



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный
технический университет**

Кафедра «Машины и технология обработки металлов давлением»

А. В. Мазурёнок

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ
ДАВЛЕНИЕМ**

Учебно-методическое пособие

**Минск
БНТУ
2014**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Машины и технология обработки металлов давлением»

А. В. Мазурёнок

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ
ДАВЛЕНИЕМ

Учебно-методическое пособие по дисциплине
«Математическое моделирование технологических процессов»
для студентов специальности 1-36 01 05
«Машины и технология обработки материалов давлением»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области машиностроительного
оборудования и технологий*

Минск
БНТУ
2014

УДК 621.73:519.87(075.8)

ББК 34.5я7

М13

Рецензенты:

А. К. Гавриленя, А. Н. Давидович

Мазурёнок, А. В.

М13 Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением : учебно-методическое пособие по дисциплине «Математическое моделирование технологических процессов» для студентов специальности 1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением» / А. В. Мазурёнок. – Минск : БНТУ, 2014. – 80 с.

ISBN 978-985-550-290-7.

В издании излагаются основы математического моделирования процессов обработки металлов давлением. Теоретический материал иллюстрируется примерами решения задач.

УДК 621.73:519.87(075.8)

ББК 34.5я7

ISBN 978-985-550-290-7

© Мазурёнок А. В., 2014

© Белорусский национальный
технический университет, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Изучение дисциплины «Математическое моделирование технологических процессов» дает инженеру необходимые знания в области создания методов достаточно точного количественного описания технологических процессов с учетом большого числа факторов, т. е. их математического моделирования и оптимизации.

Целью преподавания дисциплины является подготовка специалистов, способных использовать методы математического моделирования широкого круга инженерных задач по обработке материалов с дальнейшим решением их аналитическим или численным методом.

Рассматриваемый курс связан с рядом естественно-научных, общепрофессиональных и специальных дисциплин: «Математика», «Физика», «Механика материалов», «Информатика», «Теоретическая механика», «Теория механизмов, машин и манипуляторов», «Теория обработки металлов давлением», «Расчеты и конструкции нагревательных устройств».

В результате освоения курса «Математическое моделирование технологических процессов» студент должен:

знать:

- методы построения математических моделей технологических процессов и машин обработки материалов давлением;
- алгоритмы и методы исследования математических моделей;
- численные методы программной реализации алгоритмов исследования математических моделей.

уметь:

- построить математическую модель процесса и оборудования;
- выбрать определенный алгоритм вычислительной математики для описания построенной модели;
- осуществить программную реализацию выбранного алгоритма;
- произвести численный расчет различных характеристик исследуемого технологического процесса или оборудования.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПОНЯТИЯ, МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

1.1. Определения математического моделирования

Математическое моделирование – это приближенное описание какого-либо класса явлений, выраженное с помощью математических символов и соотношений, с целью его познания и оптимизации.

Математическое моделирование технологического процесса обработки металлов давлением – это, в сущности, сведение исследования процесса пластической деформации обрабатываемого тела к анализу решения некоторой краевой задачи математической физики, т. е. к изучению распределения напряжений и деформаций, температурных полей, условий разрушения.

1.2. Основные понятия дисциплины

В основе современной теории обработки металлов давлением лежат основные понятия и методы механики сплошных сред, которая использует следующие абстрактные понятия [1].

Материальная точка – это тело пренебрежимо малых размеров, но конечной массы.

Роль материальной точки может играть центр инерции системы материальных точек, в котором считается сосредоточенной масса всей системы.

Абсолютно твердое тело – это совокупность материальных точек, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга.

Понятие абсолютно твердого тела допустимо в том случае, если можно пренебречь деформацией этого тела под действием приложенных нагрузок (например: инструмент).

Сплошная среда – это совокупность материальных точек, для которых допустимо изменение взаимного расположения.

К сплошным средам относятся твердые деформируемые, жидкие и газообразные тела, абстрактно представляемые в отвлеченных моделях идеально упругого тела, пластического тела, идеальной жидкости, вязкой жидкости, идеального газа и т. д. В теории ОМД сплошными средами описываются заготовки практически во всех процессах и инструмент в специальных процессах обработки материалов давлением.

Материальная частица – это элемент объема пренебрежимо малых размеров.

Движение материальной частицы описывается векторами перемещения, скорости, ускорения. В целом движение сплошной среды – бесконечного множества материальных частиц – описывается соответствующими векторными полями – полем вектора перемещения, полем вектора скорости, полем вектора ускорения.

Основной мерой взаимодействия тел или частей тела в механике является сила. Как правило, в механике сплошных сред рассматриваются распределенные силы, интенсивность которых называется **напряжением**. Напряженное состояние сплошной среды описывается тензорными полями.

В качестве основной гипотезы вводится

гипотеза о сплошности, которая гласит: «Реальные тела рассматриваются как материальный континуум, заполняющий пространство непрерывно».

Применение гипотезы о сплошности приводит нас к понятию области, заполненной сплошной средой.

Область D – это совокупность точек пространства, характеризуемая двумя свойствами:

- 1) если некоторая точка M принадлежит области, то все точки достаточно близкие к M , тоже принадлежат области;
- 2) любые две точки области можно соединить ломанной линией, целиком лежащей внутри области.

Граница области S представляет собой совокупность точек, в любой окрестности каждой из которых есть точки, как принадлежащие области, так и не принадлежащие ей.

Границей плоской области может быть замкнутая кривая или совокупность нескольких замкнутых кривых. Границей пространственной области может быть одна или несколько замкнутых поверхностей. Будем предполагать, что кривые или поверхности, ограничивающие область, либо гладкие, либо кусочно-гладкие.

В механике сплошных сред скаляры, векторы и тензоры, как правило, являются функциями координат и времени. Будем предполагать, что эти функции непрерывно дифференцируемы достаточное число раз по указанным переменным и, как следствие, ограничены вместе с производными в любой конечной области, заполненной сплошной средой.

1.3. Понятие краевой задачи

Математическая модель внутреннего механизма процесса ОМД представляется тремя группами уравнений: кинематическими зависимостями, законами сохранения и определяющими соотношениями.

Они не описывают условий взаимодействия тела с окружающей средой, его начального состояния. В связи с этим необходимо дополнительно рассматривать совокупность данных, определяющих начальное состояние тела (*начальные условия*) и описывающих влияние окружающей среды на протекание в теле процесса (*граничные условия*). Вместе они образуют условие единственности решения рассматриваемой задачи, объединяясь в понятие *краевых условий*. При этом имеются в виду «края» той пространственно-временной области, в условиях которой происходит исследуемый процесс. В результате мы приходим к понятию краевой задачи.

Поставить *краевую задачу* о движении сплошной среды в области D с границей S означает выбрать математическую модель среды, т. е. записать соответствующую замкнутую систему уравнений, и сформулировать начальные и граничные условия.

К начальным условиям относятся уравнения, описывающие распределение искомого давления, температур, скоростей в начальный момент времени. В некоторых случаях одних только начальных условий вполне достаточно для выделения определенного решения

(например, течение в неограниченной области). Примером задания начальных условий является широко используемая *гипотеза о первоначальном ненапряженном состоянии*.

Условия на границе S (известной или неизвестной при любом времени t) можно разделить на *механические* и *температурные*. К последним относятся уравнения, описывающие распределение температуры или условие теплоотдачи на границе тела.

1.4. Механические граничные условия

В механике различают три рода механических граничных условий.

Условия I рода – динамические граничные условия, при которых на границе тела S задают вектор поверхностных напряжений $\vec{\sigma}^n$, как известную функцию точки границы M и времени t :

$$\vec{\sigma}^n \Big|_S = \vec{f}(M, t), \quad M \in S.$$

Так, при движении сплошной среды можно рассматривать поверхности, называемые свободными, на которых поверхностные напряжения сводятся просто к атмосферному давлению.

Если среда находится в равновесии, то вышеприведенные условия не зависят от времени t и называются *статическими*.

Условия II рода – кинематические граничные условия, при которых на границе тела S задают вектор перемещений \vec{u} или скорости \vec{v} , как известную функцию точки границы M и времени t :

$$\vec{u} \Big|_S = \vec{f}(M, t) \quad \text{или} \quad \vec{v} \Big|_S = \vec{\varphi}(M, t), \quad M \in S.$$

В механике сплошной среды часто применяют в качестве кинематических граничных условий условия «прилипания», при которых отсутствует проскальзывание материальных частиц по касательной к границе:

$$\begin{cases} \vec{u}_{\text{среды}} = \vec{u}_{\text{пов}}, \\ \vec{v}_{\text{среды}} = \vec{v}_{\text{пов}}. \end{cases}$$

Условия III рода – **смешанные** граничные условия, при которых граница тела S состоит из двух частей ($S = S_1 \cup S_2$), и на одной части границы задают вектор перемещений \vec{u} или скорости \vec{v} , как известную функцию точки границы M и времени t , а на другой части – вектор поверхностных напряжений $\vec{\sigma}^n$, как известную функцию точки границы M и времени t :

$$\vec{u}|_{S_1} = \vec{f}_1(M, t) \quad \text{или} \quad \vec{v}|_{S_1} = \vec{\phi}_1(M, t), \quad M \in S_1;$$

$$\vec{\sigma}^n|_{S_2} = \vec{f}_2(M, t), \quad M \in S_2.$$

1.5. Механические граничные условия на примере внешнего трения

Для ОМД характерно трение скольжения, которое по своей природе существенно отличается от трения скольжения в узлах машин.

Рассмотрим элементарную площадку, расположенную на контактной поверхности, с нормалью \vec{n} (рис. 1.1). Вектор поверхностных напряжений $\vec{\sigma}^n$, действующий на площадке, представим в виде суммы двух векторов, вектора нормального давления \vec{p} и вектора напряжения трения $\vec{\tau}$:

$$\vec{\sigma}^n = \vec{p} + \vec{\tau}.$$

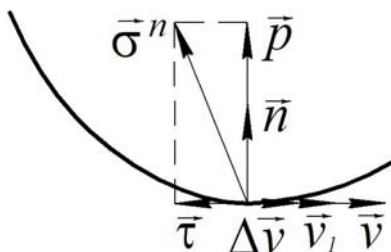


Рис. 1.1. Нормальные и касательные напряжения на контактной поверхности

Вектор \vec{p} направлен по внутренней нормальной к поверхности, его модуль p равен нормальной силе, действующей на единицу площади. Вектор $\vec{\tau}$ лежит в плоскости, касательной к поверхности, и направлен в сторону, противоположную вектору скольжения частиц металла относительно инструмента. Пусть \vec{v} – скорость частицы, \vec{v}_1 – скорость инструмента на рассматриваемой площадке, $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_1$ – скорость скольжения. Тогда

$$\vec{\tau} = -\tau \frac{\Delta\vec{v}}{|\Delta\vec{v}|} \Big|_{\text{на поверхности контакта металла и инструмента}},$$

где τ – модуль вектора напряжения трения; обычно называется просто напряжением трения.

Для определения τ практически используют два упрощенных закона:

– закон Амонтона-Кулона:

$$\tau = \mu p,$$

где μ – коэффициент трения;

– закон Прандтля (Зибеля):

$$\tau = f \sigma_s,$$

где σ_s – предел текучести обрабатываемого материала, а коэффициент f тоже часто условно называют коэффициентом трения.

Первое уравнение обычно используют для описания внешнего трения при холодной обработке металлов давлением, а второе – при горячей.

1.6. Методы решения краевых задач

После постановки краевой задачи необходимо перейти к математическому исследованию процесса. Для этого нужно получить *решение краевой задачи* – точное или приближенное.

Как правило, точное (*аналитическое*) решение удается получить при самой упрощенной постановке задачи для наиболее грубых и несложных моделей. На практике большие трудности связаны с описанием реологических свойств среды, моделирующей реальные свойства металлов и сплавов, условий трения и теплоотдачи на контактной поверхности тела. Все это приводит к необходимости применения *приближенных методов* решения задач с использованием вычислительной техники.

Однако нет оснований полагать, что приближенные методы целиком вытесняют аналитические. Точные аналитические решения, полученные для некоторых идеализированных задач (например, некоторые решения, полученные методом линий скольжения), позволяют полнее описать механизм изучаемого процесса, его зависимость от основных параметров. Это в свою очередь дает возможность лучше отработать алгоритм приближенного метода.

Точные решения можно использовать в качестве тестов, при отладке компьютерных программ, а также для контроля точности расчетов. Таким образом, приближенные и аналитические методы решения краевых задач должны разумно сочетаться при исследовании технологических процессов. И все же при всех оговорках приближенные методы решения краевых задач можно считать в настоящее время наиболее перспективным средством моделирования процессов обработки металлов давлением.

Основные проблемы, возникающие при численном моделировании:

- 1) дать четкое определение схемы приближенного метода;
- 2) сформулировать условия существования решения, его единственности и сходимости;
- 3) обосновать оценку погрешности приближенного решения.

Эти проблемы удается решать в рамках *функционального анализа* – одного из наиболее быстро развивающихся разделов современной математики.

Приближенных методов решения краевых задач теории обработки металлов давлением великое множество. Назовем только некоторые группы [3]:

- *итерационные методы;*
- *проекционные методы;*
- *методы разделения переменных;*
- *вариационные методы;*
- *методы теории функции комплексного переменного и теории комплексного потенциала и т. д.*

2. ТЕНЗОРЫ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

2.1. Основные задачи тензорного анализа

В механике сплошных сред изложение теории напряжений и деформаций, изучение связи между ними, как правило, проводится с применением *тензорного анализа* [2].

Основные задачи тензорного анализа:

1. Изучить влияние выбора системы координат на представление физических объектов.
2. Выделить так называемые *инварианты*, т. е. величины, которые не изменяют свое значение при переходе от одной системы координат к другой.
3. Изложить правила преобразования компонентов вектора или тензора при переходе от одной системы координат к другой.
4. Записать физические законы в *ковариантном виде*, т. е. уравнения должны сохранять свой вид и форму при произвольных преобразованиях координат.

2.2. Ортогональный базис

Выберем три взаимно ортогональных направления и отложим на них три вектора единичной длины $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, для которых выполняются соотношения

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0.$$

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называются *ортами*, если их длины равны единице, и они попарно перпендикулярны. Будем говорить, что они образуют *ортогональный базис* в рассматриваемом трехмерном пространстве, причем, если имеет место зависимость $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, то базис называется *правым*, если же $\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, то *левым*.

Как правило, в дальнейшем будем использовать правый базис.

Соответствующая базису система координатных осей x_1, x_2, x_3 называется **ортогональной прямолинейной (декартовой) системой координат**.

Возьмем произвольный ортогональный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Любой вектор \vec{a} может быть разложен по базисным ортам, т. е. можно записать

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Величины a_1, a_2, a_3 называются **компонентами** вектора \vec{a} , они представляют собой проекции вектора на оси x_1, x_2, x_3 .

2.3. Правила Эйнштейна

В дальнейшем будут часто встречаться выражения с индексами – верхними и нижними, например $a_i, b_{ik}, c_m^i, e_{jl}^{ik}$ и т. д.

Целесообразно, следуя Эйнштейну, ввести правила сокращенной записи таких выражений.

1. Каждый буквенный индекс, встречающийся в одночлене один раз, может принимать значения 1, 2, 3.

2. По дважды повторяющемуся в одночлене буквенному индексу проводится суммирование от 1 до 3.

Теперь, пользуясь правилами Эйнштейна, приведем в сжатой форме обозначение вектора $\vec{a} = (a_i)$ и правила действия над векторами, представленными своими компонентами:

– сложение векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = (a_i + b_i);$$

– умножение вектора на скаляр:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) = (\lambda a_i);$$

– скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i;$$

– векторное произведение векторов:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

2.4. Преобразования координат

Рассмотрим некоторый базис, образованный тройкой взаимно ортогональных векторов – ортов \vec{e}_i . Повернем базис в пространстве, оставим начало координат (точку O) неподвижным (рис. 2.1). Обозначим символом \vec{e}'_i орты, занявшие новое положение.

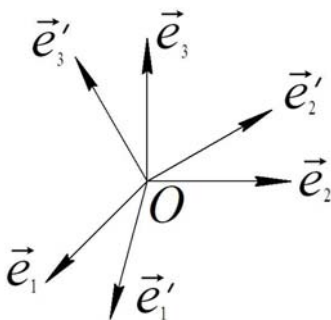


Рис. 2.1. Поворот базиса в пространстве

В результате мы получим две системы координат – «старую» (без штрихов) с ортами \vec{e}_i и «новую» (со штрихами) с ортами \vec{e}'_i , причем

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k; \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \quad (2.2)$$

Введем таблицу косинусов девяти углов, составленных новыми осями координат со старыми, назовем ее *таблицей направляющих косинусов*:

	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
\vec{e}'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
\vec{e}'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Из элементов таблицы косинусов составим матрицу, которую будем называть *матрицей Якоби*:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Здесь α_{ik} – косинус угла между i -м ортом «штрихованным» и k -м «нештрихованным»:

$$\alpha_{ik} = \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}_k) = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_k.$$

В связи с этим разложение нового орта \vec{e}'_i по старым ортам \vec{e}_k имеет следующий вид:

$$\vec{e}'_i = \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}_k) \vec{e}_k = \alpha_{ik} \vec{e}_k. \quad (2.3)$$

Отсюда, с учетом равенства (2.2), вытекают следующие *свойства матрицы Якоби*:

1. Сумма квадратов элементов любой строки равна единице.
2. Сумма попарных произведений соответствующих элементов, находящихся в различных двух строках, равна нулю.

Разложение «нештрихованного» орта \vec{e}_k по «штрихованным» \vec{e}'_i имеет вид

$$\vec{e}_k = \cos(\vec{e}_k, \vec{e}'_i) \vec{e}'_i = \alpha_{ik} \vec{e}'_i. \quad (2.4)$$

Отсюда, с учетом равенства (2.1), вытекают *следующие свойства матрицы Якоби*:

1. Сумма квадратов элементов любого столбца равна единице.
2. Сумма попарных произведений соответствующих элементов, находящихся в различных двух столбцах, равна нулю.

Пятое свойство матрицы Якоби следует из несжимаемости трехмерного пространства.

5. Определитель матрицы Якоби равен единице.

2.5. Определение тензора

Допустим, что нам задан некоторый вектор \vec{a} и, следовательно, известны его компоненты a_k в старом базисе \vec{e}_k . Рассмотрим, каким образом изменяются компоненты вектора \vec{a} с переходом к новому базису.

Имеем с учетом равенства (2.4)

$$\vec{a} = a_k \vec{e}_k = a_k (\alpha_{ik} \vec{e}'_i) = (\alpha_{ik} a_k) \vec{e}'_i.$$

В этом преобразовании мы сначала выразили старые орты \vec{e}_k через новые \vec{e}'_i , а затем произвели перегруппировку сомножителей. В результате, вспоминая, что в новой системе координат $\vec{a} = a'_i \vec{e}'_i$, получаем выражение для новых «штрихованных» компонентов вектора \vec{a} : $a'_i = \alpha_{ik} a_k$. Это позволяет дать новое определение вектора:

если для каждой декартовой системы координат нам дана совокупность трех величин a_k , преобразующихся при повороте базиса по закону

$$a'_i = \alpha_{ik} a_k,$$

то нам задан **одновалентный тензор**, или **тензор I ранга**, или **вектор**.

Обобщив это понятие, получим следующее определение:

если для каждой декартовой системы координат нам задана совокупность $3^2 = 9$ чисел a_{pq} , преобразующихся при повороте базиса по закону

$$a'_{ik} = \alpha_{ip} \alpha_{kq} a_{pq},$$

то нам задан **двухвалентный тензор**, или **тензор II ранга**, или **тензор**.

Числа a_{pq} будем называть **компонентами** тензора, а тензор обозначать следующим образом: $T_A = [a_{pq}]$, $T_B = [b_{ik}]$ и т. д.

Тензор первой валентности будем в дальнейшем называть вектором, а тензор второй валентности – просто тензором. Очевидно, скаляр является тензором нулевой валентности.

Каждому тензору в принятой системе координат соответствует матрица, образованная компонентами тензора. Так, тензору $T_A = [a_{pq}]$ соответствует матрица $A = (a_{pq})$. Следует помнить, что если матрица – таблица чисел, несвязанная с системой координат, то компоненты тензора существенным образом зависят от выбора базиса, поэтому *одному и тому же тензору в различных системах координат будут соответствовать различные матрицы*.

2.6. Некоторые действия над тензорами

Действия над тензорами сводятся к соответствующим действиям над матрицами, составленными из компонент тензоров. Полученная в результате матрица есть матрица нового тензора. К ним относятся:

– сложение тензоров:

$$T_C = T_A + T_B,$$

где матрица $C = A + B$;

– умножение тензора на скаляр:

$$T_B = \lambda \cdot T_A,$$

где матрица $B = \lambda \cdot A$;

– умножение тензора на тензор (скалярное):

$$T_C = T_A \cdot T_B,$$

где матрица $C = A \cdot B$.

Пусть A – матрица направляющих косинусов при повороте базиса вокруг начала координат (матрица Якоби), тогда компоненты тензора в новой системе координат

$$T'_\sigma = A \cdot (T_\sigma \cdot A^T). \quad (2.5)$$

2.7. Главные направления и главные компоненты тензора

Результатом умножения тензора T_σ на вектор \vec{y} является вектор. Если в результате умножения направление вектора не меняется, а изменяется лишь его длина, т. е. $T_\sigma \cdot \vec{y} = \lambda \cdot \vec{y}$, то этот вектор \vec{y} называется **главным направлением** тензора T_σ , а λ – его **главной компонентой**.

Проблема поиска главных направлений и главных компонентов тензора T_σ , сводится к решению характеристического уравнения его матрицы:

$$|\sigma_{ik} - \lambda \cdot \delta_{ik}| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Найдя три корня характеристического уравнения, мы узнаем три главные компоненты этого тензора.

Для каждого симметричного тензора имеются три взаимно ортогональные главные направления, соответствующие им главные компоненты – действительные числа.

Тензор в пространстве главных направлений представлен диагональной матрицей, ненулевыми элементами которой являются главные компоненты тензора:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

2.8. Инварианты тензора

Очевидно, что главные компоненты тензора, как и его главные направления, не должны зависеть от выбора системы координат. Поэтому коэффициенты характеристического уравнения

$$\lambda^3 - \sigma^I \lambda^2 + \sigma^{II} \lambda - \sigma^{III} = 0, \quad (2.6)$$

также не зависят от этого выбора и называются **инвариантами тензора**:

– **линейный (первый) инвариант** равен сумме диагональных элементов матрицы, представляющей тензор в текущей системе координат, или сумме его главных компонентов

$$\sigma^I = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

– **квадратичный (второй) инвариант** равен сумме определителей главных миноров матрицы, представляющей тензор в текущей системе координат, или сумме попарных произведений главных компонентов тензора

$$\sigma^{\text{II}} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3;$$

– **кубический (третий) инвариант** равен определителю матрицы, представляющей тензор в текущей системе координат, или произведению главных компонент тензора

$$\sigma^{\text{III}} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Примеры решения задач

Задача № 2.1. Тензор T_{σ} в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_{σ} в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг орта \vec{e}_1 .

Решение. Для нахождения компонентов тензора в новой системе координат воспользуемся (2.5). Чтобы записать матрицу Якоби, необходимо составить таблицу косинусов, для заполнения которой воспользуемся иллюстрацией (рис. 2.2).

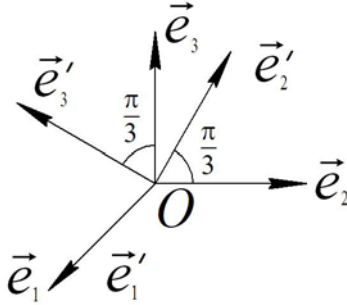


Рис. 2.2. Поворот базиса на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг орта \vec{e}_1

Таблица косинусов для данного случая будет иметь вид

	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}'_1	1	0	0
\vec{e}'_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
\vec{e}'_3	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Умножим тензор на транспонированную матрицу Якоби:

$$T_{\sigma} \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{3} \\ -2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Затем матрицу Якоби умножим на полученный результат и получим

$$T'_{\sigma} = A \cdot (T_{\sigma} \cdot A^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{3} \\ -2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Ответ: } T'_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}.$$

Проверка.

1. Симметричность тензора – это свойство физического объекта, поэтому в любой системе координат его должна представлять симметричная матрица.

2. Вычислим линейный инвариант $\sigma^I = 1 + 2 + 1 = 1 + \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 4$.

3. Вычислим квадратичный инвариант

$$\sigma^{II} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 2 + 1 = 1;$$

$$\sigma^{II} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \frac{7}{4} \end{vmatrix} = \frac{5}{4} - 1 + \frac{35}{16} - \frac{3}{16} + \frac{7}{4} - 3 = 1.$$

4. Вычислим кубический инвариант

$$\sigma^{\text{III}} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 - 4) = -2;$$

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{III}} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3} & \frac{7}{4} \end{vmatrix} + \\ &+ \sqrt{3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \frac{5}{4} \\ \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(\frac{35}{16} - \frac{3}{16} \right) + 1 \cdot \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{4} \right) + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{4} \right) = -2. \end{aligned}$$

Задача № 2.2. Записать тензор T_{σ} в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 3$

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Для нахождения компонентов тензора в пространстве главных направлений необходимо решить его характеристическое уравнение (2.6). Для того, чтобы записать конкретный вид характеристического уравнения, вычислим инварианты тензора

$$\sigma^{\text{I}} = 3 + 5 + 3 = 11;$$

$$\sigma^{\text{II}} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 1 + 15 + 9 = 38;$$

$$\sigma^{\text{III}} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (15 - 1) = 42.$$

Характеристическое уравнение для исследуемого тензора имеет вид

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 38\lambda - 42 = 0.$$

Поскольку известен один из корней, это кубическое уравнение можно разложить:

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 38\lambda - 42 = (\lambda - 3) \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 14) = 0.$$

Два других корня найдем, решив квадратное уравнение:
 $\lambda^2 - 8\lambda + 14 = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 14}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}.$$

Зная три корня характеристического уравнения тензора, можем записать его в пространстве главных направлений (в механике сплошной среды принято, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

$$\text{Ответ: } T_{\sigma}'' = \begin{bmatrix} 4 + \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Проверка.

1. Симметричность тензора – это свойство физического объекта, поэтому в любой системе координат его должна представлять симметричная матрица.

2. Вычислим линейный инвариант: $\sigma^I = 4 + \sqrt{2} + 3 + 4 - \sqrt{2} = 11$.

3. Вычислим квадратичный инвариант:

$$\begin{aligned}\sigma^{II} &= (4 + \sqrt{2}) \cdot 3 + 3 \cdot (4 - \sqrt{2}) + (4 + \sqrt{2}) \times \\ &\times (4 - \sqrt{2}) = 12 + 3\sqrt{2} + 12 - 3\sqrt{2} + 16 - 2 = 38.\end{aligned}$$

4. Вычислим кубический инвариант:

$$\sigma^{III} = (4 + \sqrt{2}) \cdot 3 \cdot (4 - \sqrt{2}) = 3 \cdot (16 - 2) = 42.$$

Контрольные задачи

Задача № 2.1.1. Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг орта \vec{e}_3 .

Задача №2.1.2. Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_{σ} в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг орта \vec{e}_1 .

Задача № 2.1.3. Тензор T_{σ} в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_{σ} в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг орта \vec{e}_2 .

Задача № 2.1.4. Тензор T_{σ} в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_{σ} в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг орта \vec{e}_3 .

Задача № 2.1.5. Тензор T_{σ} в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_{σ} в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг орта \vec{e}_1 .

Задача № 2.1.6. Тензор T_{σ} в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_{σ} в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг орта \vec{e}_2 .

Задача № 2.1.7. Тензор T_{σ} в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_{σ} в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг орта \vec{e}_3 .

Задача № 2.1.8. Тензор T_{σ} в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_{σ} в новой системе координат с базисом \bar{e}'_i , полученной поворотом базиса \bar{e}_i на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг орта \bar{e}_1 .

Задача № 2.1.9. Тензор T_{σ} в декартовой системе координат с базисом \bar{e}_i имеет компоненты

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_{σ} в новой системе координат с базисом \bar{e}'_i , полученной поворотом базиса \bar{e}_i на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг орта \bar{e}_2 .

Задача № 2.1.10. Тензор T_{σ} в декартовой системе координат с базисом \bar{e}_i имеет компоненты

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_{σ} в новой системе координат с базисом \bar{e}'_i , полученной поворотом базиса \bar{e}_i на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг орта \bar{e}_2 .

Задача № 2.2.1. Записать тензор T_{σ} в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 3$:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Задача № 2.2.2. Записать тензор T_{σ} в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 4$:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Задача № 2.2.3. Записать тензор T_{σ} в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 4$:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Задача № 2.2.4. Записать тензор T_{σ} в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 5$:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Задача № 2.2.5. Записать тензор T_{σ} в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 3$:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Задача № 2.2.6. Записать тензор T_{σ} в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 3$:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Задача № 2.2.7. Записать тензор T_{σ} в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 1$:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача № 2.2.8. Записать тензор T_{σ} в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 1$:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача № 2.2.9. Записать тензор T_{σ} в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 2$:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Задача № 2.2.10. Записать тензор T_{σ} в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 2$:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

3.1. Определения

Одной из первейших задач математического моделирования является построение аналитических функций, адекватно описывающих поведение модели. В то же время на практике мы можем получить только таблицу экспериментальных значений, отображающих поведение природы (т. е. табличную функцию).

С другой стороны, в процессе анализа математических моделей иногда получаются функции, которые неудобны для проведения дальнейших математических исследований (недифференцируемые, неинтегрируемые или трудно дифференцируемые, трудно интегрируемые). Поэтому возникает проблема замены одной функции $f(x)$ (дискретной или сложной) другой функцией $\varphi(x)$ (непрерывной, более простой, легко дифференцируемой и легко интегрируемой).

Приближение функции $f(x)$ более простой функцией $\varphi(x)$ называется **аппроксимацией** [4]. Близости этих функций добиваются путем введения в аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ свободных параметров c_0, c_1, \dots, c_n .

Пусть функция $f(x)$ задана таблицей значений, полученной из эксперимента или путем вычисления в последовательности значений аргумента x_0, x_1, \dots, x_n (табл. 3.1). Выбранные значения аргумента x называются **узлами таблицы**. Считаем, что узлы в общем случае не являются равноотстоящими.

Таблица 3.1

Таблица значений функции $f(x)$

x	$f(x)$
x_0	f_0
x_1	f_1
\dots	\dots
x_n	f_n

Введем аппроксимирующую функцию $\varphi(x, c_0, c_1, \dots, c_n)$ так, чтобы она совпадала с табличными значениями заданной функции $f(x)$ во всех узлах x_i :

$$\varphi(x_i, c_0, c_1, \dots, c_n) = f_i, \quad 0 \leq i \leq n \quad (3.1)$$

Свободные параметры c_i определяются из системы (3.1).

Подобный способ введения аппроксимирующей функции называется **лагранжевой интерполяцией**, а соотношения (3.1) – **условиями Лагранжа**.

Задачей **аппроксимации** считают нахождения приближенных значений табличной функции при аргументах x , не совпадающих с узловыми. Если значение аргумента x расположено между узлами $x_0 \leq x \leq x_n$, то нахождение приближенного значения функции $f(x)$ называют **интерполяцией**; если аппроксимирующую функцию вычисляют вне интервала $[x_0, x_n]$, то процесс называют **экстраполяцией**.

3.2. Интерполяция каноническим полиномом

Выберем в качестве аппроксимирующей функции полином $P_n(x)$ степени n в каноническом виде:

$$\varphi(x) = P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n. \quad (3.2)$$

Свободными параметрами интерполяции c_i являются коэффициенты полинома (3.2). Интерполяция полиномами обладает такими преимуществами, как простота вычисления их значений, дифференцирования и интегрирования.

Коэффициенты c_i определяются из условий Лагранжа:

$$P_n(x_i) = f_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

или

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \dots + c_nx_0^n = f_0, \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \dots + c_nx_1^n = f_1, \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \dots + c_nx_n^n = f_n. \end{cases} \quad (3.3)$$

Относительно неизвестных свободных параметров c_i система (3.3) является системой линейных алгебраических уравнений. Расширенная матрица системы называется расширенной **матрицей Вандермонда** и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & f_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & f_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & f_n \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Определитель матрицы Вандермонда отличен от нуля, если среди узлов x_i нет совпадающих, следовательно, система (3.3) в таком случае имеет единственное решение.

Преимущества интерполяционного канонического полинома – удобен для проведения дальнейших математических исследований, легко дифференцируем, легко интегрируем. *Недостаток* – слишком много промежуточных вычислений.

3.3. Интерполяция полиномом Лагранжа

Пусть табл. 3.1 задает $(n+1)$ значений функции $f(x)$ в узлах x_i . Лагранж предложил следующую форму интерполяционного полинома

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & f_0 \cdot \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \times \dots \times \frac{x-x_k}{x_0-x_k} \times \dots \times \frac{x-x_n}{x_0-x_n} + \\
 & + f_1 \cdot \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \times \dots \times \frac{x-x_k}{x_1-x_k} \times \dots \times \frac{x-x_n}{x_1-x_n} + \dots + \\
 & + f_k \cdot \frac{x-x_0}{x_k-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_k-x_1} \times \dots \times \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} \times \dots \times \frac{x-x_n}{x_k-x_n} + \dots + \\
 & + f_n \cdot \frac{x-x_0}{x_n-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_n-x_1} \times \dots \times \frac{x-x_k}{x_n-x_k} \times \dots \times \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Старшая степень аргумента x в полиноме Лагранжа равна n , так как каждое произведение в формуле (3.5) содержит n сомножителей $(x-x_j)$. В узлах $x=x_k$ выполняются условия Лагранжа, потому что в сумме (3.5) остается по одному слагаемому, равному f_k , остальные обращаются в нуль за счет нулевых сомножителей в произведениях.

Недостатки интерполяционного полинома Лагранжа – неудобен для проведения дальнейших математических исследований, трудно дифференцируем, трудно интегрируем. *Преимущество* – нет промежуточных вычислений. Практическое применение полинома Лагранжа оправдано в тех случаях, когда интерполяционная функция вычисляется в сравнительно небольшом количестве точек x .

3.4. Интерполяционный полином Ньютона

В случаях возникновения погрешностей в табл. 3.1 на границах эксперимента имеет смысл использовать один из видов интерполяционного полинома Ньютона. Первый вариант имеет вид:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \\
 & + A_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Равносильный вариант полинома можно записать при симметричной перенумерации узлов и значений функции исходной таблицы:

$$P_n(x) = B_n + B_{n-1}(x - x_n) + B_{n-2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + B_0(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1). \quad (3.7)$$

Коэффициенты полиномов (3.6) и (3.7) определяются из условий Лагранжа

$$P_n(x_i) = f_i, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (3.8)$$

Рассмотрим вывод значений коэффициентов полинома (3.6). Для полинома (3.7) вывод значений коэффициентов происходит аналогично.

Полагаем $x = x_0$, тогда в формуле (3.6) все слагаемые, кроме A_0 , обращаются в 0, следовательно,

$$A_0 = f_0. \quad (3.9)$$

Затем полагаем $x = x_1$, тогда по условию (3.8) $f_1 = f_0 + A_1(x_1 - x_0)$, откуда находим коэффициент

$$A_1 = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} = f_{01}, \quad (3.10)$$

который называется **разделенной разностью первого порядка**. Величина f_{01} близка к первой производной функции $f(x)$ при малом расстоянии между узлами x_0 и x_1 .

При $x = x_2$ полином (3.6) согласно условиям (3.8) принимает вид

$$f_2 = f_0 + f_{01}(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

откуда

$$A_2 = \frac{f_2 - f_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f_{01}}{x_2 - x_1},$$

обозначим

$$f_{02} = \frac{f_0 - f_2}{x_0 - x_2},$$

тогда получим

$$A_2 = \frac{f_{01} - f_{02}}{x_1 - x_2} = f_{012}.$$

Величина f_{012} называется **разделенной разностью второго порядка**, которая при близком расположении узлов x_0, x_1, x_2 будет пропорциональна второй производной $f(x)$.

Аналогичным образом при $x = x_3$ находим коэффициент

$$A_3 = \frac{f_{012} - f_{013}}{x_2 - x_3} = f_{0123},$$

где $f_{013} = \frac{f_{01} - f_{03}}{x_1 - x_3}$;

$$f_{03} = \frac{f_0 - f_3}{x_0 - x_3}.$$

Для коэффициента A_k методом математической индукции запишем

$$A_k = \frac{f_{01\dots(k-1)} - f_{01\dots(k-2)k}}{x_{k-1} - x_k}. \quad (3.11)$$

Для $n = 4$ заполним таблицу:

x	$f(x)$	1	2	3	4
x_0	f_0	–	–	–	–
x_1	f_1	$f_{01} = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$	–	–	–
x_2	f_2	$f_{02} = \frac{f_0 - f_2}{x_0 - x_2}$	$f_{012} = \frac{f_{01} - f_{02}}{x_1 - x_2}$	–	–
x_3	f_3	$f_{03} = \frac{f_0 - f_3}{x_0 - x_3}$	$f_{013} = \frac{f_{01} - f_{03}}{x_1 - x_3}$	$f_{0123} = \frac{f_{012} - f_{013}}{x_2 - x_3}$	–
x_4	f_4	$f_{04} = \frac{f_0 - f_4}{x_0 - x_4}$	$f_{014} = \frac{f_{01} - f_{04}}{x_1 - x_4}$	$f_{0124} = \frac{f_{012} - f_{014}}{x_2 - x_4}$	$f_{01234} = \frac{f_{0123} - f_{0124}}{x_3 - x_4}$

Для построения интерполяционного полинома Ньютона используются только диагональные элементы вышеприведенной таблицы находящиеся в ячейках с жирными границами.

Пример решения задачи

Задача № 3.1. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
2	2
3	2,6
4	3,5
6	5

Построить интерполяционный полином Ньютона.

Решение. Для нахождения коэффициентов полинома Ньютона для приведенной таблицы экспериментальных данных, необходимо найти разделенные разности до третьего порядка. Для этого заполним таблицу:

x	$f(x)$	1	2	3
2	2	–	–	–
3	2,6	$f_{01} = \frac{2-2,6}{2-3} = 0,6$	–	–
4	3,5	$f_{02} = \frac{2-3,5}{2-4} = 0,75$	$f_{012} = \frac{0,6-0,75}{3-4} = 0,15$	–
6	5	$f_{03} = \frac{2-5}{2-6} = 0,75$	$f_{013} = \frac{0,6-0,75}{3-6} = 0,05$	$f_{0123} = \frac{0,15-0,05}{4-6} = -0,05$

Ответ. Интерполяционный полином Ньютона для приведенной таблицы экспериментальных данных имеет вид:

$$P_n(x) = 2 + 0,6(x-2) + 0,15(x-2) \cdot (x-3) - 0,05(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4).$$

Контрольные задачи

Задача № 3.1.1. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
1	1,8
2	2,6
4	3,9
5	5

Построить интерполяционный полином Ньютона.

Задача № 3.1.2. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
2	2,8
4	3,6
5	4,9
6	5,2

Построить интерполяционный полином Ньютона.

Задача № 3.1.3. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
1	1,8
3	2,6
5	3,8
7	4,2

Построить интерполяционный полином Ньютона.

Задача № 3.1.4. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
1	1,8
3	2,6
4	3,6
6	4,1

Построить интерполяционный полином Ньютона.

Задача № 3.1.5. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
1	1,8
3	2,6
4	3,6
5	3,8

Построить интерполяционный полином Ньютона.

Задача № 3.1.6. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
1	1,8
2	2,6
4	3,9
6	4

Построить интерполяционный полином Ньютона.

Задача № 3.1.7. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
2	2,8
4	3,6
5	4,9
7	6,3

Построить интерполяционный полином Ньютона.

Задача № 3.1.8. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
2	2,8
3	3,6
5	4,9
7	7,8

Построить интерполяционный полином Ньютона.

Задача № 3.1.9. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
1	1,2
3	3,6
5	4,8
7	7,2

Построить интерполяционный полином Ньютона.

Задача № 3.1.10. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
2	2,8
3	3,6
5	4,9
8	8,8

Построить интерполяционный полином Ньютона.

4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

4.1. Определения

Если набор экспериментальных данных (табл. 3.1) получен со значительной погрешностью, то не имеет смысла использовать интерполяцию Лагранжа полиномами и сплайнами для обработки результатов. В этом случае необходимо провести аппроксимирующую кривую $\varphi(x)$, которая не проходит через экспериментальные точки, но в то же время отражает исследуемую зависимость, сглаживает возможные выбросы за счет погрешности эксперимента [4]. На рис. 4.1 изображен график аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ и интерполяционного полинома $P_n(x)$, построенного по условиям Лагранжа (см. главу 3 настоящего издания).

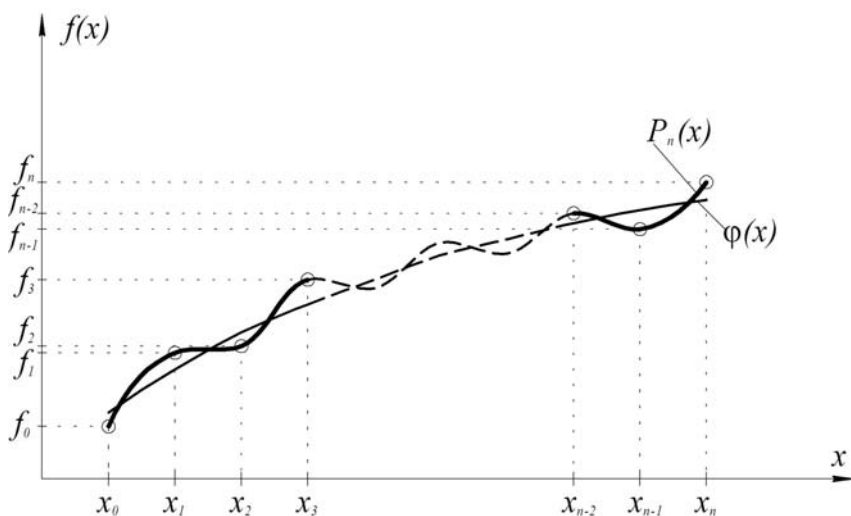


Рис. 4.1. График аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ и интерполяционного полинома $P_n(x)$

Обозначим узлы исходной таблицы данных через x_i , где $0 \leq i \leq n$ – номер узла. Считаем известными значения эксперимен-

тальных данных в узловых точках $f(x_i) = f_i$. Введем непрерывную функцию $\varphi(x)$ для аппроксимации дискретной зависимости $f(x_i)$. В узлах функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ будут отличаться на величину $\varepsilon_i = \varphi(x_i) - f(x_i)$. Отклонения ε_i могут принимать положительные и отрицательные значения. Чтобы не учитывать знаки, возведем каждое отклонение в квадрат и просуммируем квадраты отклонений по всем узлам:

$$Q = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n (\varphi(x_i) - f(x_i))^2. \quad (4.1)$$

Метод построения аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ из условия минимума величины Q называется **методом наименьших квадратов** (МНК).

4.2. Общий алгоритм

Наиболее распространен способ выбора функции $\varphi(x)$ в виде линейной комбинации:

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x), \quad (4.2)$$

где $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ – базисные функции;

$$m \leq n;$$

c_0, c_1, \dots, c_m – коэффициенты, определяемые при минимизации величины Q .

Математические условия минимума суммы квадратов отклонений Q запишем, приравнявая нулю частные производные от Q по коэффициентам c_k , $0 \leq k \leq m$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial c_0} = 2 \sum_{i=0}^n (c_0 \varphi_0(x_i) + c_1 \varphi_1(x_i) + \dots + c_m \varphi_m(x_i) - f_i) \cdot \varphi_0(x_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial c_1} = 2 \sum_{i=0}^n (c_0 \varphi_0(x_i) + c_1 \varphi_1(x_i) + \dots + c_m \varphi_m(x_i) - f_i) \cdot \varphi_1(x_i) = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial Q}{\partial c_m} = 2 \sum_{i=0}^n (c_0 \varphi_0(x_i) + c_1 \varphi_1(x_i) + \dots + c_m \varphi_m(x_i) - f_i) \cdot \varphi_m(x_i) = 0. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (4.3) определяются все коэффициенты c_k . Система (4.3) называется системой нормальных уравнений. Матрица этой системы имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots & (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_m, \varphi_0) & (\varphi_m, \varphi_1) & \dots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

и называется *матрицей Грама*. Элементы матрицы Грама являются скалярными произведениями базисных функций

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) \cdot \varphi_k(x_i). \quad (4.5)$$

Расширенная матрица системы уравнений (4.3) получится добавлением справа к матрице Грама столбца свободных членов

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \\ \dots \\ (\varphi_m, f) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где скалярные произведения, являющиеся элементами столбца, определяются аналогично (4.5)

$$(\varphi_j, f) = \sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) \cdot f_i. \quad (4.7)$$

Отметим основные свойства матрицы Грама, полезные при программной реализации алгоритмов МНК:

1) матрица симметрична, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$, что позволяет сократить объем вычислений при заполнении матрицы;

2) матрица является положительно определенной, следовательно, при решении системы нормальных уравнений методом исключения Гаусса можно отказаться от процедуры выбора главного элемента;

3) определитель матрицы будет отличен от нуля, если в качестве базиса выбраны линейно независимые функции $\varphi_k(x)$, при этом система (4.3) имеет единственное решение.

4.3. МНК со степенным базисом

Выберем базисные функции $\varphi_k(x)$ в виде последовательности степеней аргумента x , которые линейно независимы:

$$\varphi_0(x) = x^0 = 1, \quad \varphi_1(x) = x^1 = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \dots, \quad \varphi_m(x) = x^m. \quad (4.8)$$

В этом случае, так же как и при интерполяции, мы будем аппроксимировать экспериментальную зависимость полиномом. Однако степень полинома m выбираем обычно $m < n$ (при лагранжевой интерполяции $m = n$). Аппроксимирующая кривая в МНК не проходит (см. рис. 4.1) через значения исходной функции в узлах, но проведена из условия наименьшего суммарного квадратичного отклонения. Экспериментальные данные «сглаживаются» с помощью функции $\varphi(x)$. Если же выбрать $m = n$, то на основании теоремы об единственности интерполяционного полинома получим функцию $\varphi(x)$, совпадающую с каноническим интерполяционным полиномом степени n , аппроксимирующая кривая пройдет через все экспериментальные точки и величина Q будет равна нулю. Последнее обстоятельство используется для отладки и тестирования программ, реализующих алгоритмы МНК.

Запишем расширенную матрицу Грама для степенного базиса (4.8):

$$\begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n f_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^n x_i \cdot f_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2m} & \sum_{i=0}^n x_i^m \cdot f_i \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Нетрудно видеть, что для формирования расширенной матрицы (4.9) достаточно вычислить только элементы нулевой строки и двух последних столбцов (m -го и $m + 1$ -го), остальные элементы не являются «оригинальными» и заполняются с помощью циклического присвоения по формуле $a_{i,j} := a_{i-1,j+1}$.

4.4. Линейный вариант МНК

На практике довольно часто оказывается возможным при обработке экспериментальных данных ограничиться построением линейной аппроксимирующей функции:

$$\varphi(x) = a + bx. \quad (4.10)$$

Зная качественное поведение аппроксимируемой зависимости, иногда удается перейти и от нелинейной функции к линейной методом «выравнивания». Так, например, если исходная зависимость близка к экспоненциальной, то достаточно прологарифмировать значения заданной функции в узлах таблицы экспериментов, чтобы перейти к линейной зависимости. И наоборот, если исходная зависимость близка к логарифмической, то достаточно взять экспоненту от значений заданной функции в узлах таблицы экспериментов, чтобы перейти к линейной зависимости. Выравнивание данных следует осуществлять на этапе подготовки исходной таблицы.

Выведем выражения для определения коэффициентов a и b . Пусть у нас есть таблица измерений экспериментальных данных (не нарушая общности, нумерацию экспериментов можем начать с 1).

x_i	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
\dots	\dots
x_n	f_n

Из общего алгоритма МНК по формуле (4.1) имеем:

$$Q = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - f_i)^2 .$$

Запишем условия минимума функционала Q :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i - f_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i - f_i) \cdot x_i = 0. \end{cases}$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n f_i, & \text{или} & an + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n f_i. \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n f_i x_i \end{cases}$$

Обозначив $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, $\bar{f} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{n}$, из первого уравнения имеем $a + b\bar{x} = \bar{f}$, или $a = \bar{f} - b\bar{x}$. Подставим полученное выражение во второе уравнение системы:

$$(\bar{f} - b\bar{x}) \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i f_i$$

или

$$b \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_i \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i (f_i - \bar{f}).$$

В левую часть полученного выражения добавим $b \sum_{i=1}^n (-x_i \bar{x} + \bar{x}^2) = b(-\bar{x}n\bar{x} + \bar{x}^2 n) = 0$, тогда левая часть равна $b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$,

а в правую часть добавим

$$\sum_{i=1}^n [-\bar{x}(f_i - \bar{f})] = -\bar{x} \bar{f} n + \bar{x} \bar{f} n = 0, \text{ тогда правая часть равна } \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(f_i - \bar{f}).$$

Тогда имеем коэффициенты для линейного варианта МНК:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(f_i - \bar{f})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad a = \bar{f} - b\bar{x}. \quad (4.11)$$

Примеры решения задач

Задача № 4.1. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
2,0	2,0
2,8	2,4
3,2	2,6
6,0	4,0

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к линейной).

Решение. Будем искать аппроксимирующую функцию в виде $f(x) = a + bx$. Для нахождения коэффициентов a и b воспользуемся формулами (4.11), для реализации которой заполним таблицу:

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$f_i - \bar{f}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (f_i - \bar{f})$
2	2	-1,5	-0,75	2,25	1,125
2,8	2,4	-0,7	-0,35	0,49	0,245
3,2	2,6	-0,3	-0,15	0,09	0,045
6	4	2,5	1,25	6,25	3,125
$\Sigma = 14, \bar{x} = 3,5$	$\Sigma = 11, \bar{f} = 2,75$			$\Sigma = 9,08$	$\Sigma = 4,54$

Тогда согласно формулам (4.11)

$$b = \frac{4,54}{9,08} = 0,5; \quad a = 2,75 - 0,5 \cdot 3,5 = 1.$$

Ответ: аппроксимирующая функция для приведенной таблицы экспериментальных данных имеет вид

$$f(x) = 1 + 0,5x.$$

Задача № 4.2. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	y_i
2	0,693147
2,4	0,788457
2,6	0,832909
3,6	1,02962

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к логарифмической).

Решение. Если исходная зависимость близка к логарифмической, то для «выравнивания» данных нужно взять экспоненту от значений заданной функции в узлах таблицы экспериментов, чтобы перейти к линейной зависимости. Выравнивание данных будем осуществлять на этапе подготовки исходной таблицы. Затем найдем вспомогательную аппроксимирующую функцию в виде $f(x) = a + bx$, после этого перейдем к искомой аппроксимирующей функции, прологарифмировав найденную $y(x) = \ln(a + bx)$. Для реализации описанного алгоритма заполним таблицу:

x_i	y_i	$f_i = e^{y_i}$	$x_i - \bar{x}$	$f_i - \bar{f}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (f_i - \bar{f})$
2	0,693147	2	-0,65	-0,325	0,4225	0,21125
2,4	0,788457	2,2	-0,25	-0,125	0,0625	0,03125
2,6	0,832909	2,3	-0,05	-0,025	0,0025	0,00125
3,6	1,029620	2,8	0,95	0,475	0,9025	0,45125
$\Sigma = 10,6;$ $\bar{x} = 2,65$		$\Sigma = 9,3;$ $\bar{f} = 2,325$			$\Sigma = 1,39$	$\Sigma = 0,695$

Тогда согласно формулам (4.11)

$$b = \frac{0,695}{1,39} = 0,5; \quad a = 2,325 - 0,5 \cdot 2,65 = 1 \text{ и } f(x) = 1 + 0,5x.$$

Применив логарифмирование, получим искомую функцию.

Ответ: аппроксимирующая функция для приведенной таблицы экспериментальных данных имеет вид

$$y(x) = \ln(1 + 0,5x).$$

Задача № 4.3. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	y_i
1	7,3891
1,4	16,4446
1,6	24,5325
2	54,5981

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к экспоненциальной).

Решение. Если исходная зависимость близка к экспоненциальной, то для «выравнивания» данных нужно взять логарифм от значений заданной функции в узлах таблицы экспериментов, чтобы перейти к линейной зависимости. Выравнивание данных будем осуществлять на этапе подготовки исходной таблицы. Затем найдем вспомогательную аппроксимирующую функцию в виде $f(x) = a + bx$, после этого перейдем к искомой аппроксимирующей функции, взяв экспоненту от найденной $y(x) = e^{a+bx}$. Для реализации описанного алгоритма заполним таблицу:

x_i	y_i	$f_i = \ln(y_i)$	$x_i - \bar{x}$	$f_i - \bar{f}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (f_i - \bar{f})$
1,0	7,3891	2,0	-0,5	-1	0,25	0,5
1,4	16,4446	2,8	-0,1	-0,2	0,01	0,02
1,6	24,5325	3,2	0,1	0,2	0,01	0,02
2,0	54,5981	4,0	0,5	1,0	0,25	0,5
$\Sigma = 6;$ $\bar{x} = 1,5$		$\Sigma = 12;$ $\bar{f} = 3$			$\Sigma = 0,52$	$\Sigma = 1,04$

Тогда согласно формулам (4.11)

$$b = \frac{1,04}{0,52} = 2; \quad a = 3 - 2 \cdot 1,5 = 0 \quad \text{и} \quad f(x) = 2x.$$

Применив потенцирование, получим искомую функцию.

Ответ: аппроксимирующая функция для приведенной таблицы экспериментальных данных имеет вид

$$y(x) = e^{2x}.$$

Контрольные задачи

Задача № 4.1.1. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
0,8	-0,2
1,4	0,4
1,9	0,9
2,8	1,8

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к линейной).

Задача № 4.1.2. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
0,9	0,896088
1,5	1,011601
1,8	1,064711
2,2	1,131402

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к логарифмической).

Задача № 4.1.3. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
1,2	2,6
1,4	2,2
1,8	1,4
2,2	0,6

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к линейной).

Задача № 4.1.4. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
0,5	5,754603
0,7	7,767901
0,9	10,485570
1,1	14,154039

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к экспоненциальной).

Задача № 4.1.5. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
1,2	0,955511
1,4	0,788457
1,8	0,336472
2,2	-0,510826

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к логарифмической).

Задача № 4.1.6. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
0,5	2,718282
0,9	6,049647
1,0	7,389056
1,2	11,023176

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к экспоненциальной).

Задача № 4.1.7. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
1	2,25
2	2,5
4	3
6	3,5

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к линейной).

Задача № 4.1.8. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
2,2	1,8
3,2	0,8
3,6	0,4
3,8	0,2

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к линейной).

Задача № 4.1.9. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	f_i
0,2	0,336472
0,4	0,587787
0,6	0,788457
1	1,098612

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к логарифмической).

Задача № 4.1.10. Дана таблица экспериментальных данных:

x_i	y_i
1,2	1,822119
1,8	2,459603
2,2	3,004166
2,4	3,320117

Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к экспоненциальной).

5. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

5.1. Два подхода к описанию движения сплошной среды

1. *Подход Лагранжа.* Объектом изучения являются материальные частицы. При этом рассматривается изменение во времени некоторых скалярных или векторных величин, таких как температура, плотность, скорость фиксированной материальной частицы, а также изменение этих величин при переходе от одной частицы к другой.

Иначе говоря, эти величины рассматриваются как функции от времени и тех переменных, которые характеризуют *индивидуальность* взятой частицы [2].

В качестве таких переменных можно взять, например, X_i – декартовы координаты произвольной материальной частицы в начальный момент времени $t = 0$, тогда ее текущие координаты в том же базисе неподвижного наблюдателя будут выражаться

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, X_1, X_2, X_3) \\ x_2 &= \varphi_2(t, X_1, X_2, X_3) \\ x_3 &= \varphi_3(t, X_1, X_2, X_3) \end{aligned} \right\} \text{или сокращенно } x_i = \varphi_i(t, X_k) \quad (5.1)$$

запись *закона движения* одной фиксированной частицы с начальными координатами X_k .

Если считать X_k переменными, то мы получаем запись *закона движения сплошной среды*.

Переменные X_1, X_2, X_3, t – называются *переменными Лагранжа*. Проекция *скорости* и *ускорения* материальной частицы определяются следующими формулами

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_i(t, X_k)}{\partial t};$$
$$w_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_i(t, X_k)}{\partial t^2}.$$

2. *Подход Эйлера.* Здесь в качестве объекта изучения принимается неподвижное пространство наблюдателя или его фиксированная часть, заполненная движущейся средой. Различные величины, характеризующие движение, считаются *функциями точки и времени*, т. е. функциями трех аргументов x_i и времени t , называемых *переменными Эйлера*.

Например, выражение скорости в данной точке пространства с радиус-вектором \vec{x} имеет вид $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(x_i, t)$. Таким образом, с точки зрения Эйлера, объектом изучения являются различные поля (скалярные, векторные, тензорные), характеризующие движение сплошной среды.

ПЕРЕХОД от переменных Эйлера к переменным Лагранжа вытекает из формул (4.1):

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t).$$

5.2. Тензоры конечных деформаций

Пусть материальная частица M в начальный момент времени $t=0$ находится в точке пространства с начальными координатами $(X_1, X_2, X_3) = \vec{X}$, а в текущий момент времени t – в точке с текущими координатами $(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}$.

Причем можно записать

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}, \quad (5.2)$$

где \vec{u} – вектор перемещения.

Лагранжев способ описания движения дает зависимость

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t), \quad (5.3)$$

$$\text{Эйлеров –} \quad \vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t). \quad (5.4)$$

Предполагается, что эти функции необходимого количество раз дифференцируемы. Очевидно, что формулы (5.3) и (5.4) представлены единственной парой взаимнообратных функций, причем функциональный определитель (якобиан)

$$\Delta = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \right| \neq 0$$

в каждой точке области, заполненной сплошной средой, отличен от нуля.

Для элементов объема начального dW и текущего dw имеет место соотношение

$$dw = \Delta dW.$$

а условие несжимаемости (неизменности объема) можно записать следующим образом

$$\Delta = 1, \text{ т. е. } dw = dW,$$

С целью описания деформации сплошной среды рассмотрим перемещение двух близких материальных частиц

$$\left. \begin{matrix} M_0 \\ N_0 \end{matrix} \right|_{t=0}; \left. \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right|_{t-\text{текущий момент времени}}.$$

Квадрат бесконечно малого расстояния между точками M и N

$$(dx)^2 = dx_p dx_p,$$

беря за основу Лагранжево описание движения, можно записать

$$dx_p = \frac{\partial x_p}{\partial X_i} dX_i.$$

В результате квадрат элемента длины

$$(dx)^2 = \frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} dX_k dX_i.$$

В начальный момент времени квадрат расстояния между этими точками был

$$(dX)^2 = \delta_{ik} dX_i dX_k = dX_p dX_p .$$

Изменение квадрата длины

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} - \delta_{ik} \right) dX_i dX_k = 2L_{ik} dX_i dX_k .$$

Если всюду в теле $(dx)^2 - (dX)^2 = 0$, то движение тела называется **абсолютно жестким движением**. Если в точке M $(dx)^2 - (dX)^2 \neq 0$, то говорят, что в этой точке тело находится в деформированном состоянии. Отсюда выражение *тензора Лагранжа конечной деформации (тензор Грина)*:

$$L_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} - \delta_{ik} \right) .$$

Получим выражение тензора Лагранжа через перемещения. Из выражения (5.2)

$$x_p = u_p + X_p ,$$

тогда

$$\frac{\partial x_p}{\partial X_i} = \frac{\partial u_p}{\partial X_i} + \frac{\partial X_p}{\partial X_i} = \frac{\partial u_p}{\partial X_i} + \delta_{pi} ,$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial X_k} = \frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \frac{\partial X_p}{\partial X_k} = \frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \delta_{pk} ,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_p}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial x_p}{\partial X_k} &= \left(\frac{\partial u_p}{\partial X_i} + \delta_{pi} \right) \left(\frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \delta_{pk} \right) = \\ &= \frac{\partial u_p}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i} \delta_{pk} + \frac{\partial u_p}{\partial X_k} \delta_{pi} + \delta_{pi} \delta_{pk} = \\ &= \frac{\partial u_p}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \delta_{ik} . \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$L_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i} \frac{\partial u_p}{\partial X_k} \right) .$$

Если взять за основу Эйлерово описание движения, то аналогичным образом можно получить *тензор Эйлера конечной деформации* (тензор Альманси):

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ik} - \frac{\partial X_p}{\partial x_i} \frac{\partial X_p}{\partial x_k} \right)$$

или

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \right) .$$

5.3. Тензор малой деформации

Будем считать, что компоненты перемещения и их градиенты малы, в частности $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \ll 1$. Отбрасывая произведение малых величин, получаем

Лагранжесв тензор малой деформации

$$l_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right).$$

Эйлеров тензор малой деформации

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Предположение о малости перемещений позволяет заключить, что разница между лагранжесвыми и эйлеровыми переменными не-существенна, а соответствующие тензоры совпадают: $\varepsilon_{ik} = l_{ik}$.

В дальнейшем в теории малых деформаций будем использовать только эйлеровы переменные, а тензор $T_\varepsilon = [\varepsilon_{ik}]$ называть *тензором малой деформации*.

Рассмотрим физический смысл компонентов тензора малой деформации.

$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ называют *линейными деформациями*. Они показывают относительное удлинение материального отрезка, первоначально параллельного оси x_1, x_2 или x_3 соответственно. Если соответствующий отрезок удлиняется, то $\varepsilon > 0$, если же укорачивается, то $\varepsilon < 0$.

Боковые компоненты тензора деформации называют *сдвиговыми деформациями*, и они характеризуют искажение угла между отрезками, первоначально параллельными соответствующим осям координат (рис. 5.1). Если угол уменьшается, то соответствующая сдвиговая деформация положительна, если же угол увеличивается, то – отрицательна.

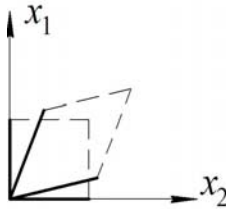


Рис. 5.1. Интерпретация сдвиговой деформации ε_{12}

6. ДИНАМИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

6.1. Внешние силы в механике сплошных сред

Изучив кинематику, перейдем к анализу причин, вызывающих механическое движение. К ним относятся **силы** – величины, являющиеся мерой механического воздействия на данное тело других тел как при непосредственном контакте (трение, давление прижатых друг к другу тел), так и через посредство создаваемых телами полей (гравитационное поле, электромагнитное поле и т. д.). Обычно в механике сплошных сред силы имеют *распределенный характер* – они непрерывно распределяются по некоторым поверхностям или объемам [1]. Поэтому более удобно предельным переходом перейти к понятию *напряжения* – силе, приходящейся на единицу площади поверхности.

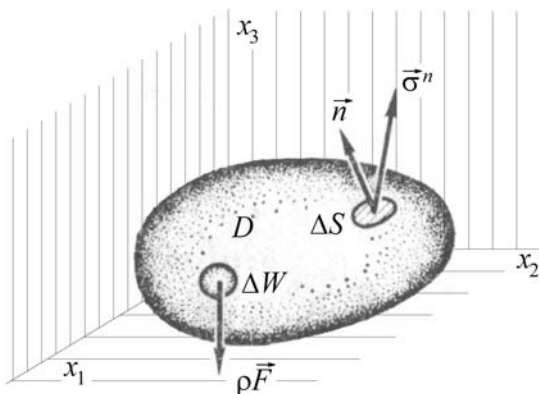


Рис. 6.1. Поверхностные и массовые внешние силы

Внешние силы. Дано некоторое тело D , ограниченное поверхностью S . Со стороны окружающей среды на рассматриваемое тело действуют силы. Будем называть их *внешними силами* и делить на *объемные* (массовые), приложенные к элементам объема (массы), и *поверхностные*, приложенные к поверхности тела (рис. 6.1).

Плотность. Возьмем внутри рассматриваемого тела произвольную точку M и выделим в окрестности этой точки элементарный объем ΔW с массой Δm . Величина $\rho(M) = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W}$ называется *плотностью среды* в точке M .

Массовые внешние силы. Пусть главный вектор внешних сил, действующих на выделенный элемент, равен $\Delta \vec{\Phi}$. Составим отношение $\frac{\Delta \vec{\Phi}}{\Delta m}$ и вычислим предел:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\Phi}}{\Delta m} = \frac{1}{\rho} \cdot \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\Phi}}{\Delta W}.$$

Полученная в результате предельного перехода векторная величина \vec{F} называется *внешней массовой силой*.

Поверхностные внешние силы. Выделим элемент поверхности ΔS с внешней нормалью \vec{n} . На этот элемент действуют силы, $\Delta \vec{P}$ – их вектор.

Устремим размеры элемента к нулю. Согласно *принципу напряжения Коши*, отношение $\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S}$ стремится к определенному пределу

$\vec{\sigma}^n$, когда элемент поверхности стягивается в точку M :

$\vec{\sigma}^n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S}$, в то время как главный момент стремится к нулю.

Результирующий вектор $\vec{\sigma}^n$ (сила, отнесенная к единице площади) называется **вектором поверхностных напряжений**, действующих в точке M на площадке с нормалью \vec{n} .

6.2. Внутренние напряжения

Вернемся к рассматриваемому телу D (рис. 6.2) и мысленно разрежем его поверхностью Σ на две части D_1 и D_2 . Также мысленно отбросим часть D_2 . Для того чтобы оставшаяся часть оставалась в равновесии, необходимо, чтобы на поверхности Σ действовала некоторая система сил (рис. 6.3). Назовем их внутренними силами.

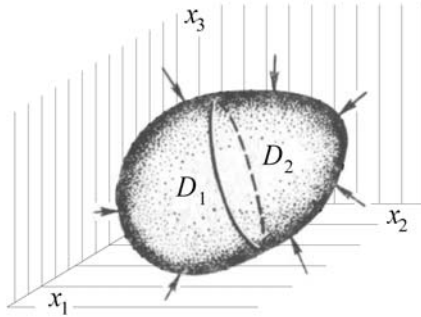


Рис. 6.2. Сечение тела D

Возьмем на поверхности Σ точку M и выделим в ее окрестности элементарную площадку $\Delta\Sigma$ с нормалью \vec{n} .

Пусть главный вектор сил, приложенных к площадке со стороны внешней нормали равен $\Delta\vec{P}$.

Повторяя предыдущие рассуждения, предельным переходом получаем **вектор внутренних напряжений**: $\vec{\sigma}^n = \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta\Sigma}$, действующих на ориентированной площадке с внешней нормалью \vec{n} .

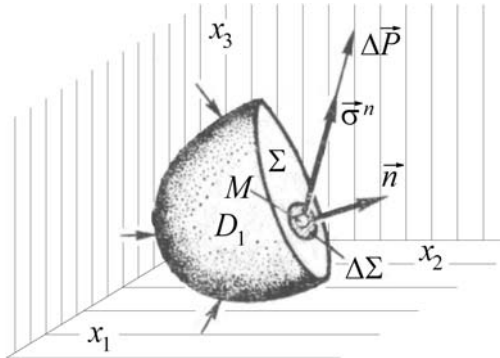


Рис. 6.3. Внутренние напряжения

Существенной особенностью в этих рассуждениях является произвольная ориентация поверхности Σ и, следовательно, нормали \vec{n} .

Выберем в связи с этим площадки, проходящие через точку M и нормальные ортам \vec{e}_i . В качестве таких площадок удобно использовать грани элементарного куба, построенного в окрестностях указанной точки так, чтобы его ребра были параллельны координатным осям x_i (рис. 6.4).

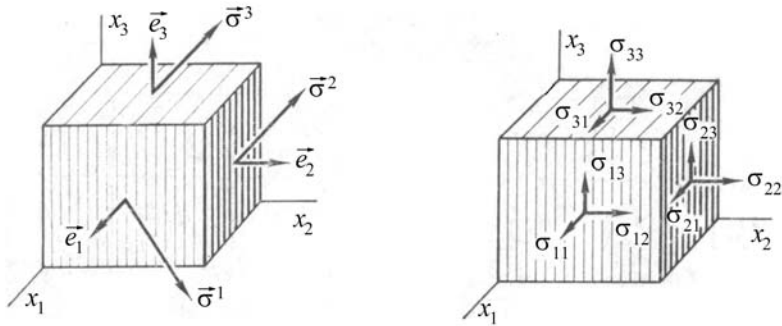


Рис. 6.4. Напряжения на гранях элементарного куба

На площадке, перпендикулярной орту \vec{e}_1 , действует вектор напряжений $\vec{\sigma}^1$ с компонентами $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$. Аналогично на двух других площадках $\vec{\sigma}^2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$ и $\vec{\sigma}^3 = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$.

Составим матрицу
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$
 и рассмотрим физический

смысл ее компонентов.

Диагональные элементы матрицы $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ называются *нормальными компонентами напряжений*, поскольку они представляют собой проекции векторов напряжений на нормали к площадкам. Боковые элементы матрицы называются *касательными компонентами напряжений*. Они являются проекциями векторов напряжений на плоскости площадок.

Правило знаков для компонентов напряжений. Нормальное напряжение является положительным, если оно вызывает растяжение, и отрицательным, если оно вызывает сжатие.

Нетрудно показать, что матрица напряжений является тензором, причем симметричным.

$$\text{Тензор } T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ называется } \textit{тензором напряжений Коши}.$$

Тензор Коши.

При этом вектор напряжений на наклонной площадке с внешней нормалью \vec{n} определяется формулой Коши $\vec{\sigma}^n = \vec{n} \cdot T_{\sigma}$.

6.3. Законы сохранения

Законами сохранения называются физические закономерности, согласно которым численные значения некоторых физических величин не изменяются со временем в любых физических процессах.

1. *Закон сохранения массы:*

$$m = \iiint_W \rho(\vec{X}, t) dW = \text{const.}$$

Следствием этого закона является *условие неразрывности*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

а если среда имеет неизменную плотность ($\rho = \text{const}$), получаем *условие несжимаемости*:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ или } \text{div } \vec{v} = 0.$$

2. *Закон сохранения количества движения.* Пусть элемент объема dW масса которого ρdW , перемещается со скоростью \vec{v} . Количество движения элемента равно $\rho dW \vec{v}$, а общее количество движения объема W находится интегрированием:

$$\iiint_W \rho \vec{v} dW.$$

На элемент поверхности dS действует внешняя поверхностная сила $\vec{\sigma}^n dS$. Сумма этих сил равна $\iint_S \vec{\sigma}^n dS$. На элемент объема dW действует внешняя массовая сила $\rho \vec{F} dW$. Сумма всех массовых сил равна $\iiint_W \rho \vec{F} dW$.

Уравнение сохранения количества движения для объема W можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho \vec{v} dW = \iint_S \vec{\sigma}^n dS + \iiint_W \rho \vec{F} dW :$$

производная по времени от количества движения объема W сплошной среды равняется сумме всех внешних действующих на него массовых и поверхностных сил.

Следствием из этого закона являются:

– уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} ;$$

– уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = 0$$

(если инерционные члены малы и ими можно пренебречь),

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

(при отсутствии массовых сил).

7. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

7.1. Математическая модель внутреннего механизма процесса ОМД

Кинематические зависимости и законы сохранения не дают полной системы уравнений, позволяющей вместе с начальными и граничными условиями целиком описать движение сплошной среды. Для того чтобы сделать систему замкнутой, необходимы дополнительные соотношения. К ним относятся так называемые *определяющие уравнения*, которые характеризуют конкретные физические свойства изучаемой среды.

Общая теория феноменологических определяющих соотношений устанавливает общие формы связей между полями напряжений, деформаций, скоростей деформаций, температур для различных сред. Как правило, определяющие уравнения выводятся на основании результатов экспериментальных исследований.

Итак, для того чтобы записать математическую модель внутреннего механизма процесса ОМД, необходимо записать три группы уравнений:

1. *Кинематические соотношения*, которые устанавливают связь между перемещениями и деформациями либо между скоростями и скоростями деформаций.
2. *Динамические соотношения*, которые представлены уравнением неразрывности или несжимаемости и уравнением движения или равновесия.
3. *Определяющие соотношения*, которые связывают напряжения или скорости напряжений с деформациями или скоростями деформаций и температурами.

Следует отметить, что уравнения первых двух групп имеют общий вид для любых сплошных сред, а уравнения третьей группы для различных сред имеют различный вид [2].

7.2. Линейно-упругая среда

Линейная изотропная зависимость между напряжениями и деформациями имеет вид

$$T_{\sigma} = 3 \lambda \varepsilon_0 I + 2 \mu T_{\varepsilon}, \quad (7.1)$$

где I – единичный тензор;

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

ε_0 – средняя деформация, или в скалярной форме

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \Delta + 2 \mu \varepsilon_{ik}, \quad (7.2)$$

где $\Delta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – относительное изменение объема.

Это уравнение, называемое *обобщенным законом Гука*, описывает поведение линейно-упругой среды, постоянные λ и μ называются *упругими постоянными Лямэ*.

Для того чтобы записать соотношения (7.1) и (7.2) в эквивалентной форме, разложим сначала тензоры напряжений и деформаций на шаровые и девиаторные части:

$$T_{\sigma} = \sigma_0 I + D_{\sigma},$$

$$T_{\varepsilon} = \varepsilon_0 I + D_{\varepsilon}.$$

Затем подставим это разложение в соотношение (7.1):

$$\sigma_0 I + D_{\sigma} = 3 \lambda \varepsilon_0 I + 2 \mu (\varepsilon_0 I + D_{\varepsilon}).$$

Записав отдельно равенство для шаровой и девиаторной частей, получим

$$\sigma_0 = 3 \lambda \varepsilon_0 + 2 \mu \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad D_{\sigma} = 2 \mu D_{\varepsilon}.$$

Отсюда можно записать другую форму закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= k \Delta; \\ D_{\sigma} &= 2 \mu D_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Коэффициент $k = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ называется *модулем объемного сжатия*.

тия.

Итак, для линейно-упругой среды среднее напряжение пропорционально относительному изменению объема, а девиатор напряжений пропорционален девиатору деформаций.

Положив $k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$, где E – модуль Юнга, а ν – коэффициент Пуассона, получим закон Гука в виде $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$.

В случае чистого сдвига $\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12}$. Поэтому коэффициент Лямэ μ представляет собой известный из курса механики материалов *модуль сдвига* G . Кроме того

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G;$$

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1-2\nu) \cdot (1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)}.$$

7.3. Линейно-вязкая среда

Переходя к изучению линейно-вязкой среды, предположим, что среднее напряжение состоит из давления ($-p$), непосредственно не зависящего от скоростей деформации, и дополнительного напряжения σ'_0 , пропорционального скорости объемной деформации $\Delta' = \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = 3\xi_0$:

$$\sigma_0 = -p + \sigma'_0,$$

$$\sigma'_0 = k' \Delta'.$$

Воспользовавшись линейной изотропной зависимостью тензоров второй валентности, получим уравнение, обобщающее *гипотезу Ньютона*:

$$T_\sigma = -p I + 3 \lambda' \xi_0 I + 2 \mu' T_\xi.$$

В скалярной форме это уравнение запишется в виде

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \lambda' \delta_{ik} \Delta' + 2 \mu' \xi_{ik} .$$

Коэффициенты λ' и μ' называются **коэффициентами вязкости**. Поскольку они не зависят от деформаций и скоростей деформаций, их называют **вязкими постоянными**, хотя они могут зависеть от температуры.

Другая форма записи этих уравнений выглядит следующим образом:

$$\sigma_0 = -p + k' \Delta' ;$$

$$D_{\sigma} = 2 \mu' D_{\xi} .$$

То есть девиаторы напряжений и скоростей деформаций пропорциональны.

Постоянная k' называется **коэффициентом объемной вязкости**.

Если среда несжимаема, то $\Delta' = 0$ и вышеприведенные уравнения сводятся к условию пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций.

Наконец, если коэффициенты вязкости λ' и μ' равны нулю, то

$$T_{\sigma} = -p I ,$$

т. е. тензор напряжений совпадает с шаровым тензором, а девиатор напряжений равен нулю. Это свойство идеальной жидкости.

7.4. Теория малых упругопластических деформаций

При установлении нелинейной зависимости между напряжениями и малыми деформациями для изотропной упругопластической среды, ограничившись рассмотрением изотермических процессов, воспользуемся уравнениями

$$\sigma_0 = k \Delta ; \tag{7.3}$$

$$D_{\sigma} = 2\mu D_{\epsilon} . \tag{7.4}$$

Опыты показывают, что относительное изменение объема $\Delta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ всегда является обратимым (упругим), и зависимость (7.3) близка к линейной.

Таким образом, можно принять $k = \text{const}$. Положим $\mu = \mu(\theta, \Gamma)$, где θ – температура, а Γ – интенсивность деформаций сдвига

$$\Gamma = \sqrt{\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2}{6}}.$$

Приняв тем самым *гипотезу «единой кривой»*, получаем возможность описать процессы пластического деформирования. При этом можно сформулировать следующие исходные положения теории малых упругопластических деформаций:

1. Среда изотропна.

2. Среднее напряжение пропорционально относительному изменению объема, имеющему упругий характер.

3. Девиаторы напряжений и деформаций пропорциональны.

Следствием третьего положения является совпадение главных осей у тензоров напряжений и деформаций, а также пропорциональность главных компонентов девиаторов.

Рассмотрим частные случаи. К ним относятся:

– состояние линейной упругости:

$$\mu = \text{const};$$

– состояние идеальной пластичности:

$$\mu = \frac{\tau_s}{\Gamma},$$

где τ_s – предел текучести при чистом сдвиге,

при этом

$$s_{ik} = \frac{2\tau_s}{\Gamma} e_{ik},$$

где s_{ik} – компоненты девиатора напряжений,

e_{ik} – компоненты девиатора деформаций;

– состояние деформационного упрочнения:

$$T = \mu(\theta, \Gamma) \cdot \Gamma,$$

$$T = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{6}}$$

интенсивность касательных напряжений;

$$s_{ik} = 2\mu(\theta, \Gamma) \cdot e_{ik}$$

или

$$s_{ik} = \frac{2T(\theta, \Gamma)}{\Gamma} \cdot e_{ik};$$

– состояние упругой разгрузки:

$$\sigma_0^* - \sigma_0 = k (\Delta^* - \Delta);$$

$$s_{ik}^* - s_{ik} = 2\mu (e_{ik}^* - e_{ik}),$$

$$\mu = \text{const.}$$

Звездочкой обозначены напряжение и деформированное состояние, соответствующие началу разгрузки.

Теория малых упругопластических деформаций хорошо подтверждается экспериментальными данными при монотонном изменении температуры и нагружениях, близких к простому (так называется нагружение тела, когда во всех его точках компоненты тензора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру). В противном случае нагружение является сложным.

7.5. Теория вязкопластического течения

Для сложного нагружения лучшие результаты дает теория вязкопластического течения.

Будем пренебрегать упругими деформациями, как весьма малыми по сравнению с пластическими, а также температурными напряжениями, и сформулируем основные положения теории течения вязкопластической среды.

1. Среда изотропна и несжимаема.
2. Девиаторы напряжений и скоростей деформаций пропорциональны:

$$D_{\sigma} = 2 g D_{\xi},$$

причем $g = g(\theta, H)$, где θ – температура,

$$H = \sqrt{\frac{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_1 - \xi_3)^2}{6}}$$

интенсивность скоростей деформаций сдвига.

Отсюда следует, что главные оси у тензоров напряжений и скоростей деформаций совпадают, а главные компоненты соответствующих девиаторов пропорциональны.

К частным случаям относятся:

- состояние линейной вязкости: $g = \text{const}$; ;
- состояние идеальной пластичности:

$$g = \frac{\tau_s}{H},$$

где τ_s – предел текучести при чистом сдвиге, при этом

$$s_{ik} = \frac{2\tau_s}{H} \cdot \eta_{ik},$$

где s_{ik} – компоненты девиатора напряжений,

η_{ik} – компоненты девиатора скоростей деформаций;

– состояние вязкого упрочнения:

$$T = g(\theta, H) \cdot H,$$

$$T = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{6}}$$

интенсивность касательных напряжений)

$$s_{ik} = 2g(\theta, H) \cdot \eta_{ik},$$

или

$$s_{ik} = \frac{2T(\theta, H)}{H} \cdot \eta_{ik}.$$

8. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

8.1. Статическая задача для упругой однородной изотропной среды

При постановке статических задач инерционными членами в уравнениях движения можно пренебречь.

В каждой точке области D , заполненной сплошной средой, должны выполняться:

а) уравнения равновесия (*динамические соотношения*):

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = 0,$$

где F_i – компоненты внешней массовой силы;

б) закон Гука (*определяющие соотношения*):

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \Delta + 2 \mu \varepsilon_{ik},$$

где $\Delta = \varepsilon_{pp} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – относительное изменение объема,

λ и μ – константы Лямэ;

в) соотношения, связывающие деформации с перемещениями (*кинематические соотношения*):

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

На поверхности S , ограничивающей область D , должны удовлетворяться граничные условия, наложенные на напряжения или перемещения.

Принято различать три типа граничных условий:

1) на всей границе S заданы перемещения (*кинематические граничные условия*):

$$\bar{u}|_S = \bar{f}_1(M),$$

где M – точка на границе;

2) на всей границе S заданы напряжения (*статические граничные условия*):

$$\bar{\sigma}^n \Big|_S = \bar{f}_2(M);$$

3) на части границы S_1 заданы перемещения, на остальной поверхности S_2 – напряжения (*смешанные граничные условия*):

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cup S_2, \\ M \in S_1 \quad \bar{u} \Big|_{S_1} &= \bar{f}_1(M), \\ M \in S_2 \quad \bar{\sigma}^n \Big|_{S_2} &= \bar{f}_2(M). \end{aligned}$$

Во всех трех случаях предполагается, что всюду в теле внешние массовые силы известны.

Пример решения задачи

Сплошное упругое тело сжимается со всех сторон постоянным внешним давлением p . Внешние массовые силы отсутствуют. Найти распределение напряжений.

Решение:

Будем искать решение в виде

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix},$$

где $p = \text{const}$.

Легко видеть, что уравнения равновесия удовлетворены. На границе имеем

$$\bar{\sigma}^n = \sigma_{ik} n_k \bar{e}_i = -p \delta_{ik} n_k \bar{e}_i = -p n_i \bar{e}_i = -p \bar{n},$$

т. е. внешняя поверхностная сила должна быть давлением p , что и имеет место в действительности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гун, Г. Я. Теоретические основы обработки металлов давлением / Г. Я. Гун. – М. : Металлургия, 1980. – 456 с.
2. Гун, Г. Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением / Г. Я. Гун. – М. : Металлургия, 1983. – 352 с.
3. Колмогоров, В. Л. Механика обработки металлов давлением / В. Л. Колмогоров. – М. : Металлургия, 1986. – 688 с.
4. Мудров, А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль / А. Е. Мудров. – Томск, МП «Раско», 1991. – 272 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПОНЯТИЯ, МОДЕЛИ И МЕТОДЫ.....	4
1.1. Определения математического моделирования.....	4
1.2. Основные понятия дисциплины.....	4
1.3. Понятие краевой задачи.....	6
1.4. Механические граничные условия.....	7
1.5. Механические граничные условия на примере внешнего трения.....	8
1.6. Методы решения краевых задач.....	10
2. ТЕНЗОРЫ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ.....	12
2.1. Основные задачи тензорного анализа.....	12
2.2. Ортогональный базис.....	12
2.3. Правила Эйнштейна.....	13
2.4. Преобразования координат.....	14
2.5. Определение тензора.....	16
2.6. Некоторые действия над тензорами.....	17
2.7. Главные направления и главные компоненты тензора.....	18
2.8. Инварианты тензора.....	19
Примеры решения задач.....	20
Контрольные задачи.....	25
3. АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ.....	32
3.1. Определения.....	32
3.2. Интерполяция каноническим полиномом.....	33
3.3. Интерполяция полиномом Лагранжа.....	34
3.4. Интерполяционный полином Ньютона.....	35
Пример решения задачи.....	38
Контрольные задачи.....	39
4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ.....	42
4.1. Определения.....	42
4.2. Общий алгоритм.....	43
4.3. МНК со степенным базисом.....	45
4.4. Линейный вариант МНК.....	46

Примеры решения задач.....	49
Контрольные задачи.....	52
5. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ	
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ.....	56
5.1. Два подхода к описанию движения сплошной среды.....	56
5.2. Тензоры конечных деформаций.....	57
5.3. Тензор малой деформации.....	60
6. ДИНАМИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ	
СПЛОШНЫХ СРЕД.....	62
6.1. Внешние силы в механике сплошных сред.....	62
6.2. Внутренние напряжения.....	63
6.3. Законы сохранения.....	66
7. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ	
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД.....	68
7.1. Математическая модель внутреннего механизма	
процесса ОМД.....	68
7.2. Линейно-упругая среда.....	68
7.3. Линейно-вязкая среда.....	70
7.4. Теория малых упругопластических деформаций.....	71
7.5. Теория вязкопластического течения.....	74
8. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД.....	76
8.1. Статическая задача для упругой однородной	
изотропной среды.....	76
Пример решения задачи.....	77
ЛИТЕРАТУРА.....	78

Учебное издание

МАЗУРЁНОК Алла Владимировна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ**

Учебно-методическое пособие по дисциплине
«Математическое моделирование технологических процессов»
для студентов специальности 1-36 01 05
«Машины и технология обработки материалов давлением»

Редактор *Т. А. Зезюльчик*
Компьютерная верстка *А. Г. Занкевич*

Подписано в печать 28.05.2014. Формат 60×84 ¹/₈. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 3,64. Тираж 100. Заказ 720.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.