УДК 519.95

Дифференциальные операторы, связанные с обобщенными функциями Лежандра

Вирченко Н.А.
НТУУ «КПИ» (г. Киев, Украина)

Как известно [1], обобщенные функции Лежандра I-го, II-го рода $P_k^{m,n}(z), Q_k^{m,n}(z)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{du}{dz}\right]+\left[k(k+1)-\frac{m^2}{2(1-z)}-\frac{n^2}{2(1+z)}\right]u=0, \tag{1}$$

где k, m, n – комплексные в общем случае.

Введем дифференциальные операторы вида

$$M^+(k,m,n)R_k^{m,n}(z)=R_k^{m+1,n+1}(z), \tag{2}$$

$$M^-(k,m,n)R_k^{m,n}(z)=\left(k+\frac{m+n}{2}\right)\left(k-\frac{m+n}{2}+1\right)R_k^{m-1,n-1}(z), \tag{3}$$

где через $R_k^{m,n}(z)$ обозначены функции $P_k^{m,n}(z), Q_k^{m,n}(z)$, подробнее:

$$M^+(k,m,n)=\sqrt{z^2-1}\frac{d}{dz}-\frac{(m+n)z+m-n}{2\sqrt{z^2-1}}, \tag{4}$$

$$M^-(k,m,n)=\sqrt{z^2-1}\frac{d}{dz}+\frac{(m+n)z+m-n}{2\sqrt{z^2-1}}. \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в операторной форме:

$$M^-(k,m+1,n+1)M^+(k,m,n)R_k^{m,n}(z)=\left(k+\frac{m+n}{2}+1\right)\left(k-\frac{m+n}{2}\right)R_k^{m,n}(z). \tag{6}$$

Используя реккурентные соотношения для $R_k^{m,n}(z)$, связь $P_k^{m,n}(z)$ с $Q_k^{m,n}(z)$, можно получить операторные уравнения, что связывают нижние индексы обобщенных функций Лежандра.

Можно показать, как вышеподанные дифференциальные операторы используются для решения дифференциальных уравнений 1-го, 2-го порядков.

Литература

1. Kuipers, L., Meulenbeld, B. On the generalization of Legendre's associated differential equation // Proc. Knkl.Nederl. Akad. Weten. A., 1957. – T. 31, № 8, с. 117-120.