

## ИНВЕРСИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КЕЛЬВИНА В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

**О.В. Жихарев**

Многие методы исследования пространственных (статических) задач теории упругости основываются на решениях однородной системы уравнений Ламе с помощью гармонических и бигармонических функций. Для тел конечных размеров, границы которых допускают описание в рамках координатных поверхностей, эти решения могут быть найдены с помощью разложений по собственным вектор-функциям.

Известный прогресс в решении задач плоской теории упругости во многом достигнут благодаря использованию методов теории функции комплексного переменного, в частности, метода конформных отображений. Соответствующим аналогом этого метода в пространстве является метод инверсии, который остается единственным конформным отображением пространственных областей.

Инверсия — это некоторое точечное преобразование пространственных областей относительно сферы радиуса  $\varepsilon$  (радиус инверсии) с центром в точке  $(a_1, a_2, a_3)$  (центр инверсии), задаваемое следующими соотношениями [3, 8]:

$$x_1 - a_1 = \frac{\varepsilon^2}{r^2}(x - a_1); \quad y_1 - a_2 = \frac{\varepsilon^2}{r^2}(y - a_2); \quad z_1 - a_3 = \frac{\varepsilon^2}{r^2}(z - a_3), \quad (1)$$

где  $r^2 = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2$ .

По Кельвину, если  $V(x, y, z)$  — гармоническая в области  $D$  функция, то функция

$$V_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{\varepsilon}{r_1} V \left( a_1 + \frac{\varepsilon^2}{r_1^2}(x_1 - a_1), a_2 + \frac{\varepsilon^2}{r_1^2}(y_1 - a_2), a_3 + \frac{\varepsilon^2}{r_1^2}(z_1 - a_3) \right), \quad (2)$$

где  $r_1^2 = (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - a_2)^2 + (z_1 - a_3)^2$ , будет гармонической в области  $D_1$ , полученной из  $D$  в результате преобразования (1) [3, 8].

Класс областей, в которых можно ожидать аналитические представления перемещений для тел конечных размеров, может быть расширен с помощью метод инверсии. Он позволяет находить решения пространственных задач теории упругости для новых тел (допускающих разделение переменных) и апп-

роксимировать тела конечных размеров некоторыми другими телами со сглаженными границами. Так, например, цилиндр конечных размеров можно приблизить вписанным в него телом вращения заданных размеров со сглаженными углами (рис. 1).

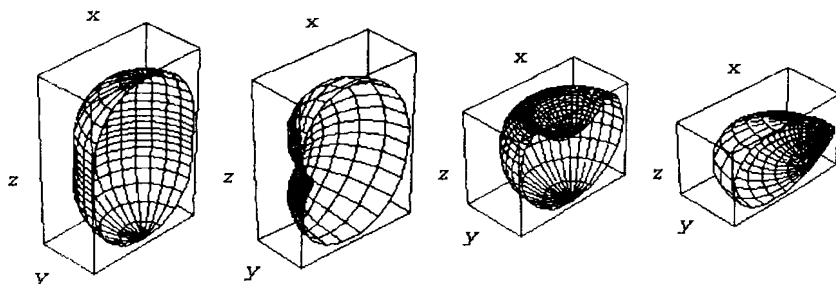


Рис. 1 Фигуры, получаемые в результате применения инверсии к эллипсоиду вращения.

Рассмотрим в качестве примера, решение пространственной задачи теории упругости для сжатого эллипсоида вращения [6]. Фундаментальная система решений уравнения Лапласа в эллипсоидальных координатах имеет вид [6]:

$$V(\eta, \theta, \varphi) = \left[ f_{nm} P_n^{(m)}(ch\eta) + g_{nm} Q_n^{(m)}(ch\eta) \right] P_n^{(m)}(\sin \theta) (i_{nm} \cos m\varphi + k_{nm} \sin m\varphi),$$

где  $0 \leq \eta \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  — эллипсоидальные координаты, связанные с декартовыми следующими соотношениями [5]:

$$ch\eta = \frac{s_1 + s_2}{2a}, \quad \sin \theta = \frac{s_1 - s_2}{2a}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad s_1 = \sqrt{z^2 + (\rho \pm a)^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Применяя преобразование Кельвина, приходим к такому решению уравнения Лапласа в новой (преобразованной по инверсии) системе координат:

$$V_*(\eta, \theta, \varphi) = \sqrt{ch^2 \eta - \cos^2 \theta} \quad V(\eta, \theta, \varphi), \quad (3)$$

где  $ch\eta = \frac{s'_1 + s'_2}{2a}$ ,  $\sin \theta = \frac{s'_1 - s'_2}{2a}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{y_1}{x_1}$  и  $\frac{s'_1}{s'_2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 \pm \frac{1}{a})^2}$ .

Воспользовавшись результатами Ю. Н. Подильчука [6] и учитывая (3), получим следующее решение задачи теории упругости для преобразованного с помощью инверсии эллипсоида вращения:

$$u = \frac{\sqrt{ch^2\eta - \cos^2\theta}}{2aG} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} P_n^{(m-1)}(\cos\theta) Q_n^{(m-1)}(\sin i\eta) [\pm a_{nm} \cos^{(m-1)}\theta \sin(m-1)\varphi + b_{nm} \frac{\sin(m-1)\varphi}{\cos(m-1)\varphi}]$$

$$w = -\frac{\sqrt{ch^2\eta - \cos^2\theta}}{2aG} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \frac{1}{(n+m)(n-m+1)} P_n^{(m)}(\cos\theta) Q_n^{(m)}(\sin i\eta) [a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi]$$

Следует отметить, что указанный метод позволяет строить приближенные решения пространственных задач теории упругости для областей со сложной геометрией граничных поверхностей. Для таких областей отсутствуют способы решения, которые были бы близкими по точности и эффективности к способам решения задач плоской теории упругости.

О возможностях применения метод инверсии к решению контактных задач теории упругости указывал Л. А. Галина [1]. В. И. Довноровичем [2] была разработана формальная схема использования этого метода для решения контактных задач теории упругости. В.Л. Рвачев [7] применил МИ при решении контактной задачи для штампа, имеющего в плане форму двух соприкасающихся окружностей.

Используя результаты А. И. Лурье [4], полученные при решении задачи о вдавлении штампа с плоским основанием, имеющего в плане форму эллипса силой  $Q$ , сосредоточенной в точке  $(x_0, y_0)$ , в упругое полупространство  $z \leq 0$ , находим следующее решение новой контактной задачи для штампа, очерченного в плане контуром, являющимся инверсией эллипса (рис. 2):

$$p_1(x, y) = \frac{Q}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \left( (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \times \left( 1 + \frac{3x_0}{a^2} \left( \frac{x-a_1}{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} + a_1 \right) + \frac{3y_0}{a^2(1-e^2)} \left( \frac{y-a_2}{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} + a_2 \right) \right) \times \left( 1 - \left( \frac{x-a_1}{a((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2)} + \frac{a_1}{a} \right)^2 - \left( \frac{y-a_2}{a\sqrt{1-e^2}((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2)} + \frac{a_2}{a\sqrt{1-e^2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Эта формула получена в предположении, что центр инверсии находится в плоскости  $z = 0$ , она учитывает перемещение штампа как жесткого целого, и потому уточняет решение В. И. Довноровича.

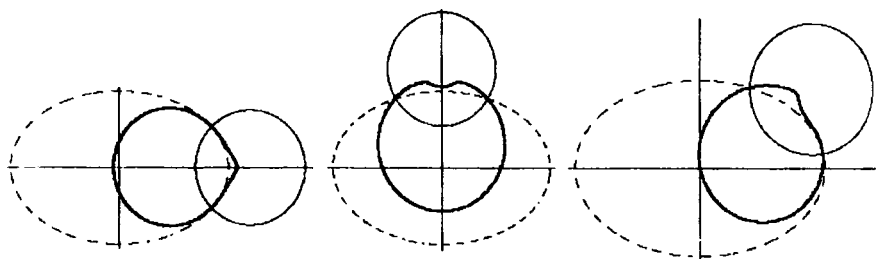


Рис. 2 Кривые, получаемые в результате инверсии эллипса.

Применение метод инверсии может привести к появлению областей перемены знака  $p_1(x, y)$ , т.е. зон отрыва точек границ полупространства от поверхности штампа, поэтому формула (4) должна быть дополнена условием  $p_1(x, y) \geq 0$  при  $(x, y) \in S^*$ , где  $S^*$  — площадка контакта. Кроме того, нужно следить за тем, во что преобразуется исходная область. В зависимости от того, принадлежит ли центр инверсии исследуемой области (внутренность эллипса) или он находится вне ее, получаемая в результате преобразования область, будет соответственно неограниченной в первом случае и ограниченной (рис. 2) во втором.

### Литература

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М. Гостехиздат, 1963.
2. Довнорович В.И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Мн. БГУ, 1959.
3. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., 1950.
4. Лурье А.И. Теория упругости, М., 1955, с.306–324.
5. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М., 1968 г.
6. Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. Киев, 1979.
7. Рвачев В.Л. О характере распределение давления под штампом, очерченным в плане двумя соприкасающимися окружностями. — Изв. АН СССР, ОТН, 1959, 2, 400.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М. Наука, 1981, том 4, часть 2.