УДК 530.182

Учет диссипации в нелинейной упругопластической модели

Князев М.А.
Белорусский национальный технический университет

В работе рассмотрено нелинейное уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\kappa u - \frac{1}{2} f u^2 + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 . \qquad (1)$$

Данное уравнение описывает локализацию деформации в задаче о динамическом нагружения одномерного стержня на стадии разупрочнения [1]. Здесь u - отклонение деформации от однородного состояния; $\kappa > 0$, $f < 0$ – параметры, описывающие аппроксимацию диаграммы материала; $\delta > 0$ – параметр, описывающий неоднородность внутренней структуры материала. Приведенное выше уравнение получено в рамках упругопластической модели [2] и применимо к широкому кругу материалов, включая металлы, композитные материалы типа бетона, геоматериалы. Особенностью такой модели является зависимость функции текучести материала не только напряжения и деформации, но и от градиента деформации второго порядка. Уравнение (1) нельзя отнести к интегрируемым уравнениям. Попытка построить даже односолитонное решение этого уравнения приводит к состоянию, описываемому нелокализованной в пространстве и осциллирующей во времени функцией. Основная причина такого поведения состоит в отсутствии баланса между дисперсией и нелинейностью. Такой баланс может быть восстановлен, если в уравнении (1) учесть влияние диссипативных процессов. Упругопластическая модель применима к неоднородным материалам, как следствие этого простейшим способом учета диссипации будет введение в уравнение (1) слагаемого, учитывающего не только зависимость потери энергии от скорости изменения исследуемой функции, но и от ее поведения в пространстве. В результате уравнение (1) можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\kappa u - \frac{1}{2} f u^2 + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 , \qquad (2)$$

где α - коэффициент затухания.

Данное уравнение является интегрируемым и имеет любое (много)солитонное решение.

1 Мягков, Н.Н. Письма в ЖТФ. – Т. 25, вып. 20. – 1999. – С. 48-53.
2. V. Kukudzhanov. J. Phys. IV (France). V. 8. – 1998. – P. 208-214.