

Операторный метод понижения размерности задач теории упругости

Акимов В.А., Хотеев А.Л.

Белорусский национальный технический университет

В данной работе предпринята новая попытка представить ряды перемещений в виде гармонических операторных функций с неопределенными операторными коэффициентами.

Выпишем однородное уравнение динамической задачи теории упругости для бесконечного упругого слоя, у которого координаты x и y идут вдоль слоя, а координата z ему перпендикулярна $\square_{\frac{3}{2}} + k\partial_z \partial_t U_j = 0$. Здесь

$$\square_{\frac{3}{2}} = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - C_2^{-2} \partial_t^2, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad k = 1 + \lambda/\mu, \quad \lambda, \mu -$$

коэффициенты Ламе; C_2 - скорость распространения в упругом теле по поперечной волне. Причем $i=1,2,3$, а по j идет суммирование от 1 до 3. Теперь непосредственно запишем

$$u_1 = [A_1 \cos(z\Delta_1) + B_1 \cos(z\Delta_2)] * f_1(x, y, t),$$

$$u_2 = [A_2 \cos(z\Delta_1) + B_2 \cos(z\Delta_2)] * f_1(x, y, t),$$

$$u_3 = [A_3 \sin(z\Delta_1) + B_3 \sin(z\Delta_2)] * f_1(x, y, t),$$

$$\text{где } \Delta_1 = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2 - C_1^{-2} \partial_t^2}, \quad \Delta_2 = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2 - C_2^{-2} \partial_t^2}.$$

C_1 - скорость распространения поперечных волн.

Попутно отметим, что несложно записать перемещения для двух других слоев: для этого достаточно произвести циклическую замену переменных x, y, z .

Подставляя решение (2) в уравнение движения (1), получим систему соотношений для неопределенных операторных неизвестных $A_i, B_i, i=1,2,3$. Кроме этого надо задействовать еще два условия на границах слоя $z=+h$ и $z=-h$, например, положить равными нулю касательные напряжения. В результате пять операторных коэффициентов будут выражаться через один, на который потом можно сократить т.к. ввиду однородности уравнения (1) ряды перемещений определяются с точностью до операторного множителя. Итак, предложенный новый способ позволяет существенно упростить получение общих операторных решений динамических задач теории упругости.