщины посажен с натягом на абсолютно жесткий вал. Материал не имеет упрочнения. Установить зависимость контактного давления от натяга. Построить график этой зависимости для несжимаемого и упругосжимаемого ($\nu = 0,3$) материалов. При решении использовать условие пластичности Треска–Сен-Венана и теорию малых упругопластических деформаций.

18. неподвижный диск постоянной толщины нагружен по внутреннему контуру давлением p . Материал диска несжимаем, упрочнение степенное. Вывести формулы для напряжений и радиального перемещения, используя теорию малых упругопластических деформаций и условие пластичности Хубера-Мизеса. Построить эпюры напряжений для $p = 0,9 \sigma_T$ и отношения наружного радиуса к внутреннему $r_2/r_1 = 2$.

19. Бесконечная пластина с отверстием растянута осесимметрично относительно центра отверстия. Материал пластины несжимаем, диаграмма деформирования аппроксимирована степенной функцией. Вывести формулы для напряжений, построить эпюры напряжений в окрестности отверстия для различных значений нагрузки. При решении использовать теорию малых упругопластических деформаций и условие пластичности Хубера-Мизеса.

20. Диск постоянной толщины с отношением радиусов $r_2/r_1 = 3$ посажен на абсолютно жесткий вал с относительным натягом, равным $3\sigma_T$. Материал диска несжимаем, упрочнение степенное. Определить контактное давление, используя теорию малых упругопластических деформаций и условие пластичности Хубера-Мизеса.

21. При испытании длинной тонкостенной цилиндрической оболочки с днищами, нагруженной внутренним давлением, в точке, далекой от днищ, измерена окружная деформация $\varepsilon_\theta = 10\sigma_T/E$. Отношение среднего диаметра к толщине стенки $D/h = 20$. Определить приложенное давление, если диаграмма деформирования материала имеет линейное упрочнение. Модуль упрочнения $E_T = E/10$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. *Указание:* для определения меридионального напряжения использовать зависимость окружной дефор-

мации от окружного напряжения по теории малых упругопластических деформаций: $\varepsilon_\theta - \varepsilon_0 = 3\varepsilon_i(\sigma_\theta - \sigma_0) / (2\sigma_i)$.

22. При испытании тонкостенной сферической оболочки с отношением среднего диаметра к толщине стенки $D/h = 20$, нагруженной внутренним давлением, измерена меридиональная (окружная) деформация, равная $10\sigma_T/E$. Определить приложенное давление, если диаграмма деформирования материала имеет линейное упрочнение. Модуль упрочнения $E_T = E/10$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

23. В растянутой силой F и скрученной моментом T за пределы упругости трубке диаметра D и толщиной стенки h были измерены меридиональная ε_m и окружная ε_i деформации, а также деформация ε_u в направлении под углом 45° к меридиану. Определить растягивающую силу и крутящий момент, если модуль упругости материала E , а коэффициент Пуассона ν . Показать, что для решения не нужна диаграмма растяжения материала.

24. Определить коэффициент запаса по несущей способности длинной тонкостенной цилиндрической оболочки с днищами. Средний диаметр оболочки D , толщина стенки h , длина l . Оболочка нагружена внутренним давлением. Принять степенную зависимость интенсивности действительных напряжений от интенсивности логарифмических деформаций $\sigma_i = a\bar{\varepsilon}_i^m$. Считать материал несжимаемым.

25. Используя теорию малых упругопластических деформаций и теорию течения, определить напряжения, возникающие в растянутой и скрученной тонкостенной трубке при нагружении ее по путям классической диаграммы. Сопоставить напряжения по указанным теориям. Принять, что материал трубки несжимаем, а диаграмма деформирования не имеет упрочнения.

26. неподвижный диск постоянной толщины нагружен по внутреннему контуру давлением p . Материал диска упруго сжимаем ($\nu \neq 0,5$), упрочнение степенное. Получить уравнения для решения задачи в форме, удобной для применения ЭВМ, используя теорию малых упругопластических деформаций и условие пластичности Хубера-Мизеса. Запрограммировать решение задачи в пакете MathCAD (MatLAB, Maple, Mathematics или других вычислительных программах).

Лабораторная работа № 6

ДЕФОРМАЦИОННОЕ УПРОЧНЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ЭФФЕКТ БАУШИНГЕРА

Цель: изучить эффект пластической анизотропии материала; определить остаточную пластическую деформацию при циклическом нагружении и анализ нелинейного поведения материала при циклическом нагружении; исследовать возможности применения мультилинейной кинематической аппроксимации нагружения для проведения нелинейного анализа; численное моделирование пластической деформации и деформационного упрочнения [5].

Основные теоретические сведения. Экспериментально установлено, что предел пропорциональности при сжатии предварительно пластически деформированного растяжением материала меньше, чем недеформированного. Таким образом, первичное пластическое деформирование материала снижает его сопротивление пластическому деформированию при повторной нагрузке (рис. 6.1). Это явление называется эффектом Баушингера (или так называемая пластическая анизотропия). Эффект Баушингера объясняется тем, что при малой пластической деформации растяжения одни зерна материала деформируются пластически, а другие упруго. В результате этого после разгрузки возникают остаточные силы взаимодействия между зернами. Так, некоторые из зерен оказываются в растянутом состоянии, а другие – в сжатом. При последующем сжатии пластические деформации возникают в первую очередь в ранее сжатых зернах. Этим и объясняется понижение предела текучести. Заметим, что аналогичные результаты были получены при испытании образцов на кручение сначала в одном, а потом и в противоположном направлении. Следуют подчеркнуть, что в результате больших пластических деформаций растяжения предел текучести при сжатии может и увеличиваться.

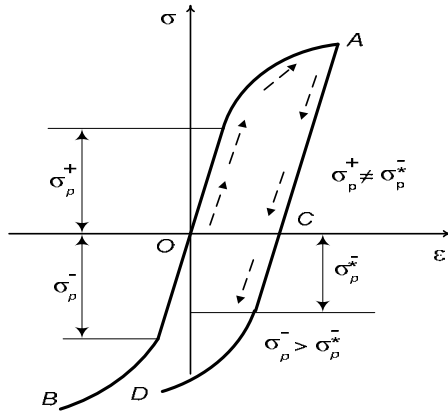


Рис. 6.1. Условные диаграммы первичного и вторичного растяжения и сжатия:
 OA – первичное растяжение; OB – первичное сжатие; AC – разгрузка;
 CD – вторичное сжатие

Для материалов, обладающих эффектом Баушингера, можно принять разнообразные другие идеализированные диаграммы (рис. 6.2) в зависимости от способа проявления этого эффекта. Изменение предела текучести можно представить различными аналитическими способами, принимая различные одноосные модели упругопластических тел, проявляющих анизотропное упрочнение (т. е. различное упрочнение в зависимости от предварительной пластической деформации). Согласно довольно общему случаю, рассмотренному в трудах Н. Н. Малинина, А. А. Ильюшина, Ю. Н. Работнова [1], если $\sigma_p^+ = \sigma_p^- = \sigma_p$ – начальный предел текучести, то вследствие предварительной пластической деформации растяжения ε^p предел текучести при сжатии выразится формулой

$$(\sigma_p^-)_1 = A_a(\varepsilon^p) \left[\sigma_p - B_p(\varepsilon^p) \right],$$

где $A_a(\varepsilon^p)$ и $B_a(\varepsilon^p)$ – однозначно определяемые из эксперимента функции предварительной пластической деформации ε^p .

В частном случае можно принять, что

$$A_a = 1, B_a(\varepsilon^p) = C_a, C_a = \text{const},$$

тогда

$$(\sigma_p)_1 = \sigma_p - C_a \varepsilon_p.$$

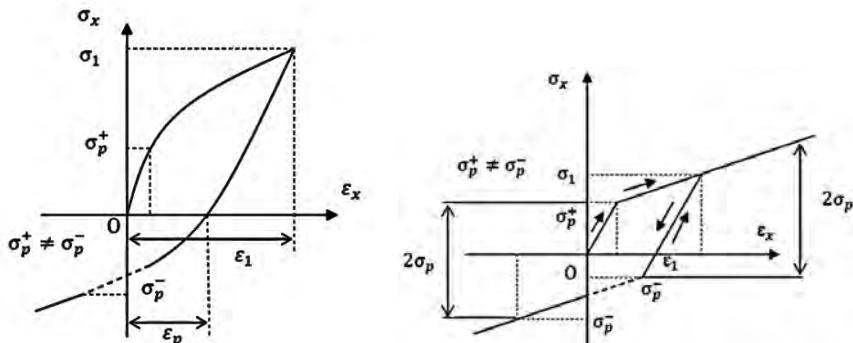


Рис. 6.2. Эффект Баушингера

Консервативное и неконсервативное поведение конструкции. Система называется *неконсервативной*, если энергия, сообщенная системе внешней нагрузкой системой, рассеивается, что происходит, например, при пластической деформации, когда энергия внешней силы расходуется на движение дислокаций и, как следствие, на изменение геометрической формы. На рис. 6.3 схематически показано поведение неконсервативной системы: удлинение, обусловленное остаточной деформацией в результате пластического течения. Если после снятия нагрузки энергия системы восстанавливается до первоначального уровня, система называется *консервативной*. Анализ консервативных систем не зависит от траектории; последовательность приложения нагрузок и количество приращений (шагов) не влияют на результат вычислений. Анализ неконсервативных систем зависит от траектории; точность расчетов определяется аппроксимацией нелинейного параметра линейными участками и требует увеличенного числа ступеней (временных шагов) на каждом шаге разбиения.

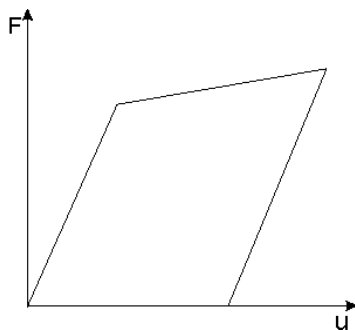


Рис. 6.3. Неконсервативное поведение системы при пластической деформации

Моделирование пластической деформации и деформационного упрочнения материалов. Нелинейное поведение материалов может привести к изменению жесткости конструкции под действием приложенной нагрузки. Так, нелинейная зависимость деформации от напряжения для пластичных и сверхэластичных материалов заставляет конструкцию различным образом реагировать на внешние силы; уровень остаточной деформации определяется величиной приложенных сил и температурным режимом. Нелинейные эффекты, вызванные ползучестью и вязкопластичным поведением материалов, могут зависеть от времени и скорости нагружения, температурного режима и величины нагрузки. Радиационное распухание материалов под действием частиц деформирует конструкцию, причем величина деформации является функцией температуры, потока нейтронов и величины приложенных сил. Как было сказано выше, в большинстве случаев поведение металлов под действием приложенных сил описывается деформационной кривой, на которой можно выделить несколько характерных точек и участков: 1) до предела пропорциональности деформация металла подчиняется линейному закону; 2) до предела упругости величина остаточной деформации пренебрежимо мала, и поведение металла мало отличается от линейного; 3) выше предела упругости и до предела текучести металл деформируется нелинейно; 4) увеличение внешней нагрузки свыше предела текучести и вплоть до предела прочности приводит к интенсивному пластическому деформированию, которое характеризуется накоплением остаточной деформации; данный процесс является неконсервативным и должен подвергаться нелинейному анализу.

Пластическое течение материалов может быть аппроксимировано одним из следующих способов.

Билинейное нагружение. Билинейное нагружение отражает обычное нагружение металлических конструкций и предполагает, что деформационная кривая в истинных координатах «напряжение (σ) – логарифм деформации» ($\varepsilon = \ln(l/l_0)$) состоит из двух линейных участков с одной критической точкой пересечения, соответствующей пределу текучести. Данный способ аппроксимации позволяет учитывать эффект Баушингера и применим для относительно небольших деформаций, когда поведение металла контролируется критерием пластичности фон Мизеса. Кривая деформации при билинейном нагружении представлена на рис. 6.4. Эффект Баушингера, описывающий циклическое билинейное нагружение металла, представлен на рис. 6.5. Билинейное нагружение не способно моделировать большую пластическую деформацию.

Мультилинейное нагружение. Мультилинейное нагружение (рис. 4, б) описывается моделью Бесселинга, представляет деформационную кривую в виде нескольких линейных участков и учитывает эффект Баушингера; данный способ не применим для большой пластической деформации.

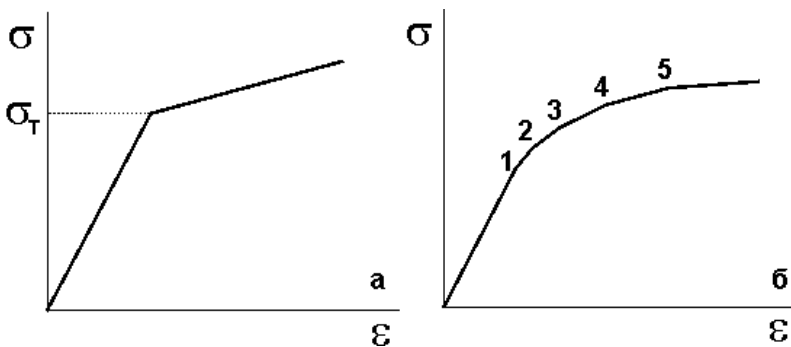


Рис. 6.4. Билинейное (а) и мультилинейное (б) нагружение

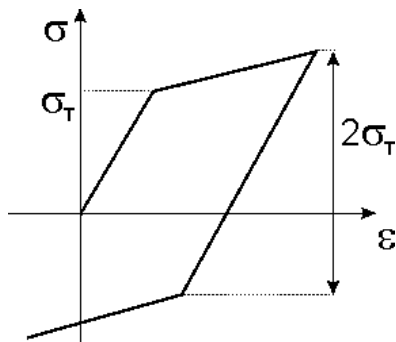


Рис. 6.5. Циклическое билинейное нагружение, учитывающее эффект Баушингера

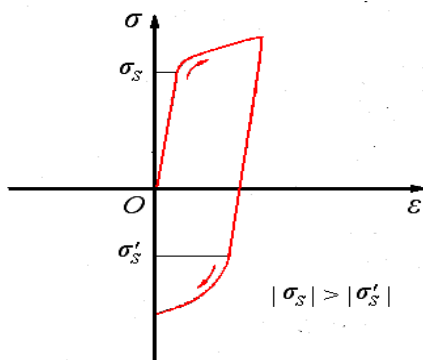


Рис. 6.6. Классическая кривая деформации растяжения–сжатия, которая характеризует эффект Баушингера

Нелинейное нагружение. Нелинейное нагружение моделирует большие пластические деформации, циклическое нагружение; учитывает ударные эффекты; является суперпозицией нескольких билинейных и мультилинейных нагружений, которые включаются в расчет в зависимости, например, от температуры нагружения.

Изотропное нагружение. Изотропное нагружение может быть линейным, мультилинейным или нелинейным, исходя из аппроксимации деформационной кривой, но используется в расчетах при условии изотропности материала. Данный способ применяется для анализа больших пластических деформаций.

Анизотропное нагружение моделирует поведение металлов, в которых предварительной деформационной обработкой, например прокаткой или волочением, была создана преимущественная кристаллографическая ориентация кристаллитов (текстура). Данный способ позволяет учесть различное билинейное поведение в трех направлениях координатных осей и отдельно задать развитие в этих направлениях сжатия, удлинения и сдвига, но не дает точных результатов при циклическом или ярко выраженном нелинейном нагружении.

Отметим, что в настоящее время нелинейные задачи эффективно решаются итерационным методом Ньютона-Рафсона, который предполагает приближенное разбиение нагрузки на несколько последовательных приращений. Применение этого метода для равновесных итераций в случае двух приращений нагрузки и одной степени свободы показано на рис. 6.7 (нелинейная нагрузка с одной степенью свободы аппроксимируется двумя линейными приращениями).

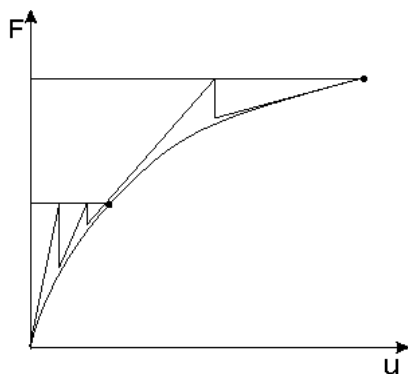


Рис. 6.7. Применение итерационного метода Ньютона-Рафсона для нелинейного анализа

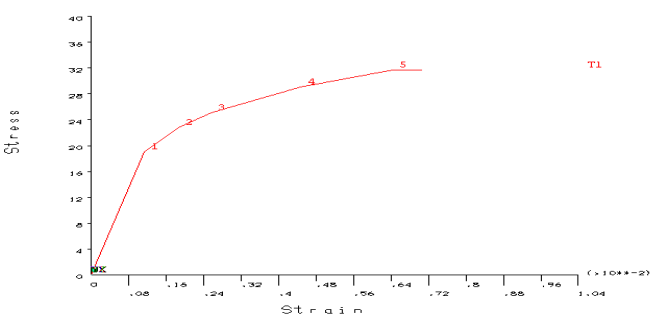
Таким образом, исходная нелинейная задача сводится к линейной, а точность решения определяется следующими параметрами: 1) количеством шагов (приращений); каждый шаг в отдельности представляет собой линейное нагружение конструкции; 2) количеством ступеней (или временных шагов); каждый шаг нагружения разбивается на ступени с целью более точной аппроксимации; 3) количеством равновесных итераций; на каждой ступени данный параметр обеспечивает сходимость решения.


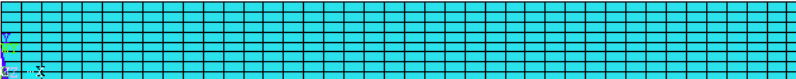
Задание. Для различных вариантов деформируемых твердых тел (см. табл. 1.1 из лабораторной работы № 1) необходимо определить накопленную остаточную деформацию. Провести анализ остаточной пластической деформации при циклическом нагружении с помощью средств виртуального моделирования ANSYS. Считать, что деформационная кривая в истинных координатах известна и задана.

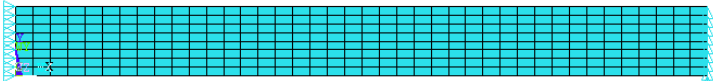
Пример. На поверхность круглой пластинки толщиной 0,1 м и радиусом 1,0 м действует постоянное давление, а к центру круга приложена сила, направленная по нормали к поверхности, имеющая нулевое значение в начальный момент времени и затем меняющая в нескольких циклах линейно величину от максимального положительного значения до минимального отрицательного. Следует определить накопленную остаточную деформацию.

Проведем анализ остаточной пластической деформации при циклическом нагружении с помощью средств виртуального моделирования ANSYS 5.7 [2]. Последовательность решения и основные этапы процедуры численного моделирования напряженно-деформированного состояния конструкции представлены ниже.

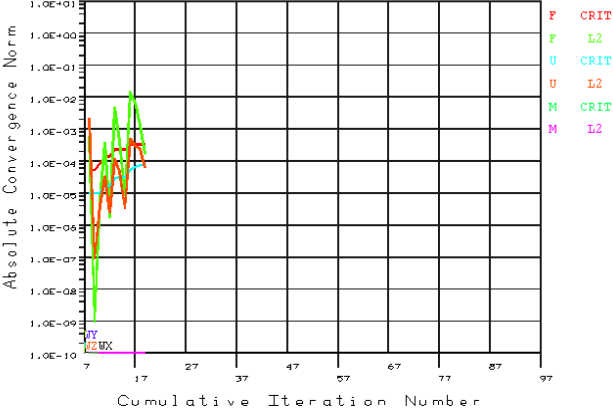

#	Описание команды	Путь выполнения команды
1	Начать работу в препроцессоре Присвоить значения параметру, введенному пользователем; radius – название параметра (радиус диска); 1,0 – величина параметра	Набрать в командной строке > radius = 1,0 > Enter >
2	Присвоить значения параметру, введенному пользователем; thick – название параметра (толщина диска); 0,1 – величина параметра	thick = 0,1 > Enter
3	Выбрать из библиотеки тип элемента; 1 – номер типа элемента; plane42 – название элемента в библиотеке; система координат элемента параллельна глобальной системе координат; добавить внешние смещения; 1 – осесимметричный	Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete [Add > Structural > Solid > > Quad 4node 42 > OK > Options > Element behavior > Axisymmetric > OK > Close]
4	Задать свойство материала: ex – модуль Юнга; 1 – номер материала; 16911.23 – величина модуля Юнга	Main Menu > Preprocessor > Material Props [Constant > Isotropic > 1 > OK > Young's modulus EX > 16911.23 >
5	Задать свойство материала: пуху – коэффициент Пуассона; 1 – номер материала; 0,3 – величина коэффициента Пуассона	Poisson's ratio NUXY > 0,3 > OK]


6	<p>Активировать таблицу данных, содержащую нелинейные свойства материала: kinh – характер поведения материала: пластичность при мультилинейном кинематическом упрочнении; 1 – номер материала; 1 – количество значений температуры, при которых следует применить таблицу данных; 5 – количество точек на кривой (или позиций в таблице данных) для каждой температуры</p>	Main Menu > Preprocessor> Material Props> Data Tables> Define/Activate [Type of data table> Kin Harden KINH> Material ref. Number> 1> No of temperatures> 1> No of data points/temp> 5> OK]
7	<p>Задать точку на кривой напряжение-деформация: задать новую точку; 0.001123514 – величина деформации; 19.00 – величина напряжения</p>	Main Menu> Preprocessor> Material Props> Data Tables> Edit Active [1> Strain > 0.001123514> Stress> 19.00>
8	<p>Всего необходимо задать на кривой напряжение-деформация 5 точек: 2> Strain> 0.001865643> Stress> 22.80> 3> Strain> 0.002562402> Stress> 25.08> 4> Strain> 0.004471788> Stress> 29.07> 5> Strain> 0.006422389> Stress> 31.73>File> Apply/Quit</p>	
9	<p>Дать название оси на графике: X – применить название к оси X; Strain – название оси (деформация)</p>	Utility Menu> PlotCtrls> Style> Graphs> Modify Axes [X-axis label> Strain>
10	<p>Дать название оси на графике: Y – применить название к оси Y; Stress – название оси (напряжение)</p>	Y-axis label> Stress> OK]
11	<p>Показать на экране введенные данные (деформационную кривую) в виде графика: kinh – тип таблицы данных; 1 – номер материала</p>	Main Menu> Preprocessor> Material Props> Data Tables> Graph [OK]
12	<div style="text-align: right; font-weight: bold; color: blue;">ANSYS</div>  <p style="text-align: center;">Рис. 6.8. Контрольный просмотр введенной нелинейной зависимости деформации от приложенной нагрузки</p>	
13	<p>Создать прямоугольную область в рабочей плоскости: первая координата X равна 0; radius - вторая координата X равна параметру radius, заданному ранее; первая координата Y равна 0; thick – вторая координата Y равна параметру thick, заданному ранее</p>	Main Menu> Preprocessor> Create> Rectangle> By Dimensions [X-coordinates> 0> radius> Y-coordinates> 0> thick> OK]

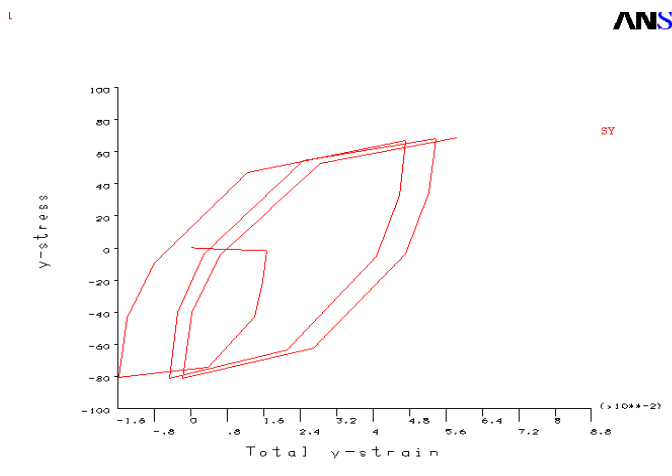
14		
	Рис. 6.9. Результат построения геометрии (объемная задача сводится к плоской)	
15	Задать данные, необходимые для следующей операции выбора <code>fitem</code> : 5 – количество аргументов команды; 2 – количество позиций в списке линий; 4 – количество линий; <code>orde</code> – важность последовательность выбора линий; 2 – разрядность количества линий	Utility Menu> PlotCtrls> Numbering> Line numbers> ON Utility Menu> Plot> Lines Main Menu> Preprocessor> Mesh Tool [Size Controls> Lines> Set>
16	Обозначить объекты для выбора; 5 – количество аргументов команды; 2 – количество объектов для выбора	Выбрать линию 2 >
17	Обозначить объекты для выбора; 5 – количество аргументов команды; 4 – количество объектов для выбора	Выбрать линию 4>
18	Сгруппировать геометрические объекты; <code>_y</code> – название группы; <code>line</code> – тип сгруппированных геометрических объектов – линий	Picking Menu> OK>
19	Выбрать линии; <code>,,,</code> – по умолчанию – новый выбор линий	No of element divisions> 8> OK>
20	Задать данные, необходимые для следующей операции выбора <code>fitem</code>	Size Controls> Lines> Set>
21	Обозначить объекты для выбора; 1 – количество объектов для выбора	Выбрать линию 1 >
22	Обозначить объекты для выбора 3 – количество объектов для выбора	Выбрать линию 3 >
23	Сгруппировать геометрические объекты	Picking Menu> OK>
24	Выбрать линии	No of element divisions> 40> OK>
25	Сгруппировать геометрические объекты	Mesh Tool> Quad> Mapped> Mesh>
26	Сгенерировать плоскую сетку; <code>all</code> – выбрать все поверхности	Mesh area> Pick all> Mesh Tool> Close]
27		
	Рис. 6.10. Результат генерации сетки	
28	Закончить работу в препроцессоре	
29	Начать работу в процессоре	
30	Учесть эффекты большой пластической деформации в статическом или полном переходном анализе; <code>on</code> – включить	Main Menu> Solution> Analysis Options [Large deform effects> ON> OK]
31	Присвоить значения параметру, введенному пользователем; <code>ntop</code> – название параметра; <code>node(0,thick,0)</code> – координаты узла	Utility Menu> Parameters> Scalar Parameters [Selection> ntop = node(0,thick,0) > Accept>

32	Присвоить значения параметру, введенному пользователем; nright – название параметра; node(radius,0,0) – координаты узла	Selection> nright = node(radius,0,0) > Accept> Close]
33	Записать в контрольный файл file.mntr значения переменных при решении нелинейной задачи; 1 – номер переменной; ntop – узел; uy – записать значения переменной смещения по оси y	Main Menu> Solution> Nonlinear> Monitor [Ввести в командной строке> ntop> Enter> Monitor> OK> Quantity to be monitored> UY> OK]
34	Записать в контрольный файл file.mntr значения переменных при решении нелинейной задачи; 2 – номер переменной; nright – узел; fy – записать значения переменной составляющей напряжения вдоль оси y	Main Menu> Solution> Nonlinear> Monitor [Ввести в командной строке> nright > Enter> Monitor> OK> Variable to redefine> Variable 2> Quantity to be monitored> FY> OK]
35	Контролировать расчетные результаты, записываемые в базу данных; all – значения всех расчетных параметров; all - для всех шагов решения	Main Menu> Solution> Load Step Opts> Output Ctrl> DB/Results File [Item to be controlled> All items> File write frequency> Every substep> OK]
36	Выбрать узлы; s – новый выбор; loc – координата в активной системе; x – координата x; radius – значение координаты x выбираемых узлов	Utility Menu> Select> Entities [Nodes> By Location> X coordinates> Min,Max> radius> OK]
37	Задать ограничения свободы в узлах; all – во всех выбранных узлах; all – присвоить нулевые значения всем возможным смещениям	Main Menu> Solution> Loads> Apply> Structural> Displacement> On Nodes [Pick all> DOFs to be constrained> All DOF> OK]
38	Выбрать узлы; s – новый выбор; loc – координата в активной системе координат; x – координата x; 0,0 – значение координаты	Utility Menu> Select> Entities [Nodes> By Location> X coordinates> Min,Max> 0> OK]
39	Задать ограничения свободы в узлах; all – во всех выбранных узлах; ux – ограничить смещение по оси x; 0-0 – нулевое смещение по оси x	Main Menu> Solution> Loads> Apply> Structural> Displacement> On Nodes [Pick all> DOFs to be constrained> UX> 0> OK]
		
<p>Рис. 6.11. Ограничение степеней свободы (запрещены смещения узлов левого края вдоль оси x и все смещения узлов правого края)</p>		
40	Выбрать узлы; s – новый выбор; loc – координата в активной системе координат; y – координата y; thick – значение координаты	Utility Menu> Select> Entities [Nodes> By Location> Y coordinates> Min,Max> thick> OK]

41	Задать поверхностное нагружение в узлах; all – во всех выбранных узлах; pres – давление; 1,25 – величина давления	Main Menu> Solution> Loads> Apply> Structural> Pressure> On Nodes [Pick all]> Load Pres value> 1,25> OK]
42	Выбрать все геометрические объекты	Utility Menu> Select> Everything
43	Задать число подшагов на первом шаге нагружения; 10 – число подшагов на данном шаге нагружения; 50 – максимальное число подшагов; 5 – минимальное число подшагов	Main Menu> Solution> Load Step Opts> Time/Frequenc> Time and Substeps [Number of substeps> 10> Maximum No of substeps> 50> Minimum No of substeps> 5> OK]
44	Начать вычисления	Main Menu> Solution> Solve> Current LS> OK
45	Присвоить значения параметру, введенному пользователем; f – название параметра; 0,0425 – величина параметра	Utility Menu> Parameters> Scalar Parameters [Selection> f = 0,0425 > Accept> Close]
46	Выбрать узлы; s – новый выбор; node – узел; ,, – компонента здесь не требуется; ntop – координаты узла, заданы выше	Main Menu> Solution> Loads> Apply> Structural> Force/Moment> On Nodes [Ввести в командной строке: ntop> Enter> OK
47	Задать силы, приложенные в узлах; all – во всех выбранных узлах; fy – сила, направленная вдоль оси y; f – величина приложенной силы, задана выше	Direction of Force/mom> FY> Force/moment value> - f> OK]
48	Выбрать узлы; all – все узлы	Utility Menu> Select> Entities [Nodes> By Num/Pick> Reselect> OK> Pick all]
49	Задать число подшагов на данном шаге нагружения; 4 – число подшагов на данном шаге нагружения; 25 – максимальное число подшагов; 2 – минимальное число подшагов	Main Menu> Solution> Load Step Opts> Time/Frequenc> Time and Substeps [Number of substeps> 4> Maximum No of substeps> 25> Minimum No of substeps> 2> OK]
50	Начать вычисления	Main Menu> Solution> Solve> Current LS> OK
51	Выбрать узлы; s – новый выбор; node – узел; ,, – компонента здесь не требуется; ntop – координаты узла, заданы выше	Main Menu> Solution> Loads> Apply> Structural> Force/Moment> On Nodes [Ввести в командной строке: ntop> Enter> OK
52	Задать силы, приложенные в узлах; all – во всех выбранных узлах; fy – сила, направленная вдоль оси y; f – величина приложенной силы, задана выше	Direction of Force/mom> FY> Force/moment value> f> OK]
53	Выбрать узлы; all – все узлы	Utility Menu> Select> Entities [Nodes> By Num/Pick> Reselect> OK> Pick all]
54	Задать число подшагов на данном шаге нагружения; 4 – число подшагов на данном шаге нагружения; 25 – максимальное число подшагов; 2 – минимальное число подшагов	Main Menu> Solution> Load Step Opts> Time/Frequenc> Time and Substeps [Number of substeps> 4> Maximum No of substeps> 25> Minimum No of substeps> 2> OK]

55	Начать вычисления	Main Menu> Solution> Solve> Current LS> OK
<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;">ANSYS</div> <div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">Time = 2</div>  <p style="text-align: center;">Рис. 6.12. На каждом шаге по ходу решения идет контрольное построение параметров сходимости</p> <p>Еще два раза повторяем цикл нагружения, меняя направление приложенной силы на противоположное</p>		
56	Начать вычисления	Main Menu> Solution> Solve> Current LS> OK
57	Сохранить всю текущую информацию в базе данных	ANSYS Toolbar> Save_db
58	Закончить работу в процессоре	
59	Начать работу в основном постпроцессоре	
60	Обозначить данные, которые нужно прочитать из файла результатов расчета;	Main Menu> General Postproc> Last Set
61	last – прочитать последние значения параметров	Main Menu> General Postproc> Plot Results> Deformed Shapes [Items to be plotted> Def + undef edge> OK]
62	 <p style="text-align: center;">Рис. 6.13. Деформированная конструкция прорисована элементами, контуром показана исходная недеформированная форма</p>	

63	Показать результаты расчетов по элементам в виде изолиний; nl – напряжение; epeq – накопленная эквивалентная деформация	Main Menu> General Postproc> Plot Results> Contour Plot> Element Solu [Strain-plastic> Eqv plastic EPEQ> OK]
64	 <p>Рис. 6.14. Зоны локализации остаточной пластической деформации</p>	
65	Закончить работу в постпроцессоре	
66	Начать работу в динамическом постпроцессоре	
67	Показать на экране элементы	Utility Menu> Plot> Elements
68	Выбрать узел; s – новый выбор; node – узел; , – компонента здесь не требуется; ntop – координаты узла, заданы выше	Utility Menu> Select> Entities [Nodes> By Num/Pick> OK> Ввести в командной строке> ntop> Enter> OK]
69	Выбрать элементы, связанные с выбранным узлом	Utility Menu> Select> Entities [Elements> Attached to> Nodes> OK]
70	Присвоить значения параметру, введенному пользователем; elem – название параметра; elnext(0) – функция, определяющая номер элемента	Ввести в командной строке> elem=elnext(0)> Enter
71	Выбрать все геометрические объекты	Utility Menu> Select> Everything
72	Обозначить данные по элементам, которые нужно прочитать из файла результатов расчета; 2 – номер параметра; elem – элемент; ntop – номер узла, в котором для элемента следует восстановить данные; s – прочитать напряжения; y – прочитать составляющие напряжения по y	Main Menu> TimeHist Pro> Define Variable [Add> Element results> OK> Выбрать мышью верхний левый элемент> Define Element Data> OK> Выбрать мышью верхний левый узел> Define Nodal Data> OK> Ref number of Variable> 2> Data item> Stress> Y-direction SY> OK>
73	Обозначить данные по элементам, которые нужно прочитать из файла результатов расчета; 3 – номер параметра; elem – элемент; ntop – номер узла, в котором для данного элемента следует восстановить данные; epe1 – тип данных --упругая деформация; y – прочитать составляющие упругой деформации по оси y	Add> Element results> OK> Выбрать мышью верхний левый элемент> Define Element Data> OK> Выбрать мышью верхний левый узел> Define Nodal Data> OK> Ref number of Variable> 3> Data item> Strain-elastic> Y-dir'n EPEL Y> OK>

74	Обозначить данные по элементам, которые нужно прочитать из файла результатов расчета; 4 – номер параметра; elem – элемент; ntop – номер узла, в котором для данного элемента следует восстановить данные; epr1 – тип данных – пластическая деформация; y – прочитать составляющие пластической деформации по y	Add> Element results> OK> Выбрать мышью верхний левый элемент> Define Element Data> OK> Выбрать мышью верхний левый узел> Define Nodal Data> OK> Ref number of Variable> 4> Data item> Strain-plastic> Y-dir'n EPPL Y> OK> Close]
75	Добавить параметры; 5 – номер параметра; 3,4, – номера параметров, которые нужно использовать для определения данного параметра; ..., – неиспользуемые поля; 1,1,0 – масштабные факторы для указанных выше параметров	Main Menu> TimeHist Pro> Math Operations> Add [Reference number for results> 5> 1 st Variable> 3> 2 nd Variable> 4]
76	Задать переменную вдоль оси X для представления в графике; 5 – номер параметра, соответствующего абсциссе	Main Menu> TimeHist Pro> Settings> Graph [Single variable> 5> OK]
77	Дать название оси на графике; x – оси x; Total y-strain – название	Utility Menu> PlotCtrls> Style> Graphs> Modify Axes [X-axis label>
78	Дать название оси на графике; y – оси y; y-stress – название	Total Y-strain> Y-axis label> Y-stress> OK]
79	Построить параметры на графике; 2 – номер параметра	Main Menu> TimeHist Pro> Graph Variables> 1 st variable to graph> 2> OK]
80	 <p data-bbox="257 1292 896 1324">Рис. 6.15. Накопление остаточной пластической деформации в трех циклах</p>	
81	Закончить работу в постпроцессоре	

Лабораторная работа № 7

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕРМОРАДИАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Цель: выполнить анализ и провести оценку основных закономерностей поведения твердых тел в условиях интенсивных термо-радиационных воздействий.

Основные теоретические сведения. *Теплофизические характеристики материалов при терморadiационном воздействии.* В настоящее время механизму воздействия проникающих облучений на сплошные среды посвящены многочисленные работы физиков-теоретиков. Принято считать, что при прохождении излучения высокой энергии через сплошную среду в ней проходят следующие процессы: образование смещенных электронов или ионизация, которая, впрочем, быстро нейтрализуется электронами проводимости; возникновение атомов, смещенных со своих мест в кристаллической решетке вследствие упругих столкновений; возбуждение атомов без смещений; появление локальных областей с повышенной температурой; образование реакций деления, при которых выделяется энергия и образуются новые химические элементы. При длительном воздействии облучения в материале происходит накопление таких повреждений. Исследователями установлено, что материалы, которые подвергаются облучению, значительно меняют свои свойства и структуру. По мере увеличения дозы облучения такие изменения уже становятся необратимыми.

Заметим, что радиационное нарушение структуры облучаемого материала связано в первую очередь с возникновением и развитием радиационных дефектов, физическая природа которых мало чем отличается от обычных дефектов структуры, ответственных за стабильность материала. В отличие от теплового и механического воздействия (например, нагрев до высоких температур или пластическое деформирование соответственно) при облучении твердого тела в каждый момент образуется практически одинаковое неравновесное количество межузельных атомов и вакансий. В дальнейшем с увеличением их концентрации уже формируются линейные и объемные дефекты радиационного происхождения: дислокационные петли и

микропоры. Многие дефекты, вызванные облучением, могут быть сняты путем отжига, и в этом отношении они аналогичны влиянию механического упрочнения или некоторым металлургическим дефектам. Температура, служащая мерой беспорядочных движений, приводит к возврату смещенных атомов в первоначальное положение, то есть тепловое движение непосредственно влияет на процессы смещений, вызванных, например, нейтронным воздействием. Воздействие других заряженных частиц по существу аналогично воздействию нейтронов, за исключением глубины проникновения и поражающей способности, так как нейтрон, не имея электрического заряда, свободно проходит через любую сплошную среду и взаимодействует с ядром. В целом теплофизические характеристики материала весьма слабо воспринимают структурные изменения и их условно называют структурно-нечувствительными. Однако облучение большими флюенсами нейтронов приводит к столь значительным структурным перестройкам материала, что теплофизические свойства вынуждены реагировать на многочисленные повреждения.

Таким образом, основные теплофизические постоянные конструкционных и делящихся материалов (коэффициент теплопроводности, коэффициент линейного термического расширения, удельная теплоемкость) в теории должны сильно зависеть от температуры и структурного состояния материала. Но на практике радиационное облучение не приводит к существенным изменениям указанных характеристик, и они, как правило, определяются экспериментально по эмпирическим зависимостям от значений температуры. Это объясняется тем, что возникающие при облучении дефекты кристаллической решетки оказывают главным образом влияние на проводимость решетки и сравнительно мало влияют на общую проводимость, обусловленную электронной подсистемой, так как радиационные дефекты играют относительно большую роль при рассеянии фонов (волн решетки), чем электронов. Поэтому в результате облучения теплофизические изменения должны быть велики только для тех материалов, у которых электроны вносят малый вклад в теплопроводность. К таким материалам относятся в основном изоляторы, полупроводники и сверхпроводники. Благодаря этому, изменения теплофизических характеристик большинства металлических конструкционных и делящихся материалов даже при интенсивном радиационном воздействии незначительны.

Как правило, с ростом флюенса нейтронов их значения снижаются, причем наиболее сильно этот эффект проявляется при низких температурах. Однако такое уменьшение не играет существенной роли при расчетах на фоне значительного изменения весьма структурно-чувствительных механических и прочностных характеристик материалов. В то же время теплопроводность конструкционных материалов на основе графита и окиси бериллия уменьшается более чем в 10 раз при облучении.

Рассмотрим общие закономерности изменения теплофизических характеристик для основных конструкционных и делящихся материалов в зависимости от температуры нагрева. На рис. 7.1 представлены обобщенные графические зависимости теплофизических свойств конструкционных сталей различного класса от диапазона действующих на них температур [6].

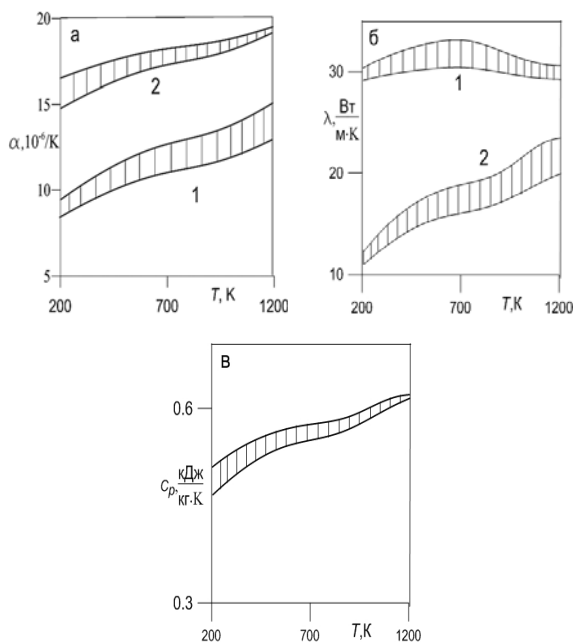


Рис. 7.1. Температурная зависимость коэффициента термического расширения (а), теплопроводности (б) и теплоемкости (в) металлических конструкционных материалов: 1 – маргенитные и ферритные стали; 2 – аустенитные стали

Как видно из данных, представленных на рис. 7.1, стали ферритного и мартенситного классов (ОЦК решетка) в целом имеют более благоприятное сочетание теплофизических свойств, чем аустенитные стали (ГЦК решетка), что приводит в дальнейшем, при их эксплуатации, к меньшим градиентам температур и, как следствие, в 1,5–3 раза меньшим термическим напряжениям.

В большинстве источников справочной и нормативной литературы для основных видов делящихся (топливных) материалов теплофизические свойства, как правило, задаются эмпирическими и полуэмпирическими зависимостями. Так, коэффициент термического расширения для оксидного топлива UO_2 в интервале температур от 700 до 2300 К аппроксимируется следующим соотношением:

$$\alpha(T) = 8 \cdot 10^{-6} + 2,6 \cdot 10^{-9} T, \text{ 1/К.} \quad (7.1)$$

Для делящегося материала на основе плутония, например PuO_2 коэффициент термического расширения (в интервале температур от 700 до 1300 К) задается выражением

$$\alpha(T) = 7 \cdot 10^{-6} + 4,2 \cdot 10^{-9} T, \text{ 1/К.} \quad (7.2)$$

Зависимость теплоемкости диоксида урана обычно рассчитывается по формуле

$$C_p(T) = 0,2973 + 25 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 T^{-2}, \quad (7.3)$$

где T – абсолютная температура, К.

Как правило, оксидное топливо обладает низкой теплопроводностью, которая зависит от ряда факторов и в значительной степени определяется пористостью, стехиометрией и химическим составом. Заметим, что сложность оценки совокупного влияния всех перечисленных факторов и отсутствие единого методического подхода приводят к существенному различию значений (вплоть до 30–50 %) теплопроводности делящегося материала, измеренной отдельными исследователями. Для теплопроводности UO_2 в интервале температур от 100 до 2800 °С (при плотности 95 %) различными авторами рекомендуется следующее соотношение

$$\lambda(T) = \frac{100}{11,8 + 0,0238T} + 0,8775 \cdot 10^{-11} T^3, \quad (7.4)$$

где T – абсолютная температура, К.

Заметим, что при температуре около 500 °С теплопроводность облученного и необлученного топливного материала на основе UO_2 почти одинакова. Для облучаемого диоксида урана при температуре от 200 до 2800 °С экспериментально получено следующее усредненное соотношение:

$$\lambda(T) = \frac{5500}{560 + T} + 0,942 \cdot 10^{-10} T^3. \quad (7.5)$$

Экспериментальные зависимости теплопроводности делящегося материала (керамического топлива) от температуры в исходном и облученном состоянии приведены на рис. 7.2.

Влияние пористости в интервале от 5 до 10 % на общую теплопроводность делящегося материала на основе двуокиси урана описывается уравнением

$$\lambda_1 = \lambda_2 \left(1 - \beta \frac{P_2 - P_1}{P_2} \right), \quad (7.6)$$

где λ_1 и λ_2 – значения коэффициентов теплопроводности при пористости P_1 и P_2 ; $\beta = 2,5$.

В зависимости от химического состава теплопроводность UO_2 изменяется по эмпирическому закону

$$\lambda(T, x) = \left(0,037 + 1,67x + 2,37 \cdot 10^{-4} T \right)^{-1} + 78,9 \cdot 10^{-12} \cdot T^3, \quad (7.7)$$

где x – отклонение от стехиометрии; T – абсолютная температура, К.

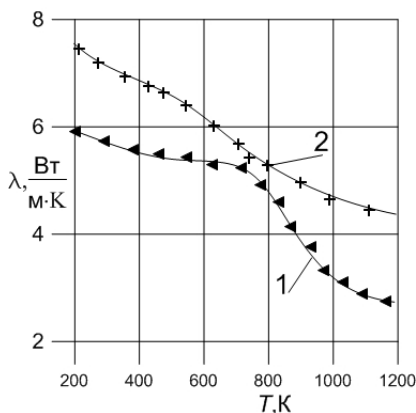


Рис. 7.2. Зависимость теплопроводности двуоксида урана от температуры: 1 – материал без облучения; 2 – облученный материал

Отметим, что теплопроводность смешанных видов топлив незначительно отличается от теплопроводности приведенных выше основных оксидных. Так, например, для композиции $\text{UO}_2 - 20\% \text{PuO}_2$ коэффициент теплопроводности

$$\lambda(T, x) = \left(0,037 + 3,33x + 2,37 \cdot 10^{-4}T\right)^{-1} + 78,9 \cdot 10^{-12} \cdot T^3, \quad (7.8)$$

где температурное поле (T) задается в градусах Кельвина.

Изменение упругих свойств в результате нагрева и облучения. Общеизвестно, что модуль сдвига реального кристалла (на макроуровне) зависит от плотности дислокаций и средней длины свободного, закрепленного только на концах дислокационного отрезка. Отсюда можно предположить основные причины изменения модуля сдвига материала: или через плотность дислокаций, или за счет изменения средней длины их линий между точками закрепления. Образующиеся при облучении радиационные точечные дефекты (междоузельные атомы и вакансии) уходят на дислокационные линии, образуют там ступеньки, так на дислокационной линии появляются новые точки закрепления. Средняя длина незакрепленных участков линии дислокации становится короче, и эффективный модуль сдвига растет.

Таким образом, при облучении, как правило, должно наблюдаться изменение модуля сдвига материала в зависимости от нарастания флюенса нейтронов. Модуль упругости изменяется непосредственно вследствие изменения числа межатомных связей при помощи влияния дефектов на движения дислокаций [7]. Однако следует подчеркнуть, что для большинства конструкционных материалов рабочая температура такова, что концентрация изолированных точечных дефектов, «выживающих» в условиях теплового и радиационного отжига, незначительна и изменение модуля Юнга составляет доли процентов (за исключением графита, для которого характерно значительное увеличение в 2–3 раза). Необходимо отметить, что в экстремальных условиях нагружения, характерных, например, для ядерного реактора, где имеются области повышенных температур, эффекты облучения и отжига действуют одновременно и взаимно компенсируются. В то же время иногда даже высокотемпературная термическая обработка оказывается недостаточной, чтобы полностью восстановить физико-механические свойства материала до облучения. Экспериментальные данные по изменению модуля Юнга меди от флюенса легких высокоэнергетических частиц с энергией свыше 1 МэВ при комнатной температуре приведены на рис. 7.3, из которого видно, что увеличение модуля Юнга при дозе облучения около 10^{23} электрон/ м^2 составило менее 1,7 %. Такое изменение по своей абсолютной величине сравнимо с погрешностью эксперимента.

Влияние облучения тяжелыми высокоэнергетическими частицами на упругие свойства чистой меди представлено на рис. 7.4, на котором показано быстрое повышение модуля упругости за первые 400 часов облучения потоком нейтронов со средней энергией более 0,1 МэВ. При последующем облучении после суммарного флюенса порядка 10^{22} нейтрон/ м^2 наступает медленное падение модуля упругости, которое связано с насыщением дислокационного механизма. Как показали дальнейшие экспериментальные исследования, повышение дозы облучения сопровождается объединением радиационных дефектов в комплексы, что и приводит со временем к насыщению дозой зависимости модуля Юнга [8].

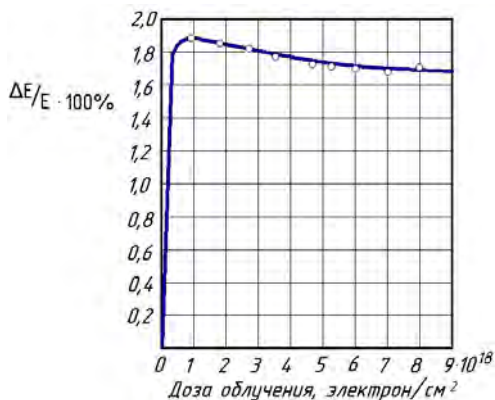


Рис. 7.3. Зависимость модуля Юнга меди от дозы облучения легкими заряженными частицами (электронами) при температуре 293 К

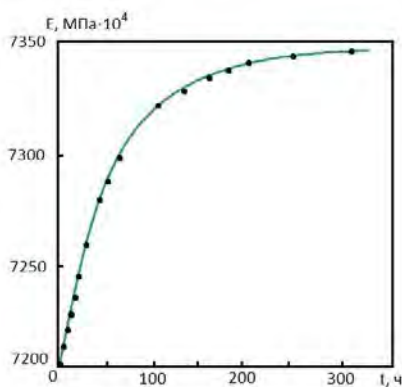


Рис. 7.4. Зависимость модуля Юнга меди от времени облучения ($\varphi = 2,5 \cdot 10^{20}$ нейтрон/(м²·ч), $\bar{E} > 0,1$ МэВ)

Таким образом, данные различных исследователей показывают, что нейтронное облучение не приводит к существенным изменениям характеристик упругости конструкционных материалов и ими можно во многих случаях пренебрегать при проведении оценочных расчетов. Это позволяет использовать величины упругих постоянных (E , G , μ) независимо от значения флюенса нейтронов ($\int \varphi dt$).

Температурные зависимости модуля упругости и коэффициента Пуассона для основных конструкционных материалов (сталей) хорошо известны и их можно найти в различной справочной и нормативной литературе (например, [6]). В основном значения упругих постоянных, установленных на основе экспериментальных данных, описываются линейными зависимостями вида

$$E(T) = 2,25 \cdot 10^5 - 75T; \quad (7.9)$$

$$\mu(T) = 0,27 + 5 \cdot 10^{-5}T, \quad (7.10)$$

где T – температура, К.

Рассмотренные представления о физическом механизме изменения упругих характеристик при радиоактивном облучении в определенной мере справедливы и приемлемы для делящихся (топливных) материалов, константы которых также зависят от температуры и характера распределения радиационных дефектов. Так, модуль упругости диоксида урана на практике часто задается соотношением

$$E(T) = (1 - 2,6P)(22,4 \cdot 10^4 - 31,19T), \quad (7.11)$$

здесь P – средняя пористость делящегося материала; T – температура, К.

Коэффициент Пуассона делящегося материала является слабой функцией пористости и практически, не зависит от температуры (до 1500 °С). Типичное его значение для диоксида урана – 0,316. Зависимость модуля Юнга смешанного оксидного топлива, например $UO_2 - 20\% PuO_2$, имеет вид

$$E(T) = 25,5 \cdot 10^4 - 20T, \quad (7.12)$$

где T – температура, К.

В то же время при нормальной температуре модуль упругости, как правило, изменяется с пористостью указанного топливного материала по закону

$$E(P) = E(1 - 2P), \quad (7.13)$$

где P – пористость, E – начальное значение модуля упругости.

По-видимому, все указанные закономерности (7.11)–(7.13) сохраняются для некоторого температурного интервала.

Задание к лабораторной работе № 7. Рассмотреть особенности деформирования конструкционных и тепловыделяющих делящихся материалов с учетом зависимости их механических и теплофизических характеристик от уровней действующих температур и высокоэнергетического облучения. Распределение температурного поля принять известным (лабораторная работа № 2). Построить графические зависимости изменения физико-механических свойств конструкционных и тепловыделяющих материалов при неоднородном нагреве и облучении. Геометрию рассматриваемых твердых тел принять, как и в лабораторной работе № 4 (см. табл. 4.1). Считать, что в процессе терморadiационного воздействия пластические деформации не образуются, и предельное состояние не наступает. В качестве материала рассмотреть сталь и диоксид урана (см. табл. 7.1). Решение реализовать в пакете Mathcad или других математических программах (Matlab, Maple, Mathematics и т. д.).

Таблица 7.1

Исходные данные для проведения оценочного расчета:
механические и теплофизические характеристики конструкционного
и топливного материалов

Конструкционная сталь (OX16H15MЗБ)	
Теплопроводность стали, Вт / (м·К)	14,6
Коэффициент линейного расширения стали, К ⁻¹	12,6·10 ⁻⁶
Модуль упругости, МПа	2·10 ⁵
Коэффициент Пуассона	0,3
Тепловыделяющий (делящийся) материал (топливо: UO₂)	
Коэффициент линейного расширения топлива, К ⁻¹	11,3·10 ⁻⁶
Коэффициент Пуассона	0,29
Модуль упругости, МПа	1,85·10 ⁵

Теоретическая плотность топлива, кг/м ³	10960
Безразмерная плотность топлива	0,9
Плотность тепловыделяющего материала, г/см ³	10,4
Теплопроводность диоксида урана, Вт/(м·К)	4,5
Максимальная линейная плотность энерговыделения, Вт/м	43000
Объемное энерговыделение в топливе, Вт/м ³	$1,81 \cdot 10^9$
Энерговыделение по поверхности, Вт/м ²	$2,489 \cdot 10^6$

Лабораторная работа № 8

ИЗМЕНЕНИЕ КРАТКОВРЕМЕННЫХ И ДЛИТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ТЕРМОРАДИАЦИОННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Цель: изучить особенности необратимого деформирования твердых тел в экстремальных условиях нагружения при воздействии механической нагрузки, неравномерных высоких температур и облучении потоками заряженных частиц большой энергии.

Основные теоретические сведения. Описанные выше (см. лабораторную работу № 7) механизмы воздействия нейтронного облучения на кристаллическую структуру дают основания ожидать его особенно сильного влияния на механические свойства материалов. Более чем 50-летний период интенсивных экспериментальных исследований привел к основному выводу, что общим для всех металлических материалов является смещение диаграммы растяжения/сжатия вверх при увеличении дозы облучения. Доказано, что облучение приводит не только к возрастанию условного предела текучести, но даже может привести к существенному изменению вида и параметров кривой деформирования. В тоже время металлы, облученные и испытанные при высокой температуре, не обнаруживали какого-либо возрастания предела текучести: имело место только некоторое снижение пластичности. Причем эффект упрочнения полностью исчезал, когда температура испытания превышала

$0,5T_m$ (T_m – абсолютная температура плавления). Это говорит о том, что механические свойства облученных конструкционных материалов в значительной степени зависят от температуры облучения, которая должна быть обязательно введена как дополнительный параметр. Таким образом, эффект упрочнения при облучении значительно зависит не только от флюенса, но и от температуры облучения. Облучение нейтронами конструкционных и делящихся материалов в целом приводит к радиационному упрочнению, росту пределов текучести и прочности, сопровождается значительным охрупчиванием: уменьшением пластичности, ударной вязкости и смещением порога хладноломкости в сторону высокой температуры [7, 8].

Под радиационным упрочнением обычно подразумевают возрастание предела текучести и предела прочности в зависимости от флюенса быстрых нейтронов и температуры. Радиационное упрочнение материала всегда сопровождается снижением пластичности, которое может достигать 10 и более раз. Заметим, что этот вопрос уже более 40 лет дискутируется в научно-исследовательских кругах, но до сих пор природа и механизм радиационного упрочнения остается не до конца ясными. Как правило, этот необратимый процесс объясняется несколькими физическими теориями, основными из которых можно выделить следующие три. В первой предполагается, что при увеличении дозы облучения происходит рост так называемого «источникового» упрочнения, связанного с затруднением генерации дислокаций в облученном материале. В свою очередь, основным механизмом источникового упрочнения является взаимодействие мельчайших дислокационных межузельных петель с дислокациями. По второй теории считается, что создаваемые при облучении радиационные дефекты являются дополнительными центрами закрепления дислокаций, что вызывает дополнительные напряжения, необходимые для их отрыва и приведения в движение, а также снижает эффективность действия источников. В третьей теории предполагается, что механизм процесса радиационного упрочнения заключается в возрастании напряжения, необходимого для активизации движения дислокаций в плоскости ее скольжения. Такое движение затрудняется присутствием изначально имевшихся препятствий, лежащих в плоскости скольжения и вблизи нее (случай упрочнения трением). Но так как в облученном металле уже имеется так много препятствий для движения дислокаций, то их

дополнительное влияние на упрочнение лишь незначительно увеличивает напряжение трения, и дефекты, образующиеся при облучении, препятствуют движению дислокаций более эффективно.

Следует отметить, что в последнее время исследователи приходят к выводу, что, скорее всего, характерно совместное влияние всех трех возможных вышеописанных механизмов радиационного упрочнения с определенной вероятностью доминирования каждого из них при конкретных условиях радиационного и высокотемпературного воздействия. Высокие температуры действуют как фактор, удаляющий повреждения. В процессе радиационного воздействия образование дефектов и их термический отжиг происходят одновременно. Если классифицировать эффекты повреждения структуры по интервалам радиоактивных потоков в зависимости от температур, то при низких флюенсах (менее 10^{21} нейтрон/см²) радиационных повреждений образуется незначительное количество, а упрочнение уменьшается с ростом температуры. При температурах больше половины температуры плавления радиационные дефекты отжигаются при облучении настолько быстро, что никакого упрочнения при испытании на растяжение не наблюдается, а кривая напряжение-деформация совпадает с такой же кривой для необлученного материала. При высоких флюенсах быстрых нейтронов (флюенс более 10^{21} нейтрон/см²) дислокационные петли и полости увеличиваются до больших размеров. Для отжига таких больших дефектов даже при повышенной температуре испытаний требуется значительное время, поэтому их влияние на механические свойства сохраняется до более высоких температур, а эффект упрочнения исчезает только при температуре, превышающей $0,5T_m$. В то же время экспериментально замечено, что радиационное охрупчивание при облучении нейтронным потоком наблюдается также в некоторых случаях при температурах свыше $0,5T_m$. Это явление получило название высокотемпературное радиационное охрупчивание (ВТРО).

Эффект ВТРО состоит в том, что вследствие нейтронного облучения при температуре более $0,5T_m$ увеличивается склонность этих материалов к межкристаллитному разрушению. Такое охрупчивание не снимается отжигом при повышенных температурах и его количественные характеристики увеличиваются с ростом флюенса нейтронов. Характерным является то, что разрушение облученных образцов происходит в основном по границам зерен (хрупкое раз-

рушение) и наблюдается для всех поликристаллических материалов. Если судить по имеющимся данным, то в настоящее время нет единой гипотезы для объяснения ВТРО. Так, первоначально считалось, что степень охрупчивания увеличивается с ростом содержания бора, другие исследователи связывают эффект ВТРО с наличием гелия в материале, также имеет место «пузырьковая модель», теория образования и развития клиновидных трещин, теория сегрегации различных примесей по границам зерен и другие модели. При облучении в интервале температур до $0,45T_m$, как правило, наблюдается отсутствие пластичности при разрушении. Такое охрупчивание при низких температурах получило название низкотемпературное радиационное охрупчивание (НТРО). Оно характерно для большинства материалов с ОЦК решеткой, в частности для сталей ферритного, мартенситного и ферритно-мартенситного классов, а также пластичным материалам с ГЦК решеткой, не имеющих хрупкого перехода. В отличие от ВТРО эффект НТРО устраняется послерадиационным отжигом. На рис. 8.1 приведен наиболее типичный случай температурной зависимости основных механических характеристик облученных металлических материалов на примере аустенитной стали 0X16H15M3B.

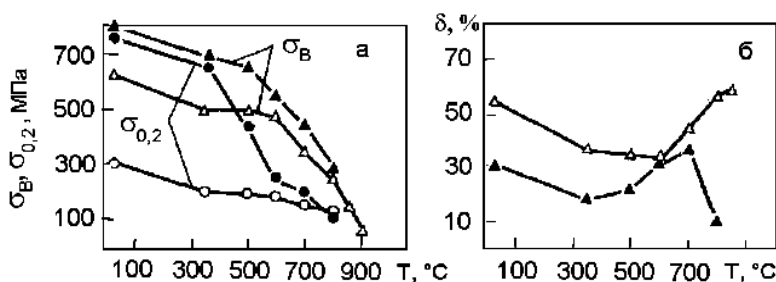


Рис. 8.1. Температурная зависимость предела прочности, предела текучести (а) и относительного удлинения (б) стали 0X16H15M3B, облученной нейтронами до флюенса 10^{22} нейтрон/см² ($\bar{E} > 0,1$ МэВ): необлученные образцы – светлые символы, облученные – темные

Как видно из рисунка, аустенитная сталь имеет два температурных интервала снижения пластичности. Область проявления НТРО соответствует температурам испытаний менее 550 °С, а область ВТРО – температурам испытаний свыше 700 °С (рис. 8.1, б). Преде-

лы текучести после облучения быстрыми нейтронами повышаются в несколько раз, при этом предел прочности повышается в меньшей степени (рис. 8.1, *a*).

В связи с вышесказанным, изменение кратковременных механических свойств основных конструкционных материалов при облучении можно систематизировать в зависимости от диапазона термического воздействия и особенностей кристаллического строения. На рис. 8.2 представлены обобщенные кривые деформирования «условное напряжение–деформация» для двух основных типов металлических конструкционных материалов с ОЦК и ГЦК решетками, например, сталь ЭП-450 и ЭП-172.

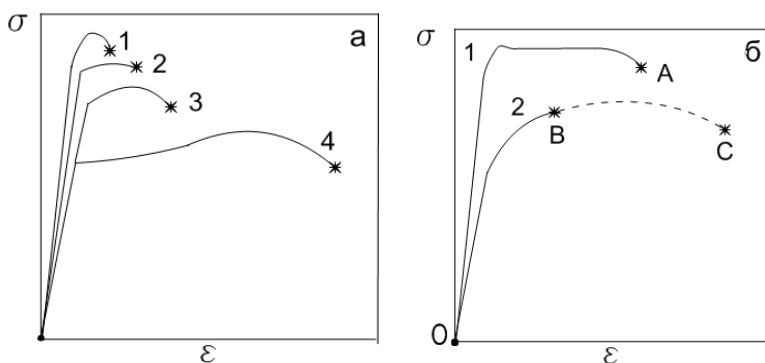


Рис. 8.2. Влияние облучения быстрых нейтронов ($\Phi > 10^{21}$ нейтрон/см², $\bar{E} > 0,1$ МэВ) на кратковременные механические свойства металлов с ОЦК решеткой (*a*) и ГЦК решеткой (*б*);

a: 1, 2, 3 – облучение при различных температурах; ($T_1 < T_2 < T_3$), 4 – без облучения; (*б*): 1 – облучение при низких температурах, 2: *OB* – облучение при высоких температурах; *OC* – без облучения

При облучении и испытании при высоких температурах ОЦК металлов кривая «напряжение–деформация» (линии 1, 2, 3) на рис. 8.6, *a* стремится восстановить вид, соответствующий необлученному материалу (кривая 4). Это обеспечивается тем, что в процессе отжига при высоких температурах радиационные дефекты исчезают. Верхняя кривая (на рис. 8.2, *a*) представляет частный случай, когда предел прочности и предел текучести совпадают. В этом случае равномерное удлинение отсутствует (совершенная хрупкость), что характерно для ОЦК металлов при достаточно низ-

ких температурах и высоких дозах облучения. Как видно из рис. 8.2, б, облучение приводит к значительному формоизменению диаграммы деформирования ГЦК материалов, и кривая становится похожей на кривую для ОЦК сталей ферритного и мартенситного класса (кривая 1 на рис. 8.2, б) со строго выраженной площадкой текучести. В то же время ГЦК стали (аустенитного класса), облученные и испытанные при высоких температурах, не обнаруживают какого-либо возрастания предела прочности или текучести: имеет место только снижение пластичности (кривая 2, рис. 8.2, б). Заметим, что в общем случае площадь диаграммы, соответствующей растяжению облученных образцов (что непосредственно характеризует работу деформирования и разрушения), значительно меньше, чем площадь диаграммы, соответствующей растяжению необлученных образцов. В качестве конкретного примера на рис. 8.3 представлены диаграммы растяжения необлученной и облученной потоком быстрых нейтронов ($\bar{E} > 0,1$ МэВ) нержавеющей стали AISI 316L при температуре испытания и облучения равной 500 К [8].

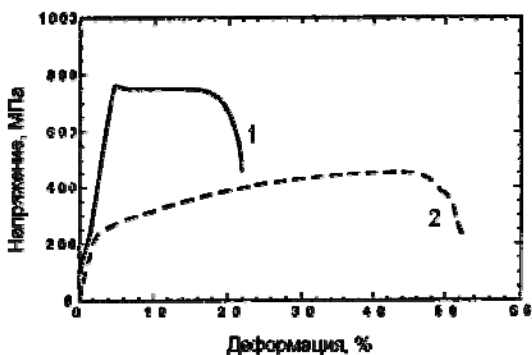


Рис. 8.3. Кривые растяжения аустенитной стали AISI 316L в облученном до флюенса $6 \cdot 10^{21}$ нейтрон/см² (1) и исходном (2) состояниях ($\bar{E} > 0,1$ МэВ)

Анализ кривых показывает, что сокращение работы деформирования и разрушения, несмотря на повышение пределов текучести и прочности, обусловлено значительным сокращением способности к пластическому деформированию и изменению степени деформационного упрочнения.

Рассмотрим влияние терморadiационного воздействия на длительные механические свойства материалов. Экспериментально установлено, что характеристики длительной прочности значительно зависят от степени облучения, температуры, а также от величины первоначального холодного упрочнения образца. Эти величины непосредственно влияют как на скорость ползучести, так и на удлинение в момент разрушения. Время до разрушения (или долговечность) также косвенно зависит от тех же параметров, так как оно является отношением удлинения к скорости деформирования. Совместное влияние флюенса быстрых нейтронов и температуры на длительную прочность может быть также продемонстрировано на примере изменения времени до разрушения. Так, для указанных выше необлученных конструкционных сталей возрастание температуры испытания заметно уменьшает их долговечность. Этот эффект является доказательством быстрого возрастания скорости установившейся ползучести с температурой испытания и подчиняется аналитическим зависимостям Аррениуса. При фиксированном напряжении и температуре испытания облучение, как правило, снижает на порядок величины время до разрушения, как показано на рис. 8.4. Это связано, главным образом, с сильным уменьшением пластичности под действием облучения, механизм которого был подробно рассмотрен выше. Металлы, подвергнутые облучению быстрыми нейтронами, оказываются менее пластичными, чем необлученные, поэтому их разрушение может носить как вязкий, так и хрупкий характер во всем объеме образца. Степень охрупчивания определяется величиной пластической деформации или деформации ползучести перед разрушением. Например, влияние облучения быстрыми нейтронами на удлинение до разрушения при фиксированных значениях всех других параметров следующее: пластичность (деформация в момент разрушения) может уменьшиться от величины 20 % для необлученного материала до 0,1 % при больших дозах. Таким образом, при этих условиях облучение вызывает уменьшение пластичности образца в 200 раз.

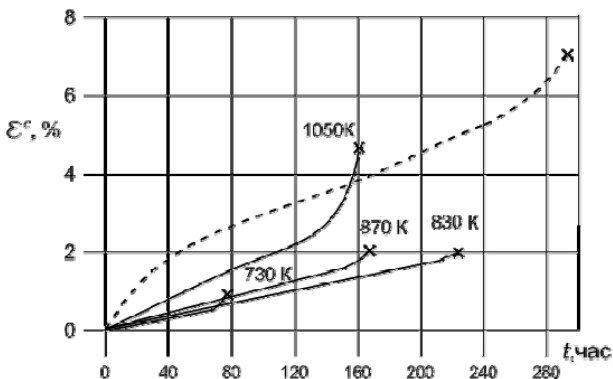


Рис. 8.4. Влияние температуры облучения на длительную прочность стали 304, испытанной при температуре 830 К под давлением в 300 МПа: - - - материал без облучения; — — образец облученный до $2 \cdot 10^{22}$ нейтрон/см² при различных температурах

Результаты последних экспериментальных работ в этом направлении показывают, что для некоторых материалов скорость ползучести в облученных образцах ниже, чем в необлученных, причем самым низким скоростям ползучести соответствуют самые низкие температуры облучения. Такой характер изменения находится в полном соответствии с влиянием температуры на прочность: с увеличением температуры облучения удлинение до разрушения возвращается к величине, характерной для необлученного материала, а способность к упрочнению восстанавливается. Другими словами возрастание предела текучести исчезает со временем при термическом отжиге.

Из вышеизложенного следует, что облучение нейтронным потоком совместно с высокотемпературным нагревом существенно влияет на теплофизические, физико-механические, кратковременные и длительные механические свойства конструкционных и делящихся материалов. По приведенным данным, можно сделать вывод, что с увеличением температуры модуль упругости, пределы пропорциональности, текучести и прочности уменьшаются, а коэффициент поперечной деформации, остаточная деформация и относительное сужение площади поперечного сечения при разрыве, вообще говоря, увеличиваются. С уменьшением температуры, наоборот. При увеличении дозы облучения предел текучести и предел прочности материала увеличиваются, а остаточное относительное удлинение и

остаточное сужение площади поперечного сечения при разрыве уменьшаются. Модуль упругости, коэффициент Пуассона с увеличением дозы облучения возрастают. Однако это изменение хотя и является стойким, но невелико (1,5–3 %), и им в практических расчетах можно пренебречь. Также нейтронное облучение, как правило, приводит к уменьшению сопротивления длительному разрушению. Степень падения длительной прочности зависит от уровня напряжений, температуры облучения, характеристик облучающего потока и способности материала сохранять пластические свойства в условиях радиации. Дополнительной причиной снижения долговечности облучаемых материалов может стать уменьшение сопротивления ползучести, которое приводит к преждевременному исчерпанию ограниченного радиационным воздействием пластичности. Принято считать, что время до разрушения резко падает с возрастанием флюенса нейтронов, прежде всего, в результате потери именно пластических свойств.

Задание. Основываясь на теоретических сведениях и результатах лабораторной работы №5, предложить модификацию механико-математических моделей упруго-пластических тел: а) при нагреве до высоких температур; б) интенсивном нейтронном облучении; в) терморadiационном воздействии. Зарисовать идеализированные диаграммы растяжения/сжатия и кручения в соответствии с индивидуальным заданием лабораторной работы № 5, указать разгрузку и повторное нагружение.

Провести сравнение для полученных моделей (случаи *a*, *б*, *в*) и сделать вывод о возникающих тенденциях. Предложить варианты аналитической взаимосвязи между тензором напряжений и тензором деформаций. Запрограммировать алгоритм учета воздействия температурного нагрева и высокоэнергетического облучения на изменение кратковременных характеристик конструкционных и деформируемых материалов.

Лабораторная работа № 9

РАСЧЕТ НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ РАДИАЦИОННОГО РАСПУХАНИЯ В КОНСТРУКЦИОННЫХ И ТОПЛИВНЫХ (ДЕЛЯЩИХСЯ) МАТЕРИАЛАХ

Цель: определение радиационных деформаций в основных конструкционных и тепловыделяющих (топливных) материалах; оценка необратимого формоизменения для элементов конструкций в виде тел простой формы; численный расчет объемных деформаций твердого тела вызванных термическим расширением и радиационным распуханием.

Основные теоретические сведения. Как известно, размерное постоянство является одним из необходимых условий безопасной и длительной работы всех ответственных элементов конструкций. Экспериментальными исследованиями установлено, что под действием облучения происходит объемное изменение конструкционных и делящихся (топливных) материалов. В качестве примера можно привести топливный сердечник и оболочку твэла активной зоны реактора АЭС [9]. Впервые это явление было обнаружено (1967 г.) именно в оболочке твэла быстрого ядерного реактора, изготовленной из аустенитной нержавеющей стали при ее облучении до больших значений интегрального потока быстрых нейтронов с энергией $E > 0,1$ МэВ. Дальнейшие исследования показали, что такое радиационное распухание (РР) обусловлено образованием небольших полостей (микропор) в зернах металла, которые для нержавеющей стали образуются только при температурах между 523 и 873 К, что, кстати, совпало с диапазоном рабочих температур оболочек твэлов быстрых реакторов. Для каждого конструкционного материала существует значение температуры, при котором этот процесс происходит наиболее интенсивно, как правило, это значение равно $(0,2-0,6)T_m$. При более низких температурах поры не могут расти из-за малой подвижности вакансий, при более высокой – они растворяются. На рис. 9.1 приведена зависимость распухания стали и ниобия от температуры облучения.

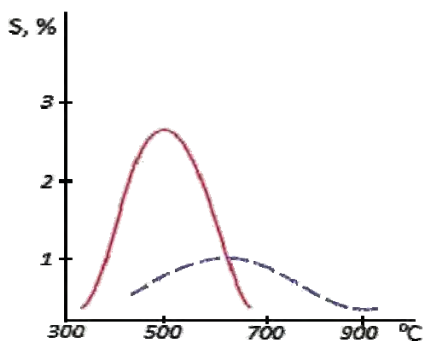


Рис. 9.1. Влияние температуры облучения на распухание материалов:
 — — нержавеющая сталь AISI 304 (флюенс $5 \cdot 10^{21}$ нейтрон/см⁻²);
 - - - ниобий (флюенс $5 \cdot 10^{23}$ нейтрон/см²)

На сегодняшний момент доказано, что к значительному изменению размеров элементов конструкций, работающих в условиях облучения, кроме термического расширения и внутренних напряжений приводит именно РР. Установлено, что масштаб изменений размеров конструкционных элементов от распухания, например, для аустенитных сталей более чем на порядок превышает формоизменения, обусловленные температурой, и может достигать 20–30 % (для экстремальных условий работы быстрых ядерных реакторов). Кроме того, неравномерное РР ведет к появлению дополнительных напряжений, которые требуют обязательного учета в расчетах на прочность. В таком случае, с точки зрения механики деформируемого твердого тела очень важно иметь надежные аналитические зависимости для функции распределения РР. В этом, фактически, заключается одна из основных проблем моделирования поведения конструкций в условиях интенсивных нелинейных терморadiационных полей. Для ее решения исследователями в основном предложены прикладные эмпирические и полуэмпирические зависимости распухания материалов, полученные на основе обработки многочисленных экспериментальных результатов. Как правило, основу теоретических моделей составляют сложные кинетические уравнения концентрации точечных дефектов среды, содержащей стоки. Проанализируем основные механико-математические модели, описывающие РР конструкционных и топливных (делящихся) материалов.

Радиационное распухание конструкционных материалов.

В настоящее время причины РР металлов качественно понятны. Столкновение быстрых нейтронов с атомами решетки дают большое число пар вакансия-атом в междоузлии. Большинство этих дефектов со временем рекомбинируют друг с другом или мигрируют к стокам. Наиболее эффективными стоками являются дислокации как те, которые являются частью исходной системы дислокаций материала, так и дислокационные петли, образующиеся при конденсации межузельных атомов. Динамический баланс между образованием точечных дефектов и процессом их удаления поддерживается уровнем концентрации (значительно превышающем равновесный) вакансий и атомов в междоузлиях во время облучения. Образование групп межузельных атомов и вакансий происходит в случае, когда и межузельные атомы и вакансии в твердом теле подвижны, однако температура не должна быть слишком высокой, так как в этом случае рекомбинация точечных дефектов и уход к стокам происходит настолько быстро, что в твердом теле не может поддерживаться пересыщение дефектами. Скопление межузельных атомов приводит к образованию дислокационных петель.

Исходя из вышеназванных причин, можно сформулировать следующие основные условия, необходимые для возникновения распухания в конструкционных материалах:

1. Межузельные атомы и вакансии в твердом теле должны быть подвижны и способны мигрировать при очень низких температурах.
2. Точечные дефекты должны захватываться стоками (дефектами структуры) в дополнение к их рекомбинации. Причем часть стоков должна поглощать межузельные атомы, для того чтобы появилось избыточное количество вакансий, необходимое для образования микропор.
3. Наличие пересыщения вакансиями, необходимого для гомогенного или гетерогенного зарождения микропор и дислокационных петель, а также их роста.

Отметим, что образование микропор происходит не только в нержавеющей стали (последняя, кстати, является одним из наиболее устойчивых сплавов по отношению к распуханию). Почти все конструкционные материалы распухают по подобному механизму в диапазоне температур $(0,2-0,55)T_m$. К примеру, обусловленное облучением общее изменение объема конструкционных сталей приве-

дено на рис. 9.2. Как видно, вплоть до значений интегрального потока быстрых нейтронов, равных 10^{22} нейтрон/см², заметного распухания стали не происходит (менее 0,1 %). После этого распухание возрастает по закону $(\phi t)^n$, где ϕ – плотность нейтронного потока, а показатель степени больше единицы. Увеличение флюенса до 10^{23} нейтрон/см² резко увеличивает распухание, что связано с пересыщением вакансий и приводит к значительному уменьшению плотности и увеличению объема конструкционных материалов [7, 8].

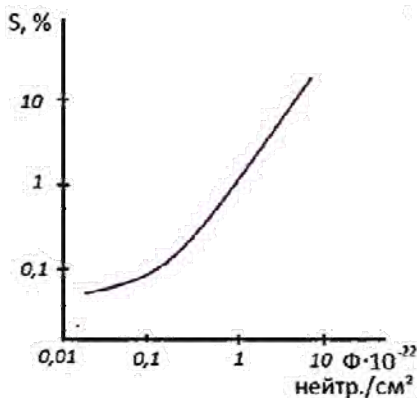


Рис. 9.2. Влияние флюенса нейтронов на распухание конструкционных сталей при облучении быстрыми нейтронами с энергией $\bar{E} > 0,1$ МэВ

Таким образом, при исследовании дозной зависимости можно выделить следующие периоды: инкубационный, предшествующий проявлению макроскопически заметного распухания, переходной, характеризующийся нелинейной зависимостью распухания от дозы, и, наконец, установившаяся стадия.

В настоящее время экспериментальными исследованиями установлено, что РР конструкционных материалов зависит главным образом от энергетического спектра нейтронов, дозы облучения (флюенса нейтронов), температуры и в значительно меньшей степени – от плотности потока нейтронов. Ввиду слабо развитой теории образования пор в металлах и сплавах, для оценок влияния распухания на характеристики конструкционных элементов чаще используются эмпирические выражения, уравнения которых отражают влияние основных переменных: температуры и интегрального

нейтронного потока. Предложенные выражения для распухания отличаются экспериментальным методом, с помощью которого исследовалось формоизменение (например, метод просвечивания электронным микроскопом, рентгеноспектральные методы, метод измерения макроскопических размеров). Рассмотрим подробнее предложенные исследователями соотношения для определения распухания металлических конструкционных материалов.

Л. М. Забудько для описания радиационного распухания конструкционных сталей предлагает общую зависимость следующего вида:

$$\frac{\Delta V}{V} = A(kt)^{n(T)} f(T), \quad (9.1)$$

где kt – уровень радиационных повреждений (или флюенс нейтронов); $n(T), f(T)$ – функции температуры. Для аустенитных нержавеющих сталей (0X16H15M3Б, X18H22B2T2, X18H10T, ЭИ-847, ЭП-172, ЧС-68 и др.) показатель степени $n(T)$ меняется в пределах 1–3 в температурном интервале 600–900 градусов по шкале Кельвина.

Для радиационного распухания холоднодеформированной на 20 % стали AISI 316, рекомендованной для проектирования элементов конструкций и компонентов оборудования активной зоны быстрых реакторов, зависимость (9.1) представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} = & 19 \cdot 10^{-35} \Phi^{1.5} \times \\ & \times [4,028 - 3,71 \cdot 10^{-2} (T - 273) + 1,0145 \cdot 10^{-4} (T - 273)^2 - \\ & - 7,88 \cdot 10^{-8} (T - 273)^3], \end{aligned} \quad (9.2)$$

где T – температура, К; Φ – флюенс нейтронов с энергией $\bar{E} > 0,1$ МэВ.

Заметим, что вместо флюенса быстрых нейтронов облучение часто характеризуется числом смещений на атом (сна), что в какой-то мере учитывает влияние энергетического спектра облучения на распухание. Поэтому многие исследователи предлагали модели распухания материала в зависимости от числа сна. Так, например, эмпирическая зависимость, установленная В.Н. Быковым, для относительного изменения объема стали 0X16H15M3Б, облученной потоком быстрых нейтронов ($\bar{E} > 0,1$ МэВ) имеет вид:

$$S = \frac{\Delta V}{V} = 5,33 \cdot 10^{-7} (\alpha kt)^{0,19+1,63 \cdot 10^{-3} T} \exp \times$$

$$\times \left[0,0235T - \frac{83,5}{T - 630} - \frac{17,82 \cdot 10^2}{980 - T} \right], \quad (9.3)$$

где α – коэффициент, зависящий от выбора модели для расчета kt ; kt – число смещений атомов, соответствующих данному флюенсу нейтронов; T – температура, К.

Нужно отметить, что до сих пор не существует общепринятой методики определения числа смещений с учетом энергетического спектра. В качестве стандарта для определения таких повреждений используют модели, которые усредняют число смещений по некоторым определенным группам энергий нейтронов (например, американский стандарт *TRN*).

Для распухания нержавеющей стали А. А. Тутнов приводит следующие экспериментальные зависимости:

- для аустенитной стали 316

$$\frac{\Delta V}{V}, \% = 5,6 \cdot 10^7 (10^{-22} q)^{\lambda_S} (0,975T - 413) \exp \times$$

$$\times \left[54,2 - 0,0794T - \frac{30200}{T + 273} \right], \quad (9.4)$$

где $\lambda_S = 1,9 - 30/(T - 360) + 90/(T - 360)^2$;

- для холоднодеформированной стали 316

$$\frac{\Delta V}{V}, \% = \eta_{\max}^{1,665} t^{2,096} \exp \left(\frac{\eta}{\eta_{\max}} \right)^7 A_S, \quad (9.5)$$

где при $T > 427$ °С

$$A_S = 0,04123 - 5,87 \cdot 10^{-5} (T - 418)^2 + 1,742 \cdot 10^{-4} (T - 418)^{1,787}; \quad (9.6)$$

при $T \leq 427$ °С

$$A_S = 1,742 \cdot 10^{-4} (T - 418)^{1,787}, \quad (9.7)$$

где H – число сна; η – скорость накопления сна (10^{-6} с^{-1}); q – флюенс нейтронов всех энергий.

А. А. Тутнов на основе систематизации и статистической обработки большого числа экспериментальных данных пришел к выводу, что распухание, как функцию температуры, также можно выразить через набор экспоненциальных множителей, описывающих некоторую колокообразную кривую. Заметим, что иногда для описания температурной зависимости радиационного распухания можно использовать полиномы, например, вида $1 + AT + VT^2 + CT^3$, или степенные зависимости, например, $\exp(A/T + B/T^2)$, в которых коэффициенты определяются из результатов экспериментов, причем их значения зависят от типа реактора, где были получены данные.

Ю. И. Лихачев, В. Я. Пупко и В. В. Попов приводят соотношения, связывающие распухание аустенитных сталей с температурой облучения и флюенсом нейтронов [10]:

$$S = \frac{\Delta V}{V} = A_{0S} A_S(T) \Phi^{\lambda_S(T)}. \quad (9.8)$$

Различные варианты $A_{0S}(T)$, $A_S(T)$ и $\lambda_S(T)$ для сталей 304 и 316 по классификации AISI в отожженном и холоднодеформированном состояниях можно найти в последних зарубежных публикациях.

Американский исследователь Д. Р. Оландер в своей монографии для описания распухания предварительно термически обработанной нержавеющей стали AISI 316 предлагает использовать выражение

$$\frac{\Delta V}{V}, \% = \left(\varphi t \cdot 10^{-22} \right)^{2,05 - 27/\theta + 78/\theta^2} \times \\ \times \left[(T - 40) 10^{-10} \right] \exp[32,6 - 5100/T - 0,0157T], \quad (9.9)$$

где $\theta = T - 623$ – эффективная температура; T , К; φt – флюенс нейтронов с энергией $\bar{E} > 0,1 \text{ МэВ}$,

Многочисленные результаты, полученные исследователями-экспериментаторами, систематизированы в монографиях и статьях И.С. Куликова, например [4, 5]. Где подытожено систематическое изложение моделей радиационного распухания для основных конструкционных и делящихся материалов. Так, следуя этим работам, распухание сталей 304 в аустенизированном состоянии хорошо описывается соотношениями

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\varphi t \cdot 10^{-12} \right)^{2,05 - \frac{27}{\theta} + \frac{78}{\theta^2}} \times \\ \times \left[(T - 40) 10^{-12} \right] \exp[32,5 - 5000 / T - 0,015T], \quad (9.10)$$

где $\varphi \cdot t$ – флюенс нейтронов с энергией $\bar{E} > 0,1$ МэВ; $\theta = T - 623$, К.

$$\frac{\Delta V}{V}, \% = 4,9 \cdot 10^{-49} (\varphi t)^{1,71} \cdot 10^{\frac{15490}{T} - \frac{5980000}{T^2}}. \quad (9.11)$$

Распухание холоднодеформированной на 20 % стали 316 предлагается описывать формулой

$$\frac{\Delta V}{V}, \% = 10^{-36} (\varphi t)^{1,69} \left[\exp\left(-\frac{3930}{T}\right) - 5480 \exp\left(\frac{-12740}{T}\right) \right], \quad (9.12)$$

здесь T – абсолютная температура, К.

Таким образом, распухание конструкционных материалов в основном зависит от двух параметров: интегрального потока (флюенса) быстрых нейтронов с энергией $\bar{E} > 0,1$ МэВ и температуры облучения, что подтверждено теоретическими и экспериментальными результатами исследований. Основными причинами распухания конструкционных материалов согласно этим работам являются образование и рост радиационных микропор.

Радиационное распухание делящихся материалов. В отличие от рассмотренных конструкционных, основными факторами, определяющими распухание делящихся материалов (например, ядерного топлива), являются:

1) увеличение суммарного объема продуктов деления относительно разделившегося объема (так называемое холодное распухание);

2) формоизменение делящегося материала, связанное с ростом отдельных зерен в результате выбивания атомов из узлов кристаллической решетки и попадания продуктов деления внутрь; при этом появляются большие микронапряжения, создающие внутренние трещины и пустоты;

3) образование пор в результате скопления мигрирующих вакансий;

4) увеличение объема пор вследствие их слияния при миграции, а также из-за давления газовых продуктов деления, скапливающихся в порах.

В зависимости от температуры облучения относительное значение этих процессов меняется. Так, в области температур $(0,2-0,5)T_m$ распухание определяется накоплением продуктов деления, образованием пор при слиянии вакансий и увеличением объема пор под действием ГПД. При температурах свыше $0,5T_m$ увеличение объема обуславливается в основном увеличением объема пор под действием внутреннего давления газовых осколков деления и процессами слияния/укрупнения пор вследствие их миграции в поле градиента температур. Экспериментальные зависимости изменения объема диоксида урана от выгорания при разных температурах представлены на рис. 9.3.

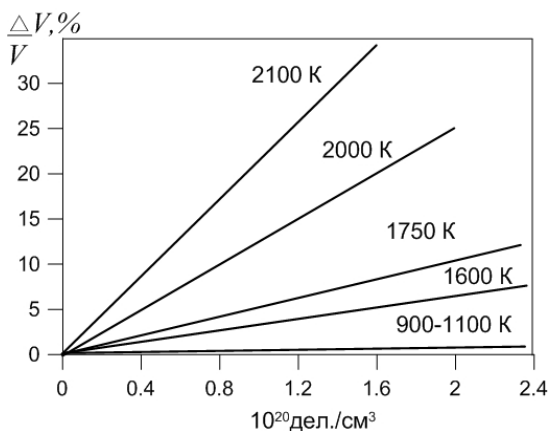


Рис. 9.3. Зависимость распухания UO_2 от выгорания при различных температурах

Следует отметить, что сложность и многообразие вышеперечисленных процессов распухания делящегося материала затрудняет создание какой-либо единой расчетной модели. Кроме того, распухание делящегося топливного материала сильно зависит от структуры и способа изготовления топлива. Все это снижает надежность теоретических оценок и требует большего числа экспериментальных исследований.

Распухание топливного материала (например, UO_2) во многих работах оценивается на основании установленных опытным путем соотношений, в которых скорость распухания считается пропорциональной скорости выгорания тяжелых ядер.

Таким образом, объемное распухание топлива связано с глубиной выгорания следующей эмпирической зависимостью:

$$\frac{\Delta V}{V} = K_T F t, \quad (9.13)$$

Здесь K_T – коэффициент пропорциональности, характеризующийся соотношением между распуханием и выгоранием; F – скорость выгорания тяжелых ядер, %/ч; t – временной параметр. Считается, что $K = 0,4$ при $\frac{\Delta V_{\text{топл}}}{V_{\text{топл}}} < p$, $K = 1,6$ при $\frac{\Delta V_{\text{топл}}}{V_{\text{топл}}} > p$, где p – пористость смешанного делящегося материала по топливу:

$$p = (1 - \psi_{\text{топл}}) / \psi_{\text{топл}}. \quad (9.14)$$

Например, доля топлива в твэле реактора АЭС (ВВЭР-1000) ψ обычно рассчитывается через плотность:

$$\psi_{\text{топл}} = \rho_{\text{табл}} / \rho_{\text{теор}}, \quad (9.15)$$

где $\rho_{\text{табл}}$ – плотность топливного сердечника, $\rho_{\text{теор}}$ – теоретическая плотность.

Таким образом, коэффициент пропорциональности $K = 0,4$ – до заполнения начальной пористости двуокиси, и $K = 1,6$ – после заполнения начальной пористости. Например, для окисного горючего

$UO_2 - K_T \approx 1$, $PuO_2 - K_T \approx 1,5$, $(PuO_2-UO_2) - K_T \approx 1$. Для карбидного топлива K_T колеблется в пределах 1,2 – 1,5. Заметим, что пользоваться подобными линейными зависимостями типа (9.13) можно лишь в случае, если имеются достаточно надежные экспериментальные данные. Вышеупомянутая зависимость экспериментально хорошо подтверждена только для окисного горючего. В некоторых работах отмечено, что набухание нитридного и карбидного горючего возрастает по параболическому закону, поэтому, вероятно, использование линейной зависимости (9.13) не всегда правомерно. В литературе также приводятся корреляционные уравнения, описывающие набухание карбидов и нитридов урана в зависимости от рабочих параметров и химического состава топлива. Так, набухание нитрида урана (UN) описывается уравнением

$$S = \frac{\Delta V}{V} = \Phi^{(0,25-27/(T-350)+78/(T-350)^2)} (T + 233) \times \quad (9.16)$$

$$\times 10^{-10} \exp[-0,015(T + 273) - 5100/(T + 273) + 32,6],$$

где Φ – флюенс нейтронов ($\bar{E} > 0,1$ МэВ), нейтрон/см²; T – температура, °С.

Эта формула справедлива для набухания при высоких температурах.

Для карбидного топлива предложена следующая зависимость:

$$\lg \frac{\Delta V}{V} = 1,494 \lg (T + 233) + \quad (9.17)$$

$$+ 1,227 \lg B + 0,366 \lg (4,8 - C) - 19,863,$$

где B – выгорание, МВт.сут/т; T – температура, °С; C – массовое содержание углерода в процентах, %.

В упомянутых монографиях [9] и [10] также предложено определять набухание оксидного топлива по следующим эмпирическим зависимостям:

при $T > 2200$ °С, $B = 0$

$$\frac{dS}{dt} = \exp\left(C_1 T^{1,75} / C_2^2\right); \quad (9.18)$$

при $T < 2200$ °C, $B \neq 0$

$$\frac{dS}{dt} = \exp\left(C_1 T^{1,75} / (C_2^2 + B)\right). \quad (9.19)$$

где C_1 и C_2 – константы, определяемые на основе экспериментальных данных.

Некоторые авторы в своих исследованиях рассматривали случаи равномерного распухания керамического уранового топлива со скоростью

$$\frac{dS}{dt} = 1,7 \cdot 10^{-5}, \quad 1/\text{ч}. \quad (9.20)$$

Для определения распухания топливных композиций и делящихся материалов при низких температурах (до 550 °C) можно использовать модель квазистатических газовых пор, предполагая, что поры в топливном материале при низких температурах малоподвижны и в среднем имеют одинаковый размер. В упомянутой выше работе автором также дается обобщение выведенных уравнений вычисления распухания для теорий пластичности типа Биргера. Следует отметить, что при отсутствии экспериментальных данных или их большом разбросе распухание топливных композиций можно также определить, воспользовавшись теорией распухания описанной в некоторых прикладных работах.

Таким образом, главные параметры, влияющие на распухание делящегося материала, – это скорость и глубина выгорания топлива, уровень и градиент температуры, геометрия и исходная пористость.

Необходимо подчеркнуть, что почти все перечисленные в данном разделе эмпирические и аналогичные им зависимости (как для конструкционных, так и для делящихся материалов) получены в основном для интегральных потоков, не превышающих 10^{23} нейтрон/см². При флюенсах больших 10^{23} нейтрон/см² можно ожидать значительного распухания (например, для оболочек твэлов

быстрых реакторов), в то же время возможно и наступления так называемого насыщения распухания. Также подчеркнем, что ни одна из приведенных выше зависимостей распухания не учитывает влияния суммарного флюенса нейтронов на процесс насыщения РР. Рядом отечественных и зарубежных авторов отмечено сильное влияние на распухание многочисленных факторов, главным образом металлургического и технологического характера. Следует отметить, что имеется небольшое число работ с экспериментальными данными для флюенса нейтронов свыше 10^{23} нейтрон/см², и поскольку распухание, как показано выше, определяется большим количеством параметров, то экстраполяция такой зависимости на большие интегральные потоки (свыше 10^{23} нейтрон/см²) ненадежна. Поэтому очень трудно предсказать поведение материалов при больших дозах облучения быстрыми нейтронами. Заметим, что некоторые из нежелательных побочных эффектов, связанных с распуханием, могут быть смягчены сопутствующим явлением ползучести под облучения.

Задание к лабораторной работе № 9. Используя общие сведения из теоретической части и результаты лабораторной работы № 2, определить необратимые радиационные деформации для случая конструкционного и тепловыделяющего материала: сталь и диоксид урана. Варианты геометрии твердого тела принять согласно указаниям табл. 1.1 к лабораторной работе № 1. Рассчитать общее формоизменение (суммарную объемную деформацию при нагреве и облучении) выбранного конструктивного элемента. Полученные значения для деформаций термического расширения твердого тела сравнить с решением термоупругой задачи в программном комплексе ANSYS или ABAQUS (см. лабораторную работу № 4).

Лабораторная работа № 10

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОРАДИАЦИОННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Задание: определить степень влияния интенсивного терморadiационного воздействия на общую картину распределения НДС твердого тела, состоящего из сплошной среды. Форма твердого тела, условия механического и температурного нагружения задаются

в соответствии с вариантом (табл. 4.1 лабораторной работы № 4). Рассмотреть случай радиационного облучения суммарным флюенсом до 10^{26} нейтрон/м². Основные определяющие соотношения механики сплошных сред представлены в приложении Г.

Указание 1. Очевидно, что наиболее простые оценочные решения таких задач получаются тогда, когда искомые функции зависят только от одной координаты, а определяющие уравнения в частных производных становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями. В общем случае такие уравнения не имеют точного аналитического решения, но могут быть решены численно-аналитическими методами. В этой связи наиболее удобной формой представления алгоритма реализации общих механико-математических моделей деформирования и численных схем определения НДС является стандартная программа, реализованная в виде процедур на современном алгоритмическом языке C++ или C#. Следует отметить, что в настоящее время система языка C#/C++ обеспечивает пользователям удобную интегрированную операционную среду, а также существенно облегчает профессиональное программирование, в котором определяющими параметрами являются скорость компиляции, высокое качество генерируемого кода и относительно малая потребляемость оперативной памяти. Использование алгоритмического языка в некоторой степени снижает барьер между профессиональным программистом и математиком-механиком, от которого требуются лишь минимальные знания основ программирования для того, чтобы организовать требуемую программу расчета с использованием отдельных процедур.

На основании математических моделей необходимо разработать пакет программ для современных персональных компьютеров. Разработанные отдельные коды для удобства проведения виртуальных (численных) экспериментов и дальнейшей обработки получаемых результатов необходимо свести в единую программу расчета, которую составляют основные файлы (функционально связанные между собой), объединенные в один управляющий .exe файл. Для этих целей рекомендуется использовать лицензионную программную среду Visual Studio 2011, которая бесплатно предоставляется компанией Microsoft на своих интернет-ресурсах (для использования в научно-исследовательских, некоммерческих целях).

Пример 1. Рассмотрим задачу о сжатом цилиндре с учетом тепловых и радиационных эффектов. Модельное тело подвергается внутреннему P_{int} и внешнему P_{ext} статическому давлению. Причем поверхности (в общем случае длинного тела двусвязной геометрии) облучаются равномерным нейтронным потоком суммарным флюенсом $\Phi(t)$ и подвергаются неравномерному нагреву до различных температур T_{ext} и T_{int} , как указано на рис. 10.1, б. Для сплошного цилиндра характерен частный случай, когда $R_{int} = 0$. Одномерную по пространству задачу будем рассматривать в полярных координатах.

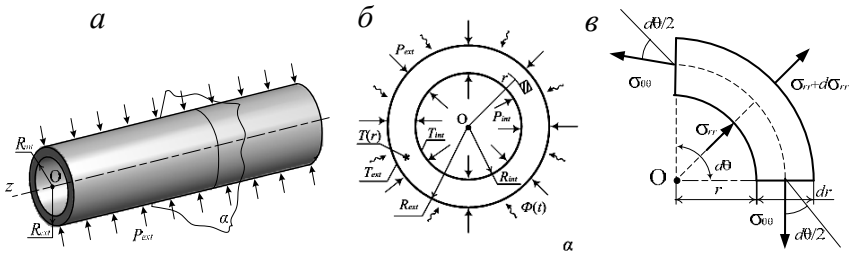


Рис. 10.1. Расчетная схема модельного тела:
 а, б – общая схема нагружения длинного тела двусвязной цилиндрической геометрии в – распределение напряжений

В случае зависимости НДС от одной полярной координаты r уравнение равновесия в радиальном направлении можно записать в виде (рис. 10.1, в)

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + r \frac{d\sigma_{rr}}{dr}. \quad (10.1)$$

Считаем модельное тело (рис. 10.1, а) настолько длинным, что напряжения и деформации во всех сечениях вдоль него постоянны в соответствии с принципом Сен-Венана. В таких условиях плоские сечения нормальные оси остаются плоскими, а осевая деформация в первом приближении равна нулю в любой момент времени. Влияние температуры и облучения будем учитывать, вводя дополнительные члены в уравнение обобщенного закона Гука, классической теории упругости, считая, что постоянные свойств материала, а именно модуль упругости, число Пуассона и коэффициент термиче-

ского расширения не зависят от терморadiационного воздействия. Как было показано в предыдущих лабораторных и практических работах, значения констант, входящих в определяющие уравнения мало зависят от уровня радиационного облучения. Кроме того, в данной задаче предполагается, что эти постоянные существенно не зависят от температуры. Используя условие аддитивности деформаций, выражаем компоненты терморadiационных напряжений без учета ползучести:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left((1-\mu)\varepsilon_{rr} + \mu(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) - (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s)(1+\mu) \right); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left((1-\mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \mu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) - (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s)(1+\mu) \right); \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left((1-\mu)\varepsilon_{zz} + \mu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) - (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s)(1+\mu) \right).\end{aligned}\quad (10.2)$$

Связь деформаций и радиальных перемещений для условий плоской деформации:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = 0. \quad (10.3)$$

Принимая во внимание соотношения (10.2) и (10.4), перепишем (10.1) в перемещениях

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right] = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \frac{d}{dr} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s). \quad (10.4)$$

Уравнение (10.4) интегрируется от внутреннего радиуса R_{int} до текущей материальной точки среды радиуса r , находящейся внутри облучаемого тела. Общее решение:

$$u(r) = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \frac{1}{r} \int_{R_{int}}^r (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \frac{Ar}{2} + \frac{B}{r}, \quad (10.5)$$

где $A/2$ и B – произвольные постоянные интегрирования, подлежащие определению из конкретных граничных условий задачи. Для нахождения этих постоянных имеем два условия: даны величины равномерного давления на внутренней и наружной поверхности:

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R_{\text{int}}} = -P_{\text{int}}; \quad \sigma_{rr}\Big|_{r=R_{\text{ext}}} = -P_{\text{ext}}. \quad (10.6)$$

Определяя по (10.5) и (10.3) полные деформации в радиальном и окружном направлениях

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1+\mu}{(1-\mu)} \left(\frac{-1}{r^2} \int_{R_{\text{int}}}^r (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \varepsilon^{th} + \varepsilon^s \right) + \frac{A}{2} - \frac{B}{r^2}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1+\mu}{(1-\mu)} \left(\frac{1}{r^2} \int_{R_{\text{int}}}^r (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr \right) + \frac{A}{2} + \frac{B}{r^2}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

а затем по первому равенству (10.2) для нахождения постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \times \\ &\times \left(\frac{2\mu^2 + \mu - 1}{(1-\mu)r^2} \int_{R_{\text{int}}}^r (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \frac{A}{2} - (1-2\mu) \frac{B}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Тогда граничные условия (10.6) для определения A и B в общем решении (10.5) примут вид

$$\begin{cases} \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{2\mu^2 + \mu - 1}{(1-\mu)R_{\text{int}}^2} \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{int}}} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \frac{A}{2} - (1-2\mu) \frac{B}{R_{\text{int}}^2} \right) = -P_{\text{int}}, \\ \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{2\mu^2 + \mu - 1}{(1-\mu)R_{\text{ext}}^2} \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \frac{A}{2} - (1-2\mu) \frac{B}{R_{\text{ext}}^2} \right) = -P_{\text{ext}}. \end{cases} \quad (10.9)$$

Из системы (10.9) находим окончательные значения постоянных для решения (10.5):

$$\frac{A}{2} = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)} \left(\frac{(P_{int} R_{int}^2 - P_{ext} R_{ext}^2)}{E} + \frac{1}{(1-\mu)} \int_{R_{int}}^{R_{ext}} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr \right), \quad (10.10)$$

$$B = \frac{(1+\mu)R_{int}^2}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)} \left(\frac{(P_{int} - P_{ext})R_{ext}^2}{E} + \frac{1}{(1-\mu)} \int_{R_{int}}^{R_{ext}} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr \right).$$

Причем в общем случае необходимо интегрирование терморационного члена в (10.10). Считая, что температурные и радиационные поля заданные величинами, можно воспользоваться процедурой численного интегрирования: интегралы от функций термического и радиационного распухания берем в квадратурах по формулам Симпсона или по формулам трапеций. Кстати, для линейного (термоупругого) случая решение можно получить в конечном виде по аналогии полученного, например, С. П. Тимошенко [3]. Внося (10.10) в (10.5) получим окончательные выражения для перемещений, деформаций (10.7) и напряжений (10.8) тела. Из этих решений легко получить частный случай для сплошного цилиндра, если принять во всех выражениях $R_{int} = 0$, сформировать дополнительное граничное условие (например, закрепить по центру) и положить $B = 0$, чтобы обеспечить регулярность решения при $r = 0$.

Кроме рассмотренного решения, когда принималось, что $\varepsilon_{zz} = 0$, существуют еще два важных случая, когда $\varepsilon_{zz} \neq 0$ (константа): во-первых, случай открытых торцов $F_z = 0$ (условие отсутствия продольной силы) и, во-вторых, случай полого цилиндрического тела с закрытыми концами ($F_z = \pi R_{int}^2 P_{int}$). Так как полное осевое усилие в любом сечении W равно

$$F_z = \iint_W \sigma_{zz} r dW. \quad (10.11)$$

Тогда для любого цилиндрического сечения справедливо следующее равенство:

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} \sigma_{zz} r dr d\theta = 2\pi \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} \sigma_{zz} r dr. \quad (10.12)$$

Подставляя в (10.12) осевое напряжение, после преобразования, используя (10.1), имеем

$$F_z = 2\pi\mu \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} \left(2r\sigma_{rr} + r^2 \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right) dr - \\ - 2\pi E \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \pi E (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2) \varepsilon_{zz}. \quad (10.13)$$

С учетом граничных условий (10.6), соотношение (10.13) можно частично проинтегрировать (взяв определенный интеграл от первого, чисто механического слагаемого)

$$F_z = 2\pi\mu (P_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 - P_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2) - \\ - 2\pi E \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \pi E (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2) \varepsilon_{zz}. \quad (10.14)$$

Из последнего соотношения можно вычислить постоянную осевой деформации.

Таким образом, в случае когда $\varepsilon_{zz} \neq 0$, значение обобщенной плоской деформации можно определить из (10.14) путем подстановки соответствующих величин, определяющие зависимости которых записаны выше. Тогда соотношения для определения обобщенного терморadiационного НДС примут окончательный вид:

$$u(r) = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \frac{1}{r} \int_{R_{\text{int}}}^r (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \frac{Ar}{2} + \frac{B}{r} - \frac{\mu}{E} Cr,$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{E}{1-\mu} \frac{1}{r^2} \int_{R_{\text{int}}}^r (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{A}{2(1-2\mu)} - \frac{B}{r^2} \right), \quad (10.15)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\mu} \frac{1}{r^2} \int_{R_{\text{int}}}^r (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr - \frac{E}{1-\mu} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) + \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{A}{2(1-2\mu)} + \frac{B}{r^2} \right),$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{E}{1-\mu} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) + \frac{\mu EA}{(1-2\mu)(1+\mu)} + C,$$

где величина равномерного осевого напряжения C равна

$$C = -\frac{\mu A}{(1-2\mu)(1+\mu)} + \frac{2E}{(R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)(1-\mu)} \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \frac{F_z}{\pi(R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)},$$

а A и B даны в (10.10).

Для сплошного цилиндра ($0 \leq r \leq R_{\text{ext}}$) выражение основных характеристик обобщенного плоско-деформированного состояния может быть получено из (10.15), если устремить нижний предел к нулю ($R_{\text{int}} \rightarrow 0$) и принять $B = 0$, что обеспечит регулярность решения при $r = 0$. Если это решение подчинить краевым условиям, соответствующим сплошному цилиндру при наличии распределения температуры, облучения, бокового давления P_{ext} и осевой силы F_z (в которой учитываются как член C , так и напряжения, порождаемые условиями плоской деформации), то выражения для напряжений будут определяться аналогично, как и в предыдущем случае.

Поэтому, не приводя промежуточных выкладок, даем окончательный результат, который легко получить как следствие из (10.15). Таким образом, для сплошного цилиндра напряжения равны

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1-\mu)} \left(\frac{1}{R_{ext}^2} \int_0^{R_{ext}} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr \right) - P_{ext};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\mu)} \left(\frac{1}{R_{ext}^2} \int_0^{R_{ext}} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr - (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) \right) - P_{ext}; \quad (10.16)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1-\mu)} \left(\frac{2}{R_{ext}^2} \int_0^{R_{ext}} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr - (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) \right) + \frac{F_z}{\pi R_{ext}^2}.$$

Пример 2. Рассмотрим решение вышеизложенной задачи с учетом терморadiационной ползучести. При таком расчете необходимо знать закон ползучести, т. е. аналитическую зависимость всех параметров (напряжения, времени, температуры, флюенса и деформации или скорости деформации ползучести), характеризующих этот необратимый процесс или средние значения деформаций ползучести для данного момента времени. Ранее мы искали компоненты полной деформации цилиндра, исходя из трех слагаемых – радиационного распухания, температурного расширения и упругих частей этих компонентов, определяющих напряжения в твердом теле. Теперь, в случае наличия эффектов вязкости, разности между компонентами полной деформации и суммой перечисленных слагаемых должны дать компоненты деформаций терморadiационной ползучести. Определяющее дифференциальное уравнение деформирования (10.5) с учетом ползучести примет вид

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right] = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \frac{d}{dr} (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) + \left(\frac{1-2\mu}{1-\mu} \right) \left(\frac{d\varepsilon_{rr}^c}{dr} + \frac{\varepsilon_{rr}^c}{r} - \varepsilon_{\theta\theta}^c \right). \quad (10.17)$$

Основной трудностью интегрирования (10.17) является вычисление интегралов от нелинейных деформаций. Для разрешения этой

проблемы необходимо аппроксимировать подинтегральную функцию ползучести. С помощью итерационной аппроксимации, сведем нелинейный процесс деформирования к решению ряда линейных задач для каждого момента времени. Предположим, что средние значения компонентов деформаций термического расширения, радиационного распухания и ползучести до определенного времени известны. Принимая во внимание тот факт, что для твердого тела как при термической, так и при радиационной ползучести характерно изменение формы без заметного изменения объема (дисторсия), общее решение уравнения (10.17) в каждый момент времени будет выражаться соотношением

$$u(r) = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \frac{1}{r} \int_{R_{\text{int}}}^r (\varepsilon^{th} + \varepsilon^s) r dr + \tag{10.18}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1-2\mu}{1-\mu} \right) \left(r \int_{R_{\text{int}}}^r \frac{(\varepsilon_{rr}^c - \varepsilon_{\theta\theta}^c)}{r} dr - \frac{1}{r} \int_{R_{\text{int}}}^r \varepsilon_{zz}^c r dr \right) + \frac{Ar}{2} + \frac{B}{r} - \frac{\mu Cr}{E},$$

где A, B, C – новые постоянные интегрирования (для сплошного цилиндра $B = 0$).

Для дальнейшей аппроксимации подинтегральных функций разобьем сечение цилиндрического тела на множество участков по радиусу (радиальные кольцевые зоны). Причем, учитывая нелинейность уравнения, получить конечное решение можно лишь в предположении, что $\varepsilon_{rr}^c, \varepsilon_{\theta\theta}^c, \varepsilon_{zz}^c, \varepsilon^s, \varepsilon^{th}$ постоянны для каждой интегрируемой зоны, а количество таких зон для обеспечения приемлемой точности решения должно быть как можно больше. На рис. 10.2 показана расчетная схема: сечение длинного цилиндрического тела разделено на кольцевые участки вдоль радиальной оси.

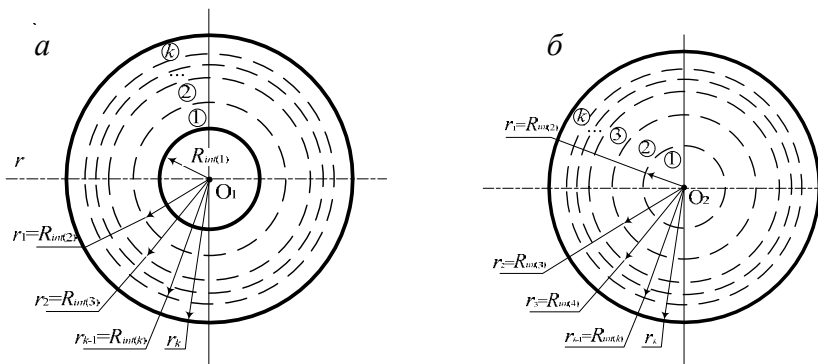


Рис. 10.2. Схема разбиения сечения полого (а) и сплошного (б) длинного цилиндрического тела на радиальные зоны

Уравнение (10.18) интегрируется от внутреннего радиуса каждой k -й радиальной зоны $R_{\text{int}(k)}$ до точки с радиусом r на ее поверхности. Если разбиение частое, то свойства материала внутри k -й радиальной зоны считаются постоянными и не зависящими от температуры и уровня облучения (радиальный размер, в пределах которого применяются уравнения, очень малым). В таком случае искомые радиальные перемещения внутри k -го кольцевого участка в данный момент времени для жесткого закрепления будут

$$u(r) = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \frac{r_k^2 - R_{\text{int}(k)}^2}{2r} (\varepsilon_k^{\text{th}} + \varepsilon_k^s) + \frac{1}{2} \left(\frac{1-2\mu}{1-\mu} \right) \left(\frac{R_{\text{int}(k)}^2 - r_k^2}{2r} \varepsilon_{zz(k)}^c + (\varepsilon_{rr(k)}^c - \varepsilon_{\theta\theta(k)}^c) r \ln \frac{r_k}{R_{\text{int}}} \right) + \frac{A_k r}{2} + \frac{B_k}{r}, \quad (10.19)$$

где k – целочисленный параметр, характеризующий номер конкретной радиальной зоны ($1 \leq k \leq K$, K – число радиальных зон); $r = r_k = R_{\text{int}} + kh$ – внешняя граница k -ой зоны; h – толщина зоны разбиения; A_k , B_k – некоторые константы интегрирования по k -й

зоне (для сплошного цилиндра $B_k = 0$ при $k = 1$). Условие непрерывности на границах радиальных зон определяется равенством радиальных напряжений и перемещений на стыке областей:

$$\sigma_{rr}(R_{\text{int}(k)}) = \sigma_{rr}(r_{k-1}), \quad u(R_{\text{int}(k)}) = u(r_{k-1}). \quad (10.20)$$

Дальнейшее решение сводится к поиску констант интегрирования A_k, B_k . Для их определения выражение (10.19) по соотношениям Коши (10.3) подставляется в одномерные по пространству физические уравнения. Это приводит к зависимости радиальной компоненты тензора напряжения как функции от неизвестных величин A_k, B_k и известных параметров: компонент неупругих деформаций, а также границ интегрируемой зоны ($R_{\text{int}(k)}$ и $r = r_k$). Полученные равенства дают систему из $2k$ алгебраических уравнений, общий вид которых будут определять граничные условия и условия непрерывности на границах зон:

$$\sigma_{rr}(R_{\text{int}(1)}) = -P_{\text{int}}, \quad \sigma_{rr}(R_{\text{int}(2)}) = \sigma_{rr}(r_1), \quad u(R_{\text{int}(2)}) = u(r_1), \dots, \quad (10.21)$$

$$\sigma_{rr}(R_{\text{int}(k)}) = \sigma_{rr}(r_{k-1}), \quad u(R_{\text{int}(k)}) = u(r_{k-1}), \quad \sigma_r(r_k) = -P_{\text{ext}}.$$

Таким образом, в общем случае мы имеем $2k$ уравнений с $2k$ неизвестными. Теперь из системы (10.20) теперь можно однозначно определить любые две постоянные интегрирования A_k, B_k общего решения (10.19) для каждой k -й радиальной зоны. Аналогично строится решение для сплошного цилиндрического тела, приняв в (10.19) $R_{\text{int}(1)} = 0$, а линейную систему из $2k$ уравнений для определения констант интегрирования получаем, заменив первое условие (10.25) на равенство нулю радиальных перемещений вдоль центральной оси. Поскольку граничные условия для определения A_k, B_k используются в каждой радиальной зоне, то распределение перемещений $u(r)$ является функцией компонент деформаций $\varepsilon_{rr}^c, \varepsilon_{\theta\theta}^c, \varepsilon_{zz}^c, \varepsilon^s, \varepsilon^{th}$ и равномерного механического давления (P_{int} и P_{ext}) в каждой кольцевой области. Дополнительные условия на границе модельного тела приводят к зависимости перемещений также от продольной деформации ε_{zz} и осевой силы F_z . Причем ε_{zz} – неиз-

вестная, вычисляемая величина, например, по изложенной выше схеме на основе условия баланса осевых сил (10.11), но с учетом ползучести. Т. е. получаем, что искомые функции (перемещения) будут зависеть от целого ряда параметров, в общем случае $u = u \left[r_k, \varepsilon_k^{th}, \varepsilon_k^s, \varepsilon_{rr}(k), \varepsilon_{\theta\theta}(k), \varepsilon_{zz}(k), P_{int}, P_{ext}, F_{z(k)}, \varepsilon_{zz}(k) \right]$.

Указание 2. При выполнении лабораторной работы № 10 можно использовать механико-математические модели [9] для тел сферической и цилиндрической геометрии (включая и тонкостенные оболочки и пластины) в условиях нагрева и облучения.

Указание 3. Для построения математической (расчетной) модели рекомендуется использовать метод конечных разностей, метод конечных элементов, вариационные или вариационно-разностные методы. Перед проведением расчетов необходимо обосновать сходимость вычислительного процесса, а также экономичность и эффективность используемого метода.

Указание 4. Решение требуется реализовать в виде компьютерной программы. Обеспечить ввод данных пользователем, загрузку/сохранение информации, визуализацию расчета НДС в виде двумерных графиков, создание базы данных расчета.

Указание 5. При рассмотрении задачи о НДС бесконечной тонкой пластины, ослабленной круговым отверстием (задача Кирша), считать, что тело, находящееся в естественном ненапряженном состоянии, подвергается воздействию интенсивного радиационного облучения и механического нагружения (одностороннее растягивающее). Обратите внимание, что геометрия задачи такова, что в ней удобнее рассматривать цилиндрическую систему координат $r\theta z$. Ось z совпадает с центром отверстия, а оси r, θ лежат в плоскости перпендикулярной оси z (рис. 10.3). Таким образом, учитывая характер нагрузки, предположить, что имеем дело с плоским напряженным состоянием [1], причем главные оси тензора напряжения и тензора деформаций совпадают с направлением координатных осей: σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ зависят только от r , а компонента напряжений $\sigma_{zz} = 0$ (тело находится в условиях плоского напряженного состояния).

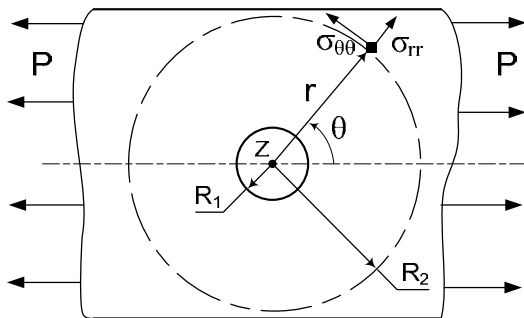


Рис. 10.3. Геометрия тонкой пластины с отверстием

Для того чтобы построить решение задачи, можно вырезать окружностью радиуса R_2 , имеющей общий центр с малой окружностью радиуса R_1 , из пластинки такую часть, что напряжения по окружности радиуса R_2 почти не будут отличаться от напряжений в пластинке без отверстия. Таким образом, задача об одноосном растяжении прямоугольной пластинки силой P сводится к расчету пластинки в виде кольца (рис. 10.4) с учетом термосилового воздействия в условиях интенсивного облучения.

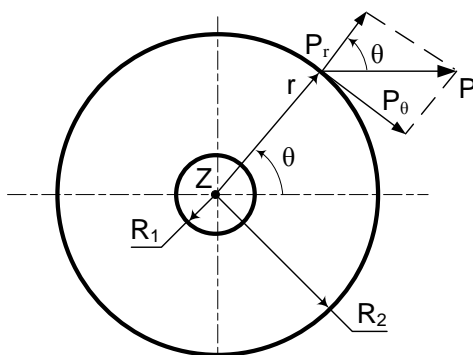


Рис. 10.4. Схема решения задачи

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1979. – 744 с.
2. Чигарев, А. В. ANSYS для инженеров : справочное пособие / А. В. Чигарев, А. С. Кравчук, А. Ф. Смалюк. – М. : Машиностроение : Машиностроение-1, 2004. – 511 с.
3. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
4. Ивлев, Д. Д. Математическая теория пластичности / Д. Д. Ивлев, А. Ю. Ишлинский. – М. : Физматлит, 2003. – 701 с.
5. Коларов, Д. Механика пластических сред / Д. Коларов, А. Балтов, Н. Бончева. – М. : Наука, 1979. – 302 с.
6. Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях : в 2 т. / под ред. Г. С. Писаренко. – Киев : Наук. думка, 1980.
7. Рябов, В. М. Действие излучения на конструкционные материалы / В. М. Рябов. – 2-е изд., доп. – М. : МЭИ, 1990. – 58 с.
8. Писаренко, Г. С. Прочность и пластичность материалов в радиационных потоках / Г. С. Писаренко. – Киев : Наук. думка, 1979. – 284 с.
9. Куликов, И. С. Прочность элементов конструкций при облучении / И. С. Куликов, В. Б. Нестеренко, Б. Е. Тверковкин. – Минск : Навука і тэхніка, 1990. – 143с.
10. Куликов, И. С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / под ред. В. Б. Нестеренко. – Минск : Наука и техника, 1984. – 103 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Рекомендации по оформлению отчетов по лабораторным и практическим работам

1. Отчет должен содержать следующие структурные части: титульный лист (приложение Б); оглавление; введение; цель работы; основную часть, разбитую на теоретическую и практическую главы; описание использованных методов, оборудования, материалов и т.д., а также сущность и основные результаты исследования; краткие выводы; список использованных литературных и других источников; приложения (при необходимости).

2. Титульный лист отчета оформляется по форме согласно форме приложения Б.

3. В раздел «Приложения» включается вспомогательный материал. В этот раздел включаются: промежуточные математические доказательства, формулы и расчеты, оценки погрешности измерений; исходные тексты компьютерных программ и краткое их описание; таблицы и иллюстрации вспомогательного характера и т.д.

4. Отчет печатается с использованием компьютера и принтера на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210x297 мм). Допускается представлять таблицы и иллюстрации на листах формата А3 (297x420 мм).

5. Набор текста осуществляется с использованием текстового редактора Word. При этом рекомендуется использовать шрифты типа Times New Roman размером 13–14 пунктов, межстрочный интервал должен составлять 15 пунктов. В случае вставки в строку формул допускается увеличение межстрочного интервала. Устанавливаются следующие размеры полей: верхнего и нижнего – 20 мм, левого – 30 мм, правого – 10 мм. Шрифт печати должен быть прямым, светлого начертания, четким, черного цвета, одинаковым по всему объему текста отчета. Разрешается использовать компьютерные возможности акцентирования внимания на определениях, терминах, теоремах, важных особенностях, применяя разное начертание шрифта: курсивное, полужирное, курсивное полужирное, выделение с помощью рамок, разрядки, подчеркивания и другое.

6. Опечатки и графические неточности, обнаруженные в тексте отчета, допускается исправлять подчисткой или закрашиванием бе-

лой краской и нанесением на том же месте исправленного текста (графиков) машинописным или рукописным способами.

7. Нумерация страниц дается арабскими цифрами. Первой страницей отчета является титульный лист, который включают в общую нумерацию страниц. На титульном листе номер страницы не ставят, на последующих листах номер проставляют в центре нижней части листа без точки в конце.

8. Нумерация разделов, подразделов, пунктов, рисунков, таблиц, формул, уравнений дается арабскими цифрами без знака «№». В конце нумерации разделов, подразделов, пунктов, а также их заголовков точку не ставят.

9. Иллюстрации (фотографии, рисунки, чертежи, схемы, диаграммы, графики) и таблицы служат для наглядного представления характеристик объектов исследования, полученных теоретических и (или) экспериментальных данных и выявленных общих закономерностей.

10. Иллюстрации и таблицы следует располагать непосредственно на странице с текстом после абзаца, в котором они упоминаются впервые, или отдельно на следующей странице. Они должны быть расположены так, чтобы их было удобно рассматривать без поворота отчета или с поворотом по часовой стрелке. Иллюстрации и таблицы, которые расположены на отдельных листах отчета, включают в общую нумерацию страниц. Если их размеры больше формата А4, их размещают на листе формата А3 и учитывают как одну страницу.

11. Иллюстрации должны быть выполнены с помощью компьютерных технологий либо чернилами на белой непрозрачной бумаге. Качество иллюстраций должно обеспечивать возможность их четкого копирования. Допускается использовать в качестве иллюстраций распечатки с компьютерных программ, а также иллюстрации в цветном исполнении.

12. Иллюстрации, как правило, имеют наименование и пояснительные данные (подрисуночный текст), располагаемые по центру страницы. Пояснительные данные помещают под иллюстрацией, а со следующей строки – слово «Рис.», номер и наименование иллюстрации, отделяя «точкой» номер от наименования. Точку в конце нумерации и наименований иллюстраций не ставят.

Например:

СХЕМА ДЕФОРМИРОВАНИЯ

1 – станина со столом; 2 – матрица; 3 – пуансон; 4 – плоские элементы;
5 – условная диаграмма необратимого деформирования
конструкционных материалов

Рис. 1. Принципиальная схема прессования металлов

13. Цифровой материал отчета оформляют в виде таблиц. При оформлении таблиц необходимо руководствоваться следующими правилами: допускается применять в таблице шрифт на 1-2 пункта меньший, чем в тексте отчета; не следует включать в таблицу графу «Номер по порядку». При необходимости нумерации показателей, включенных в таблицу, порядковые номера указывают в боковике таблицы непосредственно перед их наименованием; таблицу с большим количеством строк допускается переносить на следующий лист. При переносе части таблицы на другой лист ее заголовок указывают один раз над первой частью, слева над другими частями пишут слово «Продолжение». Если в отчете несколько таблиц, то после слова «Продолжение» указывают номер таблицы, например: «Продолжение таблицы 2»; таблицу с большим количеством граф допускается делить на части и помещать одну часть под другой в пределах одной страницы, повторяя в каждой части таблицы боковик. Заголовок таблицы помещают только над первой частью таблицы, а над остальными пишут «Продолжение таблицы» или «Окончание таблицы» с указанием ее номера; таблицу с небольшим количеством граф допускается делить на части и помещать одну часть рядом с другой на одной странице, отделяя их друг от друга двойной линией и повторяя в каждой части головку таблицы. Допускается нумеровать графы арабскими цифрами, если необходимо давать ссылки на них по тексту отчета; заголовки граф, как правило, записывают параллельно строкам таблицы. При необходимости допускается располагать заголовки граф параллельно графам таблицы.

14. Формулы и уравнения в отчете (если их более одной) нумеруют в пределах текста отчета. При оформлении формул и уравне-

ний необходимо соблюдать следующие правила: формулы и уравнения следует выделять из текста в отдельную строку. Выше и ниже каждой формулы и уравнения оставляется по одной свободной строке; если формула или уравнение не умещаются в одну строку, они должны быть перенесены после знака равенства (=) или после знаков плюс (+), минус (-), умножения (x) и деления (:). При этом повторяют знак в начале следующей строки; ссылки на формулы по тексту отчета дают в скобках; пояснение значений символов и числовых коэффициентов, входящих в формулу или уравнение, следует приводить непосредственно под формулой или уравнением в той же последовательности, в какой они даны в формуле (уравнении). Значение каждого символа и числового коэффициента следует давать с новой строки. Первую строку пояснения начинают со слов «где» без двоеточия.

15. Ссылки на источники в тексте отчета осуществляются путем приведения номера в соответствии с библиографическим списком. Номер источника по списку заключается в квадратные скобки или помещается между двумя косыми чертами. Сведения об источниках печатают с абзачного отступа. В списке использованных источников после номера ставят точку. Содержание сведений об источниках должно соответствовать ГОСТ 7.11–2004.

16. Раздел «Приложения» оформляют в конце отчета либо в виде отдельной части (книги), располагая их в порядке появления ссылок в тексте отчета. Не допускается включение в приложение материалов, на которые отсутствуют ссылки в тексте отчета. Каждое приложение следует начинать с нового листа с указанием в правом верхнем углу слова «ПРИЛОЖЕНИЕ», напечатанного прописными буквами. Приложение должно иметь содержательный заголовок, который размещается с новой строки по центру листа с прописной буквы. Приложения обозначают заглавными буквами русского алфавита, начиная с А (за исключением букв Ё, З, Й, О, Ч, Ь, Ы, Ъ), например: ПРИЛОЖЕНИЕ А, ПРИЛОЖЕНИЕ Б, ПРИЛОЖЕНИЕ В.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Пример оформления титульного листа отчета по лабораторным работам

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский национальный технический университет

Машиностроительный факультет

Кафедра «Теоретическая механика»

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 7

«Исследование влияния терморadiационного воздействия
на физико-механические свойства твердых тел»

Выполнил:
студент группы 103911
Иванов Иван Иванович
дата, подпись

Принял:
преподаватель, ФИО
дата, подпись

Отметка о защите
работы _____
дата, подпись

Минск, 2014

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Распределение температурных полей в твердых телах с внутренними источниками тепла и без внутреннего тепловыделения

1. Сплошной шар с постоянной плотностью источников тепла, охлаждаемый с внешней поверхности:

$$T(r) = \frac{q_V}{6\lambda} (R_H^2 - r^2) + T_H.$$

2. Полый шар с постоянной плотностью источников тепла, охлаждаемый с внешней поверхности:

$$T(r) = \frac{q_V}{6\lambda} (R_H^2 - r^2) + \frac{q_V R_B^3}{3\lambda} \left(\frac{1}{R_H} - \frac{1}{r} \right) + T_H.$$

3. Сплошной цилиндр с источниками тепла, охлаждаемый с внешней поверхности:

$$T(r) = \frac{q_V}{4\lambda} (R_H^2 - r^2) + T_H.$$

4. Полый цилиндр с источниками тепла, охлаждаемый внутренней и наружной поверхностями:

$$T(r) = \frac{q_V}{4\lambda} (R_H^2 - r^2) + \left[\frac{q_V}{4\lambda} (R_H^2 - R_B^2) + T_H - T_B \right] \frac{\ln \frac{r}{R_B}}{\ln \frac{R_H}{R_B}} + T_B.$$

Координата максимального значения температуры:

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{\frac{4\lambda}{q_V} (T_H - T_B) + R_H^2 - R_B^2}{2 \ln \frac{R_H}{R_B}}}.$$

5. Полюй цилиндр с источниками тепла, охлаждаемый с внутренней поверхности:

$$T(r) = \frac{q_V R_H^2}{4\lambda} \left[\frac{r^2 - R_B^2}{R_H^2} + \ln \left(\frac{r}{R_B} \right)^2 \right] + T_B.$$

6. Полюй цилиндр с источниками тепла, охлаждаемый с наружной поверхности:

$$T(r) = \frac{q_V R_B^2}{4\lambda} \left[\frac{R_H^2 - r^2}{R_B^2} + \ln \left(\frac{r}{R_H} \right)^2 \right] + T_H.$$

7. Пластина с источниками тепла, охлаждаемая с двух сторон:

$$T(x) = \frac{q_V}{2\lambda} (\delta x - x^2) + \frac{T_2 - T_1}{\delta} x + T_1.$$

Координата максимального значения температуры:

$$x_{\max} = \frac{T_2 - T_1}{q_V} \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\delta}{2}.$$

8. Пластина с источниками тепла, охлаждаемая с одной стороны (тепловой поток направлен по оси абсцисс и равен нулю в плоскости, проходящей через начало координат):

$$T(r) = \frac{q_V}{2\lambda} (\delta^2 - x^2) + T_2.$$

9. Пластина без источников тепла:

$$T(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{\delta} + T_1.$$

Если известен тепловой поток q_S в направлении оси X , также справедливо:

$$T(x) = \frac{q_S}{\lambda} x + T_1 \text{ и } T(x) = -\frac{q_S}{\lambda} (x - \delta) + T_2.$$

10. Полый цилиндр без источников тепла*, охлаждаемый с внутренней поверхности:

$$T(r) = \frac{q_S}{\lambda} R_H \ln\left(\frac{r}{R_B}\right) + T_B.$$

* q_S – тепловой поток, подводимый с наружной поверхности цилиндра.

11. Полый цилиндр без источников тепла, охлаждаемый с наружной поверхности:

$$T(r) = \frac{q_S}{\lambda} R_B \ln\frac{R_H}{r} + T_H.$$

где q_S – тепловой поток, подводимый с внутренней поверхности цилиндра.

Если известны одновременно температуры наружной и внутренней поверхностей полого цилиндра, то формулы для 10 и 11 случаев могут быть преобразованы к одному из следующих тождественных выражений соответственно:

$$T(r) = \frac{T_H - T_B}{\ln\frac{R_H}{R_B}} \ln\frac{r}{R_B} + T_B,$$

$$T(r) = \frac{T_H - T_B}{\ln\frac{R_H}{R_B}} \ln\frac{r}{R_H} + T_H.$$

12. Полый шар без источников тепла, охлаждаемый снаружи:

$$T(r) = \frac{q_S R_B^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_H} \right) + T_H,$$

где q_S – тепловой поток, подводимый с внутренней поверхности.

Если известна температура внутренней поверхности шара, то формулу для случая 12 можно получить в следующем виде:

$$T(r) = \frac{T_H - T_B}{\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_H}} \left(\frac{1}{R_H} - \frac{1}{r} \right) + T_H$$

или

$$T(r) = \frac{T_H - T_B}{\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_H}} \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{r} \right) + T_B.$$

**Основные соотношения механики деформируемого
твёрдого тела**

1. НДС любой конструкции описывается в **прямоугольных координатах** следующей системой уравнений равновесия (движения):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0 \quad \left(\text{или } \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{yz}}{\partial z} + \rho Y = 0 \quad \left(\text{или } \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{zz}}{\partial z} + \rho Z = 0 \quad \left(\text{или } \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{array} \right. \quad (1)$$

Через X, Y, Z обозначены проекции на координатные оси объемной силы, отнесенной к единице массы; ρ – плотность материала тела. Граничные условия задаются равенствами:

$$F_x = \sigma_{xx}l + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n, \quad F_y = \sigma_{yx}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{yz}n, \quad F_z = \sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + \sigma_{zz}n, \quad (2)$$

где F – составляющие вектора поверхностных нагрузок; l, m, n – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке.

Компоненты деформаций в декартовых координатах записываются через компоненты перемещений (соотношения Коши):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты деформаций (3) связаны условиями совместности (неразрывности) деформаций (условия сплошности среды):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x}; \end{aligned} \quad (4)$$

В другой системе координат уравнения механики сплошной среды имеют иной вид.

2. В цилиндрической системе координат дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + P = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + Q = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + R = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где P, Q, R – проекции объемной силы, отнесенные к единице объема на координаты оси r, θ, z .

В цилиндрической системе координат $r\theta z$ компоненты деформации записываются через компоненты смещения u, v, w (u_r, u_θ, u_z) следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \\ \gamma_{\theta z} &= 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zr} = 2\varepsilon_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения совместности деформаций и граничные условия задаются равенствами (7) и (8):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial r \partial z} = 0; \\
 & r \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta z}}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial z} = 0; \\
 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta r})}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} \right) - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} = 0; \\
 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} - r \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{\varepsilon_{\theta z}}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \left(\frac{1}{r} \varepsilon_{zz} \right) = 0; \\
 & \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_{\theta z}) \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (r^2 \varepsilon_{r\theta}) - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\varepsilon_{rz}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} = 0; \\
 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta z})}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta r})}{\partial r \partial \theta} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r \partial z} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} = 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \sigma_{rr} \cos(n, r) + \sigma_{r\theta} \cos(n, \theta) + \sigma_{rz} \cos(n, z) = F_r, \\
 & \sigma_{\theta r} \cos(n, r) + \sigma_{\theta\theta} \cos(n, \theta) + \sigma_{\theta z} \cos(n, z) = F_\theta, \\
 & \sigma_{zr} \cos(n, r) + \sigma_{z\theta} \cos(n, \theta) + \sigma_{zz} \cos(n, z) = F_z.
 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Здесь $\cos(n, r)$, $\cos(n, \theta)$, $\cos(n, z)$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности в рассматриваемой точке; F_r , F_θ , F_z – проекции равномерной силовой нагрузки, приложенной к поверхности; n – единичный вектор внешней нормали к границе поверхности.

2.1. При использовании в плоской задаче *полярных координат* $r\theta$ уравнения равновесия имеют следующий вид (неосесимметричное плоско-деформированное состояние):

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}; \quad \gamma_{r\theta} = 2\varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\vartheta}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = C, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\sigma_{rr} \cos(n, r) + \sigma_{r\theta} \cos(n, \theta) = F_r, \quad \sigma_{\theta r} \cos(n, r) + \sigma_{\theta\theta} \cos(n, \theta) = F_\theta. \quad (11)$$

2.2. В случае осесимметричной деформации:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + P = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + R = 0. \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr}}{r} = 0; \quad r \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial z} + r \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} = 0. \quad (13)$$

2.3. Плоское осесимметричное деформированное состояние (радиальное или одномерное осесимметричное НДС) в случае отсутствия объемных сил описывается равенствами:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + P = 0; \quad \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr}}{r} = 0; \quad (14)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = C.$$

C – некоторая постоянная осевой деформации ($\varepsilon_{zz} = C$), определяемая из условия баланса осевых сил (случай однородного деформированного состояния).

3. В сферической системе координат $r\theta\varphi$ уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2\sigma_{rr} - (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}) + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta] + P_r = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\sigma_{\theta r} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta] + P_\theta = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\sigma_{\varphi r} + 2\sigma_{\varphi\theta} \operatorname{ctg} \theta] + P_\varphi = 0; \end{cases} \quad (15)$$

В системе координат $r\theta\varphi$ компоненты деформаций записываются через компоненты смещения u, v, w (u_r, u_θ, u_φ) следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} + \frac{u_r}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}; \quad \gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}; \\ \gamma_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь u_r, u_θ, u_φ – составляющие вектора смещения по осям сферической системы координат.

**Связь между основными физическими константами
для упругого тела**

Постоянные	Формулы перехода для систем (основная пара)				
	(E, μ)	(ν, G)	(K, G)	(E, G)	(G, μ)
Модуль упругости E	E	$\frac{G(3\nu + 2G)}{G + \nu}$	$\frac{9KG}{3K + G}$	E	$2(1 + \mu)G$
Коэффициент Пуассона μ	μ	$\frac{\nu}{2(G + \nu)}$	$\frac{3K - 2G}{6K + 2G}$	$\frac{E}{2G} - 1$	μ
Модуль сдвига G	$\frac{E}{2(1 + \mu)}$	G	G	G	G
Постоянная Ламе ν	$\frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}$	ν	$K - \frac{2}{3}G$	$\frac{G(E - 2G)}{3G - E}$	$\frac{2G\mu}{1 - 2\mu}$
Коэффициент объемного расширения K	$\frac{E}{3(1 - 2\mu)}$	$\nu + \frac{2}{3}G$	K	$\frac{EG}{3(3G - E)}$	$\frac{2G(1 + \mu)}{3(1 - 2\mu)}$

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Термические напряжения в телах простых форм с источниками тепла, равномерно распределенными по объему

Форма тела	Условия охлаждения	p	R	Функция распределения напряжений	Напряжения в центре или на внутренней поверхности	Напряжения на наружной поверхности
Сплошной шар	Тепло отводится равномерно с поверхности	$\frac{q_V R_H^2}{6\lambda}$	$\frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{q_V R_H^2}{6\lambda}$	$\frac{\sigma_r}{R} = \frac{2}{5} \left[2 \left(\frac{r}{R_H} \right)^2 - 1 \right]; \quad \frac{\sigma_r}{R} = \frac{2}{5} \left[\left(\frac{r}{R_H} \right)^2 - 1 \right]$	$\frac{\sigma_r}{R} = -\frac{2}{5}$	$\frac{\sigma_r}{R} = \frac{2}{5};$ $\sigma_r = 0$
Полый шар	Тепло отводится равномерно с внешней поверхности	$\frac{q_V R_H^2}{6\lambda}$	$\frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{q_V R_H^2}{6\lambda}$	$\frac{\sigma_r}{R} = \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 \times \left[\frac{6}{5} \frac{R_B}{R_H} \frac{1}{5} \left(\frac{R_H}{R_B} \right)^2 \right] \times \left[\frac{2 + \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^3}{r} + \frac{R_B}{r} \frac{4}{5} \left(\frac{r}{R_B} \right)^2 - \frac{12}{5} \right];$ $\frac{\sigma_r}{R} = 2 \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 \times \left[\frac{6}{5} \frac{R_B}{R_H} \frac{1}{5} \left(\frac{R_H}{R_B} \right)^2 \right] \times \left[\frac{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^3}{r} + \frac{R_B}{r} \frac{1}{5} \left(\frac{r}{R_B} \right)^2 - \frac{6}{5} \right]$	$\frac{\sigma_r}{R} = 3 \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 + 3 - \frac{18}{5} \frac{\left(\frac{R_B}{R_H} \right)^5}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^3};$ $\sigma_r = 0$	$\frac{\sigma_r}{R} = 2 \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^3 + 4 - \frac{18}{5} \frac{\left(\frac{R_B}{R_H} \right)^5}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^3};$ $\sigma_r = 0$

x – координата по толщине пластины; q_V – плотность объемного энерговыделения; r – координата шара и цилиндра; δ – толщина пластины; λ – коэффициент теплопроводности; R_H – радиус наружной поверхности; α – коэффициент термического расширения; R_B – радиус внутренней поверхности; E – модуль упругости; T_H – температура наружной поверхности; μ – коэффициент Пуассона; T_B – температура внутренней поверхности; σ_r , σ_t , σ_z – соответственно тангенциальные, радиальные и осевые напряжения.

<p>Полый цилиндр</p>	<p>Тепло отводится равномерно с внутренней и внешней поверхностей</p>	$\frac{\sigma_x}{R} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{r}{R_H} \right)^2 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 + \left(\frac{R_B}{r} \right)^2 + 1 \right] \times \left[1 - \frac{1 - (R_B / R_H)^2}{\ln(R_H / R_B)} \right] \times \left[\ln \left(\frac{r}{R_B} \right) + 1 \right] + \frac{T_H - T_B}{2P} \times \left[\frac{1 + (R_B / r)^2}{1 - (R_B / R_H)^2} - \frac{\ln(r / R_B) + 1}{\ln R_B} \right];$ $\frac{\sigma_r}{R} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{r}{R_H} \right)^2 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 - \left(\frac{R_B}{r} \right)^2 + 1 \right] - \frac{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \times \ln r + \frac{T_H - T_B}{2P} \times \left[1 - \left(\frac{R_B}{r} \right)^2 \frac{\ln \frac{r}{R_B}}{\ln \frac{R_H}{R_B}} \right];$ $\frac{\sigma_z}{R} = \left(\frac{r}{R_H} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 \frac{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \times \left[\ln \left(\frac{r}{R_B} \right) + 1 \right] + \frac{T_H - T_B}{P} \times \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2} - \frac{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \right].$	$\frac{\sigma_x}{R} = \frac{\sigma_z}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \times \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2} - \frac{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \right];$ $\sigma_r = 0$	$\frac{\sigma_x}{R} = \frac{\sigma_z}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \times \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2} - \frac{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \right];$ $\sigma_r = 0$
<p>Полый цилиндр</p>	<p>Тепло отводится равномерно с внутренней и внешней поверхностей</p>	$\frac{\sigma_x}{R} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{r}{R_H} \right)^2 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 + \left(\frac{R_B}{r} \right)^2 + 1 \right] \times \left[1 - \frac{1 - (R_B / R_H)^2}{\ln(R_H / R_B)} \right] \times \left[\ln \left(\frac{r}{R_B} \right) + 1 \right] + \frac{T_H - T_B}{2P} \times \left[\frac{1 + (R_B / r)^2}{1 - (R_B / R_H)^2} - \frac{\ln(r / R_B) + 1}{\ln R_B} \right];$ $\frac{\sigma_r}{R} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{r}{R_H} \right)^2 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 - \left(\frac{R_B}{r} \right)^2 + 1 \right] - \frac{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \times \ln r + \frac{T_H - T_B}{2P} \times \left[1 - \left(\frac{R_B}{r} \right)^2 \frac{\ln \frac{r}{R_B}}{\ln \frac{R_H}{R_B}} \right];$ $\frac{\sigma_z}{R} = \left(\frac{r}{R_H} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 \frac{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \times \left[\ln \left(\frac{r}{R_B} \right) + 1 \right] + \frac{T_H - T_B}{P} \times \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2} - \frac{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \right].$	$\frac{\sigma_x}{R} = \frac{\sigma_z}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \times \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2} - \frac{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \right];$ $\sigma_r = 0$	$\frac{\sigma_x}{R} = \frac{\sigma_z}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \times \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2} - \frac{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)}{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)} \right];$ $\sigma_r = 0$

Форма тела	Условия охлаждения:	p	R	Функция распределения напряжений	Напряжения в центре или на внутренней поверхности	Напряжения на наружной поверхности
Полый цилиндр	Тепло отдается равномерно с внешней поверхности	$q_n \frac{R_H^2}{4\lambda}$	$\frac{E\alpha \cdot q_n R_H^2}{1-\mu} \cdot 4\lambda$	$\frac{\sigma_r}{R} = \frac{1}{4} \left[3 \left(\frac{r}{R_H} \right)^2 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 - \left(\frac{R_B}{r} \right)^2 - 5 \right] +$ $1 + \left(\frac{R_B}{r} \right)^2 \ln \frac{R_H}{r} - \ln \frac{r}{R_B};$ $+ \frac{\left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 \ln \frac{R_H}{R_B} - \ln \frac{r}{R_B}}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2};$ $\frac{\sigma_z}{R} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{r}{R_H} \right)^2 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 + \left(\frac{R_B}{r} \right)^2 - 1 \right] +$ $1 - \left(\frac{R_B}{r} \right)^2 \ln \frac{R_H}{r} - \ln \frac{r}{R_B};$ $+ \frac{\left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 \ln \frac{R_H}{R_B} - \ln \frac{r}{R_B}}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2};$ $\frac{\sigma_t}{R} = \left(\frac{r}{R_H} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 - \frac{3}{2} + \frac{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)^2}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2} -$ $-\ln \left(\frac{r}{R_B} \right)^2$	$\frac{\sigma_r}{R} = \frac{\sigma_z}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 - \frac{3}{2} +$ $\frac{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)^2}{1 - \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2};$ $\sigma_r = 0$	$\frac{\sigma_r}{R} = \frac{\sigma_z}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 - \frac{1}{2} +$ $\frac{\ln \left(\frac{R_H}{R_B} \right)^2}{\left(\frac{R_B}{R_H} \right)^2 - 1};$ $\sigma_r = 0$
Пластина	Тепло отдается равномерно с обеих сторон	$q_n \delta^2 / 2\lambda$	$\frac{E\alpha \cdot q_n \delta^2}{1-\mu} \cdot 2\lambda$	$\frac{\sigma_r}{R} = \frac{1}{6} \left[x^2 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$	$\frac{\sigma_r}{R} = -\frac{1}{12}$ (в среднем сечении)	$\frac{\sigma_r}{R} = \frac{1}{6}$

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Лабораторная работа № 1	
Расчет НДС в конструктивных элементах при механическом нагружении средствами виртуального моделирования.....	5
Задачи для практической работы.....	29
Лабораторная работа № 2	
Температурный расчет простейших конструктивных элементов.....	40
Лабораторная работа № 3	
Расчет термических напряжений в конструктивных элементах простой формы.....	47
Задачи для практической работы.....	55
Лабораторная работа № 4	
Расчет термоупругих напряжений в виртуальной среде ANSYS Workbench.....	61
Лабораторная работа № 5	
Механико-математические модели упругопластических твердых тел.....	78
Задачи для самостоятельной практической работы.....	89
Лабораторная работа № 6	
Деформационное упрочнение материалов и эффект Баушингера.....	95
Лабораторная работа № 7	
Исследование влияния терморadiационного воздействия на физико-механические свойства твердых тел.....	110
Лабораторная работа № 8	
Изменение кратковременных и длительных свойств материалов при терморadiационном воздействии.....	120
Лабораторная работа № 9	
Расчет необратимых деформаций радиационного распухания в конструктивных и топливных (делящихся) материалах.....	129
Лабораторная работа № 10	
Определение терморadiационных напряжений в конструктивных элементах.....	141

Литература.....	155
<i>Приложение А.</i> Рекомендации по оформлению отчетов по лабораторным и практическим работам	156
<i>Приложение Б.</i> Пример оформления титульного листа отчета по лабораторным работам.....	160
<i>Приложение В.</i> Распределение температурных полей в твердых телах с внутренними источниками тепла и без внутреннего тепловыделения.....	161
<i>Приложение Г.</i> Основные соотношения механики деформируемого твердого тела.....	165
<i>Приложение Д.</i> Термические напряжения в телах простых форм с источниками тепла, равномерно распределенными по объему.....	171

Учебное издание

ШИРВЕЛЬ Павел Иванович

МЕХАНИКА НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Методическое пособие к лабораторным работам

В 2 частях

Часть 1

Редактор *Л. Н. Шалаева*

Компьютерная верстка *А. Г. Занкевич*

Подписано в печать 27.02.2014. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 10,23. Уч.-изд. л. 8,00. Тираж 50. Заказ 1011.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65.220013, г. Минск.