

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Физика»

ИЗУЧЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Пособие для студентов специальностей
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного
бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана
водных ресурсов», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели
и метрополитены»

В 2 частях

Часть 1

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию
в области строительства и архитектуры*

Минск
БНТУ
2021

УДК 537.31(075.6)

ББК 22.33я7

И88

С о с т а в и т е л и:

*А. К. Есман, Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук, Г. Л. Зыков,
А. И. Бибик, Ю. И. Андреёнок, С. В. Попко, Е. В. Журавкевич*

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра «Общая физика» БГУ, зав. кафедрой *А. И. Слободянюк*;
доцент кафедры физики БГУИР *В. В. Аксенов*

И88 Изучение деформированного состояния твердых тел: пособие для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»: в 2 ч. / сост.: А. К. Есман [и др.]. – Минск : БНТУ, 2021. – Ч. 1. – 48 с.
ISBN 978-985-583-210-3 (Ч. 1).

В пособии представлены материалы для проведения лабораторных работ по изучению деформированного состояния твердых тел. Подробно рассмотрены основные физические закономерности упругой деформации при изгибе балок из древесины. Описаны понятия абсолютной деформации кручения и сдвига, момента инерции поперечного сечения, стрелы прогиба. Представлен экспериментальный метод определения стрелы прогиба при малых деформациях. Изложена методика экспериментального исследования деформаций сдвига и кручения с помощью метода крутильных колебаний.

УДК 537.31(075.6)

ББК 22.33я7

ISBN 978-985-583-210-3 (Ч. 1)
ISBN 978-985-583-211-0

© Белорусский национальный
технический университет, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1 (58)

1. Определение модуля Юнга по деформации изгиба однородной балки.....	4
1.1. Введение	4
1.2. Понятие о деформациях	5
1.3. Физика изгиба однородной балки	7
1.4. Момент инерции поперечного сечения	12
1.5. Определение стрелы прогиба однородной балки для случая малых деформаций	14
1.6. Порядок выполнения лабораторной работы	18
1.7. Контрольные вопросы	22

Лабораторная работа № 2 (23)

2. Изучение деформаций сдвига и кручения с помощью метода крутильных колебаний.....	23
2.1. Упругие свойства твердых тел	23
2.2. Связь модуля сдвига с модулем кручения струны	26
2.3. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела	29
2.4. Крутильные колебания.....	33
2.5. Определение момента инерции тела методом крутильных колебаний	37
2.6. Затухающие крутильные колебания	38
2.7. Описание установки	41
2.8. Порядок выполнения лабораторной работы	42
2.9. Контрольные вопросы	44

Литература.....	46
-----------------	----

ПРИЛОЖЕНИЕ.....	47
-----------------	----

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА ПО ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА ОДНОРОДНОЙ БАЛКИ

Цель работы: изучить основные физические закономерности упругой деформации при изгибе балок из древесины, приобрести навыки работы с индикатором часового типа для измерения величины стрелы прогиба.

Приборы и материалы: индикатор часового типа для измерения величины стрелы прогиба, бруски из различных пород дерева, подвес для грузов, грузы, линейка, штангельциркуль.

1.1. Введение

При проектировании, строительстве и эксплуатации зданий и сооружений необходимо учитывать вид и величину деформаций, возникающих в отдельных элементах конструкций.

При этом каждый элемент конструкции стремится реагировать так, чтобы уравновесить действующую на него нагрузку. Для того чтобы строящиеся сооружения были устойчивы, необходимы сведения о механических свойствах материалов, из которых изготавливаются отдельные конструкционные элементы. А также необходимы знания о характере поведения материала под нагрузкой.

Древесина широко используется для изготовления балок, бруса, опор и стержней и т. д. Использование древесины в качестве конструкционного материала обусловлено не только особенностями ее механических свойств [1], но и способностью древесины сопротивляться воздействию приложенных нагрузок. Следовательно, изучение свойств различных пород древесины до настоящего времени остается актуальной задачей.

Древесина является одним из наиболее распространенных природных материалов растительного происхождения. В основном древесина состоит из целлюлозы (45–55 %), лигнина

(19–28 %) [2], небольшой части низкомолекулярных углеводов и других компонентов.

К достоинствам древесины относятся: малая объемная масса, высокая удельная прочность, хорошая сопротивляемость ударным и вибрационным нагрузкам, низкая теплопроводность, невысокий коэффициент теплового расширения, высокая стойкость к воздействию кислот, солей и масел.

1.2. Понятие о деформациях

Различают следующие свойства древесины: прочность и деформативность.

Прочность – это способность древесины сопротивляться разрушению.

Деформативность – это свойство податливости материалов к изменению первоначальной формы. Деформативность характеризует способность древесины к изменению размеров и формы без изменения массы при внешних воздействиях – нагрузках, влажности, температуры и т. д.

Древесина – анизотропный материал, для которого характерно изменение механических свойств в зависимости от направления (радиального, тангенциального или вдоль оси ствола). Поэтому, всегда следует указывать направление действия сил: вдоль или поперек волокон.

Под воздействием внешних сил деревянные балки, стержни, опоры испытывают различного рода деформации: растяжения, сжатия, сдвига, кручения и изгиба [3–5].

Деформацией твердого тела называется изменение формы и размеров тела под воздействием внешних сил.

Для упругих малых деформаций справедлив **закон Гука**: величина абсолютной деформации тела Δl пропорциональна приложенной к нему внешней силе F :

$$F = k \Delta l,$$

где k – коэффициент жесткости тела, зависящий от материала и размеров деформированного тела.

Коэффициент жесткости – это физическая величина, численно равная силе, которую необходимо приложить к телу, чтобы вызвать абсолютную деформацию, равную 1 м.

Абсолютной деформацией называется величина

$$\Delta l = l - l_0,$$

где l_0 – первоначальная длина тела;

l – длина деформированного тела.

Относительной деформацией называется величина

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}.$$

Древесина является строительным материалом, для которого в диапазоне нагрузок, возникающих при строительстве и эксплуатации зданий и сооружений, выполняется *закон Гука*.

Под действием приложенных внешних нагрузок в сечениях деревянных балок возникают внутренние силы $F_{вн}$, препятствующие их деформированию. Согласно третьему закону Ньютона величина внутренних сил равна по модулю величине приложенной внешней силы: $F_{вн} = F$. Появление внутренних сил является причиной возникновения механических напряжений в сечении балки.

Механическое напряжение (напряжение) (σ) – это физическая величина, численно равная отношению величины внутренних сил к площади поперечного сечения тела, на которое эти силы действуют:

$$\sigma = \frac{F_{вн}}{S} = \frac{F}{S}.$$

В случае малых упругих деформаций растяжения и сжатия закон Гука может быть записан в виде

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{или} \quad \sigma = E\varepsilon, \quad (1.1)$$

где E – модуль Юнга, который характеризует упругие свойства тела при деформации растяжения или сжатия.

Закон Гука для механического напряжения: при малых упругих деформациях напряжение пропорционально относительной деформации тела.

Закон Гука применим для малых (обычно существенно меньших 1 %) деформаций, и для напряжений, не превышающих предела упругости.

Предел упругости – это максимальное напряжение, при котором еще сохраняется линейная зависимость между напряжением и относительной деформацией.

Модуль Юнга численно равен силе, растягивающей балку единичной площади поперечного сечения вдвое по сравнению с первоначальной длиной.

Единицей измерения модуля Юнга является Па (паскаль).

В данной работе модуль Юнга различных пород древесины будет вычисляться по величине изгиба однородной балки.

1.3. Физика изгиба однородной балки

В строительстве и технике изгиб является одним из наиболее часто встречающихся видов деформаций. Изгибу подвержены балки потолочных перекрытий, всевозможные опоры и рычаги.

Изгиб – это деформация тела, сопровождающаяся изменением кривизны осей прямых балок, брусьев, ригеля рамы, пояса фермы под воздействием внешних сил.

По своей сути изгиб представляет собой деформации растяжения и сжатия в разных частях балок. В этом можно убедиться на примере резиновой трубки, в которую втыкается ряд параллельных спиц (рис. 1.1, *а*).

Из рис. 1.1, *б* видно, что при изгибе трубки слой *ММ* подвергается растяжению, а слой *КК* – сжатию.

Нейтральным слоем называется средний слой (линия NN на рис. 1.1), который при деформации изгиба не изменяет своей длины.

Нейтральная линия – это проекция нейтрального слоя на плоскость, проходящую перпендикулярно к нему.

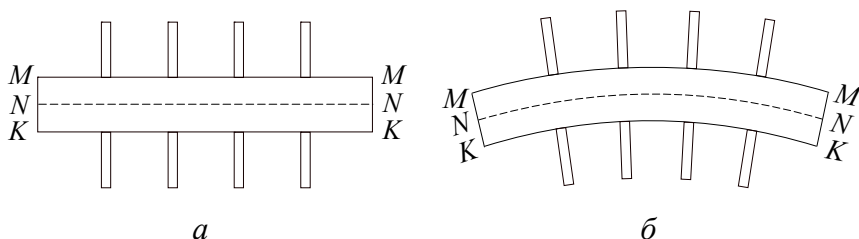


Рис. 1.1. Деформация твердого тела:
 a – недеформированное состояние; b – изгиб

Стрелой прогиба (λ) называется максимальное смещение нейтрального слоя в середине балки в перпендикулярном направлении под воздействием внешних сил при изгибе (рис. 1.2).

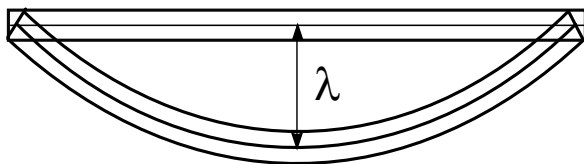


Рис. 1.2. Стрела прогиба λ при изгибе

Величина стрелы прогиба является количественной мерой деформации изгиба.

Различают несколько видов изгибов: чистый, поперечный, продольный и косой.

Чистый изгиб можно получить, если к концам балки приложить два равных по величине и противоположных по направлению момента сил (рис. 1.3, a).

Поперечный изгиб в простейшем случае возникает у опирающейся на опоры балки и вызывается нагрузками, лежащими в плоскости, проходящей через ось балки перпендикулярно одной из боковых граней (рис. 1.3, б).

Продольный изгиб возможен в случае, если на тонкую длинную вертикальную балку действует внешняя нагрузка большой величины так, как показано на рис. 1.3, в. Балка стремится изогнуться, при этом она теряет устойчивость.

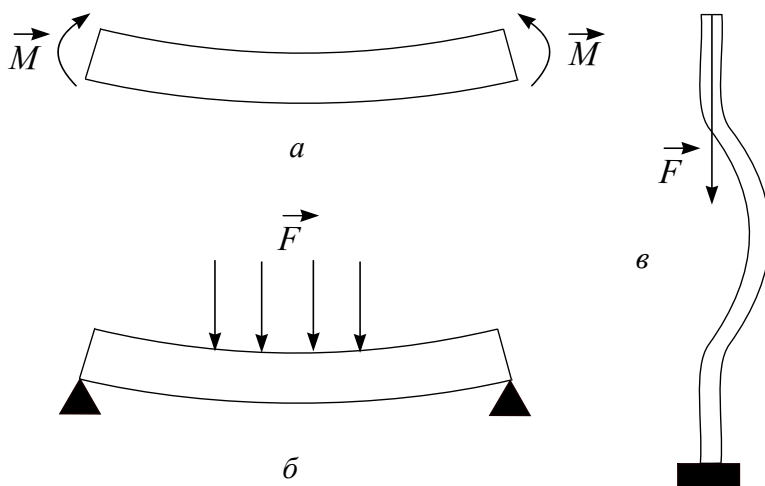


Рис. 1.3. Изгиб балки:
а – чистый; б – поперечный; в – продольный

Косой изгиб возникает тогда, когда силы, действующие на балку, лежат в плоскости, проходящей через ось балки под углом, отличным от 90° , к боковой грани.

Поперечный изгиб – это наиболее часто встречающийся вид изгиба, который и будет рассматриваться в данной работе.

Рассмотрим изгиб однородной балки, у которой поперечное сечение одинаково по всей ее длине.

Пусть до деформации балка длиной l , шириной a и высотой b имела в сечении прямоугольную форму (рис. 1.4).

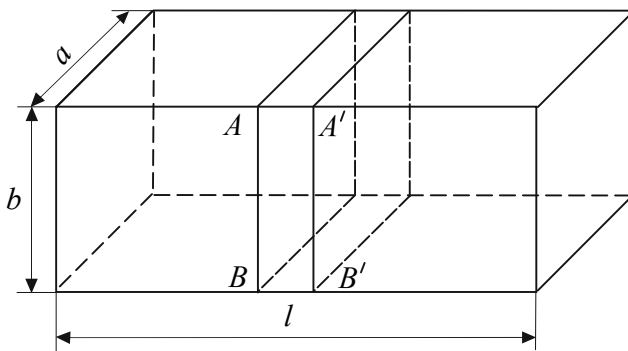


Рис. 1.4. Форма недеформированной балки

Проводя сечения AB и $A'B'$, перпендикулярные к оси балки (рис. 1.4), мысленно вырежем из нее малый элемент $AA'BB'$, длину которого обозначим l_0 (рис. 1.5, а).

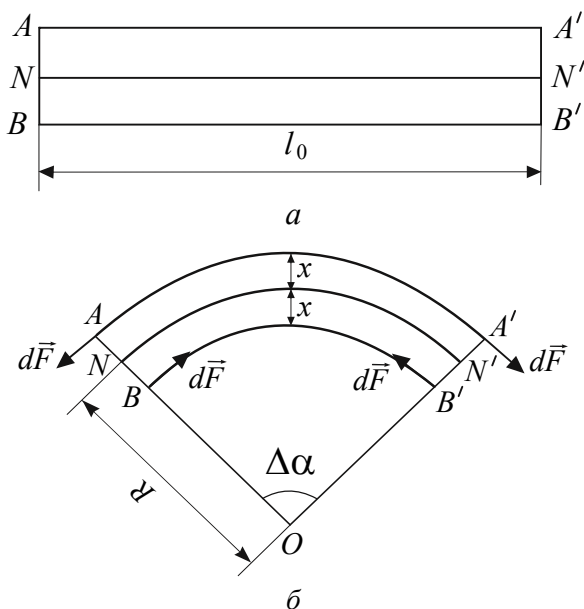


Рис. 1.5. К расчету относительной деформации волокна AA' :

a – малый элемент балки $AA'BB'$;

\bar{b} – деформация изгиба данного элемента

Так как выделенный элемент является малым, то можно считать, что в результате изгиба прямые AA' , NN' , BB' и все прямые им параллельные перейдут в дуги окружностей с центрами, лежащими на оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка. Данная ось называется **осью изгиба** (рис. 1.5, б).

Пусть R – радиус кривизны нейтральной линии NN' . После изгиба балки нейтральная линия представляет собой дугу, которая опирается на малый центральный угол $\Delta\alpha$. Тогда длина нейтральной линии l_0 определяется как

$$l_0 = R\Delta\alpha, \quad (1.2)$$

где угол $\Delta\alpha$ измеряется в радианах.

Будем считать, что волокна AA' и BB' находятся на расстоянии x от нейтрального слоя. При этом $x > 0$, если волокно выше нейтральной линии, и $x < 0$, если оно находится ниже линии NN' .

Рассмотрим волокно AA' , которое расположено выше нейтральной линии и подвергается растяжению. Так как до изгиба длина недеформированного волокна AA' равна l_0 , то длина l деформированного волокна будет

$$l = (R + x) \Delta\alpha.$$

Абсолютное удлинение волокна AA' :

$$\Delta l = l - l_0 = (R + x)\Delta\alpha - R\Delta\alpha = x\Delta\alpha.$$

Учитывая соотношение (1.2), получим выражения для относительного удлинения волокна AA' :

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{x\Delta\alpha}{l_0} = \frac{x}{R}. \quad (1.3)$$

Из выражения (1.3) следует, что *относительные удлинения любых волокон балки, лежащих на одинаковом расстоянии x от нейтральной линии, равны, так как и x , и R , входящие в формулу (1.3), постоянны.*

По закону Гука механическое напряжение, возникающее вдоль волокна в поперечном сечении, будет определяться по формуле (1.1).

Тогда с учетом выражения (1.3) окончательно получим

$$\sigma = E \frac{x}{R}. \quad (1.4)$$

Таким образом, *внутренние напряжения, определяемые выражением (1.4), возникающие при изгибе балки внутри сечения с заданным x , будут одинаковы по всей длине балки.* Согласно формуле (1.4) механические напряжения в поперечном сечении изменяются прямо пропорционально расстоянию x до нейтральной линии. Для нейтрального слоя напряжение $\sigma = 0$, так как $x = 0$.

1.4. Момент инерции поперечного сечения

В каждом элементарном сечении dS балки действует сила, вызывающая либо растяжение волокон, либо их сжатие (рис. 1.5, б):

$$dF = \sigma dS \quad \text{или} \quad F = \int_S \sigma dS, \quad (1.5)$$

где dS – элементарный элемент площади рассматриваемого поперечного сечения.

Учитывая соотношение (1.4) для σ , выражения (1.5) получим в виде

$$F = \frac{E}{R} \int_S x dS.$$

В последнем выражении интегрирование ведется по площади поперечного сечения балки.

Для вычисления величины момента M возьмем ось, перпендикулярную к плоскости рисунка и проходящую через точку N (рис. 1.5, б). Плечом силы dF , растягивающей волокно AA' , является расстояние x до нейтрального слоя NN' .

Тогда

$$dM = x dF = \frac{E}{R} x^2 dS.$$

Следовательно, для вычисления полного момента всех сил, действующих на поперечное сечение балки, необходимо сложить элементарные моменты dM , то есть проинтегрировать по площади сечения:

$$M = \frac{E}{R} \int_S x^2 dS. \quad (1.6)$$

Введем обозначение: $I = \int_S x^2 dS$.

Тогда

$$M = \frac{E}{R} I.$$

Моментом инерции поперечного сечения [6–8] называется величина

$$I = \int_S x^2 dS. \quad (1.7)$$

Здесь имеет место аналогия с моментом инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения твердого тела. Момент инерции поперечного сечения балки в отличие от момента инерции при вращении имеет размерность $[м^4]$.

Соотношение (1.7) позволяет определить моменты поперечного сечения I различной формы. Если поперечное сечение балки имеет форму прямоугольника шириной a и высотой b , то

$$I = \frac{ab^3}{12}.$$

Для круглого поперечного сечения балки радиусом r момент поперечного сечения равен

$$I = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Таким образом, зная момент инерции поперечного сечения балки, можно рассчитать момент внешних сил, приводящий к изгибу определенной величины.

1.5. Определение стрелы прогиба однородной балки для случая малых деформаций

Упругие свойства древесины характеризуются модулем Юнга, который может быть экспериментально определен по величине стрелы прогиба (λ) при малых деформациях определенного сечения балки. Стрела прогиба зависит от породы древесины, геометрических характеристик и формы сечения балки, а также от распределения приложенной нагрузки.

При изгибе в деформированной балке появляются касательные и нормальные напряжения. *Касательные напряжения*, действующие параллельно нейтральной плоскости, стремятся сдвинуть параллельные слои балки относительно друг друга.

Возьмем балку, состоящую из двух не скрепленных брусьев (рис. 1.6, *а*), и нагрузим ее внешней силой \vec{F} (рис. 1.6, *б*). Каждый из брусьев будет вести себя как отдельная балка: верхние волокна будут сжиматься, а нижние – растягиваться (рис. 1.6, *б*).

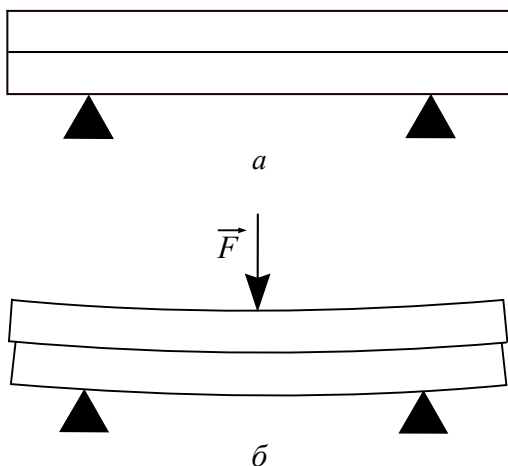


Рис. 1.6. Деформация балки из двух скрепленных между собой брусьев:
a – недеформированное состояние;
б – ступенчатое расположение отдельных брусьев при изгибе

Опыт показывает, что концы такой составной балки принимают при изгибе ступенчатое расположение, т. е. отдельные брусья сдвигаются друг относительно друга в продольном направлении. В сплошной балке ступенчатых концов не наблюдается. Очевидно, что в этом случае упругие силы, возникающие в продольных слоях балки, препятствуют этому продольному сдвигу. Поэтому при расчете стрелы прогиба сплошной балки следует учитывать только нормальные напряжения.

Определим для случая малых деформаций величину стрелы прогиба балки, лежащей на двух опорах, если к ней в точке подвеса O приложена внешняя сила \vec{F} , направленная вниз (рис. 1.7, *a*).

Балка, испытывающая изгиб, деформируется таким образом, что первоначально прямая ось балки NN' становится криволинейной.

Положение точек опор A и B , способы их закрепления и положение точки O могут быть различными. В дальнейшем счи-

таем, что точка O совпадает с центром тяжести балки. При этом весом балки будем пренебрегать.

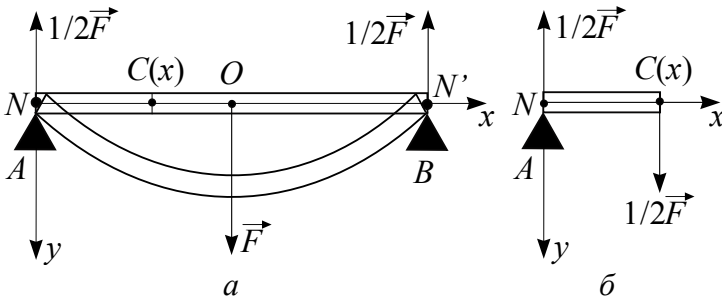


Рис. 1.7. К определению величины стрелы прогиба балки:
 а – распределение нагрузки на балке, расположенной на двух опорах;
 б – часть балки, определяемая сечением $C(x)$

Тогда, вследствие симметрии, сила \vec{F} разделится между опорами A и B поровну: со стороны каждой опоры к балке будет приложена сила $\frac{\vec{F}}{2}$. Поместим начало координат в точку N нейтральной линии, расположенную над левой опорой A . Мысленно отсечем слева часть балки, проведя нормальное сечение через произвольную точку C с координатой x , расположенную левее центра O . Величина $x < l/2$, где l – длина балки.

«Отбросим» правую часть балки (рис. 1.7, б). Тогда для равновесия оставшейся левой части к правому концу (точка C) должна быть приложена сила, равная $\frac{\vec{F}}{2}$, направленная вниз, чтобы векторная сумма сил, действующих на данную часть балки, была равна нулю.

Величина момента внешних сил, действующих на отсеченную часть балки, равна

$$M = -\frac{F}{2}x. \quad (1.8)$$

С другой стороны, согласно формуле (1.6) величина момента внешних сил M определяется через радиус кривизны нейтральной линии R и модуль Юнга E .

Для малых изгибов величина изгиба нейтральной линии $y = y(x)$ связана с радиусом ее кривизны R соотношением

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Тогда уравнение (1.6) для определения момента внешних сил M будет записано в виде

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (1.9)$$

Приравнивая правые части выражений (1.8) и (1.9), получим

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F}{2} x, \quad x \leq l/2. \quad (1.10)$$

Интегрируем уравнение (1.10) с учетом граничных условий: $\frac{dy}{dx} = 0$ при $x = l/2$ и $y = 0$ при $x = 0$. Вычисление интеграла смотрите в приложении. Проинтегрировав, имеем

$$y = \lambda = \frac{F l}{48EI} (3l^2 - l^2) = \frac{Fl^3}{48EI}. \quad (1.11)$$

Если поперечное сечение балки имеет форму прямоугольника шириной a и высотой b , то момент инерции сечения определяется выражением

$$I = \frac{ab^3}{12}. \quad (1.12)$$

Подставляя формулу (1.12) в уравнение (1.11), получим выражение, определяющее величину стрелы прогиба для балки прямоугольной формы, в виде

$$\lambda = \frac{Fl^3}{48E} \frac{12}{ab^3} = \frac{Fl^3}{4Eab^3}, \quad (1.13)$$

где l , a , b – длина, ширина и высота балки, соответственно.

Для круглого поперечного сечения балки радиуса r , с учетом момента инерции сечения $I = \frac{\pi r^4}{4}$, величина стрелы прогиба будет определяться следующим образом:

$$\lambda = \frac{Fl^3}{12E\pi r^4}. \quad (1.14)$$

Из формулы (1.13) выразим модуль Юнга для балки с прямоугольным поперечным сечением:

$$E = \frac{Fl^3}{4\lambda ab^3}. \quad (1.15)$$

Таким образом, определив опытным путем для случая малых деформаций величину стрелы прогиба λ , соответствующую деформирующей внешней силе F , можно вычислить значение модуля Юнга для материала, из которого изготовлена балка.

1.6. Порядок выполнения лабораторной работы

1. Изучите экспериментальную установку, ее схему (рис. 1.8, *a*) и внешний вид (рис. 1.8, *б*).

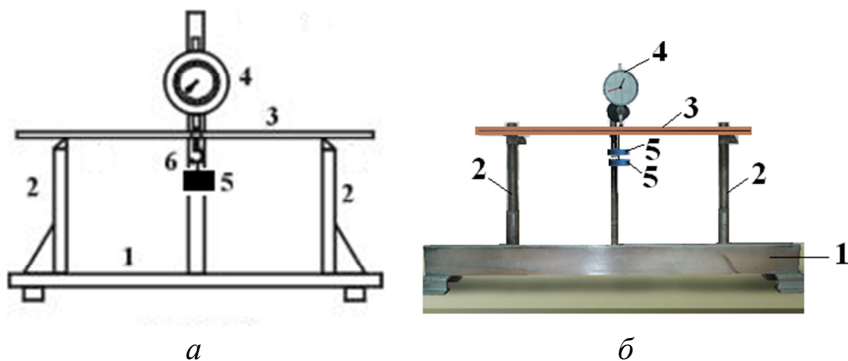


Рис. 1.8. Схема (а) и внешний вид (б) экспериментальной установки:
 1 – станина; 2 – опоры; 3 – исследуемый брусок; 4 – индикатор
 смещений часового типа; 5 – подвешиваемые грузы;
 б – крючок для подвешивания грузов

2. Закрепите деревянный брусок 3 с прямоугольным сечением на опорах 2 станины 1 установки так, чтобы середина бруска находилась под индикатором смещений часового типа 4.

3. Подвешивая грузы 5 разной массы на крючок подвеса б установки, с помощью индикатора смещений 4 определите величину стрелы прогиба λ_1^i при различных нагрузках, указанных в табл. 1.1. Значения стрелы прогиба запишите в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Масса груза, кг	Величина внешней силы F , Н	Величина стрелы прогиба λ , м			Модуль Юнга E_i , 10^{10} , Па	$E_{cp} \pm \Delta E_{cp}$, 10^{10} , Па
		при нагрузке λ_{i1} , 10^{-5} , м	при разгрузке λ_{i2} , 10^{-5} , м	$\lambda_i^{cp} = \frac{(\lambda_{i1} + \lambda_{i2})}{2}$, 10^{-5} , м		
0,1						
0,2						
0,3						
0,4						

4. Измерьте величины стрелы прогиба λ_2^i при разгрузке, поочередно снимая грузы в обратном порядке.

5. Рассчитайте среднее значение стрелы прогиба $\lambda_i^{\text{ср}}$ и результаты вычислений запишите в табл. 1.1.

6. С помощью линейки и штангенциркуля измерьте длину l , ширину a и высоту b балки.

7. Используя данные столбца для величин среднего значения стрелы прогиба $\lambda_i^{\text{ср}}$, определите значения модулей Юнга, соответствующие результатам отдельных измерений по формуле

$$E_i = \frac{F_i l^3}{4 \lambda_i^{\text{ср}} a b^3},$$

где $i = 1, 2, 3, 4$.

8. Вычислите среднее значение модуля Юнга:

$$E_{\text{ср}} = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4}{4}.$$

9. Определите абсолютную погрешность модуля Юнга по формуле

$$\Delta E_{\text{ср}} = \frac{\Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 + \Delta E_4}{4},$$

где $\Delta E_i = |E_{\text{ср}} - E_i|$.

10. Нарисуйте табл. 1.2 и 1.3, аналогичные табл. 1.1. Все измерения повторите еще для двух брусков из других пород древесины. Результаты измерений занесите в табл. 1.2 и 1.3 и определите для них модули Юнга и их абсолютные погрешности.

11. Для всех исследованных пород древесины запишите модули Юнга с учетом их абсолютных погрешностей в виде

$$E = (E_{cp} \pm \Delta E_{cp}), \text{ Па.}$$

12. Сравнивая полученные значения модулей Юнга с данными, представленными в табл. 1.4, определите вид древесины, из которой изготовлены экспериментальные бруски.

Таблица 1.4

Значения модулей Юнга при изгибе
для различных видов древесины

Вид древесины	Модуль Юнга при изгибе, $E \cdot 10^{10}$, Па	Вид древесины	Модуль Юнга при изгибе, $E \cdot 10^{10}$, Па
Акация белая	1,63	Ольха	0,933
Береза	1,42	Клен	1,19
Бук	1,24	Липа	0,894
Вяз	1,01	Осина	1,12
Граб	0,32	Сосна обыкновенная	1,22
Груша	1,19	Тополь	1,03
Ель	0,90–0,96	Ясень обыкновенный	1,19
Дуб	1,30	Бамбук	3,30
Ива	0,898	Лиственница	1,43

13. На основании формул (1.13) и (1.14) проведите сравнительный анализ величин стрелы прогиба при одинаковых значениях нагрузки F для балок круглого (радиусом r) и квадратного (сторона квадрата $a = 2r$) сечений, соответственно.

Сделайте выводы.

1.7. Контрольные вопросы

1. Что следует понимать под деформацией твердого тела?
2. Чем обусловлено широкое применение древесины в качестве конструкционного материала?
3. Поясните, как вы понимаете анизотропность свойств древесины.
4. Что такое прочность и деформативность древесины?
5. Сформулируйте закон Гука. Каков физический смысл коэффициента жесткости?
6. Что называется абсолютной и относительной деформацией?
7. Дайте определение механического напряжения. В каких единицах оно измеряется?
8. Сформулируйте закон Гука для механического напряжения и назовите условия его применимости.
9. Что называется модулем Юнга, каков его физический смысл?
10. Дайте определение предела упругости.
11. Что называется деформацией изгиба?
12. Что понимается под чистым, поперечным, продольным и косым изгибами?
13. Дайте определение нейтральной линии и стрелы прогиба.
14. Что называется моментом инерции сечения балки?
15. Как определяются моменты инерции сечений для балок круглой и прямоугольной формы?
16. Выведите расчетную формулу для определения модуля Юнга по стреле прогиба однородной балки.
17. Как определяются величины стрелы прогиба для балок круглой и прямоугольной формы?

2. ИЗУЧЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА И КРУЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы: определить методом крутильных колебаний модули кручения и сдвига струны; получить оценки численных значений модуля Юнга и модуля всестороннего сжатия материала струны.

Приборы и материалы: крутильный маятник, изучаемое тело кубической формы, таймер.

2.1. Упругие свойства твердых тел

В теории упругости изучают действия только статических нагрузок на твердые тела. Динамические нагрузки представляют собой волны в телах.

Статические нагрузки – это нагрузки, величина, направление и точка приложения которых изменяются во времени незначительно. При прочностных расчетах можно пренебречь влиянием сил инерции, обусловленных такой нагрузкой. Статической нагрузкой, например, является вес тела.

Под влиянием внешних статических силовых (не температурных) воздействий тела испытывают деформацию, т. е. изменяют форму и размеры. Мы ограничимся рассмотрением **упругих деформаций**, т. е. деформаций, не вызывающих изменения формы и размеров тела после прекращения внешнего воздействия на него.

Рассмотрим следующие виды деформаций: сжатие (растяжение), сдвиг, всестороннее сжатие, кручение.

а) Для *продольных упругих деформаций* изотропных твердых тел (стержней, струн) справедлив закон Гука: относительная деформация ε пропорциональна напряжению σ :

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.1)$$

где $\sigma = \frac{F}{S}$ – напряжение, т. е. величина внешней силы F , отнесенная к единице площади поперечного сечения тела;

E – модуль продольной упругости или модуль Юнга;

$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l_0}$ – относительная деформация тела, т. е. отношение

абсолютной деформации $\Delta l = (l - l_0)$ к начальной длине тела l_0 ;

l – длина тела после нагрузки.

Модуль Юнга – $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_l}$ численно равен напряжению при

относительной деформации, равной единице.

б) **Сдвиг** – это деформация, при которой все плоские слои твердого тела, параллельные некоторой закрепленной плоскости (плоскости сдвига), смещаются параллельно друг другу, не искривляясь и не изменяясь в размерах. Сдвиг происходит под действием силы F , приложенной к грани параллельной плоскости сдвига (рис. 2.1).

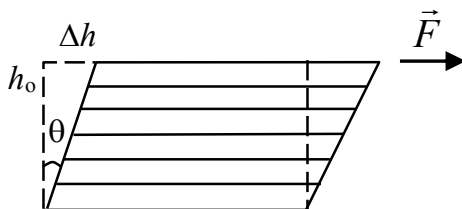


Рис. 2.1. Деформация сдвига

Мерой деформации является угол сдвига $\theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta h}{h_0}$, называемый **относительным сдвигом** и измеряемый в радианах.

По закону Гука: относительный сдвиг θ пропорционален касательному напряжению $\sigma_\tau = \frac{F}{S}$, т. е.

$$\sigma_\tau = G\theta. \quad (2.2)$$

В выражении (2.2) модуль сдвига $G = \frac{\sigma_{\tau}}{\theta}$ численно равен касательному напряжению, вызывающему относительный сдвиг, равный единице. Размерность $[\sigma_{\tau}] = \text{Па}$.

Относительное продольное растяжение (сжатие) тела ε_l сопровождается его относительным сужением (расширением) $\varepsilon_b = \frac{\Delta b}{b_0}$, где b – поперечный размер тела.

Коэффициентом Пуассона (модулем поперечного сжатия) μ называется отношение относительного поперечного сужения (расширения) ε_b к относительному продольному удлинению (сжатию) ε_l , т. е.

$$\mu = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_l}. \quad (2.3)$$

Из теоретических соображений [8, 9] значения коэффициента Пуассона μ должны находиться в пределах $-1 \leq \mu \leq 0,5$. Материалы с отрицательным μ неизвестны. Для большинства твердых тел из опыта $\mu \approx 0,25$.

в) **Деформация всестороннего сжатия (растяжения)** – уменьшение (увеличение) объема тела без изменения его формы под влиянием равномерно распределенных по всей поверхности тела сжимающих (растягивающих) сил.

По закону Гука имеем

$$\sigma = K\varepsilon_V, \quad (2.4)$$

где $\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V}$ – относительное изменение объема тела под действием напряжения σ .

Здесь модуль всестороннего сжатия (объемной упругости)

$K = \frac{\sigma}{\varepsilon_V}$ численно равен напряжению при относительном изменении объема, равном единице. Размерность – $[K] = \text{Па}$.

Из теории упругости [8, 9] вытекают следующие связи модулей G , E , K :

$$E = \frac{G}{2(1 + \mu)}, \quad (2.5)$$

$$K = \frac{2G(1 + \mu)}{3(1 - 2\mu)}. \quad (2.6)$$

г) **Кручением** называется деформация тела (струны) с одним закрепленным концом под действием пары сил, плоскость которой перпендикулярна к оси тела. Момент M этой пары сил называется **крутящим (вращательным) моментом**.

Для тела цилиндрической формы (струны, стержня) по закону Гука угол закручивания φ , отнесенный к длине струны L , т. е. относительная деформация кручения $\varphi_L = \frac{\varphi}{L}$, пропорционален крутящему моменту M , т. е.

$$M = D\varphi_L. \quad (2.7)$$

Коэффициент пропорциональности в выражении (2.7) называют **модулем кручения**. Модуль кручения численно равен вращательному моменту при относительном угле закручивания, равном единице. Размерность – $[D] = \text{Н} \cdot \text{м}^2$.

2.2. Связь модуля сдвига с модулем кручения струны

При закручивании струны ее нижний торец испытывает сдвиг относительно верхнего (рис. 2.2).

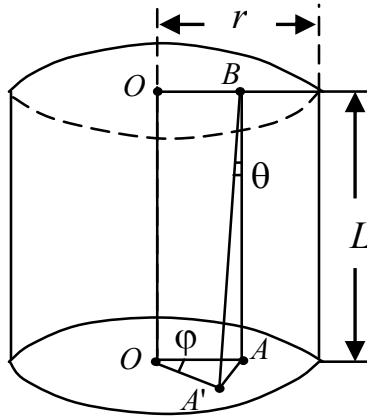


Рис. 2.2. Деформация кручения

Прямая BA поворачивается, занимая положение BA' . Угол θ является углом сдвига. Из формулы (2.2) угол сдвига θ равен

$$\theta = \frac{1}{G} \sigma_{\tau}, \quad (2.8)$$

где σ_{τ} – касательное напряжение, приложенное к элементу поверхности dS , расположенному у точки A' (рис. 2.3), а G – модуль сдвига.

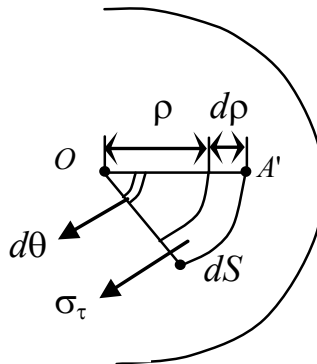


Рис. 2.3. К выводу выражения для модуля кручения

Из рис. 2.2

$$\theta = \frac{AA'}{L} = \frac{\varphi\rho}{L}. \quad (2.9)$$

Тогда, используя выражения (2.8) и (2.9), получаем

$$\sigma_\tau = G\theta = G \frac{\varphi\rho}{L}. \quad (2.10)$$

Сила, приложенная к элементу поверхности dS , равна $\sigma_\tau dS$, а ее вращающий момент относительно точки O равен

$$dM = \rho\sigma_\tau dS,$$

где ρ – плечо.

Элемент поверхности dS в полярных координатах ρ, θ равен

$$dS = \rho d\theta d\rho.$$

Тогда

$$dM = \sigma_\tau \cdot \rho^2 d\rho d\theta,$$

или с учетом формулы (2.9), найдем

$$dM = \frac{G\varphi}{L} \rho^3 d\rho d\theta. \quad (2.11)$$

Полный момент сил, приложенный ко всему нижнему торцу, получается интегрированием выражения (2.11) по площади круга радиуса r :

$$M = \frac{G\varphi}{L} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^r \rho^3 d\rho d\theta = \frac{\pi G r^4}{2} \cdot \frac{\varphi}{L}. \quad (2.12)$$

Откуда выражаем угол закручивания φ

$$\varphi = \frac{2}{\pi G} \frac{L}{r^4} M. \quad (2.13)$$

Сравнивая выражения (2.12) и (2.7), получаем для модуля кручения

$$D = \frac{\pi G r^4}{2}. \quad (2.14)$$

Из соотношения (2.13) видно, что угол закручивания φ зависит от модуля сдвига G и обратно пропорционален радиусу струны, взятому в четвертой степени.

2.3. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Момент силы M , действующей на тело, относительно оси вращения (вращательный момент) равен алгебраической сумме моментов всех сил, действующих на отдельные частицы тела относительно рассматриваемой оси, т. е.

$$M = \sum_{i=1}^n M_i.$$

Для простоты рассмотрим произвольную ось Z , перпендикулярную плоскости рисунка и проходящую через точку O . Для данного случая моменты сил F_1 и F_2 относительно оси Z будут равны моментам сил относительно точки O . Например, момент $M_1 z$ силы F_1 будет равен произведению силы F_1 на плечо l_1 (рис. 2.4).

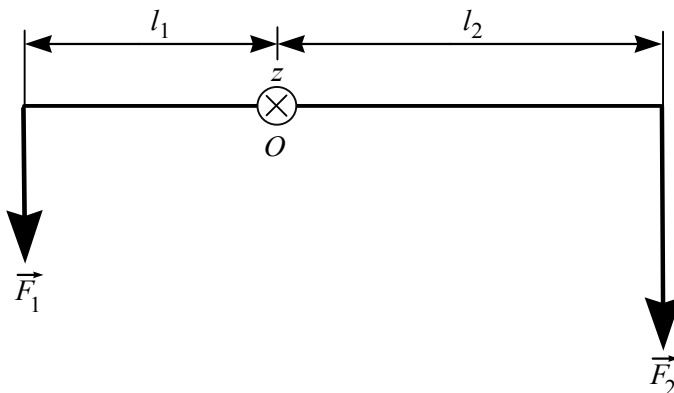


Рис. 2.4. К вычислению моментов сил относительно оси z

Плечо силы относительно оси z равно длине перпендикуляра, опущенного из точки O на направление силы.

Момент силы считается *положительным*, если он приводит к вращению тела против часовой стрелки, и *отрицательным* – в противном случае.

С учетом сказанного, следует

$$M_1 z = F_1 l_1, \quad M_2 z = -F_2 l_2.$$

Размерность момента силы в СИ – $[M] = \text{Н}\cdot\text{м}$.

Под действием момента силы M относительно неподвижной оси тело приобретает угловое ускорение β . **Основной закон динамики вращательного движения твердого тела** вокруг оси z имеет вид

$$I\beta = M, \tag{2.15}$$

где I – момент инерции;

β – угловое ускорение.

Угловое ускорение (β) – это вторая производная по времени t от угла поворота тела, т. е.

$$\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varphi''.$$

Размерность углового ускорения – $[\beta] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Момент инерции тела I относительно оси z равен сумме моментов инерции отдельных частиц тела относительно рассматриваемой оси

$$I = \sum_{i=1}^n I_i, \quad (2.16)$$

где n – число частиц, на которые разбито тело.

Момент инерции I_i частицы (точки) с массой m_i , находящейся на расстоянии r_i от оси z , равен произведению массы частицы на квадрат ее расстояния до оси:

$$I_i = m_i r_i^2. \quad (2.17)$$

В пределе при неограниченном увеличении числа разбиений тела на малые частицы сумма в выражении (2.16) переходит в интеграл:

$$I = \int_V \rho r^2 dV, \quad (2.18)$$

где V – объем тела;

ρ – плотность тела;

r – расстояние от оси z до частицы с объемом dV .

Как следует из выражения (2.18), момент инерции тела относительно оси зависит от массы тела, распределения массы тела относительно данной оси и выбора данной оси.

Из формулы (2.17) вытекает единица измерения момента инерции – $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

При вычислении моментов инерции тела относительно произвольной оси z , не проходящей через центр тяжести тела, используют **теорему Штейнера**: момент инерции тела I относительно любой произвольной оси z равен моменту инерции I_c относительно параллельной оси z_c , проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы тела m на квадрат расстояния d между осями (рис. 2.5)

$$I = I_c + md^2.$$

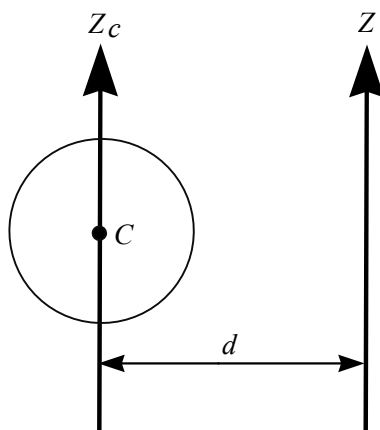


Рис. 2.5. Иллюстрация к теореме Штейнера

Центр масс (инерции) системы материальных частиц с массами m_i и координатами x_i, y_i, z_i есть точка с координатами

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

В случае непрерывного распределения массы в теле имеем

$$x_c = \frac{\int_V x \rho dV}{\int_V \rho dV}, \quad y_c = \frac{\int_V y \rho dV}{\int_V \rho dV}, \quad z_c = \frac{\int_V z \rho dV}{\int_V \rho dV},$$

где $\rho = \frac{dm}{dV}$ – плотность тела, а интегрирование ведется по всему объему тела V .

Сравнивая основное уравнение динамики для вращательного движения (2.15) и основное уравнение динамики для поступательного движения $ma = F$, можно заключить, что при вращении роль массы играет момент инерции, и тогда *момент инерции тела есть мера инертности тела во вращательном движении.*

Линейному ускорению a соответствует угловое ускорение β . Силе F соответствует момент силы M .

2.4. Крутильные колебания

В данной работе используется крутильный маятник (рис. 2.6), представляющий собой рамку с телом, жестко соединенную с натянутой стальной струной, закрепленной на обоих концах.

При повороте рамки с телом из положения равновесия на некоторый угол φ создается возвращающий момент силы

$$M = -2D \frac{\varphi}{L}, \quad (2.19)$$

где коэффициент D – это модуль кручения.

Множитель 2 в соотношении (2.19) учитывает наличие двух струн, на которых закреплена рамка. Знак «минус» означает, что крутящий момент стремится вернуть рамку в положение равновесия.

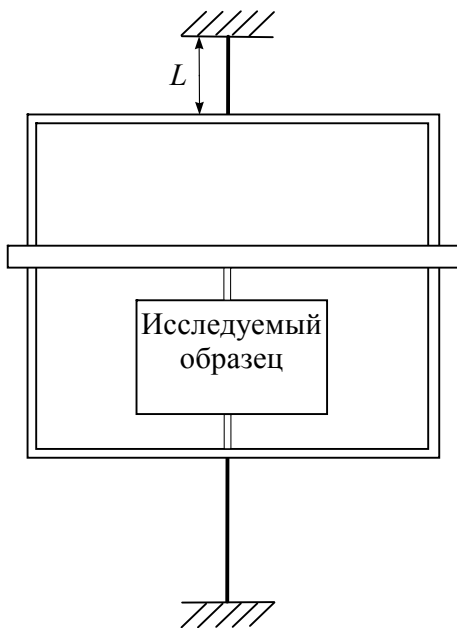


Рис. 2.6. Крутильный маятник

На протяжении времени в несколько периодов трением (сопротивлением) можно пренебречь и крутильные колебания будут незатухающими.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с учетом формулы (2.15) примет вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2D \frac{\varphi}{L}, \quad (2.20)$$

где I – момент инерции рамки с телом относительно оси вращения;

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \beta \text{ – угловое ускорение.}$$

Перепишем уравнение (2.19) в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (2.21)$$

где $\omega_0^2 = \frac{2D}{LI}$.

Из уравнения (2.21) следует, что крутильные колебания в отсутствие трения будут гармоническими

$$\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.22)$$

Амплитуда φ_m и начальная фаза φ_0 определяются из начальных условий.

Частота свободных незатухающих колебаний равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{LI}}. \quad (2.23)$$

Период колебаний рамки с телом с учетом выражения (2.23) получим в виде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{LI}{2D}}. \quad (2.24)$$

Из соотношения (2.24) выражаем модуль кручения

$$D = \frac{2\pi^2 LI}{T^2}. \quad (2.25)$$

Из соотношения (2.14), связывающего модуль сдвига с модулем кручения, получаем выражение для модуля сдвига G материала струны

$$G = \frac{2D}{\pi r^4}. \quad (2.26)$$

Таким образом, соотношения (2.25) и (2.26) позволяют по известным геометрическим размерам струны (длине L и радиусу поперечного сечения r), измеренному периоду T колебаний и известному моменту инерции I рамки вычислить модуль кручения D и модуль сдвига G материала струны.

Вычислив модуль сдвига по формуле (2.26), по выражениям (2.5) и (2.6), можно определить модуль Юнга (E) и модуль всестороннего сжатия (K) материала струны. Для этого еще необходимо знать для данного материала значение коэффициента Пуассона (μ). В табл. 2.1 приведены данные для модуля Юнга, модуля сдвига, модуля всестороннего сжатия и коэффициента Пуассона для некоторых металлов и их сплавов [10].

Таблица 2.1

Материал	E , ГПа	G , ГПа	K , ГПа	μ
Алюминий	71	26	76	0,34
Германий	81	31	64	0,29
Дюралюминий	73	27	75	0,34
Константан	163	62	155	0,33
Латунь	98	36	107	0,35
Манганин	124	46	120	0,33
Медь	123	46	138	0,35
Серебро	79	28	46	0,37
Серый чугун	108	44	64	0,22
Сталь	206	80	168	0,28

$$\mu_{\text{ср}} = 0,32$$

Данные табл. 2.1 показывают, что коэффициент Пуассона в среднем имеет значение порядка 0,32.

2.5. Определение момента инерции тела методом крутильных колебаний

Период колебаний рамки с телом согласно формуле (2.24) равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{LI}{2D}}. \quad (2.27)$$

Период колебаний ненагруженной рамки (без тела) запишется аналогично:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{LI_0}{2D}}, \quad (2.28)$$

где I_0 – момент инерции ненагруженной рамки относительно оси вращения.

Согласно свойству аддитивности момента инерции: момент инерции рамки с телом равен моменту инерции самой рамки, сложенному с моментом инерции исследуемого тела I_x , т. е.

$$I = I_x + I_0. \quad (2.29)$$

Аддитивность величины – это свойство, когда физическая величина тела или системы тел равна сумме величин составных частей тела или системы.

Из соотношений (2.27–2.29) следует *рабочая формула для определения момента инерции твердого тела произвольной формы:*

$$I_x = I_0 \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^2 - 1 \right]. \quad (2.30)$$

Момент инерции I_0 ненагруженной рамки крутильного маятника можно вычислить по формуле (2.30), если из теории известен момент инерции I_x эталонного тела правильной геометрической формы.

Из соотношений (2.25) и (2.29) следует, что

$$D = \frac{2\pi^2 L}{T^2} (I_x + I_0). \quad (2.31)$$

Выражение (2.31) может быть использовано в качестве *рабочей формулы для определения модуля кручения струны*.

2.6. Затухающие крутильные колебания

В случае затухающих крутильных колебаний на систему кроме вращательного момента действует момент сил сопротивления M_c , пропорциональный угловой скорости вращения $\frac{d\varphi}{dt}$, т. е.

$$M_c = -r \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2.32)$$

где r – коэффициент сопротивления среды, а знак «минус» указывает, что момент сил сопротивления является тормозящим.

Дифференциальное уравнение затухающих крутильных колебаний ненагруженной рамки с учетом выражения (2.32) примет вид

$$I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2D \frac{\varphi}{L} - r \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.33)$$

Это уравнение обычно записывается так:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (2.34)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{LI_0}}$ – частота собственных колебаний, а **коэффициент затухания β** равен

$$\beta = \frac{r}{2I_0}. \quad (2.35)$$

Если $\beta^2 < \omega_0^2$, то решение уравнения затухающих колебаний (2.34) имеет вид

$$\varphi = \varphi_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.36)$$

где **амплитуда затухающих колебаний** уменьшается со временем по экспоненциальному закону:

$$\varphi(t) = \varphi_m e^{-\beta t}, \quad (2.37)$$

а частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (2.38)$$

Период затухающих колебаний равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (2.39)$$

График затухающих колебаний представлен на рис. 2.7.

Характеристиками затухающих колебаний являются декремент затухания, логарифмический декремент затухания и добротность колебательной системы.

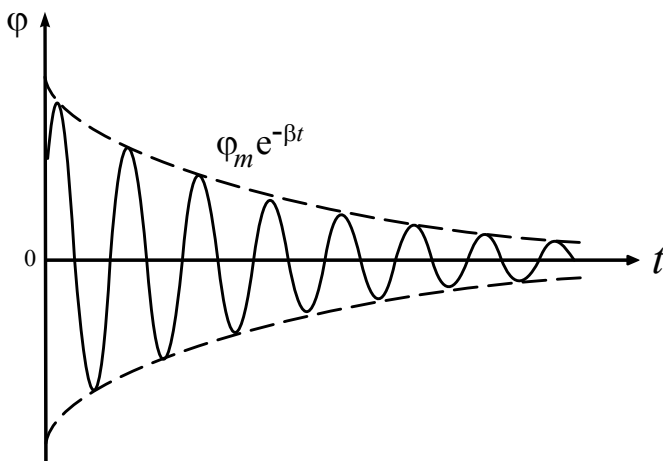


Рис. 2.7. График затухающих колебаний

Декрементом затухания (ψ) называется отношение двух последовательных амплитуд колебаний, отличающихся на период, т. е.

$$\psi = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t + T_0)} = \frac{\varphi_m e^{-\beta t}}{\varphi_m e^{-\beta(t+T_0)}} = e^{\beta T_0}. \quad (2.40)$$

Логарифмическим декрементом затухания (λ) называется натуральный логарифм от декремента затухания.

$$\lambda = \ln \psi = \beta T_0. \quad (2.41)$$

Физический смысл λ : величина логарифмического декремента затухания (λ) обратно пропорциональна числу полных колебаний (N), по истечению которых амплитуда колебаний уменьшится в e раз ($e = 2,71$ – основание натуральных логарифмов).

Добротность Q колебательной системы есть отношение энергии, запасенной в колебательной системе, к энергии, теряемой системой за один период колебаний. Чем больше добротность, тем меньше потери энергии в системе за одно колебание. Добротность показывает также, во сколько раз амплитуда установившихся вынужденных колебаний при резонансе превышает амплитуду вынужденных колебаний вдали от резонанса.

При малом логарифмическом декременте затухания (λ) добротность (Q) связана с этим декрементом соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (2.42)$$

Необходимо учитывать, что любые реальные колебательные процессы, не имеющие постоянной энергетической подпитки, представляют собой затухающие колебания.

2.7. Описание установки

На рис. 2.8 изображены схема и внешний вид лабораторной установки.

Рамка 1 крутильного маятника подвешена на стальной нити 2, жестко закрепленной со штативом 3. Черный стальной флажок 4 рамки при ее вращении заставляет сбрасывать фотоэлемент 5. При этом на таймере 6 фиксируется число колебаний на табло 7 «Периоды» и время общей длительности колебаний на табло 8 «Время, с». Край 9 электромагнита закреплен на шкале 10 с отметкой 120° . При включении установки электромагнит захватывает рамку за флажок 4 при повороте флажка к электромагниту.

На таймере расположены кнопки: 11 – «Сеть», 12 – «Сброс», 13 – «Пуск», 14 – «Стоп». Исследуемое тело крепится в рамке винтом 15.

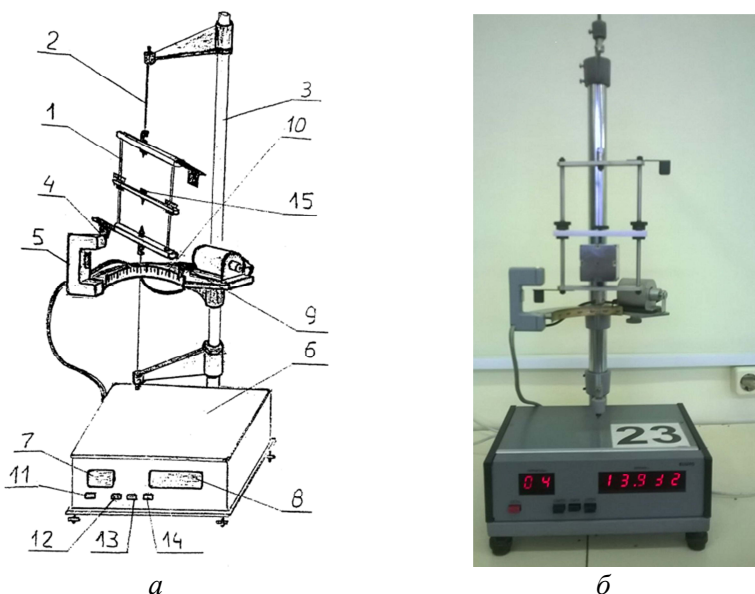


Рис. 2.8. Схема (а) и внешний вид (б) экспериментальной установки

2.8. Порядок выполнения лабораторной работы

1. Ознакомьтесь со схемой и описанием установки (рис. 2.8). Включите вилку установки (таймера) в розетку и нажмите кнопку «Сеть». При этом на таймере загорятся табло «Периоды» и «Время, с». Кнопка с таймером «Пуск» должна быть отжата.

2. Зафиксируйте рамку с грузом. Для этого необходимо приблизить черный стальной флажок рамки к электромагниту. Магнит должен удерживать рамку. В этом положении рамка должна быть неподвижна. Нажмите кнопку «Сброс».

3. Нажмите кнопку «Пуск». Рамка начнет совершать крутильные колебания. Срабатывают счетчики «Периоды» и «Время, с».

4. По истечении 10 колебаний («Периоды» = 10) нажмите кнопку «Стоп». Сделайте это с небольшим упреждением по времени, когда на счетчике «Периоды» высветится цифра 9. Запишите в табл. 2.2 время (t) 10 колебаний.

5. Вычислите и запишите в табл. 2.2 период колебаний рамки

$$T = \frac{t}{10}.$$

6. Повторите опыт еще 2 раза.

7. Рассчитайте среднее значение периода

$$T_{\text{сред}} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}.$$

Полученные данные занесите в табл. 2.2.

8. По формуле

$$D = \frac{2\pi^2 LI}{T_{\text{сред}}^2}$$

вычислите модуль кручения проволоки крутильного маятника по измеренному периоду колебаний T и известным моменту инерции рамки с кубом ($I = 10,32 \cdot 10^{-4}$ кг·м²) и длине проволоки ($L = 0,127$ м). Результат запишите в табл. 2.2.

Таблица 2.2

№	t , с	T , с	$T_{\text{сред}}$, с	D , Н·м ²	G , Па	E , Па	K , Па
1							
2							
3							

9. По формуле

$$G = \frac{2D}{\pi r^4}$$

вычислите модуль сдвига материала проволоки ($r = 0,25 \cdot 10^{-3}$ м).

10. По формуле

$$E = \frac{G}{2(1 + \mu)}$$

оцените порядок величины модуля Юнга проволоки E . Примите коэффициент Пуассона $\mu = 0,32$. Результат запишите в табл. 2.2.

11. По формуле

$$K = \frac{2G(1 + \mu)}{3(1 - 2\mu)}$$

оцените величину модуля всестороннего сжатия K материала проволоки. Результат запишите в табл. 2.2.

12. Сравните вычисленные значения модулей G , E , K с данными табл. 2.1. Определите, из какого материала изготовлена проволока.

Сделайте выводы.

2.9. Контрольные вопросы

1. Дайте определение деформации растяжения, сдвига, всестороннего сжатия, кручения.
2. Каков физический смысл модуля Юнга и модуля сдвига?
3. Дайте определения модуля всестороннего сжатия и модуля кручения. Что такое коэффициент Пуассона?
4. Как связаны модули кручения, сдвига, Юнга и всестороннего сжатия?
5. Запишите основной закон динамики вращательного движения.
6. Что такое момент инерции точки, тела относительно оси?
7. Что такое момент силы относительно точки?
8. Сформулируйте теорему Штейнера.

9. Запишите дифференциальное уравнение незатухающих и затухающих крутильных колебаний.

10. По какому закону происходит уменьшение амплитуды затухающих колебаний?

11. Что называется коэффициентом затухания, логарифмическим декрементом затухания, добротностью колебательной системы? Каков их физический смысл?

12. В чем сущность метода определения момента инерции тела методом крутильных колебаний?

13. В чем суть экспериментального нахождения модуля кручения методом крутильных колебаний?

Литература

1. Юркевич, Н. П. Исследование упругих свойств древесины при выполнении лабораторного физического практикума в курсе общей физики / Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук // Физическое образование в вузах. – 2016. – Т. 22. – № 4. – С. 96–101.
2. Справочное пособие по деревообработке / Ю. И. Братенков [и др.]; под общ. ред. В. В. Кислого. – Екатеринбург: Бриз, 1995. – 557 с.
3. Сборник задач по общему курсу физики: в 2 ч. / П. Г. Кузир, Н. П. Юркевич и Г. К. Савчук; кол. авт. Белорусского национального технического университета. – 3-е изд. – Минск: БНТУ, 2014. – Ч. 1: Механика. Статистическая физика и термодинамика. – 219 с.
4. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: в 5 т. / Д. В. Сивухин. – 4-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. – Т. 1: Механика. – 560 с.
5. Матвеев, А. Н. Курс общей физики: в 5 т. / А. Н. Матвеев. – 3-е изд. – Москва: Оникс 21 век, 2003. – Т. 1: Механика и теория относительности. – 432 с.
6. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. / И. В. Савельев. – 2-е изд. – Москва: Наука, 1989. – Т. 1: Механика. Молекулярная физика. – 352 с.
7. Петкевич, В. В. Основы механики сплошных сред / В. В. Петкевич. – Москва: Эдиториал, 2001. – 400 с.
8. Стрелков, С. П. Механика / С. П. Стрелков. – 3-е изд. – Москва: Наука, 1975. – 560 с.
9. Ольховский, Н. Н. Курс теоретической механики для физиков / Н. Н. Ольховский. – 3-е изд. – Москва: МГУ, 1978. – 575 с.
10. Кухлинг, Х. Справочник по физике / Х. Кухлинг. – 2-е изд. – Москва: Высшая школа, 1985. – 520 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проинтегрируем уравнение (1.10)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F}{2EI} x.$$

Разделив переменные, получим

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{F}{2EI} x dx.$$

Возьмем неопределенный интеграл от левой и правой частей последнего равенства:

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{F}{2EI} \int x dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F}{2EI} \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Определим C_1 из условия $\frac{dy}{dx} = 0$ при $x = \frac{l}{2}$:

$$0 = -\frac{F}{2EI} \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} + C_1,$$

$$C_1 = \frac{F}{4EI} \frac{l^2}{4} = \frac{Fl^2}{16EI}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F}{4EI}x^2 + \frac{Fl^2}{16EI}.$$

Разделим переменные

$$dy = -\frac{F}{4EI}x^2 dx + \frac{Fl^2}{16EI} dx.$$

В результате интегрирования последнего выражения получим

$$y = -\frac{F}{4EI} \frac{x^3}{3} + \frac{Fl^2}{16EI} x + C_2.$$

Константу C_2 определим из граничного условия: $y = 0$ при $x = 0$. Подставляя граничные условия в выражение для y , получим $C_2 = 0$.

Тогда

$$y = -\frac{F}{4EI} \frac{x^3}{3} + \frac{Fl^2}{16EI} x = \frac{Fx}{48EI} (3l^2 - 4x^2).$$

При $x = \frac{l}{2}$ получаем выражение для стрелы прогиба в виде

$$\lambda = \frac{F}{48EI} \frac{l}{2} (3l^2 - l^2) = \frac{Fl^3}{48EI}.$$

Учебное издание

ИЗУЧЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Пособие для студентов специальностей

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного
бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана
водных ресурсов», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели
и метрополитены»

В 2 частях

Часть 1

Составители:

ЕСМАН Александр Константинович
ЮРКЕВИЧ Наталья Петровна
САВЧУК Галина Казимировна и др.

Редактор *Е. О. Германович*

Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 06.04.2021. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 2,85. Уч.-изд. л. 2,23. Тираж 200. Заказ 301.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.