

Вычисление вершин политопов разбиений чисел

Врублевский А.С.*, Шлык В.А.

ИООО "Управляющая компания "Атлант-М"*

Белорусский национальный технический университет

Разбиения чисел на натуральные слагаемые находят приложения в математике, физике, статистической механике и т.д. В построение теории разбиений после Эйлера внесли вклад многие крупные математики. В основном исследования были направлены на вычисление чисел разбиений различных видов и вывод соотношений между классами разбиений [1]. Полиэдральный подход к разбиениям чисел, при котором множество разбиений числа n рассматривается как политоп в \mathbb{Z}^n , позволяет исследовать его комбинаторно-геометрическую структуру [2]. Вершины политопов образуют базис множества всех разбиений n , поскольку каждое разбиение является выпуклой комбинацией вершин. Среди вершин выделяют опорные вершины, из которых можно построить все остальные с помощью двух операций слияния частей [3].

Построены вершины и опорные вершины всех политопов для $n < 100$. Алгоритм программы основан на рекуррентном соотношении между множествами вершин политопов, а также достаточных и, отдельно, необходимых условиях для вершин [3, 4]. В трудных случаях для отсеивания разбиений, не являющихся вершинами, используется универсальная, но медленная, программа Polymake [5] с разработанными функциями для загрузки/выгрузки данных и обработки результатов.

Вычисления показали, что числа разбиений, вершин и опорных вершин существенно различаются. Последовательности чисел вершин и опорных вершин включены в Онлайн-энциклопедию Слоана «Целочисленные последовательности» (номера A203898 и A203899).

Литература

1. Эндриус, Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982, 255 с.
2. Shlyk, V. A. Polytopes of Partitions of Numbers // *European J. Combin.* 2005, Vol. 26, № 8, P. 1139–1153.
3. Шлык, В. А. О вершинах политопов разбиений чисел // *Докл. НАН Беларуси.* 2008, Т. 52, № 3, С. 5–10.
4. Шлык, В. А. Комбинаторные операции порождения вершин политопа разбиений чисел // *Докл. НАН Беларуси.* 2009, Т. 53, № 6, С. 27–32.
5. Gawrilow, E., Joswig, E.M. Polymake: a framework for analyzing convex polytopes // in *Polytopes — Combinatorics and Computation*, eds. G. Kalai and G.M. Ziegler *Polytopes-combinatorics and computation*, Basel: Birkhauser 2000, P. 43–73.