УДК 517.925

Использование числа вращения для исследования устойчивости уравнений второго порядка

Веременюк В.В.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается линейное уравнение 2-го порядка (уравнение Хилла)

$$\ddot{x}+p(t)x=0,\ t\in[0;+\infty), \qquad (1)$$

с ω-периодическим непрерывным коэффициентом $p(t)$. К такому виду с помощью замены $z=EXP\left(-\frac{1}{2}\int_0^t a(s)ds\right)\cdot x$ преобразуется уравнение более общего вида $\ddot{z}+a(t)\dot{z}+b(t)z=0$ с ω-периодическими коэффициентами. Обозначим $\varphi(t)=\arg(x(t),\dot{x}(t))$, где $x(t)\neq 0$ - решение (1). Легко проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varphi}=-\sin^2\varphi-p(t)\cos^2\varphi. \qquad (2)$$

Значение предела $R_p=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}$ называется числом вращения уравнения (1). Известно (см., например [1]), что число вращения уравнения (1) существует и не зависит от выбора решения $x(t)\neq 0$.

Теорема. Если уравнение (1) не устойчиво, то число $\frac{\omega}{\pi}R_p$ - целое.

Для доказательства достаточно увидеть, что в силу теории Флоке (см., например [2]) уравнение (1) неустойчиво только, если оно имеет действительный мультипликатор $|\rho|>1$.

Используя определение числа вращения, уравнение (2) и данную теорему, легко получить известный результат Н.Е.Жуковского: если для некоторого неотрицательного целого k выполнено неравенство $\frac{\pi^2k^2}{\omega^2}<p(t)<\frac{\pi^2(k+1)^2}{\omega^2}$, $t\in[0;\omega]$, то уравнение (1) устойчиво.

Литература

1. Арнольд, В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978 г.
2. Демидович. Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука, 1967 .