УДК 539.3

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

О. Н. Скляр

Метод разделения переменных (метод Фурье) является одним из наиболее применяемых методов аналитического решения краевых задач математической физики, теории упругости и др. Ниже выводятся условия его реализации для уравнений вида:

$$\Delta U + K_1 \frac{\partial U}{\partial x} + K_2 \frac{\partial U}{\partial y} + K_3 \frac{\partial U}{\partial z} + K_4 \quad U = 0 \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, $K_i fi = 1,\ 4$ — функции x, y, z.

Перейдем в (1) к вращательным координатам (η, θ, φ) по формулам:

$$x + iy = \rho e^{i\varphi}, \qquad \rho = e^{\ i\varphi}(x + iy) \tag{2}$$

$$z + i\rho = f(\eta + i\theta), \qquad \eta + i\theta = F(z + i\rho) \qquad (F = f^{-1}) \tag{3}$$

откуда

$$\rho = \frac{1}{2i}\left[f(\eta + i\theta) - \bar{f}(\eta - i\theta) \right]$$

$$z = \frac{1}{2}\left[f(\eta + i\theta) + \bar{f}(\eta - i\theta) \right]$$

$$x + iy = \frac{1}{2i}\left[f(\eta + i\theta) - \bar{f}(\eta - i\theta) \right] e^{i\varphi}$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение.

Т.к. $\varphi = arctg \dfrac{y}{x}$, то: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} = -\dfrac{\sin\varphi}{\rho} = -\dfrac{2i\sin\varphi}{f(\eta + i\theta) - \bar{f}(\eta - i\theta)}$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{2i\cos\varphi}{f(\eta + i\theta) - \bar{f}(\eta - i\theta)} \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ имеем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial\rho}{\partial z}=0 \tag{5}$$

Из $\eta+i\theta=F(z+i\rho)$ следует:

$$\left.\begin{aligned}\eta&=\frac{1}{2}\left[F(z+i\rho)+\bar{F}(z-i\rho)\right]\\ \theta&=\frac{1}{2i}\left[F(z+i\rho)-\bar{F}(z-i\rho)\right]\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{i}{2}\left[F'(z+i\rho)-\bar{F}'(z-i\rho)\right]\cos\varphi;\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{i}{2}\left[F'(z+i\rho)-\bar{F}'(z-i\rho)\right]\sin\varphi\\ &\frac{\partial\eta}{\partial z}=\frac{i}{2}\left[F'(z+i\rho)+\bar{F}'(z-i\rho)\right]\\ &\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{2}\left[F'(z+i\rho)+\bar{F}'(z-i\rho)\right]\cos\varphi;\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{2}\left[F'(z+i\rho)+\bar{F}'(z-i\rho)\right]\sin\varphi\\ &\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{2i}\left[F'(z+i\rho)-\bar{F}'(z-i\rho)\right]\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Для оператора Лапласа имеем:

$$\Delta U=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right] \tag{8}$$

где h_i — параметра Лама, вводимые равенством:

$$dS^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=(h_1d\varphi)^2+(h_2d\eta)^2+(h_3d\theta)^2 \tag{9}$$

В нося в (9) формулы (2)–(3) получим

$$h_1=\rho,\quad h_2=h_3=\sqrt{f'(\eta+i\theta)\cdot\bar{f}'(\eta-i\theta)}$$

Поэтому уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{f'(\eta+i\theta)\cdot\bar{f}'(\eta-i\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right]+\tilde{K}_1\frac{\partial U}{\partial\eta}+\tilde{K}_2\frac{\partial U}{\partial\theta}+\tilde{K}_3\frac{\partial U}{\partial\varphi}+K_4U$$

или

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\frac{\rho^2}{f'(\eta+i\theta)\cdot\bar{f}'(\eta-i\theta)}\left[\frac{\partial^2U}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2U}{\partial^2\theta}\right]+\rho^2\left[\tilde{K}_1^2+\frac{1}{\rho f'(\eta+i\theta)\cdot\bar{f}'(\eta-i\theta)\partial\eta}\right]\frac{\partial U}{\partial\eta}+\\ &+\rho^2\left[\tilde{K}_2+\frac{1}{\rho f'(\eta+i\theta)\cdot\bar{f}'(\eta-i\theta)\partial\theta}\right]\frac{\partial U}{\partial\theta}+\rho^2K_3\frac{\partial U}{\partial\varphi}+K_4\rho^2U=0\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{2}F'(z+i\rho)\left[i(K_1\cos\varphi+K_2\sin\varphi)+K_3\right]+\frac{1}{2}\bar{F}'(z-i\rho)\left[K_3-i(K_1\cos\varphi+K_2\sin\varphi)\right]\\
K_2 &= \frac{1}{2}F'(z+i\rho)\left[K_1\cos\varphi+K_2\sin\varphi-iK_3\right]+\frac{1}{2}\bar{F}'(z-i\rho)\left[K_1\cos\varphi+K_2\sin\varphi+iK_3\right]\\
K_3 &= K_1\cos\varphi+K_2\sin\varphi
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Заметим, что $\tilde{K}_3\cdot\rho^2=-K_1y+K_2x$ (12)

Предположим, что

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{K}_3\rho^2=g(\varphi)\\
&K_4=K_4(\eta,\theta)\\
&K_1=K_1(\eta,\ \theta),\qquad K_2=K_2(\eta,\ \theta)
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Тогда, полагая

$$U(\eta,\ \theta,\ \varphi)=F_1(\varphi)\cdot V(\eta,\ \theta), \quad (14)$$

где F_1 — удовлетворяет уравнению

$$F_1''(\varphi)+g(\varphi)\quad F_1'(\varphi)=\lambda F_2,\ \ \lambda=const, \quad (15)$$

получим из (10)–(13)–(15):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\left[\frac{\partial\rho}{\rho\partial\eta}+\tilde{K}_1 f'(\eta+i\theta)\bar{f}'(\eta-i\theta)\right]\frac{\partial V}{\partial\eta}+$$
$$+\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\tilde{K}_2 f'(\eta+i\theta)\bar{f}'(\eta-i\theta)\right]\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{f'(\eta+i\theta)\bar{f}'(\eta-i\theta)}{\rho^2}\left(\rho^2K_4+\lambda\right)V=0 \quad (16)$$

Если кроме (13) выполнены такие условия:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{K}_1 f'(\eta+i\theta)\bar{f}'(\eta-i\theta)+\frac{\partial\ln\rho}{\partial\eta}=a(\eta)\\
&\tilde{K}_2 f'(\eta+i\theta)\bar{f}'(\eta-i\theta)+\frac{\partial\ln\rho}{\partial\theta}=b(\theta)\\
&K_4 f'(\eta+i\theta)\bar{f}'(\eta-i\theta)=\alpha(\eta)+\beta(\theta)\\
&\frac{f'(\eta+i\theta)\bar{f}'(\eta-i\theta)}{\rho^2}=c(\eta)+d(\theta)
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Тогда (10) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}+a(\eta)\frac{\partial V}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+b(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}+\{\alpha(\eta)+\beta(\theta)+\lambda[c(\eta)+d(\theta)]\}V=0 \quad (18)$$

Представим V в током виде:

$$V(\eta, \quad \theta)=F_2(\eta)F_3(\theta) \quad (19)$$

Внося (19) в (18), получим для $F_i (i=2, \quad 3)$ такие уравнения

$$\left.\begin{aligned} &F_2''(\eta)+a(\eta)F_2'+[a(\eta)+\lambda c(\eta)-\mu]F_2=0\\ &F_3''(\theta)+b(\theta)F_3'+[b(\theta)+\lambda d(\theta)+\mu)]F_3=0 \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$M = const.$

Итак, если выполнены условия (13)–(17), тогда уравнение (1) допускает решения в виде $U=F_1(\varphi)F_2(\eta)F_3(\theta)$

В заключение отметим, что примененный здесь метод ранее использовался рядом авторов при решении краевых задач для уравнения Лапласа в областях, ограниченных поверхностями вращения [1].

Литература

Е.В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций М., 1952, с.476.

УДК 539.3

БЕЗИЗГИБНЫЕ ФОРМЫ ТОНКОСТЕН ОБОЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ИХ ДЕФОРМАЦИИ ПО ТОЛЩИНЕ

Т.М. Мартыненко

Задача определения безизгибных форм упругих оболочек берет свое начало с работы [Хорна], которая получила свае дальнейшее развитие в работах [Мартыненко М.Д., Фан Нго Хьюнг Нью, Гариба]. В настоящей работе дается ее дальнейшее развитие применительно к учету их деформации по толщине. Будем исходить из следующей системы уравнений равновесия