УДК 539.3

К ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДВУХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик

Система ДУ несвязанных нестационарных краевых и начально-краевых задач классической термоупругости для изотропных материалов при отсутствии источников тепла имеет следующий вид [1]:

$$T_{,kk} - \frac{1}{a}\dot{T} = 0, \tag{1}$$

$$\mu \;\; u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = \rho \;\; \ddot{u}_i + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_{,i} - X_i, \tag{2}$$

Для полной постановки задачи необходимо сформулировать краевые условия. Граничные и начальные условия задаются отдельно для уравнений движения (2) и уравнения теплопроводности (1). Для ДУ (2) на границе задаются перемещения или нагрузки, для уравнения теплопроводности — распределение температуры или теплового потока. Возможно также задание смешанных граничных условий. Начальные условия характеризуют соответственно движение тела или распределение температуры в некоторый начальный момент времени. В уравнениях (1) и (2): λ и μ — коэффициенты Ламе, a_T — коэффициент линейного теплового расширения, a — коэффициент температуропроводности [2], $X_i(x,t)$ — массовые нагрузки, c_e — теплоемкость при постоянной деформации.

Решение краевых и начально-краевых задач термоупругости в такой постановке для любых конструктивных элементов и граничных условий возможно только численным путем. Наиболее оптимальным методом является метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [3]. Метод ГИУ — метод решения, основанный на сочетании идей теории потенциала и методов теории аппроксимации. Метод ГИУ характеризуется как один из наиболее перспективных методов анализа показателей напряженно-деформированного состояния применительно к широкому классу практических задач строительной механики, теории упругости и термоупругости. Сущность методов потенциала — в преобразовании дифференциальных уравнений в эквивалентную систему интегральных уравнений. Это позволяет получить систему уравнений, включающую только значения переменных на границе области. С помощью соответствующих формул представления определяются значения неизвестных величин во внутренних точках области через их граничные значения и значения их первых производных. Кроме того, такой подход уменьшает размерность исходной задачи на единицу. Метод ГИУ позволяет решать краевые задачи в областях произвольной конфигурации, в т. ч. и бесконечной, имеет меньше затрат памяти и времени вычислительных операций по сравнению с методом конечных элементов, позволяет легко комбинировать этот метод с другими численными методами.

Этапы решения краевых и начально-краевых задач термоупругости методом потенциала:

1. Разбиение поверхности рассматриваемого тела (границы области в случае двухмерной задачи) на граничные элементы.

2. Построение конечномерных пространств граничных элементов, т. е. пространств интерполантов граничных функций по поверхности (границе) и по времени в случае нестационарной задачи.

3. Построение системы дискретных аналогов ГИУ (системы линейных уравнений).

4. Численное решение дискретных аналогов ГИУ и вычисление механических и теплофизических величин, связанных с решениями ГИУ.

Решение задачи проводится в 2 этапа. На первом этапе рассматривается краевая задача теплопроводности в постановке (1). Одно из решений уравнения (1), описывающее двумерное распространение тепла от точечного источника с интенсивностью, равной единице, который начинает действовать в некоторой произвольной точке тела P_0 в нулевой момент времени, имеет вид [2]:

$$T(P,t) = F(P_0,P,t) = \frac{1}{4\pi at}\exp(-\frac{r^2}{4at}), \qquad (3)$$

где r — расстояние между точками $P(x,y)$ и $P_0(x_0,y_0)$.

Используя преобразование Лапласа к уравнению (1), получаем:

$$a\nabla^2 T^* - sT^* = 0, \qquad (4)$$

где $T^* = T^*(P,s)$ — трансформанта Лапласа температуры T как функция координат и параметра преобразования s (изображение функции T). Уравнению (4) удовлетворяет трансформанта Лапласа функции (3):

$$T^* = F^* = \frac{1}{2\pi a}K_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r\right), \qquad (5)$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода и нулевого порядка.

С помощью второй формулы Грина можно из выражения (5) получить следующее тождество:

$$T^*(P,s) = a\int_D \left[\frac{\partial T^*(Q,s)}{\partial n} F^*(P,Q,s) - T^*(Q,s)\frac{\partial F^*(P,Q,s)}{\partial n} \right] dS\,, \qquad (6)$$

где D — граница плоской области, Q — точка, принадлежащая границе, S — расстояние вдоль границы, n — внешняя нормаль к D в точке Q.

Таким образом, если всюду на границе известны T^* и $\dfrac{\partial T^*}{\partial n}$ при любом параметре s, то значение температуры в любой внутренней точке P можно определить для данного значения s по формуле (6) при помощи квадратурных формул.

В случае, если в краевой задаче задается только часть граничных значений, уравнение (6) может использоваться в данном случае для определения недостающих данных. Для возможности такого его использования необходимо в (6) перейти к пределу при стремлении внутренней точки P к произвольной точке P' границы:

$$T^*(P',s) + 2a\int_D \left[T^*(Q,s)\frac{\partial F^*(P',Q,s)}{\partial n} - \frac{\partial T^*(Q,s)}{\partial n} F^*(P',Q,s) \right] dS = 0\,. \qquad (7)$$

Получить решение уравнения (7) аналитически практически не представляется возможным, особенно при сложной геометрии границы. Поэтому проводится приближенное решение численными методами.

После того, как будут определены неизвестные значения на границе области, величину трансформанты температуры T^* в любой внутренней точке можно найти по формуле (6) при помощи простого интегрирования.

Для решения уравнения (7) граница области D разбивается на некоторое число сегментов, математически это можно представить в виде:

$$T^*(P',s) + 2a\sum_{i=1}^{N}\int_{D_i} \left[T^*(Q,s)\frac{\partial F^*(P',Q,s)}{\partial n} - \frac{\partial T^*(Q,s)}{\partial n} F^*(P',Q,s) \right] dS = 0\,, \qquad (8)$$

где каждое значение индекса i соответствует одному из N сегментов D_i. Способ разбиения границы произвольный и зависит от требуемой точности результатов (чем меньше размер сегментов, тем выше точность вычислений). Затем уравнение (8) сводится к системе алгебраических уравнений $T^*(Q,s)$ и $\dfrac{\partial T^*(Q,s)}{\partial n}$ на каждом сегменте при помощи функций от S некоторого заданного вида, т.е. полиномами некоторой данной степени. Так, $T^*(Q,s)$ можно представить например на i-м сегменте постоянной $T^*(Q_i,s)$. Если последовательно на каждом из сегментов приписывать точке p дискретное значение P_j, то уравнение (7) переходит в систему

$$T^*(P_j',s)+2a\sum_{i=1}^{N}\left[T^*(Q_i,s)\int_{D_i}\frac{\partial F^*(P_j',Q,s)}{\partial n}dS-\frac{\partial T^*(Q_i,s)}{\partial n}\int_{D_i}F^*(P_j',Q,s)dS\right]=0, \quad . \quad (9)$$

$j=1,2,...,N$

Для заданного значения s интегралы в уравнениях (9) содержат лишь известные функции, значения которых определены для каждого P_j во всех точках Q на границе. Они могут быть вычислены путем численного интегрирования и представляют собой коэффициенты при переменных $T^*(Q_i,s)$ и $\frac{\partial T^*(Q_i,s)}{\partial n}$. Если заданы значения переменных, соответствующие известным граничным условиям корректно поставленной граничной задачи, то остальные значения можно определить из решения алгебраических уравнений.

Для получения окончательного решения уравнения (1) необходимо провести обращение преобразования Лапласа. Здесь возможны различные подходы. Удобно пользоваться рекомендациями [3]. Искомая функция от времени приближенно представляется в виде

$$T=A+Bt+\sum_{k=1}^{m}a_k e^{-b_k t}, \quad (10)$$

где A,B,a_k,b_k,m — постоянные. Преобразуя уравнение (9) по Лапласу и умножая на параметр преобразования s, можно получить:

$$sT^*(s)=A+\frac{B}{s}+\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{1+\frac{b_k}{s}}. \quad (11)$$

Сначала необходимо задать число m и последовательность значений параметра s: $s=s_n$, $n=1,2,...,M$, где $M=m+2$. Входящие в формулу (10) m постоянных b_k принимаются равными первым m значениям s_n. Затем вычисляется трансформанта функции $T^*(s)$ для каждого из M значений s_n. При подстановке этих величин для каждого значения s_n в формулу (11) получается M уравнений:

$$s_n T^*(s_n)=A+\frac{B}{s}+\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{1+\frac{s_k}{s_n}}, \quad n=1,2,...,M. \quad (12)$$

Они образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно M неизвестных A, B и a_k, решение которой не представляет особых трудностей.

Рассмотрим решение ДУ термоупругости (2). Частное решение (2) представляем в виде, предложенном Гудьером, вводя потенциал термоупругого перемещения Φ [5]:

$$u_i = \Phi_{,i}. \tag{13}$$

Подставляя формулы (13) в (2) в случае отсутствия массовых сил, получим:

$$\Phi_{,ii} = mT, \tag{14}$$

где $m = \dfrac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\alpha_T$.

Рассмотрим задачу определения температуры и перемещений в пространстве E^2, вызванных действием единичного источника тепла, помещенного в начале координат. В силу центральной симметрии поля перемещений и деформаций, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi' = mT'_*, \\ &\Delta T'_* - \frac{1}{a}T'_* = -\frac{\delta(R)}{a}\delta(t), \\ &\Delta = \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d}{dR}. \end{aligned} \tag{15}$$

Применяя к уравнениям (15) преобразование Лапласа [6], получаем выражения для потенциала термоупругого перемещения и температуры в пространстве преобразований по Лапласу:

$$\bar{\Phi}'(R,p) = -\frac{m}{2\pi p}\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right) - K_0\left(R\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right], \tag{16}$$

$$\bar{T}'_*(R,p) = \frac{1}{2\pi a}K_0\left(R\sqrt{\frac{p}{a}}\right). \tag{17}$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Применяя обратное преобразование Лапласа к формулам (16) и (17) и принимая во внимание соотношение (14), получаем в истинном времени следующие фундаментальные решения двухмерных задач несвязанной нестационарной термоупругости:

$$T'_*(x,y,t)=\frac{1}{4\pi at}\exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right), \tag{18}$$

$$u'_i(x,y,t)=-\frac{H(t)R_{,i}}{2\pi R}\left[1-\exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)\right], \tag{19}$$

где: $H(t)$ — функция Хевисайда; $R_{,i}=\dfrac{\partial R}{\partial x_i}$.

Если источник тепла перенести из начала координат в точку $y(y1,y2)$, то функции $\Phi'(R,t)$ и $T'_*(R,t)$ будут вычисляться по формулам (18) и (19) лишь с тем отличием, что величина R определяется в этом случае по равенству:

$$R(x,t)=\sqrt{(x_i-y_i)(x_i-y_i)},\ i=1,2. \tag{20}$$

При этом для определения перемещений в бесконечной области можно получить следующую формулу:

$$u'_i=\frac{m}{2\pi}\left(\frac{(x_i-y_i)}{R^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^t\frac{\exp\left(-\frac{R^2}{4a\tau}\right)}{t}dt\right). \tag{21}$$

Температуры и перемещения в бесконечной области E^2, вызванные действием единичной нагрузки, приложенной в точку y, можно определить из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\mu\ u'_{ij,kk}+(\lambda+\mu)u'_{kj,ki}-(3\lambda+2\mu)\alpha_T T'_{j,i}=-\delta_{ij}\delta(x-y), \tag{22}$$

$$aT'_{j,kk}-\dot{T}'_j=0,\ k,i,j=1,2. \tag{23}$$

Очевидно, что $T'_j=0$, а компоненты $u'_{ij}(x,y)$ являются компонентами фундаментального решения изотермической эластостатики и определяются по формуле [4]:

$$u'(x,y)=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\ln\frac{1}{R}\delta_{ij}+R_{,i}R_{,j}\right]. \tag{24}$$

На основе представленных формул построены двухмерные сингулярные решения от действия единичной сосредоточенной нагрузки и от источника тепла единичной интенсивности. С их помощью получены граничные интегральные уравнения для первой и второй нестационарной начально-краевой задачи термоупругости.

Для численного решения построенных интегральных уравнений аппроксимируется геометрия рассматриваемой области и входящие в них краевые функции. Дискретные представления границы тела осуществляется с использованием одномерных конечных элементов различной формы, задаваемых на отрезке по локальным координатам с помощью функции формы. Аппроксимация по времени граничных функций осуществляется с помощью интерполяции относительно временных узлов по элементам t_F на заданном интервале времени. При этом можно применять кусочно-постоянную или кусочно-переменную аппроксимацию по времени на равномерной системе узлов и кусочно-постоянную, кусочно-переменную или кусочно-квадратичную (изопараметрическую) аппроксимацию по граничному элементу. В ходе шагового продвижения по времени находятся либо неизвестные граничные перемещения и температуры (в случае решения второй задачи), либо напряжения и тепловой поток (в случае решения первой задачи). Перемещения и температура, напряжения и тепловой поток во внутренних точках могут быть определены по заданным напряжениям и тепловым потокам и найденным напряжениям и температурам в случае второй задачи, или по заданным граничным перемещениям и температурам и найденным поверхностным нагрузкам и тепловым потокам в случае первой задачи с помощью интегрирования по границе и по времени с использованием формул интегральных представлений. Формулы интегральных представлений для перемещений и температуры, напряжений и теплового потока в случае двухмерной несвязанной задачи термоупругости являются формулами типа Сомильяна и позволяют определять значения соответствующих параметров во внутренних точках через их граничные значения и значения их первых производных.

Литература

1. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. — Киев: Наукова думка, 1970. — 239 с.

2. Карслоу Б., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 487 с.

3. Рицци Ф. Метод граничных интегральных уравнений — современный вычислительный метод прикладной механики. // Метод граничных интегральных уравнений. — М.: Мир, 1978. — с.11–17.

4. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962 — 364 с.

5. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 256 с.

6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967 г. — 599 с.