

для систем на рис. 7.1 а, в реакции связей не войдут в суммы моментов относительно точек А и О; для системы на рис. 7.1 б – в сумму проекций на ось х. Чтобы получить представление о величине реакций связей рассмотрим систему 7.1 а. Стержень ВС повернем на угол α в положение ВС'. Система станет статически определимой. Составим для нее сумму моментов относительно точки А: $R_B' \sin \alpha b - Fa = 0$. Отсюда получаем: $R_B' = aF/(b \sin \alpha)$. Из формулы видно, что при обратном переходе к мгновенно-изменяемой системе $\alpha \rightarrow 0$, $R_B' \rightarrow R_B \rightarrow \infty$. В процессе синтеза необходимо следить, чтобы все структурные элементы вводились с помощью корректных систем связей.

УДК

МЕТОД РАЗРЫВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД.

А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев

В настоящей работе, применяя операцию разрывов [1] исследуем поведение нестационарных возмущений вдоль характеристик в неоднородной упруговязкопластической среде. Получены уравнения для изменения интенсивности возмущенного состояния, которые приводятся к виду удобному для исследования динамической устойчивости сложных сред [2].

Рассмотрим упруговязкопластическое тело объема V , ограниченное поверхностью S , с заданными на ней краевыми условиями. Считаем тело изотропным, неоднородным. Тензор упругих деформаций e_{ij}^e связан с напряжениями σ_{ij} законом Гука.

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \quad (1)$$

Здесь λ и μ — параметры Ламе.

Среда находится в упругом состоянии, если

$$S_{ij} S_{ij} = \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) < k^2 \quad (2)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, k — коэффициент пластичности.

Если $S_{ij} S_{ij} > k^2$, то тело деформируется пластическим образом. В этом случае, компоненты тензора скорости пластических деформаций \dot{e}_{ij}^p связаны с тензором напряжений условием

$$(S_{ij} - \eta \dot{e}_{ij}^p)(S_{ij} - \eta \dot{e}_{ij}^p) = 2k^2, \quad (3)$$

где η — коэффициент вязкости.

Ассоциированный закон течения имеет вид

$$\dot{e}_{ij}^p = \psi (S_{ij} - \eta \dot{e}_{ij}^p), \quad \psi > 0 \quad (4)$$

Полные деформации связаны с упругими e_{ij}^e и пластическими e_{ij}^p обычным образом

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p \quad (5)$$

и выражаются через перемещения u_i с помощью формул Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i,j}) \quad (6)$$

Представленная модель является обобщением модели тела Бингама. Для замыкания системы определяющих уравнений запишем уравнения движения и граничные условия в виде

$$[\sigma_{kj}(\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

где ρ — плотность.

$$[\sigma_{kj}(\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} n_j = p_i \quad (8)$$

где n_j — нормаль к гранитной поверхности, p_i — приложенные силы.

В соотношениях (1) — (4) коэффициенты упругости — λ , μ пластичности — k , вязкости — η , являются функциями пространственных координат.

Обозначим решение системы (1) — (8) через $\sigma_{ij}^0(x_n, t)$, $e_{ij}^0(x_n, t)$, $u_{ij}^0(x_n, t)$. Будем считать, что с течением времени они асимптотически стремятся к $\sigma_{ij}^0(x_n)$, $e_{ij}^0(x_n)$, $u_{ij}^0(x_n)$.

Представим величины связанные с возмущенной формой движения в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^+; e_{ij} = e_{ij}^0 + e_{ij}^+; u_{ij} = u_{ij}^0 + u_{ij}^+ \quad (9)$$

Будем считать возмущение σ_{ij}^+ , e_{ij}^+ , u_{ij}^+ малыми, а величины $e_{ij,k}^{p+} = 0$. Тогда при подстановке (9) в исходные уравнения получим из (7) и (1) соотношения возмущенного движения

$$E_{nm, m}^+ = \rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}; \quad (10)$$

$$E_{nm}^+ - \sigma_{mn}^0 e_{i,j}^+ = \lambda e_{ij}^0 \delta_{nm} + \mu (e_{n,n}^+ + e_{n,m}^+) \quad (11)$$

где

$$E_{nm}^+ - \sigma_{nm}^+ = \sigma_{nk}^+ \left(1 - 3\lambda(3\lambda + 2\mu)^{-1}\right) \sigma_{mk}^0 / 2\mu \quad (12)$$

Рассмотрим распространение нестационарных возмущений в рассматриваемой среде в виде поверхностей разрыва L_t , на которых величины возмущений напряжений и деформаций испытывают разрыв, а величины напряжений и деформаций основного состояния и параметры среды непрерывны. Знаком $[]$ обозначим разность значений некоторой функции f на разных сторонах от поверхности разрыва т.е. $[f] = f^+ - f^-$, где f^- — значение f на задней, f^+ — на передней стороне поверхности. Используя [1] можно получить, что скачок возмущений распространяется в виде продольной и поперечной волн со скоростями

$$C_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu + v_i v_j \sigma_{ij}^0}{\rho}} \quad (13)$$

$$C_t = \sqrt{\frac{\mu + v_i v_j \sigma_{ij}^0}{\rho}} \quad (14)$$

здесь v_i — компоненты вектора единичной нормали к поверхности L_t .

Уравнение интенсивности возмущений получим с помощью динамических, геометрических и кинематических условий совместности на поверхности L_t .

$$\left[\frac{\partial E_{mn}^+}{\partial t} \right] = \frac{\delta [E_{mn}]}{\delta t} - \Pi_{mn}^+ c \quad (15)$$

$$\left[\frac{\partial E_{mn}^+}{\partial x_m} \right] = g^{ab} \frac{\partial [E_{mn}^+]}{\partial y^a} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial y^b} + v_m \Pi_{mn}^+ \quad (16)$$

$$\left[\frac{\partial V_m^+}{\partial x_n} \right] = v_m T_n + g^{ab} \frac{\partial [V_m^+]}{\partial y^a} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^b} \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial V_m^+}{\partial t} \right] = \frac{\delta [V_m]}{\delta t} - c T_m \quad (18)$$

Тогда уравнение для изменения интенсивности продольной волны с учетом (10), (11), (15)–(18) имеет вид

$$\frac{d\gamma^+}{ds} = \frac{\gamma(A+B)}{2\rho c_e^2} \quad (19)$$

а поперечной

$$\frac{d[V_i^+]}{ds} = A_{ij} [V_j^+] + B_{ikg} \left([V_k^+] v_g + [V_g^+] v_k \right) \quad (20)$$

здесь $\gamma^+ = [V_i^+] v_i^{-1}$, коэффициенты $A, B, A_{ij}, A_{ikg}, \Pi_{mn}$ и T_m — зависят от средней кривизны поверхности, от первой и второй квадратичных форм; s — расстояние вдоль траектории луча.

Аналогично работе [4] для плоского случая (координаты — x, y) получим уравнение траектории, которое может быть приведено к виду

$$\ddot{z} + \omega^2 z + \hat{\omega} z^3 = W(x, z) \quad (21)$$

по математической структуре соответствующей уравнению Дуффинга. В (21) обозначим $z = y\sqrt{n}$ (n — коэффициент преломления среды, ω — собственная частота траектории возмущений, $\hat{\omega} = 8\epsilon^2 \Pi \Omega$); $\epsilon \ll 1$; $W(x, z) = zW(x)$.

Уравнение (21) можно исследовать на устойчивость известными методами [5], в том числе и в случаях задания параметров среды случайными функциями координат [6].

Литература

1. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. — М.: Наука, 1964.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961.
3. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. — М.: Физматлит, 2001.
4. Чигарев А.В., Чигарев Ю.В. О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах. — Акустический журнал, Т.24, вып. 5, 1978. с. 765-771.
5. Болотин В.В., Григолюк Э.И. Устойчивость упругих и неупругих систем. В сб. «Механика в СССР за 50 лет», М.: Наука, 1977.
6. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.