

626761

СП

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
И ПРИКЛАДНАЯ  
МЕХАНИКА

МЕХА  
МЕХА

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

*Межведомственный сборник  
научно-методических статей*

*Минск  
УП «Технопринт»  
2002*

УДК 531  
Т 33

**Теоретическая и прикладная механика:** сб. науч. трудов. Под ред. И.П. Филонова. – Мн.: УП "технопринт", 2002. – 252 с. ISBN 985-464-241-0

Сборник включает научные и методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и научных учреждений. В сборник вошли также материалы, обсуждавшиеся на Республиканском научно-методическом семинаре преподавателей кафедр "Теоретической механики",

"Сопротивления материалов" и "Теории механизмов и машин" вузов РБ, состоявшегося 7 февраля 2002 г. в Минске и посвященного 100-летию со дня рождения профессора Г. К. Татура.

Тематика статей сборника охватывает широкий круг вопросов. Изложены различные подходы к преподаванию разделов механики твердого тела в курсах теоретической механики, ТММ, сопротивления материалов. Некоторые материалы носят ярко выраженный дискуссионный характер по проблемам построения даже таких классических дисциплин, как теоретическая механика. Научные работы также охватывают широкий спектр проблем от теоретических работ, посвященных применению моделей механики в генетике до практических методов механики почв, сельскохозяйственных машин.

Широкий спектр работ сборника отражает то, что преподаватели и сотрудники вузов, научных учреждений, принявших участие в Юбилейном семинаре работают в различных областях преподавания, приложения методов механики.

Сборник будет полезен для преподавателей вузов, научно-инженерных работников, аспирантов, работающих в различных разделах механики.

#### **Редакционная коллегия**

Филонов И.П., Беляев Г.Я., Чигарев А.В.,  
Чигарев Ю.В., Корженевская Н.Н.



*К 100-летию со дня рождения  
профессора Г. К. Татура*

## СТРАНИЦЫ ЖИЗНИ УЧЕНОГО, ПЕДАГОГА, УЧИТЕЛЯ

**Г. Я. Беляев, Н. И. Горбач**

В начале февраля в нашем вузе проходил очередной республиканский научно — методический семинар преподавателей кафедр теоретической механики, теории машин и механизмов, сопротивления материалов вузов Беларуси. На этот раз он был приурочен к 100-летию со дня рождения выдающегося педагога, талантливого ученого и просто замечательного человека, заслуженного деятеля науки БССР, доктора технических наук, профессора Геннадия Кузьмича Татура.

Г. К. Татур родился 5 февраля 1902 г. в городе Минске в семье служащего.

До 1915 г. проживал в Минске и учился в Минском коммерческом училище. В 1915 г. в связи с эвакуацией был переведен сначала в Тульское, а затем в 1916 г. в Казанское коммерческое училище, которое закончил в 1918 г. с золотой медалью. В 1919 г. вместе с семьей родственников он переезжает во Владивосток и в том же году поступает в Дальневосточный политехнический институт на механическое отделение, которое закончил в 1927 г. получив квалификацию инженера — механика и был оставлен при институте для научной работы.

Занятия в институте проводились тогда только по вечерней системе, поэтому учебу приходилось совмещать с работой на производстве. С 1922 г. по 1928 г. включительно, работал чертежником, чертежником — конструктором, конструктором и инженером — конструктором, в основном, на судостроительном заводе «Дальзавод».

В Дальневосточном политехническом институте Геннадий Кузьмич проработал до сентября 1939 г. сначала в качестве ассистента, затем с 1931 г. — доцента и заведующего кафедрой сопротивления материалов. Два года был деканом факультета, а с 1932 по 1936 год начальником учебной части и заместителем директора института. В 1936 году по собственному желанию освобожден от административной работы, сосредоточив основное внимание на педагогической и научной работе.

В 1933 г. был утвержден в ученом звании доцента, а в 1935 г. — в ученой степени кандидата технических наук без защиты диссертации, на основании представленных научных работ.

В сентябре 1939 г. в связи с необходимостью переменить климат для членов семьи (жена и двое детей) Г. К. Татур перешел по конкурсу на работу в Криворожский горнорудный институт в качестве зав. кафедрой сопротивления материалов и теоретической механики, где проработал в этой должности до июля 1958 года.

В начале Великой отечественной войны Г. К. Татур был освобожден от призыва в армию и вместе с институтом эвакуирован в город Нижний Тагил Свердловской области. Возвратился в Кривой Рог в 1944 году.

За время работы в КГРИ им написана докторская диссертация, которую он успешно защитил в 1954 г. в Ленинградском институте инженеров железнодорожного транспорта. В апреле 1955 г. был утвержден ВАКом в ученой степени доктора технических наук и одновременно тем же протоколом за № 8 — в ученном звании профессора по кафедре «Сопротивление материалов».

В апреле 1958 г. Геннадий Кузьмич подал необходимые документы директору БПИ с просьбой предоставить ему в порядке конкурса место заведующего кафедрой теоретической механики и с 6 июля был зачислен, как избранный по конкурсу, на эту должность. Геннадий Кузьмич приступил к исполнению обязанностей заведующего кафедрой теоретической механики БПИ в начале 1958/59 учебного года и проработал в этой должности до конца 1962/63 учебного года, т. е. ровно один пятилетний срок. По его личной просьбе был освобожден от занимаемой должности и переведен на должность профессора кафедры.

Всего один срок проработал Геннадий Кузьмич заведующим кафедрой, но он сделал многое, чтобы создать авторитет кафедре не только в нашем институте, но и в республике. Именно им были заложены лучшие традиции кафедры — честность, порядочность, высокая ответственность за состояние научной и учебно — методической работы каждого сотрудника кафедры, начиная от заведующего кафедрой и кончая лаборантом. Все, кто работал под его руководством, помнят его, как требовательного, принципиального, но вместе с тем весьма корректного, заботливого руководителя и просто коллегу.

В связи с оформлением персональной пенсии Геннадий Кузьмич обратился с заявлением к ректору института с просьбой освободить его от должности профессора кафедры теоретической механики с 3 июля 1978 г., а с 1 сентября этого же года зачислить на должность профессора — консультанта этой же кафедры. Его просьба была полностью удовлетворена ему разрешалось вести учебный процесс с выполнением учебной нагрузки и других видов работ в объеме 3-х часового рабочего дня. 1978/79 учебный год оказался для Геннадия Кузьмича последним учебным годом. 7 июля 1979 г. был последний день весеннего семестра этого учебного года. Этот день явился последним и в

жизни Г. К. Татура. В этот день должна была состояться его итоговая лекция в потоке студентов МСФ, однако профессор не пришел на лекцию — по дороге на работу он скончался от сердечного приступа. Незадолго до этого в то же день он выступил с последней своей речью на предварительной защите диссертации его аспиранткой.

Немногим более 20 лет Геннадий Кузьмич проработал в нашем институте, но за этот сравнительно короткий срок он заслужил самое глубокое уважение у всех, с кем ему приходилось общаться от руководства института и до студентов. За время работы в нашем институте им подготовлено более 20 научных и научно — методических работ, из которых 13 опубликовано, в том числе учебное пособие «Курс сопротивления материалов» в трех частях (1962, 1964 и 1966 гг. ). В 1974 г. вышло из печати переиздание первой и второй частей этого учебного пособия «Общий курс сопротивления материалов». Под его руководством в нашем институте подготовлено и успешно защищено 9 кандидатских и одна докторская диссертации, по 20 кандидатским диссертациям он выступал первым оппонентом, причем, по многим, представленным на оппонирование работам, он по существу становился консультантом и помогал диссертантам качественно улучшить диссертационную работу. Многих научных и инженерно — технических работников он консультировал, не являясь ни руководителем, ни даже оппонентом по их научным работам.

Несмотря на занятость и достаточно преклонный возраст, он не отказывался от общественной работы. Это выступления перед студентами в общешкольной, на торжественной линейке по случаю начала учебного года перед первокурсниками, на собраниях коллектива института, на встречах с работниками народного хозяйства и т. д. Он являлся председателем или членом многих советов и комиссий различных уровней — от институтского до республиканского. За честный и добросовестный труд, за успехи в научной работе Г. К. Татур награжден тремя медалями, почетной грамотой Верховного Совета БССР, тремя почетными грамотами министерства ВиССО БССР, многочисленными грамотами учебных заведений, в которых он работал. В октябре 1972 г. Указом Президиума Верховного Совета БССР ему присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки БССР». Трудно в ограниченной рамке статьи описать большую творческую жизнь крупного ученого и педагога, каким без сомнения был Г. К. Татур.

Наша память о нем будет ему лучшим подарком в том, ином мире, в связи с его 100-летием.

## Г. К. ТАТУР — УЧЕНЫЙ, ПЕДАГОГ, УЧИТЕЛЬ

**В. Б. Немцов, Э. Г. Гецевич**

Есть люди, память о которых светла и долговечна. Именно к таким людям принадлежит Геннадий Кузьмич Татур, столетие со дня рождения которого мы сегодня отмечаем. Хотелось бы выяснить природу феномена доброй памяти о Геннадии Кузьмиче как ученом и педагоге.

Геннадий Кузьмич начал свою научную и педагогическую карьеру в Дальневосточном политехническом институте (Владивосток).

В 20–30 годах прошедшего века его научная работа была посвящена решению конкретных задач прочности электросварных соединений и однорогих крюков. В эти же годы им был написан конспект лекций по теории упругости, изданный литографическим способом. Было издано пособие по дополнительным главам сопротивления материалов. Одновременно его заинтересовали проблемы продольного изгиба стержней и их устойчивости. Им был предложен графоаналитический метод решения задач устойчивости и колебаний, рассматриваемых как проблема собственных функций и собственных значений. Последующая разработка этого метода составила предмет его докторской диссертации, написанной в 1953 г. во время работы в Криворожском горном институте.

В предложенном им подходе пробная функция, задающая искомую форму изогнутой оси стержня, при вычислении фиктивного изгибающего момента подвергалась двукратному интегрированию, и поэтому его метод оказался результативнее традиционного энергетического подхода, в котором указанная функция сначала дважды дифференцировалась, а затем интегрировалась, что снижало точность вычисления критических сил.

Таким образом, разработка теоретических проблем тесно увязывается с решением прикладных задач. В этом состоит характерная особенность его научного стиля, в чем можно лишний раз убедиться просматривая список его научных работ, выполненных во время работы во Владивостоке и Кривом Роге, где его интересовали уже проблемы прочности и деформативности горных выработок и их крепей, проблемы прочности и динамики подъемных канатов, используемых в горном деле.

В последующие годы после переезда в Минск на историческую родину, он издал уникальный курс сопротивления материалов в трех частях (1962, 1964 и 1966 гг.). Одному из авторов (Немцову В. Б.) посчастливилось быть вниматель-



ным читателем третьей части рукописи упомянутого курса. Вместе с И. П. Филоновым мы оказали помощь в подготовке к изданию третьей части этого курса.

В упомянутой третьей части курса сопротивления материалов изложены элементы теории упругости, вопросы устойчивости и динамики, контактные задачи, расчеты на долговечность. В белорусский период деятельности его интересы быстро переориентировались на проблемы динамики автомобилей и проблемы прочности, важные для машиностроительной промышленности республики. Здесь важна не только его научная работа, связанная с решением инженерных проблем автомобильной и машиностроительной промышленности, важно то, что им была оказана большая консультативная научная поддержка в подготовке таких докторов наук как Бельский Ю. Б., Метлюк Н. Ф., Фурунжиев Р. И., Крушевский А. Е., Жданович Г. М. и Филонов И. П.

В 1971 году им издан краткий биографический справочник «100 механиков».

Всего в списке его научных работ, датированных сентябрем 1971 г. содержится 50 наименований.

По современным представлениям это немного. Но дело не в количестве трудов, а в их качественном содержании. В этом смысле его научный стиль отличается от распространенного в последние годы стиля борьбы за большое количество объемистых публикаций, где словоизвержение маскирует пустоту работы.

Важная особенность его трудов — их краткость, четкость и информативность, простое и доступное изложение, в них всегда явно фигурирует идея научной работы. Характеризуя его научные труды, можно воспользоваться словами знаменитого Вольтера, сказанные им в адрес столь же знаменитого Даламбера: «Вы единственный писатель, который ни когда не говорит ни больше того, ни меньше того, что хочет сказать». Может быть интересно отметить, что Даламбер стал академиком за его достижения в литературе, а не в математике и механике.

Как ученый Геннадий Кузьмич был уникальным научным руководителем аспирантов по механике твердого деформируемого тела. В период с 1960 по 1972 годы он подготовил 10 кандидатов наук.

Уникальность его как руководителя аспирантов и соискателей состоит в том, что он, как правило, не был соавтором аспирантских работ. Его аспиранты работали самостоятельно под добрым и бескорыстным руководством. Аспиранты и соискатели приходили у нему, как правило, с готовыми темами диссертации. Его компетентность, доброжелательность, доступность и открытость, внимательное отношение к людям неизменно притягивали к нему научных сотрудников и преподавателей, которым он давал консультации и оказывал содействие в их научной и педагогической работе. Удивительно то, что эта

взаимная притягательность отбирала увлекающихся сотрудников, в его окружении не появлялись неблагоприятные люди.

Будучи специалистом по широкому кругу вопросов механики, Геннадий Кузьмич исключительное внимание уделял организации учебного процесса во втузе, методике проведения учебных занятий со студентами всех форм обучения. Это обстоятельство позволяет характеризовать его не только как ученого, но также как педагога и учителя.

На кафедре теоретической механики БНТУ сохранился своеобразный архив, составленный самим Татуром и содержащий семестровые и годовые отчеты по всем видам работ практически за 20 лет его работы в институте. Анализ этих материалов, а также воспоминания тех, кто его знал или работал вместе с ним, позволяют нарисовать деловой и нравственный портрет этого незаурядного человека и педагога. Вот некоторые штрихи такого портрета.

Для него характерна аккуратность и скрупулезность не только в отчетах, где подробно расписано, что планировалось и что выполнено, но также в подготовке и проведении учебных занятий со студентами, аспирантами, слушателями факультета повышения квалификации. По его словам на подготовку лекции — составление тезисов, подбор обозначений и примеров, их численное решение, а также воспроизведение лекции на стадии подготовки тратилось столько же времени, сколько уходило на изложение материала в самой аудитории. Следует добавить, что эта аккуратность характерна не только в отчетах и подготовке к различным мероприятиям, но и во всем его внешнем облике и поведении.

Ярко выраженная склонность к интеллектуальной деятельности и природная любознательность заставляла Геннадия Кузьмича критически осмыслить существующую учебную литературу по теоретической механике таких авторов, как Г. К. Суслов, Я. Л. Геронимус, Н. А. Кильчевский, А. А. Яблонский, И. М. Веселовский и многих других, сделать по ней свои замечания. По этим же мотивам проанализированы статьи сборника «Теоретическая механика во втузах» (1975 год), написанные ведущими методистами и учеными, членами научно-методического совета МВССО СССР. Написаны труды «Развитие механики и роль русских ученых и изобретателей в этом развитии» (34 стр.), учебник «Общий курс сопротивления материалов» (для мех. специальностей вузов (462 стр.)).

В заключение следует отметить его активную жизненную позицию, которая выражалась в отзывчивости на события в стране и вузе. Начало учебного года — это выступление перед первокурсниками, перед учащимися Суворовского училища. Предвыборная кампания — это выступление перед избирателями по выдвижению кандидатов в члены Верховного Совета республики. Его

приглашают и он работает в различных научно-методических комиссиях, научно-технических советах, в редакции БСЭ, пишет для нее статьи «Вибрация» и «Деформация» выступает с докладами на городских и республиканских семинарах. Является активным автором республиканских газет и газеты «Советский инженер» Политехнического института. В газете «Советский инженер» помещает статью «Методика подготовки и чтения лекций», которая получила широкий резонанс в педагогических коллективах института.

Подводя итоги, необходимо отметить, что это первая и очевидно неполная характеристика Геннадия Кузьмича как ученого, педагога и учителя. Но очевидно, что Г. К. Татур своей деятельностью в Белорусском политехническом институте оставил яркий след на кафедре, в институте и за его пределами.

УДК 531 (092)

## **О ЖИЗНЕННОМ И ТВОРЧЕСКОМ ПУТИ ПРОФЕССОРА Г. К. ТАТУРА.**

***Н. И. Горбач***

7 июня 1979 года — последний день весеннего семестра 1978/79 учебного года. Этот день явился последним в жизни выдающегося педагога, талантливого ученого и замечательного человека, заслуженного деятеля науки БССР, доктора технических наук, профессора кафедры «Теоретическая механика» БГПА Геннадия Кузьмича Татура. В этот день в 13<sup>45</sup> должна была состояться его итоговая лекция в потоке студентов МСФ, однако, профессор не пришел на лекцию — по дороге на работу он умер от сердечного приступа, а незадолго до этого в этот день он выступил с последней своей речью на предварительной защите диссертации его аспиранткой.

Немногим более 20 лет Геннадий Кузьмич проработал в нашем институте, но за этот сравнительно короткий срок он заслужил самое глубокое уважение у всех, с кем ему приходилось общаться от руководства института и до студентов. Можно с полной уверенностью сказать, что Геннадий Кузьмич был широко известен не только в нашем институте, но и в научном мире нашей республики и за ее пределами. Пришел он в наш институт на должность заведующего кафедрой теоретической механики в 1958 году уже зрелым ученым, доктором технических наук, профессором на 57-м году своей жизни. В этой должности он проработал до 1963 года и после истечения пятилетнего срока был освобожден по собственному желанию.

Всего один срок проработал Геннадий Кузьмич заведующим кафедрой, но он сделал многое, чтобы создать авторитет кафедре не только в нашем институте, но и в республике. Именно им были заложены лучшие традиции кафедры — честность, порядочность, высокая ответственность за состояние научной и учебно — методической работы каждого сотрудника кафедры, начиная от заведующего кафедрой и кончая лаборантом. Все, кто работал под его руководством, помнят его, как требовательного, принципиального, но вместе с тем весьма корректного, заботливого руководителя и просто коллегу. Он заботился о творческом росте научно — педагогических кадров, о создании на кафедре творческой и дружеской атмосферы, о повышении качества всей учебно — методической работы. Это прежде всего достигалось благодаря работе постоянно действующего научно — методического семинара, руководителем которого он был сам, организацией открытых лекций и практических занятий, посещением занятий каждого преподавателя с последующим обсуждением этих занятий лично с преподавателем или на заседании кафедры. И никто не обижался на замечания Геннадия Кузьмича, ибо они, хотя и были принципиальными, но по существу и доброжелательными. И не обижались за то, что он, даже будучи просто профессором кафедры, иногда приходил на занятия к своим ассистентам, не предупредив их об этом заранее.

Он был требовательным ко всем, но более всего он был требователен к себе. В подтверждение этого можно привести такой факт. Геннадий Кузьмич до прихода на нашу кафедру работал в Криворожском горнорудном институте, где он возглавлял кафедру сопротивления материалов и теоретической механики, но преподавал в основном сопротивление материалов. В нашем институте ему пришлось преподавать теоретическую механику. И чтобы прекрасно освоить и на самом высоком уровне преподавать этот курс, Геннадий Кузьмич решил все задачи из сборника задач по теоретической механике И. В. Мещерского. Получилось солидное пособие по решению задач, которым затем пользовались многие начинающие преподаватели. Жаль, что оно не было издано, а со временем рукопись была утеряна.

Но нельзя думать, что Геннадий Кузьмич только то и делал, что упражнялся в решении задач, занимался наукой, руководил аспирантами, возглавлял различные научно — методические советы и комиссии. Он был весьма разносторонним человеком. Лучше об этом не скажешь, чем об этом своих воспоминаниях пишет его жена Елизавета Ивановна.

«... Он был очень чувствителен к юмору, смеялся неудержимо, заразительно. Любил стихи, многие знал наизусть, иногда писал сам. В нем никогда не было стремления к обогащению. У нас не было ни машины, ни дачи, зато была радость бытия, общения с друзьями. Геннадий Кузьмич очень любил

оперу. Сохранились все ноты, по которым он в узком кругу исполнял арии Сусанина, Годунова, Гремина, Шаляпинскую «Блоху», любил «Элегии» Яковлева и Маснэ, романс «Не искушай» Глинки и многое другое.... Он прекрасно играл на гитаре и мандолине».

Но самое большое увлечение в его жизни — спорт. Самый разнообразный лыжи, коньки, плавание, но главная любовь — это теннис. В этом виде спорта уже в достаточно зрелом возрасте он достиг замечательных успехов. Так, в 1962 г. Геннадий Кузьмич (ему тогда было 60 лет) занял 2-е место в первенстве г. Минска по теннису среди лиц, старше 35 лет, в 1963 г. выполнил норматив 1-го разряда, а в 1971 г. Геннадий Кузьмич принял участие в весеннем первенстве города среди лиц старшего возраста, занял первое место и был награжден диплом 1-й степени и золотой медалью.

Нелегким был его жизненный путь. Почти 60 лет отдано напряженному труду. Начало было положено в 1918 году, в котором Геннадий Кузьмич с золотой медалью окончил Казанское коммерческое училище. В Казани жил в семье тетки (он рано остался без матери) и в 1919 г. с ее семьей переехал в г. Владивосток. Здесь поступил в Дальневосточный политехнический институт на механическое отделение. Занятия в институте проводились тогда только по вечерней системе, поэтому учебу приходилось совмещать с работой на производстве в качестве чертежника, а позже инженера конструктора на судостроительном заводе.

В 1927 г. после окончания института был оставлен при нем для проведения научной и педагогической работы. Здесь он проработал до 1939 г. сначала ассистентом, затем доцентом и с 1931 года заведующим кафедрой сопротивления материалов. С 1932 года в течение четырех лет параллельно с преподавательской работой занимался административной работой на различных должностях — декан факультета, начальник учебной части, зам. директора. В 1936 г. по собственному желанию он был освобожден от административной работы.

В сентябре 1939 г. в связи с необходимостью переменить климат для членов семьи (жена и двое детей) Г. К. Татур переходит по конкурсу на работу в Криворожский горнорудный институт в качестве заведующего кафедрой сопротивления материалов и теоретической механики, где проработал в этой должности до июля 1958 года. В начале Великой отечественной войны Г. К. Татур был освобожден от призыва в армию и вместе с институтом эвакуирован в город Нижний Тагил Свердловской области, возвратился в Кривой Рог в 1944 году.

Переезд в 1958 году из Кривого Рога в Минск не был случайным. Ведь Минск для Геннадия Кузьмича — родной город. Здесь он 5 февраля 1902 г. родился в семье служащего, до 1915 года учился в коммерческом училище, а

затем в связи с эвакуацией в 1915 году был переведен в Тульское, а в 1916 году в Казанское коммерческое училище.

Начало научной работы было положено в 1927 году после окончания института. За время его научной деятельности подготовлено более 60 научных и научно — методических работ из которых более 40 — печатные работы, в том числе учебное пособие «Курс сопротивления материалов» в 3-х частях и второе издание этого пособия — «Общий курс сопротивления материалов». Под руководством Татура Г. К. только в нашем вузе подготовлено и успешно защищено 9 кандидатских и одна докторская диссертации, по 20 кандидатским диссертациям он был первым оппонентом, причем, по многим, представленным на оппонирование работам он по существу становился консультантом и помогал диссертантам качественно улучшить диссертационную работу. Следует отметить, что несмотря на сравнительно небольшое количество научных публикаций, Г. К. Татур был высоко эрудированным во многих областях науки и техники и пользовался заслуженным авторитетом среди коллег — ученых.

Его успехи в науке были отмечены в 1933 году утверждением в ученном звании доцента, а в 1935 году — в ученой степени кандидата технических наук без защиты диссертации, на основании, ранее опубликованных работ. В 1954 году Геннадий Кузьмич успешно защищает докторскую диссертацию в Ленинградском институте инженеров железнодорожного транспорта, а в апреле 1955 г. утверждается в ученой степени доктора технических наук и одновременно одним и тем же протоколом за № 8 — в ученном звании профессора по кафедре «Сопротивление материалов».

В октябре 1972 г. Указом Президиума Верховного Совета БССР ему присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки БССР». За честный и добросовестный труд, за успехи в научной работе Г. К. Татур поощрен рядом правительственных наград, в том числе тремя медалями, почетной грамотой Верховного Совета БССР, тремя почетными грамотами министерства ВиССО БССР, многочисленными грамотами учебных заведений, в которых он работал.

Без сомнения Геннадий Кузьмич оставил неизгладимый след и вечную память в истории нашей кафедры, нашего института, вузов нашей республики, в сердцах всех, с кем он общался по совместной учебной и научной работе. Подтверждением этому служит наш нынешний научно — методический семинар, который посвящается его 100-летию со дня рождения.

## **ЧТО ТАКОЕ МТТ?** **(вариант тезисов вводной лекции** **по теоретической механике)**

**А. В. Чигарев, Ю. В. Василевич, Ю. В. Чигарев**

МТТ — механика твердого тела. Механика как наука изучает движение и взаимодействие тел. Различают тела твердые, жидкие и газообразные. Считаем, что тела состоят из материальных частиц, образующих континуум и поэтому общие свойства твердых, жидких и газообразных тел изучаются в механике сплошных сред. Для большинства инженерных специальностей в Беларуси основной интерес представляет изучение твердых тел, т. е. тел оказывающих сопротивление силам, воздействующим на них. Твердое тело, в котором изменение расстояний между частицами, составляющими его пренебрежимо мало по сравнению с перемещением тела как жесткого целого, считаем абсолютно твердым. Оценку сил, необходимых для поступательного перемещения твердого тела как жесткого целого, можно получить на основании второго закона Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a}$ , где  $\vec{F}$  — сила,  $\vec{a}$  — ускорение,  $m$  — масса. Тело под действием сил может находиться в состоянии покоя, если наложены ограничения на его перемещения, называемые связями. Действие связей заменяют силами, называемыми реакциями связей, которые неизвестны и подлежат определению.

В реальных телах под действием приложенных сил возникают смещения между частицами — деформации. Деформации могут приводить к изменению объема — объемные деформации и формы — сдвиговые деформации. Изменения объема и формы тела могут быть обратимыми и необратимыми. Обратимое деформирование твердых тел изучается в теории упругости, необратимое в теориях пластичности, ползучести. Реальные тела в зависимости от величины нагрузок ведут себя сначала упруго, после достижения некоторых величин нагрузок — пластически, а затем в них возникают нарушения сплошности (дислокации, повреждения, трещины) и наконец происходит разрушение в виде потери формы или разделения на части.

Сопротивление деформируемых твердых тел изменению формы и (или) объема при наложенных связях изучается в сопротивлении материалов. Сопротивление тела изменению состояния проявляется в появлении деформаций. Работа внешних сил в этом случае идет не на изменение кинетической энергии движения, а на изменение внутренней энергии тела. На стадии малых деформаций связь между напряжениями и деформациями описывается законом Гука (современником и соотечественником Ньютона)  $\sigma = Ce$ , который

утверждает, что деформация  $\epsilon$  пропорциональна напряжению (силе)  $\sigma$ . Степень сопротивления деформированию определяется коэффициентом жесткости  $C$ . По внешнему виду законы Ньютона и Гука похожи, но закон Ньютона представляет собой уравнение состояния (сохранения импульса), а закон Гука представляет собой определяющее уравнение, характеризующее линейно — упругие свойства материала.

Основным элементарным объектом в механике является материальная точка, из которой могут быть образованы тела и системы. Материальная точка — это математическая точка, которой приписывается скалярная величина, называемая массой и характеризующая способность свободной точки сопротивляться изменению ее состояния движения или покоя. Материальная точка не имеет объема, формы, не деформируется и не делится на более элементарные объекты. Из материальных точек состоят не только твердые тела, но также жидкости и газы. Жидкости и газы не сопротивляются изменению их формы и легко принимают форму сосуда, в котором находятся. Это является следствием того, что молекулы жидкостей и газов могут перемещаться друг относительно друга. Основные различия между жидкими и газообразными телами в том, что жидкости несжимаемые, т. е. сопротивляются изменению объема, а газы сжимаемы.

Из вышесказанного следует, что механика точки и системы точек является базой для изучения механики твердых, жидких и газообразных тел.

На рис. 1 изображены места и связи разных разделов механики, образующих вместе с физикой, химией, математикой — фундамент подготовки инженера.

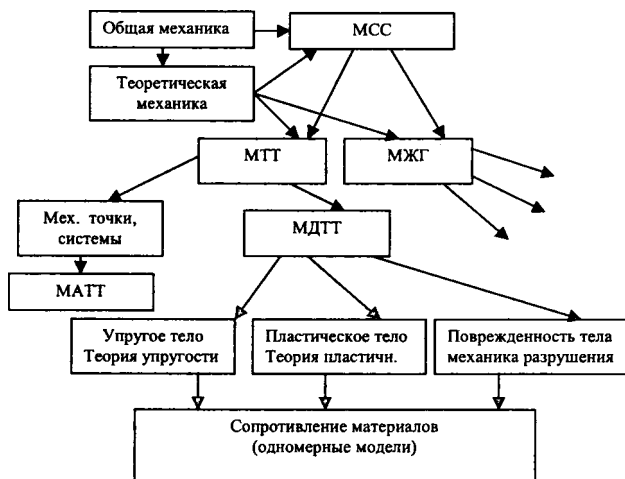


Рис. 1



Здесь МАТТ — механика абсолютно твердого тела,  
МСС — механика сплошной среды,  
МЖТ — механика жидкости и газа,  
МДТТ — механика деформируемого твердого тела.

Все разделы механики, изображенные на рис. 1 образуют то, что называется теоретической механикой в широком смысле этого слова, а именно — это принципы, законы математические модели и методы механики.

Однако уже в курсах теоретической механики и сопротивления материалов изучение общих законов механики сопровождается решением большого числа технических задач. Таким образом, в технических вузах теоретическая механика и сопротивление материалов являются не только предметами, в которых математические модели и методы приобретают физическое содержание, но и мостами, связывающими математические абстракции с конкретными техническими системами.

Отметим, что законы и методы теоретической механики являются фундаментальными и не изменяются по существу на протяжении столетий. Действительно, теоретическая механика являлась базой для физики и техники со времен Ньютона, когда плавали под парусами, ездили на лошадях, стреляли ядрами. Она остается фундаментом и для современной техники полетов на ракетах, самолетах. Можно уверенно сказать, что техника и технологии будущего будут базироваться все на тех же вечных законах механики.

Изучение теоретической механики и сопротивления материалов обычно проходит на 1–2, возможно частично 3 курсах. Затем на базе этих дисциплин изучается техническая механика твердого тела, основными разделами которой являются механика машин и механизмов, детали машин, приборы, аппаратуры, строительная механика. Законы и объекты, изучаемые в этих дисциплинах также являются медленно изменяющимися на протяжении десятков лет. На рис. 2 схематически показаны некоторые разделы технической механики



Рис. 2.

На старших курсах студенты изучают различные курсы, посвященные конструированию, технологиям производства, эксплуатации, утилизации технических изделий и систем на базе различных моделей твердых тел. Процесс

современного производства таков, что смена технологий происходит на протяжении 5-30 лет, поэтому курсы по конструированию, технологической механике являются достаточно динамичными, иногда меняющимися на протяжении обучения, поэтому их изучение проходит на старших курсах. Техническую механику, конструирование, технологическую механику, проблемы эксплуатации и утилизации традиционно объединяют термином прикладная механика твердого тела.

Вообще термин «механика» в переводе с греческого означает «искусство конструирования машин». Современная трактовка термина машина позволяет включать в него конструкции, здания, оснащенные на современном уровне как машины для жилья, работы, отдыха и т. д. Таким образом, трактуя термин механика твердого тела в широком смысле можно ориентировать студента таким образом, что он на протяжении пяти лет изучает различные разделы механики твердого тела, условно разделяемые на три уровня, рассмотренные выше. Предлагаемая классификация не является совершенной, но тем не менее используется в механике на протяжении последнего столетия. Знакомство с ней позволяет студентам лучше понимать логику построения и преподавания разделов механики на протяжении всего курса обучения.

УДК 001. 5: 531

## **О СТРОЕНИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ВАРИАНТА КУРСА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ**

***Р. М. Игнатищев***

Существует более сотни учебников и учебных пособий по теоретической механике, предназначенных студентам высшей школы.

«Курс теоретической механики. Для студентов машиностроительных специальностей технических университетов. — 359 с.», подготовленный на кафедре теоретической механики Могилёвского государственного технического университета, отличается от известных 4-мя позициями:

1. В целом принимая аксиоматический метод и считая его наиболее мощным и производительным в построении и развитии теорий, авторы отказались от сопровождающей его ошибочной концепции, утверждающей о возможности, якобы, построения теории, базирующейся на конечном числе начал (понятий и аксиом);

2. Отказались и от концепции принимать за аксиомы «простейшие» опорные факты — по той причине, что понятие «простейшие» не имеет количественных показателей (то, что одним кажется «простым», оказывается «сложным» для других; то, что «просто» при подходе с одной точки зрения, оказывается «сложным» при взгляде с другой стороны. В частности, какое понятие проще — «точка» или «линия»? Если вами определены «точка» и «непрерывность», то «линия» окажется простым понятием. Но если вы попытаетесь дать определение линии, не пользуясь понятиями «точка» и «непрерывность», задача окажется далеко не простой); авторы «Курса» за начала стремились принимать такие понятия и связи между ними, которые дают более короткие пути к изложению методов и опорных фактов теоретической механики;

3. Отказались авторы и от игровых доказательств — когда «доказывается» справедливость давно и хорошо известного закона (например, об изменении кинетического момента) и акцентировали внимание на демонстрациях методов, позволяющих почти со 100-процентной уверенностью в достоверности предсказываемых результатов теоретически переходить от одних фактов механики к другим, т. е. искусственно создаваемые игровые ситуации («доказательства» законов) заменили серьёзностью — акцентированием внимания на методы теоретической механики с доказательствами высокой их надёжности по критерию «правильность предсказаний»;

4. Сорокалетний опыт преподавания теоретической механики, причём не вообще, а студентам машиностроительных специальностей, приводит каждого к накоплению комплекса нетрадиционных фрагментов удачного изложения тех или иных частностей, что также учтено при написании рассматриваемого «Курса».

Всё это и позволило без ущерба для качества общетеоретической подготовки и содержания курса (по сравнению с существующими аналогичными книгами) изложить материал значительно короче при существенном повышении его конкретно-профессиональной полезности.

Переходим к краткому пояснению приведенной характеристики нашего «Курса».

Существующим курсам теоретической механики свойственно (иногда прямо, чаще молчаливо-согласительно) строить изложения, исходя из концепции о возможности создать «строгую» теорию, базируя её на конечном числе понятий и аксиом.

Иллюстрируем приведенное утверждение 7-ю примерами.

«Кинематика для своего изложения не требует никаких новых начал и опирается на аксиомы геометрии. Для изложения же кинетики необходимо принять без доказательства *несколько* основных начал, или законов механи-

ки». Это цитата со с. 3–4 «Теоретической механики» 1909 г. Н. Е. Жуковского [1]. Повторена в [2, с. 9].

«Кроме аксиом, рассмотренных в §1, мы введём во всё дальнейшее изложение лишь одну новую аксиому (в §2 гл. III) — *на этих аксиомах строится всё здание классической механики* и все выводы из них делаются уже *чисто математическим путём*» [3, с. 22].

Из конечного числа начал «все наблюдаемые механические явления могут быть выведены как *простые* математические следствия» [4, с. 32].

«Теоретическая механика покоится на *ограниченном* числе истин, которые называются аксиомами; всё остальное выводится как следствия из принятых аксиом» [5, с. 19].

«Из аксиом при помощи *строгих* математических рассуждений вытекают все дальнейшие выводы и результаты классической механики» [6, с. 15].

«Все дальнейшие выводы классической механики могут быть получены из этих аксиом при помощи логических рассуждений и математических вычислений» [7, с. 14].

«Все положения динамики получают из её аксиом, используя законы логики и вводя удобные для применения понятия» [8, с. 236].

Приведен далеко не полный перечень примеров специалистов, глубоко убеждённых в возможности построения «строгой» теории, основанной на конечном числе начал.

Это ошибочная, исторически сложившаяся, научная концепция. От неё необходимо отказаться, ибо она приводит к нерациональным затратам учебного времени. В частности, обуславливает наличие в учебной литературе по теоретической механике целых глав типа «Теория пар сил» (на 18–10 страницах — см, к примеру, [2–6 и др. ]), где в погоне за эфемерной «строгостью», тратят время на *многократную* демонстрацию студентам давно известных им признаков подобия треугольников, не расширяя, при этом, знания методов теоретической механики.

Беда и в том, что в погоне за «строгостью доказательства» преподаватели часто не могут во время объяснения в своих пояснениях, чем лишь запутывают студентов (а часто и себя).

Перехожу к пояснению целесообразности воздерживаться от фраз типа «аксиоматическим методом *строго* доказано».

С этой целью вначале привожу высказывания известного математика Кагана В. Ф. — о доказательстве одной из теорем геометрии Киселёва он писал [9, с. 32]: «Это не слабое доказательство, здесь нет и следа доказательства, здесь есть только одна интуиция, есть только то, что древний писатель выразил одним словом — «смотри!»». Но это критика не Киселёва. Это критика концеп-

ции о том, что при использовании аксиоматического метода можно, якобы, добиться «строгого» доказательства, ибо высокий уровень требований к понятию «строгость доказательств» Кагана В. Ф. предъявляет и к себе — на с. 553 пишет: «конечная цель в настоящем (его, Кагана) сочинении достигнута столь же мало, как и в других сочинениях, имеющих ту же задачу. Рядом с основными терминами... мы употребляли много других... , которым несомненно присваивается определённое значение, нами не формулированное. . . Таковы термины: «существует», «различные точки»... и т. п. Рядом с постулатами, нами формулированными, имеются и постулаты логические, на которых основан весь процесс рассуждений... Наконец, в основе всей нашей системы лежит арифметика; мы принимаем, следовательно, все те постулаты, на которых покоится эта дисциплина, а между тем, как ни глубоко продуманы начала арифметики, эта наука не может считаться обоснованной... Итак, кроме тех посылок, которые нами формулированы, мы опирались ещё на другие посылки; мы не можем признать, следовательно, наших посылок достаточными для формального обоснования геометрии».

Об уязвимости аксиоматических теорий (об осторожном отношении к высказываниям типа: «строго доказал») свидетельствуют история создания Лобачевским Н. И. его геометрии (1829 г.) и сомнения великих учёных, подобные высказанному всемирно известным математиком Гауссом К. — «Я часто прихожу к доказательствам, которые убедили бы всякого другого; мне же они не говорят ничего» [9, с. 29].

Но наиболее веским оппонентом концепции «пять аксиом и все остальное строго доказывается» является теорема Гёделя К. о невозможности полной формализации процесса логического вывода (1931 г.).

Итак, выводы, пролучающиеся от использования аксиоматических теорий, не могут быть абсолютизированы в качестве критериев истины. Но возникает естественный вопрос: «как, в конце-то концов, устанавливать истину, что является главным её критерием (аргументом в последней инстанции)»?

Прямо отвечают на этот вопрос другие приверженцы силы и мощи аксиоматического метода, всемирно известные авторитеты — математики:

Гильберт Д. — дилемму «правильно-неправильно» «может решить *только наблюдение и опыт*» [10, с. 343]; академик СССР выдающийся математик Александров А. Д. — «от геометрической наглядности «Начал» Евклида основания геометрии были доведены до наглядности формул... Однако такая формализация, как... было доказано (имеется ввиду упоминавшаяся теорема Гёделя К. ),... не могла привести к окончательному доказательству непротиворечивости геометрии, «Что значит «правильное логическое рассуждение»? Если рассуждение к чему-то относится, то его можно *проверить по результату*» [11, с. 269 и 280].

Итак, применяя аксиоматический метод, преподаватель обязан чувствовать меру в своих доказательствах, ибо чрезмерная погоня за «строгим» доказательством, приводит лишь к запутыванию студента.

В традиционных изложениях методы теоретической механики проводятся как бы подпольно, на подсознательном уровне. В нашем же «Курсе» они вынесены на первый план. Такой акцент приводит к лучшему и более быстрому освоению изучаемого материала — см. [12] и с. 7 в [3].

Сегодня понятие «методы теоретической механики» не стандартизовано. По этой причине, в порядке обсуждения и с целью выработки нормированного термина предлагаем: *методология теоретической механики* (иначе: *совокупность применяемых в ней методов*) — это универсальный набор символов, мнемотехники, правил и мыслительных процедур, несущественно задалживающих память, но позволяющих из нескольких десятков опорных фактов механики быстро получать другие, как известные (накопленные Человечеством в огромном количестве), так и *объективно неизвестные* связи между механическими величинами. Эквивалентные методы — это такие, которые, при приложении их к одному и тому же комплексу предпосылок, приводят к одинаковым результатам. Если использовать приём образности мышления, то: методология — это комплекс строительных материалов, из которых сооружают мостики перехода от одних механических величин и связей между ними к другим, т. е. методология теоретической механики — это всё то, что позволяет хранить в концентрированном (свёрнутом) виде накопленные Человечеством знания о наиболее общих законах механического движения и механических взаимодействий и, при необходимости, разворачивать эти знания до конкретных частных, среди которых будут оказываться и *объективно новые знания*.

Теперь о предметах доказательств.

В теоретическую механику аксиоматический метод пришёл из геометрии. Но «геометрия» — это не некое, единое во всех учебных заведениях изложение общепризнанных геометрических фактов. В ушедшем столетии в школах изучали уже упомянутый (на наш взгляд — великолепно написанный) курс элементарной геометрии Киселёва; он базировался на 3-х аксиомах. Но раньше были «Начала» Евклида (написаны примерно 2300 лет назад); геометрия Евклида покоится на 14 аксиомах. Известно много учебников с названием «Основания геометрии». У Гильберта Д. (1899 г.; переведены на русский в 1948 г.) они базируются на 19 аксиомах, у Кагана В. Ф. (1904 г.) — на 10-ти, у Леллон-Феррана Ж. (1985 г., перевод — 1989 г.) — на 12-ти, у Александрова А. Д. (1987 г.) — на 17-ти. Известны также «Основания геометрии» Костина В. И. (1948), Чистякова В. Д. (1961), Трайнина Я. Л. (1961), Погорелова А. В. (1968) и других; но

они лишь расширяют разнообразие различающихся аксиоматических комплексов.

Отсутствует аксиоматическое единство и в курсах по теоретической механике. Так, в статике по количеству формулируемых аксиом разномнения расположены в интервале 4 — 7. В кинематике о началах не вспоминают (а они есть — в нашем «Курсе» высвечено две такие аксиомы — «о гладкости траекторий» и «ограничивающая скорости движения объектов»). Динамику строят на 3-х, иногда на 4-х и даже 5-ти аксиомах.

Для студента применяемая для построения курса аксиоматика имеет малое значение.

Для него важно изучить переходы от одних хорошо известных из опыта связей между механическими величинами к другим. Каждый из таких переходов есть локальное (местное, малое) доказательство приемлемости применяемых при этом методов. *Вся же совокупность содержащихся в курсах теоретической механики локальных доказательств, многократно повторяющихся при изложениях — есть одно, целостное, доказательство приемлемости применяемых в ней методов.* Если вновь обратиться к приёму образности мышления, то: изучение студентами методологии теоретической механики должно быть подчинено армейскому принципу — «Делай как я!» (в одном месте применяй скалярное произведение, в другом — векторное; и одно другим заменить нельзя!). «Я» — это вся накопившаяся совокупность книг по теоретической механике.

После окончания учёбы предмет доказательства меняется — опорные факты теоретической механики становятся для специалиста предпосылками (своего рода аксиомами), исходя из которых он обязан, с помощью методов теоретической механики, с высочайшей уверенностью, а при необходимости и беря на себя ответственность за правильность предсказанного. При этом, накопленный Человечеством опыт показывает, что *корректное* использование методов теоретической механики и опорных её фактов обеспечивает практически достоверные предсказания. Ориентировочно можно считать, что на миллион сбывающихся предсказаний приходится не более одного промаха.

## Литература

1. Жуковский Н. Е. *Теоретическая механика*. — М., 1909. Ч. 1. — 107 с. и приложения.
2. Жуковский Н. Е. *Теоретическая механика*. — М.-Л.: Оборонгиз, 1939. — 420 с.
3. Геронимус Я. Л. *Теоретическая механика (очерки об основных положениях)*. — М.: Наука, 1973. — 512 с.

4. Эйхенвальд А. А. Теоретическая физика (часть вторая — Общая механика). — М. -Л., 1932. — 325 с.
5. Николаи Е. Л. Теоретическая механика. — М.: Физматгиз, 1962. — Ч. 1. — 280 с.
6. Воронков И. М. Курс теоретической механики. — М., 1962. — 596 с.
7. Старжинский В. М. Теоретическая механика. — М.: Наука, 1980. — 464 с.
8. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1990. — 607 с.
9. Казан В. Ф. Очерки по геометрии. — М.: МГУ, 1963. — 572 с.
10. Гильберт Д. Основания геометрии /Под редакцией П. К. Рашевского, перевод И. С. Градштейна. — М.-Л.: ОГИЗ, 1948. — 491 с.
11. Александров А. Д. Основания геометрии. — М.: Наука, 1987. — 290 с.
12. Зинченко П. И. Непроизвольное запоминание. — М.: Наука, 1961. — 562 с.

УДК 001. 5: 531

## О ТРЁХ СУЩЕСТВЕННЫХ РЕЗЕРВАХ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА УЧЕБНИКОВ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

**Р. М. Игнатицев**

По принципам построения существующие учебники по теоретической механике можно разбить на две категории. Первая. В большинстве случаев авторы искренне верят в возможность построения безукоризненной теории, основанной на ограниченном числе начал.

Так, в литографированном издании 1906 года Н. Е. Жуковский в своей «Теоретической механике» писал: «Кинематика для своего изложения не требует никаких новых начал и опирается на аксиомы геометрии. Для изложения же кинетики необходимо принять без доказательства *несколько основных начал*».

В динамике за начала он принимает: закон инерции, закон независимости действия сил и закон равенства действия и противодействия. К основному же закону динамики (в форме  $\vec{F} = m \cdot \vec{j}$ ) он идёт относительно длинным путём, заканчивая формулировкой и доказательством соответствующей теоремы (в [2, с. 298]).

Теперь перевожу внимание на один из достаточно представительных современных, 1990 года, учебник по «Теоретической механике. Для машиностроительных и приборостроительных специальностей ВУЗов», являющийся детищем Московского государственного технического университета им. Баумана; автор — Никитин Н. Н. [3]. Цитирую: «Все положения динамики получа-



ют из её аксиом». Приводится 4 аксиомы, 3 повторяют начала динамики Н. Е. Жуковского, а 4-м началом является основной закон динамики (в форме  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ). Сразу же возникает каверзный вопрос: «разве закон инерции не является простым следствием основного уравнения динамики»? (через которое интегральное и дифференциальное исчисления объявляются составляющими методов теоретической механики).

Но возвращаюсь к главному. Привожу ещё три примера, подтверждающих что в большинстве случаев авторы учебников по теоретической механике искренне верят в возможность построения безукоризненной теории, основанной на ограниченном числе начал. Геронимус Я. Л. [4] в своём 512-страничном курсе «Теоретическая механика» в 1973 году пишет: «Кроме 4-х аксиом, рассмотренных в §1, мы введём во всём дальнейшем изложении лишь одну новую аксиому (принцип освобождаемости от связей). На этих 5-ти аксиомах строится всё здание классической механики и все выводы из них делаются уже *чисто математическим путём*».

Воронков И. М. [5] в своём «Курсе теоретической механики», на котором выросло не одно поколение инженеров, пишет: «Из аксиом при помощи *строгих* математических рассуждений вытекают все дальнейшие выводы и результаты классической механики».

Вот ещё [6]: «аксиомы... из которых все наблюдаемые механические явления могут быть выведены как *простые* математические следствия» и т. д.

Эта категория влюблённых в «строгость доказательств» авторов тратит (в частности) по 15–12 страниц своих учебников на «*строгое*» изложение главы «Теория пар сил». Особенно печально, что целая армия рядовых преподавателей-приверженцев этой концепции, демонстрируя «строгость», с наслаждением и подробно излагают этот материал на лекциях, существенно задалбливая время на большой объём геометрических построений и на десяток доказательств подобия треугольников, практически не продвигаясь в направлении изложения методов теоретической механики.

Имеется и другая категория учебников. Их авторы нутром чувствуют, что концепция о возможности построения строгой теории, основанной на конечном числе начал, ошибочна, но умудрённые жизненным опытом, прямо об этом не рискуют высказываться. Они знают насколько опасно в науке пытаться подправлять укоренившееся мнение; за это бьют — жёстко, а иногда и ниже пояса. И всё же в изложениях ряда авторов просматривается их неверие в возможность «выводить всё строго математически».

Сейчас накопилось достаточно оснований, чтобы во всеуслышание заявить: «*Концепция о возможности построения неукоризненной теории, основанной на конечном числе начал ошибочна. И в теоретической механике фор-*

*мально-логические рассуждения должны уступить инженерно-физической сущности и здоровому практицизму; формально-логические рассуждения должны быть перемещены на второй план».*

Концепция о том, что «теоретическая механика стала стройной, законченной теорией», в ней *«всё строго доказывается»*, «из небольшого числа начал всё остальное выводится как простые математические следствия», перекочевала в теоретическую механику 3–4 столетия назад из геометрии. Но там в последнюю сотню лет произошли существенные концептуальные корректировки и наступила пора их учесть. Поясняю.

Известный советский геометр Каган В. Ф. о доказательстве одной из теорем геометрии Киселёва в 1904 году писал [7, с. 32]: «Это не слабое доказательство, здесь нет и следа доказательства, здесь есть только одна интуиция, есть только то, что древний писатель выразил одним словом — «смотри!».

У Кагана, критиковавшего доказательства в геометрии Киселёва, в свою очередь встречается: *«Совершенно ясно, что два пространства, сходственные с третьим, сходственны между собой»* [7, с. 551], но высокий уровень требований к понятию «строгость доказательств» он предъявляет и к себе — на с. 553 пишет: «конечная цель в настоящем (его, Кагана) сочинении достигнута столь же мало, как и в других сочинениях, имеющих ту же задачу. Рядом с основными терминами . . . мы употребляли много других..., которым несомненно присваивается определённое значение, нами не формулированное... Таковы термины: «существует», «различные точки» ... и т. п. Рядом с постулатами, нами формулированными, имеются и постулаты логические, на которых основан весь процесс рассуждений... Наконец, в основе всей нашей системы лежит арифметика; мы принимаем, следовательно, все те постулаты, на которых покоится эта дисциплина, а между тем, как ни глубоко продуманы начала арифметики, эта наука не может считаться обоснованной... ».

Об уязвимости аксиоматических теорий (об осторожном отношении к высказываниям типа «математически строго доказал») свидетельствуют также: история создания Лобачевским Н. И. его геометрии (1829 г.); мнение всемирно известного математика К. Гаусса — «Я часто прихожу к доказательствам, которые убедили бы всякого другого; мне же они не говорят ничего» [7, с. 29]. Наиболее веским оппонентом концепции «пять аксиом и все остальное математически *строго* доказывается» является теорема К. Гёделя о невозможности полной формализации процесса логического вывода (1931 г.).

Но возникает естественный вопрос: «как, в конце-то концов, устанавливать истину, что является главным её критерием (аргументом в последней инстанции)»?

Прямо отвечают на этот вопрос другие всемирно известные авторитеты — математики: Д. Гильберт — «это может решить *только наблюдение и опыт*»

[8, с. 343]; академик СССР А. Д. Александров — «от геометрической наглядности «Начал» Евклида основания геометрии были доведены до наглядности формул... Однако такая формализация, как... было доказано (имеется ввиду упоминавшаяся теорема Гёделя), ... не могла привести к окончательному доказательству непротиворечивости геометрии», «Что значит «правильное логическое рассуждение»? Если рассуждение к чему-то относится, то его можно *проверить по результату*» [9, с. 269 и 280].

Уже было сказано об отсутствии количественного единства в высечиваемых началах динамики различными авторами: Жуковский — 3, Никитин — 4, Геронимус — 5. Но может быть это временно вошедшая в теоретическую механику досадная некорректность, которую если постараться коллективно, то можно исправить? Нет! Дело не в некорректности отдельного автора. Эта же картина наблюдается и в геометрии, т. е. и геометрия — это не некая, единая во всех учебных заведениях, система изложения общепризнанных геометрических фактов. Поясняю. В ушедшем столетии в школах изучали прекрасный курс элементарной геометрии Киселёва; он базировался всего на 3-х высеченных аксиомах. Но раньше были «Начала» Евклида (написаны примерно 2300 лет назад); геометрия Евклида покоится на 14 началах. Известно много учебников с названием «Основания геометрии». У Гильберта Д. (1899 г.; переведены на русский в 1948 г.) они базируются на 19 аксиомах, у Кагана В. Ф. (1904 г.) — на 10-ти, у Леллон-Феррана Ж. (1985 г., перевод — 1989 г.) — на 12-ти, у Александрова А. Д. (1987 г.) — на 17-ти. Известны также «Основания геометрии» Костина В. И. (1948), Чистякова В. Д. (1961), Трайнина Я. Л. (1961), Погорелова А. В. (1968) и других; но они лишь расширяют разнообразие различающихся аксиоматических комплексов.

Итак, в теоретической механике не следует в погоне за эфемерной математической строгостью насыщать изложения вопросов различными многократно повторяемыми неоригинальными математическими длиннотами. Большой акцент следует делать на инженерно-физическую и практическую сущность излагаемого.

Перехожу ко второму резерву существенного повышения качества учебников по теоретической механике. Это системы высечиваемых авторами начал (аксиом, понятий).

Я уже говорил о сложностях, которые пришлось преодолевать Жуковскому, двигавшемуся при построении теории от закона инерции, принятого за начало, к основному закону динамики, рассматривавшемуся им в качестве теоремы. И слава Богу, что сейчас почти все авторы учебников по теоретической механике за начало принимают основной закон динамики!

Но сегодня возникает подобный вопрос (среди ряда других): зачем нужна та система высечиваемых аксиом, которая приводит к 15-страничным изло-

жениям теории пар сил, в то время когда есть существенно более рациональные системы начал?

Второй резерв существенного повышения качества учебников по теоретической механике можно сформулировать так: «Для построения теоретической механики имеются существенно более рациональные системы высечиваемых аксиом. На них и надо переходить».

И, наконец, о 3-м существенном резерве повышения качества учебников по теоретической механике.

При изучении курса студентам важно познать 3–5 десятков опорных фактов теоретической механики — общих законов (о движении центра масс, об изменении количества движения и т. д.), принципов, общих уравнений и других твёрдо установленных и общепризнанных механических фактов. Но ещё более важной задачей является *познать методы*, позволяющие будущему инженеру уметь, начиная с опорных фактов, получать (находить, открывать, описывать) тысячи и десятки тысяч других конкретно встретившихся ему в практической деятельности механических явлений.

К сожалению, сегодня методология теоретической механики изучается в основном на подсознательном уровне — установка даётся на изучение не серьёзных доказательств (доказательств приемлемости применяемых методов), а игровых — доказательств давно известных и общепризнанных механических фактов.

Но ведь известно, если установка на запоминание предлагаемого материала не дана, то студенты усваивают на 30–40% информации меньше, по сравнению со случаем, когда установка на запоминание дана (см., к примеру, [10]). Таким образом, более правильной видится примерно такая методика изложения курса — цитирую возможный фрагмент: «Начинаем демонстрацию методов, которые позволят теоретическим путём перейти (например) от закона о движении центра масс к не менее известному закону об изменении количества движения».

## Литература

1. Жуковский Н. Е. *Теоретическая механика*. — М., 1909. Ч. 1. — 107 с. и приложения.
2. Жуковский Н. Е. *Теоретическая механика*. — М. -Л.: Оборонгиз, 1939. — 420 с.
3. Никитин Н. Н. *Курс теоретической механики*. — М.: Высшая школа, 1990. — 607 с.
4. Геронимус Я. Л. *Теоретическая механика (очерки об основных положениях)*. — М.: Наука, 1973. — 512 с.
5. Воронков И. М. *Курс теоретической механики*. — М., 1962. — 596 с.
6. Эйхенвальд А. А. *Теоретическая физика (часть вторая — Общая механика)*. — М. -Л., 1932. — 325 с.

7. Казан В. Ф. *Очерки по геометрии*. — М.: МГУ, 1963. — 572 с.
8. Гильберт Д. *Основания геометрии* / Под редакцией П. К. Рашевского, перевод И. С. Градштейна. — М.-Л.: ОГИЗ, 1948. — 491 с.
9. Александров А. Д. *Основания геометрии*. — М.: Наука, 1987. — 290 с.
10. Зинченко П. И. *Непроизвольное запоминание*. — М.: Наука, 1961. — 562 с.

УДК 378. 4

## **РЕЙТИНГ-КОНТРОЛЬ НА КАФЕДРЕ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»**

**Д. М. Макаревич, М. Е. Лустенков**

Система рейтинг-контроля, разработанная на кафедре «Теоретическая механика» Могилевского машиностроительного института (с 2000 года — Могилевский государственный технический университет), предназначена помочь студентам равномерно распределять учебную нагрузку в течение семестра и предоставляет возможность студентам получить оценку по текущей успеваемости, без сдачи экзамена в сессию. Система рейтинг-контроля была введена в учебный процесс по инициативе заведующего кафедрой, профессора Р. М. Игнатищева в 1992 году, прошла успешную апробацию и совершенствуется уже более десятка лет. Об успешности этой системы говорит то, что подобные методики постепенно приняли на вооружение другие кафедры университета. В 1994 году принято к использованию в учебном процессе положение о теоремрейтинге ММИ. Проводится популяризация системы рейтинг-контроля и за пределами нашего вуза. Преподаватели кафедры теоретической механики выступают на конференциях и методических семинарах [1]. В качестве эксперимента рейтинговая система оценки знаний введена с 2001 года на факультете журналистики Белорусского государственного университета.

Преимущества рейтинг-контроля для студентов очевидны. Во-первых, возможно избежание стрессовых ситуаций и элемента случайности во время экзамена, во-вторых, студенты получают дополнительно несколько дней в сессию на более качественную подготовку к следующему экзамену. С другой стороны повышается активность студентов на практических занятиях, стимулируется самостоятельная работа, повышается качество обучения. Необходимо также отметить и организационно-воспитательный момент. С системой рейтинг-контроля студенты знакомятся на первом практическом занятии.

Количество отводимых часов на изучение теоретической механики в МГТУ по специальностям приведено в табл. 1.

Таблица 1

Специальность	Лекции	Практические занятия
ТМ, СП, АТ, АХ, ПДМ	90	90
САД	72	36
ПГС	72	54
ЭП, ПС	36	36

Нужно отметить, что в процессе использования новой системы оценки знаний студентов инициатива преподавательского состава всячески поощряется. Каждый лектор придерживается общей методики оценки знаний, однако в пределах специальностей возможны некоторые дополнения и совершенствования. Эти дополнения обсуждаются лектором и преподавателями ведущими практические занятия и утверждаются на заседаниях кафедры. Например, система рейтинг-контроля для специальностей АТ-АХ заключается в следующем.

В начале каждого практического занятия преподаватель проверяет наличие конспекта лекции, предшествовавшей практическому занятию: наличие конспекта — 2 балла, лекция законспектирована не полностью — 1 балл, отсутствие конспекта — 0 баллов (вместо проверки наличия конспекта возможен блиц-опрос по контрольным вопросам к практическому занятию). Задачи на практических занятиях решаются из сборника [2], как правило для всех специальностей.

За правильное самостоятельное решение задачи, предлагаемой преподавателем на практическом занятии, студенту начисляется 2 балла, за решение задачи с некоторыми подсказками — 1 балл, пассивное присутствие на практическом занятии — 0 баллов. Если студент не успевает выйти к доске и решить задачу, он может решить одну из задач, предлагаемых данными методическими указаниями к практическому занятию, в течение недели после него показать верное решение преподавателю (на консультации) и получить 2 балла.

В течение семестра студенты выполняют определенное количество контрольных работ, предусмотренное рабочими программами соответствующих специальностей. Правильное решение всех задач одной контрольной — 20 баллов (если в контрольной работе 5 задач, правильное решение каждой оценивается 4 баллами, если в контрольной работе 4 задачи — правильное решение каждой — 5 баллов). Задачи составляются на основе сборника [3] или аналогичной трудности, на контрольную работу отводится от 30 до 45 минут.

В течение каждого из двух семестров обучения (для специальностей ЭП и ПС в течение одного семестра) студенты выполняют определенное количество индивидуальных заданий, разработанных на кафедре или составленных на основе сборника [4]. Каждое правильно выполненное индивидуальное задание, сданное в срок и защищенное на консультации, оценивается 10 баллами.

Для сдачи каждого индивидуального задания в срок отводится определенная неделя. Рассмотрим сроки сдачи индивидуальных заданий на примере рабочей программы для специальностей АТ и АХ во втором учебном семестре (см. табл. 2).

Таблица 2

№ задания	Срок сдачи задания
Задание № 1	Неделя 8-го практического занятия
Задание №2	Неделя 12-го практического занятия
Задание №3	Неделя 18-го практического занятия
Задание № 4	Неделя 21-го практического занятия
Задание № 5	Неделя 24-го практического занятия

Если студент сдает индивидуальное задание позже, на следующей неделе, он получает за него 8 баллов, на две недели позже — 6 баллов и т. д. За задание, сданное досрочно, студент получает 12 баллов. Индивидуальные задания защищаются на консультациях или в другое, оговоренное преподавателем время.

В течение семестра лектор проводит два коллоквиума (контрольных по теории), которые оцениваются максимум по 20 баллов. Результаты коллоквиумов лектор передает преподавателям, ведущим практику, которые в конце семестра подсчитывают итоговый рейтинг.

Итоговый рейтинг в процентах подсчитывается следующим образом: сумма баллов, фактически набранных студентом, делится на сумму баллов, которую теоретически возможно было набрать. Результат умножается на 100. В системе рейтинг-контроля предусмотрены принципы поощрения и наказания. В сумме теоретически возможных баллов каждое индивидуальное задание учитывается 10 баллами. Досрочно сданное задание позволяет получить 12 баллов в числителе при 10 в знаменателе и компенсировать отставание в других областях.

Если студент набрал 90-100%, он претендует на оценку «отлично». Эта оценка ему выставляется без сдачи экзамена, если студент участвует в университетской олимпиаде по теоретической механике, которая проводится в конце семестра и подтверждает свои знания, набрав на олимпиаде оговоренное, минимально необходимое число баллов. Если студент не участвует в олимпиаде, или участвует и не набирает там нужное количество баллов, ему выставляется оценка «хорошо» без сдачи экзамена. При этом студент может пойти на экзамен и попытаться получить оценку «отлично». Оценка «хорошо» на экзамене ему гарантируется.

Если студент набрал 80-90%, ему выставляется оценка «хорошо» вне зависимости от участия в олимпиаде и ее результатов. Студент может прийти на экзамен, в этом случае оценка «хорошо» ему гарантирована.

Оценка «удовлетворительно» по результатам рейтинг-контроля не выставляется.

В системе рейтинг-контроля предусмотрено проведение реабилитационных мероприятий: повторное решение неудачно выполненных контрольных работ и т. д.

Как показывает практика, около 90% студентов проходят контрольные мероприятия в срок, из них успешно (получают досрочно оценки «хорошо» и «отлично») — 35–40%.

## Литература

1. *Игнатищев Р. М. Рейтинг-комплексная методическая система «Теормех-МГТУ» / Р. М. Игнатищев, Н. А. Леванович, Е. А. Иванова // Проблемы и пути развития высшего технического образования: Материалы Республиканской науч. — метод. Конф. Минск, 15–16 мая 2001 г. : В 2 ч. Ч. 1. — Мн. : БГУИР, 2001. — 170 с.*

2. *Меццерский И. В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. — М.: Высш. шк., 1986. — 460 с.*

3. *Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для техн. вузов / А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон и др.; Под ред. А. А. Яблонского. — М.: Высш. шк., 1985 г. — 367с., ил.*

4. *Сборник коротких задач по теоретической механике: Учеб. пособие для вузов / О. Э. Кеппе, Я. А. Виба, О. П. Гранис и др. ; Под. ред. О. Э. Кеппе. — М.: Высш. шк., 1989. — 368 с.: ил.*

УДК 001.5: 531

## О ТЕОРМЕХРЕЙТИНГЕ

### **Р. М. Игнатищев**

Одной из проблем высшего образования является обеспечение ритмичной работы студентов на протяжении семестра. Что такая проблема имеет место, в определённой степени свидетельствуют слова одной из популярных песен — «От сессии до сессии живут студенты весело».

Налаживание ритмичной работы студентов в течение семестра позволяет увеличить суммарное число часов, затрачиваемое ими на самостоятельную работу над учебным предметом и, поэтому, при прочих равных условиях, *повышает качество его усвоения.*

Увеличение часов на самостоятельное изучение предмета происходит за счёт уменьшения излишков времени студентов на свободное ими времяпреп-



ровождение, что, в свою очередь, *снижает количество различного рода возможных хулиганских проявлений.*

Решить проблему обеспечения ритмичной работы студентов на протяжении семестра позволяет использование методических систем, подобных «Рейтинг-комплексной методической системы МГТУ».

Система оказалась жизненной по той причине, что в её использовании заинтересованы одновременно и студенты, и администрация. Вот, в частности, что писалось на с.4 газеты МГТУ «Параллель» 7.03.2001 г.: «22 февраля профсоюзный комитет студентов провёл семинар профгруппоргов 1 курса. ...принято решение ходатайствовать ... о широком применении рейтинговых систем».

Главным, привлекающим в методической системе «Теормех — МГТУ», является предоставление возможности студентам досрочно получить по предмету высокую оценку, причём сдавая его по частям (относительно малыми порциями) и, поэтому, не подвергая себя стрессовым ситуациям, подобных тем, которые случаются на традиционных экзаменационных сессиях.

«Рейтинг-комплексная методическая система МГТУ» даёт возможность удовлетворять и ряду других желаний студентов: иметь большее число каникулярных дней (что особенно интересно для проживающих в общежитиях); увеличивать число дней на подготовку к сдаче того или иного другого, «трудного» для них, экзамена (с целью повышения личной успеваемости); подстраховывать себя от больших неприятностей, приходящих к ним в случае появления того или иного возможного учебного срыва (хотят иметь, на всякий случай, резерв времени для своевременной, не выходящей за рамки длительности семестра, ликвидации той или иной непредвиденно возникшей у них учебной задолженности).

Опрос показал: к подобным методическим системам положительно относятся и деканы.

Описывая сущность «Теормех — МГТУ» будем иметь ввиду курс на 180 часов (по 90 часов во 2-м и 3-м семестрах), изучение которого в обоих семестрах для студента заканчивается экзаменационной оценкой.

При первой встрече со студентами лектор объявляет примерно следующее: «Проводимые по нашему предмету контрольные мероприятия посилены всем студентам. Причём, большинство из вас, которые будут добросовестно и постоянно выполнять наши учебные задания, будут иметь отметку не ниже, чем «хорошо». В целом же прошедшим все контрольные мероприятия я обещаю без дополнительных вопросов поставить отметку «отлично», или «хорошо», или «удовлетворительно». «Отлично», и для желающих «хорошо», могут быть поставлены за 1-5 дней до начала экзаменационной сессии, есте-

ственно при разрешении деканата (которое, как правило, даётся). Те же студенты, которые по результатам контрольных мероприятий смогут выйти лишь на отметку «удовлетворительно», должны доучить предмет и прийти на экзамен в обязательном порядке. Буду надеяться, что такие студенты сдадут экзамен на «хорошо», быть может и на «отлично»; в наихудшем случае уйдут с экзамена с оценкой «удовлетворительно».

Контрольные мероприятия по курсу проводятся лектором и ведущими практические занятия.

Лекционные потоки по 60–100 человек. В каждом семестре лектор проводит по 3 блиц-контрольные работы (по 10 минут чистого времени). С целью подготовки к проведению контрольного мероприятия лектор вывешивает на кафедральной доске вопросы и ответы к ним. В частности, во втором семестре: «Введение» — 50 вопросов, «Статика» — 117, «Кинематика» — 92. Вопросы построены так, чтобы ответить на них можно было коротко (да, нет; но не более, чем в две строчки).

Студент, имеющий список вопросов с собственноручными письменными ответами на них, получает оценку «3» и допуск к написанию блиц-контрольной работы (с правом на получение более высокой отметки — от 3-х до 4,5, с дискретностью в 0,1).

Для получения оценки в диапазоне от 3-х до 4,5, за 15 минут до окончания занятия лектор в обмен на имеющийся у студента список вопросов с собственноручными письменными ответами на них, раздаёт карты с 6 вопросами в каждой. После окончания занятия лектор собирает листки с ответами и за счёт времени, отводимого на консультации и экзамены оценивает эти ответы отметками 3,0; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8 и т.д. до 4,5. С отметками четырёхбалльной системы эти оценки соотносятся так: «3 = удовлетворительно»; «4 = хорошо»; «4,5 = отлично».

Но почему «4,5», а не «5»? Потому что неправильно ориентировать студента на завоевание самой высокой отметки относительно лёгким способом. Для получения отметки «отлично» мы ориентируем студента на участие (в конце семестра) во внутриуниверситетской олимпиаде по теоретической механике.

Ведущими практические занятия учитывается 7 факторов (см. прилагаемую «Карту»):

1. На 1-м занятии — входной контроль — 5 простых задач из ранее изучавшихся математических разделов; 2 балла за каждую правильно решённую задачу;

2. Присутствие на практическом занятии — за каждый час пары 1 балл (т. е. 2, 1, или 0 баллов);

3. Активность (решение у доски и правильные подсказки решающему — 2 балла; подсказки «невпопад» — 1; пассивность — 0 баллов);



4. Конспект лекции (или учебника) к теме занятия; за качественно законспектированный материал — 2 балла; плохо законспектированный — 1; отсутствие конспекта — 0 баллов;

5. Индивидуальные задания; при досрочной сдаче и защите — 12 баллов; за каждое своевременно защищённое — 10; при недельной просрочке — 8 баллов; при двухнедельной, и более, просрочке — 6 баллов;

6. За показ (без опроса)\* решения 1 задачи из сб. Мещерского — 1 балл; \* — при защите соответствующего индивидуального задания;

7. 30-минутные контрольные работы (4 в семестре); в каждой по 5 задач из сб. Кепе; за каждую правильно решённую — 4 балла.

Рейтинг студента — это выраженное в процентах частное от деления набранного количества баллов на максимальное количество баллов, которое студент мог набрать. Рейтинги переводятся в соответствующие оценки: 70 — это «3»; 80 — «4»; 90–100 — «4,5».

За 5 дней до начала сессии лектор определяет среднеарифметическое по проводившимся на лекциях блиц-контрольным работам и по результатам, представленных ему ведущими практические занятия. Если вычисленное среднее значение превышает 4,2, студент допускается к олимпиаде, которая сводится к решению 2-х задач из сб. Мещерского (тех задач, которые рекомендованы методическими указаниями) и двух экспромтных для студента задач.

Студенту, успешно прошедшему олимпиаду, досрочно выставляется оценка «отлично».

Для остальных студентов: если средняя превышает 3,8, то гарантируется экзаменационная оценка «хорошо»; если меньше 3,8 — то без дополнительного опроса (на экзамене) гарантируется лишь оценка «удовлетворительно».

Опыт показал, студенты охотно принимают рейтинг-комплексную методическую систему и 60–70 % списочного их состава становятся до начала экзаменационной сессии хорошистами и отличниками (отличников примерно 10%).

## ТЕХНОЛОГИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ НА КАФЕДРЕ ТМ И ТММ ВГУ

**А. В. Локтионов**

Основными видами самостоятельной работы студентов являются: изучение теоретического материала, самостоятельное освоение некоторых вопросов учебной программы, решение задач на практических занятиях, проведение контрольных работ, консультации, подготовка к участию в олимпиадах и научно-технических конференциях, навыки выполнения научно-исследовательской работы. Возбуждение всех видов памяти при проведении, например, экзамена также является составной частью самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа студентов является основой процесса формирования будущего специалиста. Поэтому этот вид деятельности находит свое отражение в общеобразовательных стандартах для различных специальностей, где на самостоятельную работу предусмотрено до 30% учебного времени. Однако, в виду существенного сокращения числа часов на изучение курса теоретической механики особенно актуальной является правильная организация самостоятельной работы студентов.

Абстрактный уровень общенаучных дисциплин накладывает негативный отпечаток на усвоение курсов, приводит студентов к мнению о ненужности их изучения. Выход из создавшегося положения видится в проникновении элементов научных исследований в учебный процесс, в привлечении примеров практического применения методов изучаемых дисциплин.

Использование матричного исчисления способствует более эффективному решению задач в курсе теоретической механики, развитию творческого мышления при использовании ЭВМ для решения практических задач. Установлено, что при решении плоских задач и различных видах нагружения конструкции (пары сил, момент заделки) необходимо математико-логическое обоснование введения некоторых коэффициентов в матрицы, каждая из которых применима только для определенного вида нагрузки.

Разработан единый алгоритм для всех возможных случаев равновесия тел под действием приложенных сил. Предложенная матричная методика расчета произвольной плоской системы сил позволяет контролировать правильность составления и решения системы уравнений и исключает необходимость составления проверочного уравнения. Наиболее удобным разделом теоретической механики для применения ЭВМ при решении задач и расчете курсовых

работ является статика. Студент, как обычно, составляет необходимые уравнения, а реализует их решения на ЭВМ. При этом использование компьютера не заслоняет методологию теоретической механики и методов ее исследования. Студент освобождается от вычислений, а их выполнение и контроль переложено на ЭВМ. При выполнении расчетов студенты, а основном работают как пользователи ЭВМ.

При выполнении курсовой работы по разделу «Кинематика точки» возможности ЭВМ используются в большей степени. Здесь результаты расчета выносятся в графическом виде. ЭВМ используется для построения не только траектории точки, но и векторов скорости, ускорения, нормальной и тангенциальной составляющих вектора ускорения. Студентам необходимо проверить результаты ручного счета, используя изображения векторов скорости и ускорения.

В целях текущего контроля учебной работы студентов проводятся аудиторские контрольные работы. Издано учебное пособие «Сборник заданий для контрольных работ». В сборнике помещены не только контрольные работы, но и примеры их выполнения. Основываясь на этих примерах, студенты могут самостоятельно выполнять задания из сборника. В него включены 529 задач, в том числе по статике — 83, по кинематике — 114, по динамике — 332. Задания разработаны с учетом бюджета студенческого времени, не приводят к их перегрузке и недостаточному усвоению материала.

Для активизации обучения в Витебском государственном технологическом университете используются также тестовый контроль и программированные задачи до всем разделам курса теоретической механики. Разработаны соответствующие методические указания, а также тестовые программы по разделу «Статика», позволяющие проконтролировать уровень теоретических знаний студента с помощью ЭВМ. На каждый вопрос студенту предлагается три варианта ответа, из которых он должен выбрать правильный. По количеству правильных ответов компьютер выставляет студенту оценку. Данные тестовые программы внедрены в учебный процесс.

В настоящее время разрабатывается контролирующие-обучающая программа по теме «Плоскопараллельное движение твердого тела». В нее войдут теоретический материал, сведения по методике решения задач, проверка решения расчетной работы и контрольные вопросы (тест) для ее защиты. В процессе работы пользователь выбирает необходимый раздел программы. При проверке расчетной работы студент, введя номер варианта и результаты вычислений, проверяет правильность решения задачи. При необходимости студент может обратиться в раздел «Методика решения задач», который содержит основные используемые формулы, и примеры выполнения задач. Для защиты расчетной работы используется тест, содержащий вопросы по данной

теме. В разделе «Программы по теории вопроса» пользователь находит ответы на предлагаемый тест. По результатам проведенной работы можно сделать следующие выводы:

- тестирование является прогрессивной формой контроля уровня знаний студента, особенно на промежуточном этапе;
- использование тестовых программ позволяет охватить широкий круг теоретических и практических вопросов, ускорить процесс оценки уровня знаний и повысить его объективность;
- студент более спокойно воспринимает результаты тестирования — ведь его знания оценивает не преподаватель, а беспристрастный компьютер;
- тестирование должно применяться вместе с традиционными методами контроля и оценки знаний;
- необходимо разработать тестовые программы различного уровня сложности по всем разделам курса «теоретическая механика» для оценки знаний теоретическом и практического материала студентами дневной и заочной форм обучения.

Правильная организация самостоятельной работы позволяет компенсировать дефицит времени аудиторных занятий, повысить успеваемость и облегчает усвоение общетехнических и специальных дисциплин. При этом следует отметить, что плохо проведенные занятия могут породить отрицательное отношение к предмету. Квалифицированные консультации должны проводиться в сочетании с хорошо продуманным контролем изучаемой дисциплины. Использование современной технологии обучения, в частности, применение прикладных программ ЭВМ значительно повышает эффективность самостоятельной работы студентов и качество подготовки выпускников вузов.

Таким образом, применение различных форм и видов самостоятельной работы студентов, а также своевременный контроль способствует повышению эффективности учебно-воспитательного процесса и создает прочный фундамент в сфере их дальнейшей профессиональной деятельности.

*УДК 15 (075.8)*

## **НЕКОТОРЫЕ ПУТИ АКТИВИЗАЦИИ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ**

***П. П. Анципорович, И. И. Лобач***

Разумно организованное обучение и воспитание начинается не с передачи «готовых» знаний, умений и навыков, а с создания условий происхождения

человеческих способностей, то есть с постановки тех проблемных задач, в процессе решения которых эти способности формируются, развиваются, а эти знания, умения и навыки усваиваются.

Идеи активизации высказывались на протяжении всего становления и развития психологии и педагогики. Прежде всего, обращает на себя внимание натуралистическая направленность идей активизации, конкретизирующаяся, в частности, в принципе природосообразности обучения и воспитания. Согласно данному принципу, источники творческой активности человека укоренены в его биологической природе. Педагог, опираясь на природные факторы психического развития, должен с максимальной осторожностью и деликатностью ввести обучаемого в такую ситуацию, где его творческие возможности могут наиболее полно проявиться. Отсюда следует, что нужно устранить все то, что мешает нормальному естественному ходу развития, и сообразовать логику и технологию обучения с этим ходом.

Сущность традиционного обучения состоит в том, что в его рамках логика учебного предмета от и до задает траекторию формирования от природы сопротивляющемуся уму обучаемого.

Итак, гарантией раскрытия творческих возможностей и активизации в обучении является сообразование внешних педагогических воздействий с внутренними, природными свойствами обучаемого.

Интенсивность учебной деятельности в полной мере зависит от мотивов обучения студентов. Усиление учебной мотивации следует рассматривать как важный способ повышения эффективности обучения. Сильный мотив существенно влияет на цель деятельности, учение. Мотив как бы подкрепляет цель, позволяет руководствоваться ею более упорно и настойчиво. Как известно, мотивация обучаемого определяется подробностями и интересами к будущей деятельности, и как следствие — проблема выбора профессии.

Интерес к обучению значительно возрастает, если педагог обстоятельно раскрывает практическую значимость учебного материала, связь его с актуальными проблемами современности (если это позволяет учебный материал). Значительно активизируют обучение примеры, связанные с различными областями социальной жизни, показом новых технологий, изобретений, новостями науки и техники.

Однако в процессе обучения нельзя уповать только на интерес. Очень важно одновременно формировать мышление, волю, долг и чувство ответственности студентов.

Творческий процесс самостоятельного поиска новых знаний, построения новых способов действия всегда носит предельно субъективный, личный характер.



Возникновение концепции проблемного обучения знаменует собой новый этап в развитии дидактики и психологии обучения. Проблемную ситуацию в сознании студента создает центральное противоречие предмета усвоения, из которого выводится вся подлежащая усвоению и применению конкретная система знаний. Учебный процесс строится как развертывание и конкретизация исходного противоречия. Поэтому проблемное обучение является теорией развивающего обучения. Эта теория сознательно ставит своей целью использование собственно психологических закономерностей мышления для управления усвоения знаний. Мышление обычно начинается с проблемы, а там где нет проблемной ситуации, нет и мышления в строгом смысле слова. Для того студента, который не привык мыслить самостоятельно, не существует и проблем, отсутствует познавательная потребность, побуждающая мыслительную активность человека.

Мощным средством активизации познавательного интереса являются учебно-познавательные игры, учебные дискуссии. Именно эффект спора, познавательного конфликта служит ценным средством стимулирования деятельности студентов, воспитания их воли, развития мышления. Говоря о воспитании долга и ответственности, следует помнить, что не нотации, наставления и запугивание вызывают действительные мотивы обучения, а подлинная убежденность, весомость и доходчивость аргументов. Между тем следует признать и тот факт, что в последние годы обнаруживается снижение интереса у студентов к обучению.

Для активизации деятельности студентов большое значение имеет постановка целей обучения — образовательные, воспитательные и цели развития. Любая цель подразделяется на более конкретные задачи предмета в целом, цели раздела, цели темы.

Среди способов интенсификации обучения особое значение имеет применение методов, форм, средств, приемов активизирующих учебно-познавательную деятельность студентов, стимулирующих их обучение. Важную роль в этом играют проблемно-поисковые методы, учебные беседы, дискуссии, исследовательские опыты, самостоятельная работа студентов знаково-контекстное обучение, алгоритмизация и т.д.

Внедрение компьютерных технологий обучения открывает принципиально новые возможности для управления учебно-познавательной деятельностью. Они позволяют значительно увеличить объем усваиваемой студентами информации благодаря тому, что она подается в более обобщенном, систематизированном виде, причем не только в статике, а и в динамике.

Кафедра «Теория механизмов и машин» БНТУ имеет достаточный опыт использования вычислительной техники в инженерной подготовке, что позво-

лило приступить к целенаправленной разработке компьютерных технологий обучения. Для формирования логичного и достаточно наглядного образа предмета был четко структурирован курс теории механизмов и машин, исключены из рассмотрения ранее широко применяемые устаревшие графо-аналитические методы исследований, выполнены научные исследования по разработке математических моделей механизмов и машин. Появилась возможность реализации аналитических методов проектирования и исследования.

В настоящее время ведется разработка программного обеспечения для организации всех видов учебной работы (обучение и контроль по разделам курса, лабораторные работы, курсовое проектирование).

В курсовом проекте выполняется динамическое исследование машин и входящих в их состав механизмов, для чего студент формирует динамическую модель машины, самостоятельно разрабатывает алгоритмы расчетов, по которым производятся вычисления на компьютере. Сценарии программ построены таким образом, что допускается поэтапный ввод исходных данных, позволяющий анализировать влияние их на динамические характеристики машин в интерактивном режиме. Допускается многовариантное выполнение расчетов с целью оптимизации выходных параметров. Хотя деятельность студента направлена на математический объект, за счет развитого диалога психологически вызывается ощущение непосредственного взаимодействия с этим объектом. Процесс получения знаний при работе с компьютером не сводится только к получению расчетов. Возможность более глубокого понимания физических явлений достигается построением графических зависимостей параметров и изображений объектов.

Наряду со значительным ускорением расчетов и повышением их достоверности, улучшением методики преподавания важным при использовании ЭВМ является и чисто психологический фактор — современный студент вряд ли будет серьезно относиться к изучаемому курсу, если в учебном процессе не будет использована та современная техника, информацию о которой он получает ежедневно по разным каналам. Благодаря заинтересованности обучающихся, курсовое проектирование стало проходить более ритмично.

Важным направлением компьютеризации является создание обучающих и контролирующих программ, при разработке которых необходимо использовать в первую очередь свойства современного компьютера — быстрдействие в расчетах, цветную графику с высокой разрешающей способностью. Появилась возможность создания на экране динамически изменяющихся объектов, например, демонстрация движения механизмов, работы машин, систем управления машин и т. п. Это можно показать на примере раздела «Строение, геометрия и кинематика механизмов». Поскольку обучение в основном происходит в аудиториях, где схемы механизмов вычерчиваются на

доске, то есть статично, а в лабораторном цикле не имеется возможности часто обращаться к подвижным моделям механизмов (или они отсутствуют), не удастся добиться достаточного понимания движения отдельных частей механизмов друг относительно друга. Лабораторная база многих учебных заведений бедна, поэтому продемонстрировать некоторые инженерные разработки в области проектирования схем механизмов невозможно. Названные трудности в значительной степени можно снять, используя компьютерную графику, «оживляющую» схемы механизмов.

На кафедре разработана контролирующая программа по структуре механизмов. Работа с ней, как правило, увлекает студентов и вызывает живой интерес. Студенты без принуждения со стороны преподавателя стараются разобраться в теоретическом материале и получить более высокую рейтинговую оценку.

Внедрение ЭВМ в учебный процесс позволило значительно повысить научность курса и привести его в соответствие с современным уровнем науки и техники.

*УДК 531.01*

## **СОЗДАНИЕ ПРОБЛЕМНЫХ СИТУАЦИЙ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

***С. С. Шапилевич, Е. И. Хижняк***

В традиционном обучении преимущественно используются разъяснение, иллюстрации, описание, приведение примеров, а в проблемном — всесторонний анализ явления, научный поиск истины.

Проблемное обучение опирается на логику последовательно моделируемых проблемных ситуаций путем постановки проблемных вопросов или предъявления проблемных задач. Необходимым условием создания проблемной ситуации является наличие противоречия и мотивации на каком-либо этапе обучения. Любые изменения во внешней и внутренней ситуации обучаемого рождает конфликт (противоречие) между тем, что было, и тем, что есть. Когда этот конфликт налицо, обучаемый стремится занять состояние динамического равновесия, восстановить баланс между тем, что он воспринимает, ценит, и тем, что он знает, делает.

Проблемный вопрос должен содержать в себе диалектическое противоречие и требует для его разрешения не воспроизведения известных знаний, а размышления, сравнения, поиска, приобретения и применения новых знаний.

Проблемная задача, в отличие от проблемного вопроса, содержит дополнительную вводную информацию и при необходимости — некоторые ориентиры поиска для ее решения.

Понятие «проблемный вопрос» и «проблемная задача» разграничиваются лишь условно, ибо проблемные вопросы могут перерастать в задачи, а задачи — расчленяться на вопросы и подвопросы.

Уровень сложности, характер проблем зависят от подготовки обучаемых, изучаемой темы и других обстоятельств.

Решение проблемных задач, ответ на проблемные вопросы осуществляет преподаватель, прибегая к помощи слушателей, путем организации обмена мнениями. Преподаватель должен не только разрешить противоречие, но и показать логику, методику этого вопроса, продемонстрировать приемы умственной деятельности, исходящие из диалектического метода познания сложных явлений. Это требует значительного времени. Поэтому от преподавателя требуется значительная предварительная работа по отбору содержания учебного материала и подготовке «сценария» занятия.

В самом общем виде это могут быть следующие этапы:

1. Анализ и отбор ключевого материала, который составляет логический костяк занятия.
2. Выбор основных проблем и трансформирования их в проблемные ситуации (не более 4).
3. Продумывание логики и методики разрешения каждой проблемной ситуации.
4. Компановка всего содержания занятия в целостную систему методического обеспечения.
5. «Проигрывание» занятия вслух или «про себя» и отработка методических приемов по активизации внимания и мышления слушателей.
6. Корректировка и окончательная подготовка содержания и методики занятия.

Рассмотрим примеры создания проблемных ситуаций при изучении курса теоретической механики

*Пример I.* Перед введением понятия пары сил ставится вопрос: «Можно ли повернуть тело, находящееся в покое, одной силой?» Пытаясь ответить на него утвердительно, студенты приводят примеры, но преподаватель в каждом из них указывает на наличие второй силы. Это говорит о возникновении одного из элементов проблемной ситуации — **противоречия**. В данном случае это противоречие между тем, как понимает рассматриваемое явление обучаемый, и тем, как его надо понимать. Обычно рассмотрение даже нескольких примеров не убеждает студентов в невозможности поворота неподвижного тела одной силой.

Для создания второго элемента проблемной ситуации — **мотивации** — преподаватель ставит еще один вопрос: «Как легче удержать стержень в горизонтальном положении: если держать его за середину или за конец?» При ответе на этот вопрос обычно никто не сомневается, в том, что стержень останется в горизонтальном положении, если его держать за середину. Всем понятно из практического опыта, что при удержании стержня за конец необходимо противодействовать стремлению стержня, не только упасть, но и повернуться. При изображении схемы приложенных сил в этом случае неизбежно появляется пара сил. После этого можно давать ее определение.

**Пример 2.** При изучении методов динамики механической системы часто рассматривается решение задачи следующего типа. На шкив намотана нить. К ее свободному концу прикреплен груз. Масса шкива  $m_1$ , масса груза  $m_2$ , радиус шкива  $r$ . Определить угловое ускорение шкива, которое он будет иметь при падении груза. Трением пренебречь. Считать массу шкива равномерно распределенной по его ободу.

Для подготовки проблемной ситуации сделаем к условию задачи следующее дополнение: определить также угловое ускорение шкива, которое он будет иметь, если груз убрать, а к нити приложить силу, равную весу груза. Сравнить полученные угловые ускорения.

Так как любая проблемная ситуация включает в себя противоречие, то перед решением задачи соответствующими методами теоретической механики заинтересуемся интуитивным мнением студентов о результатах сравнения искоемых угловых ускорений.

Опыт показывает, что по тем или иным соображениям с высокой степенью вероятности предлагаются все три возможных варианта ответов:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2, \epsilon_1 > \epsilon_2, \epsilon_1 < \epsilon_2,$$

где  $\epsilon_1, \epsilon_2$  — соответственно угловое ускорение шкива при наличии груза и при его отсутствии.

Предложение трех возможных вариантов ответов говорит о наличии одного из элементов проблемной ситуации — **противоречия**. В данном случае это противоречие между тем, как понимает каждый из обучаемых рассматриваемое явление, и тем, как понимают это же явление его товарищи. Стремление предложить верный вариант ответа обеспечивает наличие второго элемента проблемной ситуации — **мотивации**.

При решении задачи методами теоретической механики оказывается, что при наличии груза угловое ускорение шкива определяется равенством

$$\varepsilon_1 = \frac{G}{(m_1 + m_2) \cdot r},$$

а при отсутствии груза — равенством

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{m_1 \cdot r},$$

где  $G$  — вес груза.

Сравнивая результаты, замечаем:  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ . Это следствие того, что при одинаковых ускоряющих силах инертность системы в первом случае больше. Остается похвалить тех, кто предложит третий вариант ответа.

Таким образом, на занятиях проблемного характера слушатели находятся в постоянном процессе с преподавателем и в конечном итоге являются соавторами в решении проблемных задач. Это приводит к следующим результатам:

1. Усвоенные знания являются собственным достоянием слушателей, т.е. в какой-то степени это знания-убеждения.

2. Активно усвоенные знания, глубже запоминаются и легче активизируются (обучающий эффект).

3. Решение проблемных задач выступает своеобразным тренажером в развитии интеллекта (развивающий эффект).

4. Знания, усвоенные активно, более гибки и обладают свойством переноса в другие ситуации (эффект развития творческого мышления).

5. Подобного рода усвоение повышает интерес к усваиваемому содержанию и усиливает профессиональную подготовку (эффект психологической подготовки к будущей деятельности).

УДК 531.2.3.114:371.3

## **ПРАКТИЧЕСКИЕ, НАУЧНЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ВВЕДЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО СИНТЕЗА И ДРУГИХ ПРОГРЕССИВНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ОБУЧЕНИЯ В СТАТИКУ, КИНЕМАТИКУ И ДИНАМИКУ**

**Ю.А. Гурвич**

*Практические предпосылки.* Хорошо известно, что все задачи проектирования машин, их узлов и механизмов всегда многокритериальны и пред-

ставляют собой задачи многокритериального синтеза. Однако, многие задачи проектирования машин и их узлов (например, задачи проектирования управляемых осей и мостов), несмотря на многокритериальность, до сих пор рассматриваются как однокритериальные. При этом оптимизируют лишь несколько параметров математического описания при каком-то одном фиксированном значении скорости машины, поочередно варьируя величину одного из параметров при неизменных значениях остальных. Естественно, что все это не позволяет на стадии проектирования машин создать конструкцию с заранее заданными свойствами (выходными характеристиками).

Правда, в последнее время для ускорения разработки и постановки на производство новых поколений высокоэффективных машин на колесном ходу, конструкторы стали успешно применять различные по сложности и объему расчетно-методические аппараты (РМА), которые с помощью ЭВМ еще на стадии проектирования помогают создавать машины с заранее заданными выходными характеристиками соответствующими предъявляемым требованиям. В частности, один из таких РМА уже частично используется в конструкторских бюро заводов Республики Беларусь при создании новых моделей сельскохозяйственной техники, автомобилей и автобусов [1–5]. В результате новые модели будут обладать улучшенными выходными характеристиками (улучшенной совокупностью критериев управляемости, устойчивости, стабилизации и безопасности движения, плавности хода и т.д.) во всем частотном и скоростном диапазонах движения. Это позволит существенно сократить сроки и снизить затраты на создание перспективных моделей машин, повысить их качество, а также сравнить существующие конструкции с полученными расчетным путем оптимальными моделями и наметить пути их улучшения.

**Научные предпосылки.** При создании различных по сложности и объему РМА, как правило, используют специальные методы, заимствованные из разных наук:

- механики (теоретической и аналитической механики, механики негोलомных систем, теории устойчивости движения, теории качения колеса, теории автоматического регулирования, теории машин и механизмов и т.д.);
- математического моделирования;
- многокритериального синтеза, множество Парето;
- теории идентификации;
- теории вероятности и математической статистики;
- теории приближения функций и многих других теорий.

Отметим, что РМА представляет собой совокупность специальных методов, взятых из разных наук «сшитых» в единое целое и выполненный в виде новых методик, алгоритмов и программ выбора параметров машин на стадии проекти-

рования, удовлетворяющий сразу нескольким критериям, причем во всем скоростном диапазоне движения этих машин (многокритериальный синтез).

Таким образом, создание РМА представляет собой весьма сложный и трудоемкий процесс, реализует который, как правило, целый коллектив. Внедрение РМА в конструкторские бюро заводов также представляет собой сложный и трудоемкий процесс, из-за больших затрат времени:

- на адаптацию РМА в конструкторские бюро заводов (практически, для каждой новой модели машины необходимо создавать свой РМА);
- на обучение конструкторов использованию РМА на практике (как правило, большинство конструкторов этим сложным механико-математическим методом, используемым в РМА, в Вузе не обучали).

**Методические предпосылки.** В самом деле, кроме специальностей «САПР» и «Прикладная математика» (да и то на 4-м — 5-м курсах) методам многокритериального синтеза по другим дисциплинам студентов БГПА, как правило, не обучают.

Например в курсах теоретической механики, читаемых студентам различных технических специальностей и также в рекомендуемой им литературе, отсутствует изложение методик решения задач синтеза, а присутствует лишь описание методик решения задач анализа, в которых зачастую ничего не говорится о методиках рационального решения. Следовательно, произошел разрыв между знаниями студентов, полученными в процессе обучения в Вузе и теми знаниями, которые необходимы им на практике. Это является одной из причин, когда выпускник вуза не может сразу включиться в процесс создания и модернизации машин, так как должен достаточно долго повышать собственную квалификацию.

Приведенные здесь работы автора, направлены на повышение эффективности обучения механике студентов первого и второго курсов и для развития у них навыков, необходимых при проектировании новых машин и технологий за счет введения в разделы механики соответствующих методик, которые апробированы всеми видами его многолетней педагогической деятельности: проведение лабораторных работ по курсу «Испытание трактора» со студентами специализации «Тракторы», практических занятий и индивидуальных работ, чтение лекций, руководство НИРС, являлся консультантом и руководителем дипломных проектов студентов по специальности «Прикладная математика» и «САПР».

### ***Раздел «Статика»***

1. Методика выбора на стадии проектирования «плоской» пары скольжения (втулка-вал) таких ее параметров, при которых обеспечивается заранее заданная величина гарантированного скольжения (оценка величины запаса



скольжения) как для «медленных» движений втулки относительно вала в статике, так и для «быстрых» движений в динамике.

2. Методика выбора на стадии проектирования пространственной пары скольжения «ползун прессы в направляющих» таких ее параметров, при которых обеспечивается заранее заданная величина запаса скольжения в статике и динамике (чеканочные прессы).

По пунктам 1 и 2 готовится методическое пособие, в котором будут описаны: положения статики и динамики, достаточно «тонкий» анализ неравенств, отображающих условия скольжения одного тела по другому, нетрадиционный подход к теме «Трение скольжения». Это пособие будет использовано для выполнения РГР, курсовых и индивидуальных работ.

3. Методика рационального решения задач статики составных конструкций [6–8]. По этому пункту будет подготовлено методическое пособие.

4. Методика одно- и многокритериального синтеза статики составных конструкций [9].

По этому пункту будет подготовлено два методических пособия:

4.1. Комплекс программ для ЭВМ.

4.2. Безмашинный контроль знаний студентов.

#### ***Раздел «Кинематика»***

5. Методика решения нетрадиционных задач анализа кинематики сложного движения точки с использованием методов идентификации и многокритериального выбора:

5.1. Комплекс программ для ЭВМ [10].

5.2. Безмашинный контроль знаний студентов [11,12].

6. Методика синтеза кинематики сложного движения точки [13,14].

По этому пункту подготовлено новое методическое пособие, состоящее из программного комплекса и трех отдельных, различных по сложности частей безмашинного контроля знаний студентов.

#### ***Раздел «Динамика»***

7. Лабораторный практикум по получению на специальной установке статических, стационарных и нестационарных характеристик шин, в том числе амплитудных и фазовых частотных характеристик катящихся шин в функции путевой частоты [15].

Некоторые аспекты этого практикума используются до сих пор в лекционном материале для студентов автотракторного факультета и могут быть использованы при чтении спецкурса, связанного с устойчивостью машин на пневмоколесах.

8. Методика синтеза динамики относительного движения [16].

9. Биомеханика движений фигуриста, совершающего пируэт »Винт», при различных видах момента сопротивления коньку со стороны льда (вязкое трение, сухое трение, одновременное действие вязкого и сухого трения) [17–21].

10. Новые прикладные критерии колебательной и апериодической устойчивости и неустойчивости движения и методика их совместной работы при исследовании устойчивости движения управляемых колес [22].

11. Методика однокритериального выбора параметров различных конструкций рулевых трапеций транспортных средств [5].

12. Методика многокритериального выбора параметров различных конструкций рулевых трапеций транспортных средств (при переменной шкворневой колее или базы машины) [4].

13. Некоторые аспекты влияния угла наклона вала с двумя шарнирами Гука на его концах на движение колес с шинами.

14. Контролирующий и обучающий комплекс программ на «MathCAD 2000 Pro», с помощью которого можно графически исследовать влияние значений параметров дифференциальных уравнений движения управляемых колес с шинами с учетом неголономных связей, балки с колесами, рулевой трапеции, амортизаторов и пружин подвески на все фазовые переменные (поворот колес относительно осей шкворней, поворот балки относительно продольной оси автомобиля, боковое смещение центра пятна контакта колеса, линейная скорость бокового смещения, поворот пятна контакта относительно вертикальной оси и т. д.).

15. Контролирующий и обучающий комплекс программ на «MathCAD 2000 Pro», позволяющий исследовать влияние значений геометрических параметров различных конструкций рулевых трапеций (четырёхзвенных, различных видов шестизвенных и т. д.) на износ шин при повороте машины.

Подчеркнем, что степень применения тех или иных методик в учебном процессе зависит от вида специальности. Например, для специальностей строительного факультета особое внимание в учебном процессе уделяется методикам, обозначенными цифрами 3 и 4, в меньшей степени уделяется внимание методикам 5 и 6. В порядке ознакомления излагается материал пункта 10. Для специальностей автотракторного факультета большее внимание уделяется методикам 1-6 и изложению материала, обозначенного пунктами 10, 11, 13 и т. д.

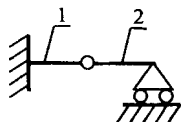
Описанию некоторых из этих методик посвящены следующие доклады: «Синтез статики составных конструкций», «Синтез кинематики и динамики сложного движения точки». Прежде чем приступить к изложению доклада «Синтез статики составных конструкций» необходимо привести описание методики рационального решения задач статики составных конструкций, в осно-

ву которой положен решающий критерий СТ, используемый как и эта методика в синтезе.

### Методика рационального решения задач статики составных конструкций

В литературе по теоретической механике в разделе «Статика» приводится описание двух способов определения реакций опор составных конструкций. При первом способе рассматривается равновесие всей конструкции в целом, а затем — какой-либо отдельной ее части. При втором способе рассматривается равновесие каждой части конструкции отдельно. При этом дается лишь одна рекомендация по их применению: «Целесообразность применения того или иного способа решения задачи зависит от условия конкретной задачи», но ничего не говорится о рациональном решении этой задачи.

Действительно, если решать задачу об определении реакций опор составной конструкции состоящей из двух тел, то возможны шесть вариантов решения:



1	1+2	2	2+1	3	(1+2)+1
4	(1+2)+2	5	1+(1+2)	6	2+(1+2)

где 1, 2 — линейно независимые уравнения равновесия, составленные для первой или второй части конструкции; 1+2 — линейно независимые уравнения равновесия, составленные для первой и второй частей конструкции; (1+2) — линейно независимые уравнения равновесия, составленные для всей конструкции в целом.

Для конструкции, состоящей из трех тел, можно составить 9 линейно независимых уравнений равновесия, приводящих к решению задачи 96 способами. Для конструкций состоящих из четырех тел — вариантов решения уже несколько тысяч! Поэтому вопрос о нахождении рационального решения задач статики составных конструкций является актуальным.

**Критерии.** Решение задачи — рациональное, если реализуются следующие критерии (или критерий). 1. Число линейно независимых уравнений равновесия и количество слагаемых в них нужно сводить к минимуму. 2. Желательно, чтобы в уравнения равновесия моментов сил относительно точки входила одна неизвестная. 3. Желательно после выполнения одной вычислительной процедуры (или нескольких, но не всех) получить численный результат. 4. Работоспособность конструкции.

Введем решающий критерий СТ — степень статической определимости-неопределимости, обладающий в значительной мере свойствами трех крите-

рив  $CT = H - \sum_{i=1}^n Y_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $CT$  — целые числа,  $H$  — суммарное количество неизвестных составляющих реакций опор и шарниров составной конструкции;  $Y$  — количество линейно независимых уравнений равновесия, присутствующих каждой из шести систем сил;  $i$  — количество тел, входящих в составную конструкцию.

Если  $CT = 0$ , то необходимо указать работоспособна данная конструкция или нет (например, конструкция с тремя подвижными опорами при определенных условиях может совершать движение). Если конструкция работоспособная, то при  $CT = 0$  — конструкция статически определимая и находится в равновесии. При  $CT > 0$  — конструкция статически неопределимая и находится в равновесии. Если  $CT < 0$ , то конструкция геометрически изменяемая, в равновесии находиться не может.

Критерий  $CT$  показывает: во-первых, количество лишних (при  $CT > 0$ ) или недостающих (при  $CT < 0$ ) связей; во-вторых, количество шарниров, которые необходимо ввести в конструкцию (при  $CT > 0$ ) или удалить из нее (при  $CT < 0$ ), чтобы  $CT = 0$ . Приведем описание методики рационального решения задач статики системы двух и трех тел. На протяжении нескольких лет автор реализует методику рационального решения задач в учебном процессе. Студенты выполняют курсовую работу, куда входит и задание С-5 (два тела) из сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике под редакцией А.А.Яблонского. Методика рационального решения задания С-5 заключается в использовании решающего критерия  $CT$  и состоит из следующих этапов.

1. Определяется  $CT$  всей конструкции.

2. Определяется  $CT_i$  ( $i=1,2$ ) каждого из двух тел. При этом возможны следующие сочетания значений  $CT_i$ . 2.1.  $CT_i=0,2$  реализуется в двух случаях. Во-первых, когда конструкция имеет жесткую заделку, шарнир и подвижную опору. Для тела с жесткой заделкой и шарниром  $CT=2$ , а для тела с шарниром и подвижной опорой  $CT=0$ . Рассматривая первым равновесие тела с  $CT=0$ , получим численные значения двух (или одной) составляющих реакции в шарнире и значение реакции подвижной опоры. Воспользовавшись формулами перехода от одного тела к другому  $x_c = -x_c$ ,  $y_c = -y_c$  (или какой-нибудь одной из формул в зависимости от вида системы сил, приложенной к телу, для которого  $CT=0$ ) приложим реакции к другому телу. Теперь его  $CT$  станет равным нулю. Во-вторых, составная конструкция имеет шарнир и три опоры: неподвижную и две подвижных. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным выше. 2.2.  $CT_i=1,1$  реализуется, когда конструкция имеет две неподвижные опоры и шарнир. При рассмотрении равновесия всей системы определяется по одной составляющей реакции каждой неподвижной опоры. Это

дает возможность, в дальнейшем, рассмотреть ту часть конструкции, к которой приложено меньше сил, как статически определимому —  $CT=0$ .

Обратим внимание на то, что помимо С-5 возможны и другие варианты схем составных конструкций, для которых также успешно применима методика рационального решения.

Методика рационального решения задания С-6 (три тела) из сборника заданий под редакцией А.А. Яблонского также заключается в использовании решающего критерия  $CT$  и состоит из следующих этапов.

1. Определяется  $CT$  всей конструкции.

2. Определяется  $CT_i$  ( $i=1,2,3$ ) каждого из трех тел. При этом возможны следующие сочетания значений  $CT_i$ : 031, 022, 040, 112, 121.

3. Для  $CT_i$  — 031, 022, 040 первым нужно рассматривать в равновесии то тело, у которого  $CT=0$ . 3.1.  $CT_i$ -031. Рассматривая равновесие тела с  $CT_i=0$ , получим значения составляющих (или составляющей) реакции первого шарнира. Используя формулы (или формулу) перехода от одного тела к другому  $x_c = -x_c$ ,  $y_c = -y_c$ , получим конструкцию, состоящую из двух тел с  $CT_2=CT_3=1$ . Если это двухопорная конструкция, то используется решение 2.2., изложенное в тезисах предыдущего доклада. Если — трехопорная конструкция, то необходимо рассматривать равновесие каждой части в отдельности. 3.2.  $CT_i$  — 022. Последовательно рассматривают равновесие первого ( $CT_i=0$ ), второго и третьего тел. Использование формул перехода сначала в первом, а затем во втором шарнирах позволяют рассматривать каждый раз статически определимые конструкции. 3.3.  $CT_i$ -040. Рассматривая равновесие первого и третьего тел, получим значения реакций в двух шарнирах. При приложении их ко 2-му телу (с помощью формул перехода) его  $CT_2=0$ .

4.  $CT_i$ -112, 121. Сначала рассматривается равновесие тела с  $CT=1$ , у которого легко определяется хотя бы одна из составляющих реакций. Затем, используются формулы перехода и последовательно рассматривается равновесие каждого тела. Создается система алгебраических уравнений, из которой определяются значения реакций.

## Литература

1. Гурвич Ю.А. Многокритериальное проектирование колесного транспортного средства на основе результатов идентификации процесса качения шин /Тезисы докладов международной конф.: Колебания и волны в экологии, технологических процессах и диагностике. Минск, 1993.— С.46.

2. Гурвич Ю.А. Проектирование автоколебательной системы управляемого моста автомобиля на основе результатов идентификации процесса качения шин /

тезисы докладов шестого Международного научно-технического совещания по динамике и прочности автомобиля. М., 1994, с 32–34.

3. Гурвич Ю.А. Проектирование автономной колебательной системы управляемого моста транспортных средств на основе новых критериев колебательных и аperiodических движений колес/ Тезисы докладов Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике «Механика-95».- Минск, 1995. — С.82–83.

4. Осуществить автоматизированный выбор совокупностей параметров системы рулевого привода управляемой оси для всех режимов движения автобуса: Отчет о НИР (заключительный) ГНТП «Белавоттракторостроение» / БГПА; Руководитель Ю.А. Гурвич. — № ГР 19992721/13.08.99-БелСА; инв. № ГНТП И-05808729.67-2000 — Минск, 2000. — С.46 .

5. Гурвич Ю.А. Оптимизация параметров шестизвенной рулевой трапеции трактора МТЗ-80 во всем диапазоне длин колеи / Материалы международной 51-й НТК БГПА — Минск, 1995. — Ч.2. — С.106.

6. Гурвич Ю.А. Критерии рационального решения задач статики составных конструкций // Вклад вузовской науки в развитие приоритетных направлений производственно-хозяйственной деятельности, разработку экономических и экологически чистых технологий и прогрессивных методов обучения: Тез. докл. 54-й международной НТК Минск, 2000 г./ БГПА — Минск, 2000 — Ч.7. — с.44.

7. Гурвич Ю.А., Павловский В.В., Гаврилов А.С., Курганович Д.М. Методика рационального решения задач статики системы двух тел. Там же. Минск, 2000 — Ч.7. — с.45.

8. Гурвич Ю.А. Методика рационального решения задач статики системы трех тел. Там же. Минск, 2000 — Ч.7. — с.46.

9. Гурвич Ю.А. Одно- и многокритериальный синтез статики составных конструкций. Там же. Минск, 2000. — Ч.1. — С.149.

10. Методические указания по курсу «Теоретическая механика. Кинематика» для проведения индивидуальных и контрольных работ с использованием методов идентификации и многокритериального выбора по теме «Сложное движение точки» для студентов всех специальностей/ Под общей редакцией Ю.А. Гурвича — Мн., БГПА 1992. — 16 с.

11. Безмашинный контроль знаний студентов по теме «Сложное движение точки» раздела «Кинематика» из курса «Теоретическая механика». Методическое пособие для проведения индивидуальных и контрольных работ с использованием методов идентификации и многокритериального выбора /Под общей редакцией Ю.А. Гурвича — Минск, БГПА 1992.— 32 с.

12. Гурвич Ю.А. Нетрадиционные задачи анализа кинематики сложного движения точки // Вклад вузовской науки в развитие приоритетных направлений производственно-хозяйственной деятельности, разработку экономических и экологически чистых технологий и прогрессивных методов обучения: Тез. Доклад 54-й международной НТК Минск, 2000 г./ БГПА — Минск, 2000 — Ч.1. — с.150.

13. Гурвич Ю.А., Муравейников А.М., Кохановская С.И. Синтез кинематики сложного движения точки. Там же. Минск, 2000. — Ч.1. — С.151.

14. Гурвич Ю.А. Обучающая и контролирующая программа синтеза кинематики сложного движения точки по критериям абсолютного ускорения точки // Состояние и перспективы развития науки и подготовки инженеров высокой квалификации в БГПА: Тезисы докладов 51-ой НТК. Минск, 1995 г./ БГПА — Минск -Ч.2.-С.185.

15. Левин М.А., Гурвич Ю.А., Атаманов Ю.Е. Лабораторный практикум по курсу «Испытание трактора» для студентов специальности 0513, специализации «Тракторы». Минск, 1977.— Ч.1. — 52 с.

16. Гурвич Ю.А. Синтез динамики относительного движения // Вклад вузовской науки в развитие приоритетных направлений производственно-хозяйственной деятельности, разработку экономических и экологически чистых технологий и прогрессивных методов обучения: Тез. Доклад 54-й международной НТК Минск, 2000 г./ БГПА — Минск, 2000- Ч.1. — с.152.

17. Гурвич Ю.А. Биомеханика вращения фигуриста. Там же. Минск 2000. — Ч.10. — с.187.

18. Гурвич Ю.А. Вращение фигуриста при вязком трении. Там же. Минск 2000. — Ч.10. — с.188.

19. Гурвич Ю.А., Терентьева Е. Г., Словеснов А. С. Вращение фигуриста при сухом трении. Там же. Минск 2000. — Ч.10. — с.189.

20. Гурвич Ю.А., Терентьева Е.Г., Словеснов А.С. Вращение фигуриста при одновременном действии вязкого и сухого трений Там же. Минск 2000. — Ч.10. — с.190.

21. Гурвич Ю.А. Закономерности вращения фигуриста при действии вязкого и сухого трения // Материалы II-го Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике «Механика -99», Минск, 1999. — с.22–23.

22. Гурвич Ю.А. Новые прикладные критерии колебательной и аperiodической устойчивости движения колес транспортных средств. Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике: Сб. науч. тр.- Минск, 2001.- с.148–162.

УДК 531.2:371.3

## **СИНТЕЗ СТАТИКИ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

**Ю. А. Гурвич, Д. А. Копелев**

Известно, что задачи статики, предлагаемые студентам для решения, являются задачами анализа, в которых задается механико-математическая модель – балки, балки с шарнирами, опоры, различные виды нагрузок и т.д. Требуется определить реакции связей.

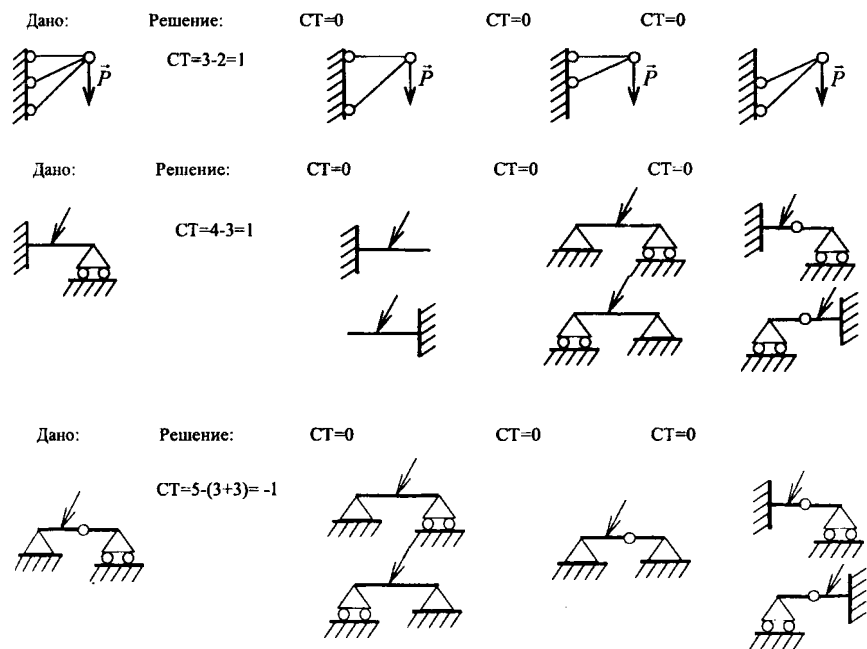
При решении задач синтеза задаются критерии:  $CT$ , количество и вид опор, количество тел входящих в составную конструкцию. Требуется из двух наборов простых конструктивных элементов и различного вида опор сформировать механико-математическую модель конструкции в соответствии с указанными критериями. Подчеркнем, что задачам синтеза присуща многозначность решения.

Для усвоения методики синтеза необходимо ставить следующие задачи:

1. Задается составная конструкция, требуется определить ее  $CT$ . 1.1. Если  $CT=0$ , то необходимо указать: во-первых, работоспособна данная конструкция или нет (например, конструкция с тремя подвижными опорами при определенных условиях может совершать движение); во-вторых, если работоспособна, то необходимо указать рациональное решение в системе анализа. 1.2. Если  $CT > 0$  или  $CT < 0$ , то необходимо всевозможными способами сделать конструкцию работоспособной с  $CT=0$ .

Приведем примеры:

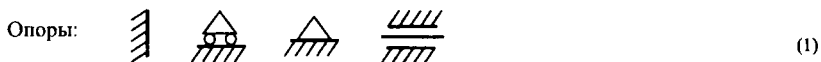
Дана конструкция, состоящая из трех невесомых стержней, имеющих по концам шарниры. Определить  $CT$  и привести варианты работоспособных конструкций с  $CT=0$ .



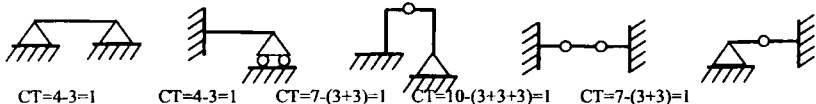


2. Из двух наборов простых конструктивных элементов и различного вида опор сформировать ряд конструкций, удовлетворяющих критерию  $CT=1$ .

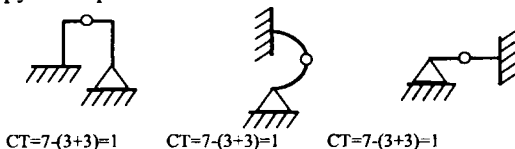
Дано:



Решение:

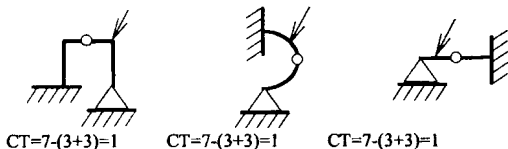


3. Из двух наборов различного вида опор (1) и простых конструктивных элементов (2) сформировать ряд конструкций по двум критериям:  $CT=1$ , число тел конструкции равно 2.



4. Из двух наборов различного вида опор (1) и простых конструктивных элементов (2) сформировать ряд конструкций по трем критериям:  $CT$ , число тел, вид системы сил.

Дано:  $CT=1$ , число тел конструкции равно 2, система сил – плоская произвольная.



Дано:  $CT=1$ , число тел конструкции равно 2, система сил — плоская параллельная.

Данная задача не имеет решения, т.к. подобную систему сформировать невозможно.

5. Из двух наборов различного вида опор (1) и простых конструктивных элементов (2) сформировать ряд конструкций по двум критериям:  $CT$ , число опор.

6. Из двух наборов различного вида опор (1) и простых конструктивных элементов (2) сформировать ряд конструкций по трем критериям: СТ, число опор, вид опор.

7. Из двух наборов различного вида опор (1) и простых конструктивных элементов (2) сформировать ряд конструкций по четырем критериям: СТ, число опор, вид опор, число тел

УДК 531.3.114:371.3

## СИНТЕЗ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

**Ю. А. Гурвич**

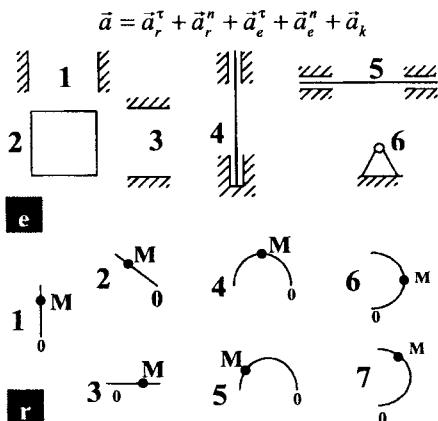
Автор в учебном процессе уже ряд лет реализует методику постановки и решения различных по сложности задач синтеза кинематики: «Сформировать схему сложного движения точки с заранее заданными свойствами».

В качестве критерия в задачах синтеза используется одно из значений абсолютного ускорения точки  $\vec{a}_i (i = 1, 24)$ , причем  $\vec{a}_1 = 0$ , а  $\vec{a}_{24}$  содержит все пять слагаемых ( $\vec{a}_r, \vec{a}_e, \vec{a}_e^r, \vec{a}_e^e, \vec{a}_k$ ).

Примеры задач синтеза. Дано: критерий — одно из 24-х значений  $\vec{a}_i$ . Требуется определить:  $r, e, S_r = B_1 t^n, S_e = B_2 t^m$  или  $\varphi_e = B_3 t^m, n, m, a, b, g, y, x, q$  и сформировать схему сложного движения точки. Здесь  $r$  — относительное движение точки (прямолинейное или криволинейное);  $e$  — переносное движение (поступательное прямолинейное, поступательное криволинейное или вращательное);  $S_r, S_e$  или  $\varphi_e$  — законы относительного, переносного (поступательного или вращательного) движений;  $n, m$  — целые числа;  $B_j (j = 1, 3)$  — постоянные положительные коэффициенты;  $\alpha = \angle(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r)$ ;  $\beta = \angle(\vec{a}_r^e, \vec{a}_e^e)$ ;  $\gamma = \angle(\vec{a}_r^e, \vec{a}_e^e)$ ;  $\psi = \angle(\vec{a}_r^e, \vec{a}_e^e)$ ;  $\xi = \angle(\vec{a}_r^e, \vec{a}_e^e)$ ;  $\theta = \angle(\vec{a}_k, \vec{a}_e^e)$ ; угол  $a$  может принимать одно из трех значений « $= k\pi$ », « $\neq k\pi$ », «не существует»,  $k = 0, 1$ ; каждый из углов  $\beta, \gamma, \psi, \xi, \theta$  может принимать одно из трех значений — « $= \pi/2$ », « $\neq \pi/2$ », «не существует».

1. Укажите номера представленных в таблице характеристик относительного ( $r$ ) и переносного ( $e$ ) движений и сформируйте из отдельных элементов схемы сложного движения точки  $M$  в соответствии с критериями — числом и видом слагаемых ее абсолютного ускорения  $\vec{a}$ . Покажите на схемах векторы слагаемых абсолютного ускорения точки и векторы  $\vec{\omega}_e, \vec{V}_e, \vec{V}_r$ .

$r$	прямолинейное	1
$r$	криволинейное	2
$r$	$S_r=B_1t^n$	3
$n$	$n=1$	4
$n$	$n=2$	5
$e$	поступ. прямолин.	6
$e$	вращательное	7
$e$	$S_e=B_2t^m$	8
$e$	$\varphi_e=B_3t^m$	9
$m$	$m=1$	10
$m$	$m=2$	11
$\alpha$	$=k\pi, k=0,1$	12
$\alpha$	$\neq k\pi, k=0,1$	13
$\alpha$	не существует	14

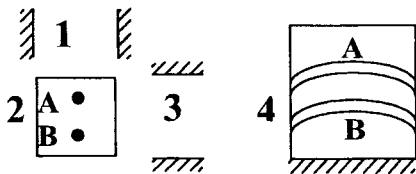


2. Укажите номера представленных в таблице характеристик относительного ( $r$ ) и переносного ( $e$ ) движений и сформируйте из отдельных элементов схемы сложного движения точки  $M$  в соответствии с критериями — числом и видом слагаемых ее абсолютного ускорения  $\vec{a}$ . Покажите на схемах векторы слагаемых абсолютного ускорения точки и векторы  $\vec{\omega}_e, \vec{V}_e, \vec{V}_r$ .

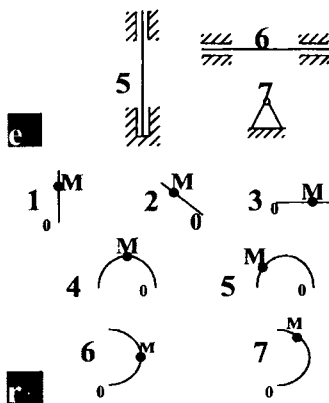
$r$	прямолинейное	1
$r$	криволинейное	2
$r$	$S_r=B_1t^n$	3
$n$	$n=1$	4
$n$	$n=2$	5
$e$	поступ. прямолин.	6
$e$	поступ. криволин.	7
$e$	вращательное	8
$e$	$S_e=B_2t^m$	9
$e$	$\varphi_e=B_3t^m$	10
$m$	$m=1$	11

$$\vec{a} = 0$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r^* + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^* + \vec{a}_e^n$$



$m$	$m=2$	12
$\alpha$	$=k\pi, k=0,1$	13
$\alpha$	$\neq k\pi, k=0,1$	14
$\alpha$	не существует	15
$\beta$	$\angle(\vec{a}_r^i, \vec{a}_e^i) = \pi/2$	16
$\beta$	$\angle(\vec{a}_r^i, \vec{a}_e^i) \neq \pi/2$	17
$\beta$	не существует	18
$\gamma$	$\angle(\vec{a}_r^n, \vec{a}_e^n) = \pi/2$	19
$\gamma$	$\angle(\vec{a}_r^n, \vec{a}_e^n) \neq \pi/2$	20
$\gamma$	не существует	21

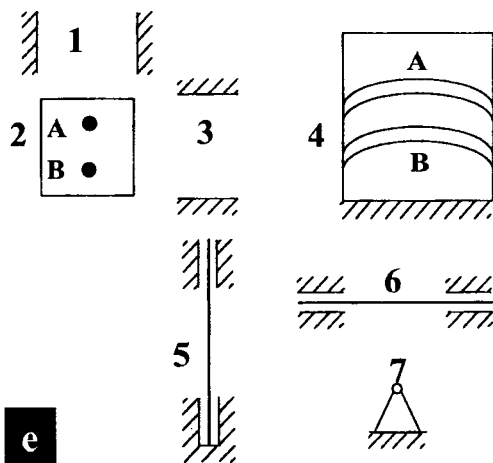


3. Укажите номера представленных в таблице характеристик относительного ( $r$ ) и переносного ( $e$ ) движений и сформируйте из отдельных элементов схемы сложного движения точки  $M$  в соответствии с критериями – числом и видом слагаемых ее абсолютного ускорения  $\vec{a}$ . Покажите на схемах векторы слагаемых абсолютного ускорения точки и векторы  $\vec{\omega}_e, \vec{V}_e, \vec{V}_r$ .

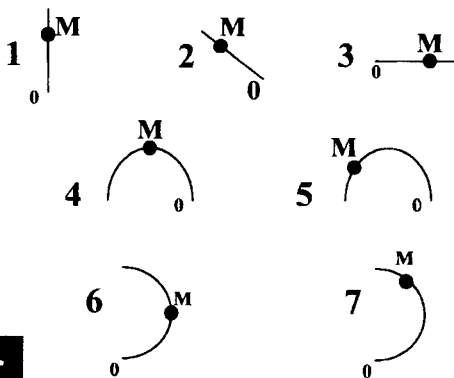
$$\vec{a} = 0$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r^i + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^i + \vec{a}_e^n$$

$r$	прямолинейное	1
$r$	криволинейное	2
$r$	$S_e = B_1 t^n$	3
$n$	$n=1$	4
$n$	$n=2$	5
$e$	поступ. прямолин.	6
$e$	поступ. криволин.	7
$e$	вращательное	8
$e$	$S_e = B_2 t^m$	9
$e$	$\varphi_e = B_3 t^m$	10
$m$	$m=1$	11
$m$	$m=2$	12
$\alpha$	$=k\pi, k=0,1$	13
$\alpha$	$\neq k\pi, k=0,1$	14
$\alpha$	не существует	15
$\beta$	$\angle(\vec{a}_r^i, \vec{a}_e^i) = \pi/2$	16



$\beta$	$\angle(\vec{a}_r^t, \vec{a}_e^t) \neq \pi/2$	17
$\beta$	не существует	18
$\gamma$	$\angle(\vec{a}_r^n, \vec{a}_e^n) = \pi/2$	19
$\gamma$	$\angle(\vec{a}_r^n, \vec{a}_e^n) \neq \pi/2$	20
$\gamma$	не существует	21
$\Psi$	$\angle(\vec{a}_r^t, \vec{a}_e^n) = \pi/2$	22
$\Psi$	$\angle(\vec{a}_r^t, \vec{a}_e^n) \neq \pi/2$	23
$\Psi$	не существует	24
$\xi$	$\angle(\vec{a}_r^n, \vec{a}_e^n) = \pi/2$	25
$\xi$	$\angle(\vec{a}_r^n, \vec{a}_e^n) \neq \pi/2$	26
$\xi$	не существует	27
$\theta$	$\angle(\vec{a}_k, \vec{a}_e^n) = \pi/2$	28
$\theta$	$\angle(\vec{a}_k, \vec{a}_e^n) \neq \pi/2$	29
$\theta$	не существует	30



**г**

Задачам синтеза присуща многозначность решений. Например, критерию  $\bar{a} = \vec{a}_e^n$  будут соответствовать две схемы: с переносным поступательным криволинейным движением и с переносным вращательным движением, что дает дополнительные возможности конструктору для принятия окончательного решения.

В динамике автор реализует методику постановки и решения задач синтеза динамики относительного движения точки: «Сформировать схему движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета с заранее заданными свойствами за счет изменения эйлеровых сил инерции».

В качестве критериев в задачах синтеза могут использоваться: одно из восьми значений абсолютного ускорения  $\bar{a}_j$  ( $\vec{a}_e^t, \vec{a}_e^n, \vec{a}_k$ ),  $j = \overline{1,8}$ , причем  $\bar{a}_1 = 0$ ,  $\bar{a}_2 = \vec{a}_e^t + \vec{a}_k = 0$ ,  $\bar{a}_3 = \vec{a}_e^n + \vec{a}_k = 0$ , ...,  $\bar{a}_8 = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k$ ;  $N_{\min}$  или  $N_{\max}$  — минимальное или максимальное давление, например, шарика на стенки канала (см. Д-4 из сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике под редакцией А.А.Яблонского, где автор изменяет условия задач с целью научить студентов реализовывать идеи синтеза на практике).

Пример задачи синтеза. Дано: критерий — одно из 8-ми значений  $\bar{a}_j$  или критерии — одно из 8-ми значений  $\bar{a}_j$  и  $N_{\min}$  или  $N_{\max}$ . Требуется определить:  $e, S_e = B_2 t^m$  или  $\varphi_e = B_3 t^m, m, \alpha, \theta$  и сформировать схему движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета.

Решая одну из задач синтеза, студент практически осуществляет постановку всех задач анализа соответствующих заданному критерию. Уже одно это обстоятельство резко повышает уровень знаний студента.

Применение в учебном процессе новой методики многокритериального синтеза способствует формированию современного мышления студента, повышает эффективность обучения. Приобретенные навыки помогут будущему специалисту успешно решать задачи проектирования механизмов с заранее заданными свойствами, принимать наилучшее из всех возможных решений.

УДК 531.2.3.114:371.3

## **ОБУЧАЮЩИЙ И КОНТРОЛИРУЮЩИЙ КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ «MATHCAD 2000 PRO» ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЯЕМОЙ ОСИ АВТОМОБИЛЯ И АВТОБУСА**

**Ю. А. Гурвич**

Для осуществления многокритериального выбора параметров управляемой оси (которая состоит из колес с шинами, балки, пружин и демпферов подвески, рулевой трапеции и т.д.) во всем скоростном диапазоне движения автомобиля и автобуса (эта работа выполняется в рамках Государственной научно-технической программы «Белавтотракторостроение» на 2001–2005 гг.) необходимо выполнить следующие виды работ:

1. Составить механико-математическую модель управляемой оси, представляющую собой совокупность схемы управляемой оси и дифференциальных уравнений движения управляемых колес с шинами с учетом неголономных связей катящихся без скольжения колес по дороге.

2. Привести дифференциальные уравнения к виду Коши (к дифференциальным уравнениям первого порядка для дальнейшего численного интегрирования).

3. Выбрать управляемые параметры и пределы их изменений.

4. Составить комплекс программ для ЭВМ, с помощью которого осуществить выбор точек Парето как колебательных, так и аperiodических движений управляемых колес во всем скоростном диапазоне движения машины.

В результате конструктору предлагается одна из точек Парето: колебательных или аperiodических движений, причем, каждой точке Парето соответствует своя совокупность управляемых параметров.

Отметим, что реализация последнего пункта представляет собой математически сложный и трудоемкий вычислительный процесс, весь ход которого практически скрыт от глаз конструктора, труден для понимания из-за недостатка знаний в области многокритериального синтеза, механики неголономных систем и т. д., что не позволяет ему достаточно полно и быстро анализировать результаты вычислений.

Для устранения этих недостатков, а так же с целью адаптации и обучения конструкторов и студентов работе с этим и другими сложными комплексами программ создан обучающий и контролирующий комплекс программ для ЭВМ с использованием «MathCAD 2000 Pro».

При составлении комплекса программ на «MathCAD 2000 Pro» необходимо выполнить следующее:

1. Составить механико-математическую модель движения управляемых осей автомобилей и автобусов.

Система дифференциальных уравнений, описывающая малые колебания управляемой передней оси с элементами рулевого привода и подвески автобуса, колеса которого имеют две основные степени свободы —  $\theta$  и  $\psi$ , имеет вид:

$$J_1 \ddot{\psi} + h_1 \dot{\psi} + [c_1 + 2N(\sigma r + \rho)] \psi - \gamma_0 J \ddot{\theta} - 2 \frac{cv}{r} \dot{\theta} - 2\gamma_0 N(\sigma r + \rho)\theta + (ar + \sigma N)(\xi_1 + \xi_2) = 0, \quad (1)$$

$$J_2 \ddot{\theta} + h_2 \dot{\theta} + c_2 \theta - \gamma_0 J \ddot{\psi} + 2 \frac{cv}{r} \dot{\psi} - 2\gamma_0 N(\sigma r + \rho) \psi - \gamma_0 (ar + \sigma N)(\xi_1 + \xi_2) - b(\varphi_1 + \varphi_2) = 0,$$

$$\xi_1 - r\dot{\psi} + \gamma_0 r \dot{\theta} + \nu\theta + \nu\varphi_1 = 0,$$

$$\xi_2 - r\dot{\psi} + \gamma_0 r \dot{\theta} + \nu\theta + \nu\varphi_2 = 0,$$

$$\dot{\theta} + \dot{\varphi}_1 - \alpha \nu \xi_1 + \beta \nu \varphi_1 + \gamma \nu \psi - \gamma_0 \gamma \nu \theta = 0,$$

$$\dot{\theta} + \dot{\varphi}_2 - \alpha \nu \xi_2 + \beta \nu \varphi_2 + \gamma \nu \psi - \gamma_0 \gamma \nu \theta = 0,$$

где

$$J_1 = 2(A + mL^2) + B ;$$

$$J_2 = 2(A + ml^2) ;$$

$$J_3 = 2(A + mL) ;$$

$$L = L_1 + l ;$$

$m$  — масса колеса со ступицей;  $L_1$  — расстояние от центра масс подвески до центра шкворня;  $A$  — момент инерции колеса со ступицей относительно его диаметра;  $C$  — осевой момент инерции колеса;  $B$  — центральный момент инерции передней оси;  $r$  — радиус качения колеса; угловая скорость собственного вращения колеса  $\left(\omega = \frac{v}{r}\right)$ ;  $v$  — линейная скорость центра колеса (или линейная скорость поступательного движения автобуса);  $\gamma_0$  — продольный угол наклона шкворня;  $2N$  — нагрузка на переднюю подвеску;  $\psi$  — угол поворота балки передней оси вместе с колесами относительно продольной оси автобуса;  $\theta$  — угол поворота колес относительно шкворней;  $\xi_1$  — боковая деформация левого пневматика;  $\xi_2$  — боковая деформация правого пневматика;  $\varphi_1$  — деформация скручивания левого пневматика;  $\varphi_2$  — деформация скручивания правого пневматика;  $a$  — коэффициент боковой жесткости шины;  $b$  — коэффициент угловой жесткости шины;  $\sigma$  — коэффициент упругости шины;  $\rho$  — удельная угловая жесткость шины;  $\alpha, \beta, \gamma$  — кинематические параметры пневматика;  $h_1$  — коэффициент демпфирования (вязкого трения) в подвеске;  $h_2$  — коэффициент демпфирования в рулевом управлении;  $c_1$  — коэффициент жесткости шин и рессор подвески;  $c_2$  — коэффициент жесткости рулевого управления.

Для моделирования вводятся вспомогательные переменные

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

и параметры

$$\eta_1 = 2N(\sigma r + \rho),$$

$$\eta = 2(ar + \sigma N),$$

$$c_0 = 2\frac{c}{r} .$$

В соответствии с этими обозначениями система дифференциальных уравнений (1) упрощается и приобретает вид (2), который также как и (1) был использован для моделирования с помощью персонального компьютера:



$$\begin{aligned}
 J_1 \ddot{\psi} + h_1 \dot{\psi} + (c_1 + \eta_1) \psi - \gamma_0 J \ddot{\theta} - c_0 v \dot{\theta} - \gamma_0 \eta_1 \theta + \eta \xi &= 0 ; \\
 J_2 \ddot{\theta} + h_2 \dot{\theta} + c_2 \theta - \gamma_0 J \ddot{\psi} + c_0 v \dot{\psi} - \gamma_0 \eta_1 \psi - \gamma_0 \eta \xi - 2b\varphi &= 0 ; \\
 \dot{\xi} - r\dot{\psi} + \gamma_0 r \dot{\theta} + v\theta + v\varphi &= 0 ; \\
 \dot{\theta} + \dot{\varphi} - \alpha v \xi + \beta v\varphi + \gamma v\psi - \gamma_0 \gamma v\theta &= 0 .
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

2. В системах дифференциальных уравнений (1) и (2) управляемыми параметрами являются:

$$m, c_1, h_1, g_0, c_2, h_2, l, L_1.$$

Неуправляемыми параметрами будут следующие характеристики:

$$r, a, b, s, \tau, a, b, g, 2N, V.$$

Скорость  $V$  является переменной величиной, изменяющейся в широком диапазоне.

Имеется ещё ряд параметров в дифференциальных уравнениях (1) и (2), которые зависят от значений управляемых параметров, например значения  $J_1, J_2, J, A, B, C$  зависят от величин  $m, l, L_1$ .

На управляемые параметры с учётом технических требований, особенностей прототипа и т.д. накладываются ограничения в виде неравенств

$$l_{j \min} \leq l_j \leq l_{j \max}, \quad j = 1, 2, \dots, 8.$$

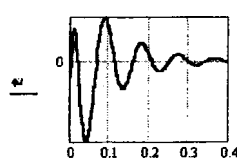
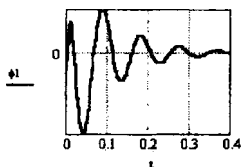
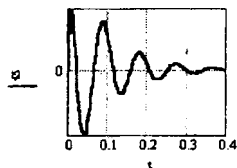
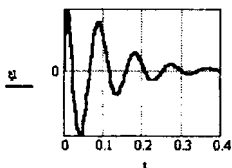
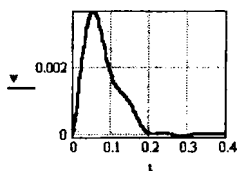
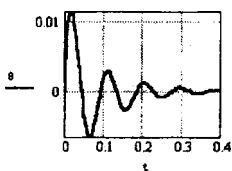
Все пределы изменения управляемых параметров сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Пределы изменения управляемых параметров

Обозначение параметров	Пределы изменения параметров	
	Inf	Sup
$m$ , кг	194	207
$c_1$ , Н/м	100000	187000
$c_2$ , кН·м/рад	0	180000
$h_1$ , Н·с/м	20000	30000
$h_2$ , кг·м <sup>2</sup> /с	200	1500
$\gamma_0$ , рад	-0,1	0,1
$l$ , м	0,127	0,147
$L_1$ , м	0,898	0,938

3. Пример расчета фазовых переменных  $\Theta, \psi, \xi_1, \xi_2, \varphi_1, \varphi_2$  при определенных значениях параметров дифференциальных уравнений приведен на графиках.



4. Изменяя одно или несколько значений параметров дифференциальных уравнений движения управляемых колес, получим новые графические зависимости фазовых переменных.

УДК 531.2.3.114:371.3

## ОБУЧАЮЩИЙ И КОНТРОЛИРУЮЩИЙ КОМПЛЕКС ПРОГРАММ НА «MATHCAD 2000 PRO» ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РАЗЛИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ РУЛЕВЫХ ТРАПЕЦИЙ НА ИЗНОС ШИН

**Ю. А. Гурвич**

**Постановка задачи.** Для ряда автомобилей МАЗ и автобусов АМАЗ, имеющих разную базу  $M_j$  (размер  $M_j$  в мм, а  $j$  — число баз машин) 3300, 3550, 3600, 3950, 4100, 4800, 4900, 5010, 5400 и т. д. используется только одна рулевая трапеция (причём параметры её не являются оптимальными, хотя бы для одной из баз  $M_j$  машины), что наверняка вызывает повышенный износ шин у некоторых машин из этого ряда. Точно такая картина наблюдается, практически, на всех

заводах, которые специализируются на выпуске различных конструкций пневмоколёсных машин. На пример, некоторые конструкции тракторов МТЗ помимо разных величин базы  $M_j$  имеют ещё и регулируемую величину шкворневой колеи  $L_k$  [3].

В связи с этим в рамках Государственной научно-технической программы «Белавтотракторостроение» на 2001–2005 гг. была поставлена задача разработать новую методику многокритериальной оптимизации значений параметров такой рулевой трапеции, которая будет оптимальной для целого ряда машин, имеющих разные базы. Сразу подчеркнём, что задача определения оптимальных параметров рулевой трапеции по критерию износа шин из однокритериальной задачи нелинейного программирования (при постоянных величинах шкворневой колеи  $L$  и базы машины  $M$ ) переходит в многокритериальную задачу с числом критериев на число  $j$  большим, чем у однокритериальной задачи. Это резко усложняет решение задачи. Потребуется новый математический аппарат, в котором будет использовано множество Парето и т. д.

Для реализации этой задачи необходимо выполнить:

1. Обосновать точность и область применимости каждого из допущений и исходных данных для многокритериальной оптимизации параметров рулевой трапеции. Потому что никакая оптимизация не поможет получить точный результат при неточных исходных данных.

2. Разработать механико-математическую модель рулевой трапеции для машин с различными базами. Обосновать новый критерий оптимальности.

3. Разработать методики, алгоритм и комплекс программ многокритериальной оптимизации параметров оптимальной рулевой трапеции для ряда машин с различными базами  $M_j$ .

4. Выполнить многокритериальную оптимизацию параметров рулевой трапеции и выполнить анализ результатов.

В результате конструктору предлагается одна из точек Парето. Причем, каждой точке Парето соответствует своя совокупность геометрических (управляемых) параметров каждой из конструкций рулевых трапеций (четырёхзвенных, различных видов шестизвенных и т. д.).

Отметим, что реализация последнего пункта представляет собой математически сложный и трудоемкий вычислительный процесс, весь ход которого практически скрыт от глаз конструктора, труден для понимания из-за недостатка знаний в области многокритериального синтеза и т. д., что не позволяет ему достаточно полно и быстро анализировать результаты вычислений.

Для устранения этих недостатков, а так же с целью адаптации и обучения конструкторов и студентов работе с этим и другими сложными комплексами программ создан обучающий и контролирующий комплекс программ для ЭВМ с использованием «MathCAD 2000 Pro».

При составлении комплекса программ на «MathCAD 2000 Pro» необходимо выполнить следующее:

1. Составить механико-математическую модель рулевых трапеций автомобилей, автобусов и других самоходных машин.

1.1. Влияние конструктивных параметров рулевых трапеций и углов установки колеса на износ шин.

Как известно, износ шин управляемых колес при движении транспортного средства зависит от значений ряда конструктивных параметров управляемой оси (моста), от углов установки колеса, от свойств шины, от условий эксплуатации и т.д. (рис. 1.)

$$U = U(\epsilon) + U(\alpha) + U(\beta) + U(\gamma) + U(\text{ГПРТ}) + U(c_2, n_2) + \sum_{i=1}^n U_i, \quad (1)$$

где  $U$  — износ шин управляемых колес;  $U(\epsilon)$  — износ шин в функции угла схождения;  $U(\alpha)$  — износ шин в функции угла развала;  $U(\beta)$  — износ шин в функции угла поперечного наклона шкворня;  $U(\gamma)$  — износ шин в функции угла продольного наклона шкворня;  $U(\text{ГПРТ})$  — износ шин в функции геометрических параметров рулевых трапеций различных конструкций (ГПРТ — аббревиатура слов геометрические параметры рулевой трапеции);  $U(c_2, n_2)$  — износ шин в функции коэффициентов жесткости ( $c_2$ ) и демпфирования ( $n_2$ ) рулевой трапеции;  $\sum_{i=1}^n U_i$  — суммарный износ шин, зависящий от свойств шины, от условий эксплуатации и т.д.

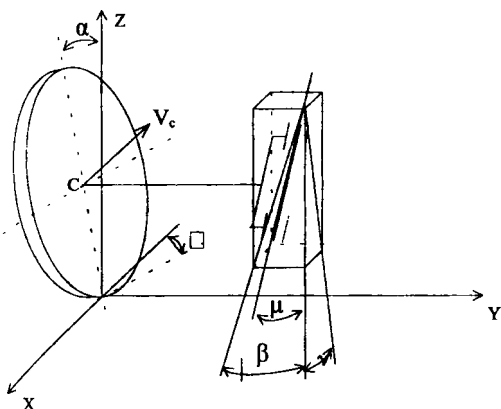


Рис. 1. Углы установки колеса

Необходимо подчеркнуть, что различные конструкции рулевых трапеций имеют разное число геометрических параметров.

Для установления степени влияния значений параметров на износ шин неоднократно ставились соответствующие исследования рабочих процессов рулевого привода.

Теоретических и экспериментальных работ, в которых выполнены исследования по определению рациональной формы рулевой трапеции, ее расположения, влияния параметров на износ шин достаточно много. Анализ этих работ позволил установить следующее: [5].

1.1.1. Параметры передних осей влияют на износ шин следующим образом:

- угол схождения  $\epsilon$  показывает среднее по интенсивности влияние на износ шин;
- угол развала  $\alpha$  оказывает среднее по интенсивности влияние на износ шин;
- угол поперечного наклона шкворня  $\beta$  оказывает слабое влияние на износ шин;
- угол продольного наклона шкворня  $\gamma$  оказывает определённое влияние на износ шин;
- коэффициенты жесткости и демпфирования рулевой трапеции оказывают весьма слабое влияние на износ шин;
- длина рычага рулевой трапеции  $l$  и угол  $\Theta$  его наклона к продольной оси машины (геометрические параметры рулевой трапеции) оказывают сильное влияние на износ шин.

1.1.2. Выходные характеристики машин зависят от соотношения между значениями всех параметров моста и рулевой трапеции, т.е. от совокупности значений параметров.

1.1.3. В литературе отсутствуют достаточно точные для практики математические описания износа шин (зависимости износа шин в функции различных параметров — углов установки колеса, наклона шкворней, длины цапфы, свойств шин и т. д.).

1.1.4. В связи с тем, что колеса 80–90% времени катятся по криволинейным траекториям, необходимо обеспечить умеренный износ шин во всем диапазоне углов поворота управляемых колес.

1.2. Механико-математические модели различных конструкций рулевых трапеций

Отметим, что в литературе приведено большое число различных конструкций рулевых трапеций, которые используются в машинах на колесном ходу. Соответственно приведены и схемы этих рулевых трапеций.

Теперь поясним, что мы понимаем под словами «механико-математическая модель рулевой трапеции». Для этого рассмотрим схему самой простой четырехзвенной неразрезной рулевой трапеции, показанной на рис. 2.

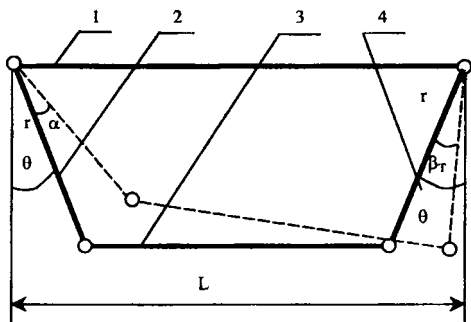


Рис. 2. Схема четырехзвенной рулевой трапеции:

1 — управляемая ось; 2, 4 — продольные рычаги; 3 — поперечная тяга;  $\theta$  — угол наклона рычагов к продольной оси машины;  $r$  — длина рычага;  $\alpha$ ,  $\beta_T$  — углы поворота внутреннего и наружного колес машины, совершающий левый поворот,  $L$  — шкворневая колея

Под механико-математической моделью понимается совокупность схемы рулевой трапеции и формализованной связи (математического описания)  $\beta_T = \beta_T(\alpha, \theta, r, L)$  — угла поворота наружного колеса машины в функции угла поворота внутреннего колеса и совокупности конструктивных параметров  $\theta, r, L$  (рис. 3). Причём для каждой новой конструкции рулевой трапеции будет своя совокупность конструктивных параметров и соответственно  $\beta_T^j$ , где  $j=4, 6, 8, \dots$  — число звеньев рулевой трапеции.

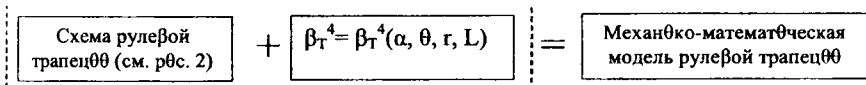


Рис. 3. Механико-математическая модель четырехзвенной рулевой трапеции

Из многочисленной литературы известно только одна механико-математическая модель — модель четырехзвенной неразрезной рулевой трапеции, впервые полученная академиком Е. А. Чудаковым [1]. Для всех остальных конструкций рулевых трапеций в литературе приведены только схемы, а математические описания  $\beta_T^j = \beta_T^j(\alpha, \dots, L)$  отсутствуют. Правда, автор этой статьи, по всей видимости, впервые получил зависимости  $\beta_T^j = \beta_T^j(\alpha, \dots, L)$  для шести-звенных рулевых трапеций различных конструкций — с сошкой (применяемой на МТЗ [2-4]) и типа «CARRARO» (типа реечного механизма).



Чтобы движение машины с рулевой трапецией наилучшим образом (но тем не менее приближенно) отобразило зависимость (2), необходимо варьировать все значения управляемых параметров  $\lambda_j, \lambda_{j'}$ . Затем из набора совокупностей значений параметров выбирается такая совокупность параметров ( $\lambda_j, \lambda_{j'}, g_j, g_{m'}$ ), которая соответствует максимальному приближению (близости) зависимости (4) к зависимости (2) или (3). При этом возникают вопросы, что принять за меру близости двух зависимостей и как выразить математическую степень близости зависимостей  $\beta_T$  и  $\beta_N$  друг к другу?

Известно, что в пространстве функций  $x(t)$ , определенных и непрерывных при  $a \leq t \leq b$  существуют различные нормы: чебышевская с равномерной сходимостью по ней и гильбертовская со среднеквадратичной сходимостью.

Примем за меры близости двух зависимостей  $\beta_T$  и  $\beta_N$  чебышевскую и гильбертову нормы. Тогда в качестве наилучшего приближения зависимости (4) к (2) предлагаются критерии  $F_{1N}$  и  $F_{2N}$ . Предварительно введем число точек ( $i$ ) на кривых (2) и (4), отображающих зависимости  $\beta_T$  и  $\beta_N$ . Тем самым непрерывный процесс аппроксимируем дискретным. Критерии  $F_{1N}$  и  $F_{2N}$  в этом случае имеют вид

$$F_{1N} = \max_{1 \leq i \leq N_1} |\beta_{Ni} - \beta_{Ti}| F \quad I = 1, N_1, \quad (5)$$

$$F_{2N} = \sum_{i=1}^{N_1} (\beta_{Ni} - \beta_{Ti})^2 \quad (6)$$

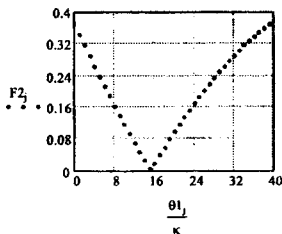
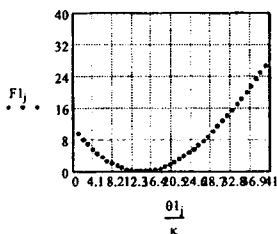
### 3. Выбор управляемых параметров и пределов их изменений.

3.1. Для четырехзвенной трапеции (см. рис. 2) управляемыми параметрами являются параметры  $\Theta$  и  $g$ .

3.2. Для шестизвенной трапеции типа «CARRARO» (симметричной и несимметричной) может быть несколько наборов сочетаний управляемых и независимых параметров и т.д.

4. Пример расчета критериев (5) и (6) для симметричной рулевой трапеции приведен на графиках.

$$F_{1j} := \sum_i (\beta_i - \beta_{Tj,i})^2 \quad F_{2j} := \max(|\beta_i - \beta_{Tj,i}|)$$





5. Изменяя одно или несколько значений параметров рулевых трапеций различных конструкций, получим новые графические зависимости для критериев (5) и (6).

### **Литература**

1. Чудаков Е.А. Теория автомобиля. — М.: Изд. АН СССР, 1961. — 462с.
2. Гурвич Ю.А., Корытко Л.С., Ковалева И.Л. Автоматизация проектирования рулевых трапеций колесных машин. — В кн.: Совершенствование средств и методов расчета изделий машиностроения. Волгоград, 1990, С.99-100.
3. Гурвич Ю.А. Оптимизация параметров шестизвенной рулевой трапеции трактора МТЗ-80 во всем диапазоне длин колеи / Материалы международной 51-й НТК БГПА. — Минск, 1995. — Ч.2. — С. 106.
4. Гурвич Ю.А. Проектирование рулевых трапеций различных конструкций транспортных средств. — Материалы 50-й НТК БГПА. — Минск, БГПА. — Ч. 1. 1994. — С. 56.
5. Выполнить анализ результатов многокритериальной оптимизации параметров системы рулевого привода управляемой оси: Отчет о НИР (заключительный) / БГПА; Руководитель Ю. А. Гурвич. — № ГР 19992721/13.08.99; инв. № ГНТП И-05808729.68 — 2000 — Минск, 2000. — 47с.

УДК 531.8

## **РАЗРАБОТКА КУРСА ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ ДЛЯ МЕХАНИКОВ ПОЛИГРАФИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ**

**В. Б. Немцов, А. В. Кондратенко**

На кафедре теоретической механики БГТУ в соответствии с учебным планом подготовки инженеров-механиков для полиграфической промышленности после двухсеместрового курса теоретической механики читается курс электромеханики.

Цель курса состоит в разработке основ для расчета электромеханических систем, используемых в указанной отрасли, так, чтобы их механическая и электромагнитная части рассматривались как единое целое. Одной из задач курса является расчет механизмов, снабженных электроприводом.

Подобные курсы читаются в Московских полиграфическом и энергетическом институтах и в других вузах. Все эти курсы носят не общий теоретичес-

кий характер, а имеют прикладную инженерную направленность, так сказать, «приземлены» к конкретным целям.

Первая попытка построения этого курса, осуществленная в свое время Миклашевичем И.А. под руководством Немцова В.Б., не достигла цели, так как не удалось «приземлить» этот курс к инженерным потребностям.

В настоящее время курс электромеханики полностью перестроен так, чтобы обеспечить его прикладную направленность.

Сначала рассматриваемый курс читался в течение одного четвертого семестра (2 часа лекций и два часа практических занятий в неделю), а в пятом семестре выполнялась курсовая работа. В настоящее время курс читается в четвертом и пятом семестрах с сохранением числа часов первого варианта, курсовая же работа отнесена к шестому семестру.

Структура курса проста. Он состоит из двух частей. Первая часть посвящена элементам обычной аналитической механики голономных систем, основанных на уравнениях Лагранжа второго рода и общем уравнении динамики. Особое внимание уделяется анализу свойств потенциальной энергии, закону сохранения и изменения механической энергии. Рассматриваются вопросы устойчивости равновесия потенциальных систем.

Вторая часть курса посвящена уравнениям Лагранжа-Максвелла, как основному способу анализа электромеханических систем. Рассматриваются электромеханические аналогии. Здесь же вводится понятие о статической и динамической характеристиках электродвигателей. Рассмотрение сопровождается большим числом примеров. Разрабатываются методы приближенного расчета механизмов с заданной характеристикой электродвигателей, используемых в качестве электропривода.

В связи с нелинейностью уравнений Лагранжа-Максвелла непросто получить их обозримое аналитическое решение. Поэтому большое значение приобретает получение качественных результатов, в частности, исследование устойчивости электромеханических систем. На простых примерах проводится анализ устойчивости по Ляпунову как в линейном приближении, так и с помощью функции Ляпунова. Вводится представление об анализе устойчивости с помощью фазового пространства, в простейшем случае анализ осуществляется на фазовой плоскости.

Введению уравнений Лагранжа-Максвелла предшествует нетривиальное повторение элементов теории электромагнетизма с особым упором на механическую интерпретацию электрических и магнитных сил на простейших примерах. Эта подготовка завершается формулировкой уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.

Рассмотрим некоторые примеры. Для электростатического поля показывается его консервативность, так как циркуляция вектора напряженности элект-

трического поля по замкнутому контуру равна нулю. Но когда эта циркуляция не равна нулю, электрические силы становятся неконсервативными, и здесь выясняется необычная природа этой неконсервативности. В результате совершается переход к закону электромагнитной индукции.

В нашем курсе рассматриваются простые примеры расчета электростатического поля, в частности для плоского конденсатора. Подсчитывается энергия электростатического поля, заключенного между пластинами конденсатора, а затем вычисляется сила взаимодействия пластин конденсатора и, что очень интересно, показывается, что эта сила, отнесенная к единице площади пластины (напряжение Максвелла), равна объемной плотности электростатической энергии.

Небезынтересно объяснить, почему нельзя рассчитать силу притяжения пластин конденсатора при фиксированной разности потенциалов как отрицательную производную потенциальной энергии по расстоянию между пластинами. При этом нужно показать необходимость учета работы внешних источников, обеспечивающих неизменность разности потенциалов. Другими словами, это хороший и нестандартный пример применения закона сохранения энергии.

В этом подходе при подготовке к введению уравнений Лагранжа-Максвелла, анализируются магнитостатические силы поля, сила Ампера, закон Био-Саварра-Лапласа, выводится выражение для магнитной энергии, записываемое в виде квадратичной формы токов для системы контуров с токами и с соответствующими индуктивностями. Здесь важно подчеркнуть, что рассматриваемая часть магнитной энергии аналогична обычной кинетической энергии. Но магнитная энергия контура с током во внешнем поле магнита может рассматриваться как обычная потенциальная энергия, подобно электростатической энергии конденсаторов.

Как и в случае конденсаторов, подъемная сила электромагнита, отнесенная к единице площади грузового сечения, равна объемной плотности магнитной энергии. И это еще один практически важный пример использования понятия о натяжениях (напряжениях) Максвелла.

При изучении курса электромеханики студенты выполняют две расчетно-графические работы, одна из которых посвящена составлению уравнений Лагранжа и общего уравнения динамики для систем с двумя степенями свободы.

Во второй расчетно-графической работе применяются уравнения Лагранжа-Максвелла для механизма подъема груза, приводимого в движение различными типами электродвигателей. Здесь же осуществляется расчет указанного механизма с заданной статической характеристикой электродвигателя, часть параметров которого подбирается по мощности, определяемой с помо-

шью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме по заданному закону движения поднимаемого груза.

Кроме того, студенты в отдельном семестре выполняют курсовую работу, посвященную динамическому анализу относительно сложного механизма. Указанная сложность определяется наличием в механизме звена, совершающего плоскопараллельное движение, благодаря чему приведенный момент инерции (или в зависимости от движения звена приведения, приведенная масса) является функцией положения механизма. Данный механизм представляет собой часть машинного агрегата, включающего также асинхронный электродвигатель со статической характеристикой. К агрегату приложена рабочая нагрузка, являющаяся кусочно-гладкой функцией. Исследование движения машинного агрегата производится путем численного решения уравнений его движения с помощью ЭВМ с применением пакета MATHCAD. Таким образом, цель курсовой работы состоит в том, чтобы подобрать параметры электродвигателя и маховика, обеспечивающие движение машинного агрегата в соответствии с заданными условиями, а также выработать у студентов навыки решения инженерных задач с помощью мощных современных вычислительных пакетов.

### **Литература**

1. Мартыненко Ю.Г. Аналитическая динамика электромеханических систем. М.: МЭИ, 1984, 62 с.
2. Міклашэвіч І.А. Электрамеханіка. Вуч. дапаможнік для студ. спец. Т14-02. Мн.: БДТУ, 2000, 132 с.
3. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1990, 592 с. (Гл. 15)
4. Woodson H.H., Melcher I.R. Electromechanical dynamics. Part I: Discrete systems. N.-Y.: J. Wiley, 1968, 329 p.

УДК 531.00

## **«ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» ДЛЯ НЕМАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ: СОДЕРЖАНИЕ И ОБЪЕМ**

**В. Э. Завистовский**

Современные процессы развития общества требуют внедрения высоких технологий и наукоемких производств, реализовать которые способны только специалисты нового поколения, владеющие математикой, механикой, информатикой и методами управления. В связи с этим возникает необходимость

переосмысления содержательной компоненты образования [1] на основе возрастающей роли фундаментального блока и цикла общепрофессиональных дисциплин.

В системе образования Республики Беларусь существует целый ряд специальностей технического профиля (радиотехнического, технологического, агротехнического, инженерно-педагогического) в образовательных стандартах которых фундаментальная инженерная подготовка практически не представлена, а именно она определяет присутствие инженерной приставки в квалификации, например, «радиоинженер», «инженер-технолог» и др.

Фундаментальная инженерная компонента (ФИК), включает в себя такие дисциплины как теоретическая механика, теория механизмов и машин, сопротивление материалов, материаловедение, детали машин и обеспечивает проектно-конструкторскую профессиональную деятельность специалиста. В образовательных стандартах указанных специальностях она представлена интегрированными дисциплинами «Техническая механика» и «Прикладная механика». Надо отметить, что дисциплина «Прикладная механика» в образовательных стандартах, представлена достаточно весомо и в состоянии обеспечить ФИК: объем аудиторной нагрузки — 190–220 часов. Совсем иначе обстоит дело с дисциплиной «Техническая механика». В таблице приведены сведения из образовательных стандартов некоторых специальностей радиотехнического и инженерно-педагогического профиля. Из таблицы видно, что объем аудиторных занятий по специальностям Т.10.03.00, Т.09.01.00 и Т.09.02.00, даже с учетом интенсивной и активной самостоятельной работой студентов, не позволяет говорить о какой-то фундаментальной инженерной подготовке. В блоке общенаучных и общепрофессиональных дисциплин образовательных стандартов радиотехнического профиля интегрированный курс «Техническая механика» по объему часов приравнен к химии и является самым малым, т.е. 2 часа аудиторных занятий в неделю, причем, полностью отсутствуют практические занятия. При таком объеме часов невозможно даже выполнение должного минимума содержания образовательной программы. Несколько лучше, но опять же недостаточен, объем аудиторных занятий на специальностях Т.08.01.00 и П.03.02.00, причем здесь предусмотрено выполнение курсового проекта. Такая ситуация с предметом «Техническая механика» просто недопустима, так как только эта интегрированная дисциплина позволяет студенту уяснить прикладную роль и место высшей математики и физики в овладении основ теоретической механики, теории механизмов и машин, сопротивления материалов и других технических дисциплин. Видимо, такое отношение к указанной дисциплине есть результат «слепой» унификации образования радиотехнического профиля [2,3].

Специальность	Объем аудиторных занятий, час.	Минимум содержания образовательной программы	Должен знать и уметь использовать:	Должен иметь навыки и владеть:
<b>Т.10.03.00 — Вычислительные машины, системы и сети</b>	35	<p>Основы теории механизмов, сила и система сил; условия равновесия плоской системы сил. Кинематические пары, кинематический анализ механизмов. Основы расчета точности механизмов; допуски, виды посадок, погрешности, шероховатость, методы расчета ошибок механизмов. Основы расчета на прочность; понятие о деформациях и напряжениях, диаграмма напряжений. Механические характеристики материалов, твердость материала и его оценка. Виды изгиба, изгибающий момент. Понятие об усталости и пределе выносливости материалов. Механизмы прерывистого движения. Кулачковые и рычажные механизмы. Передача "винт-гайка". Направляющие движения, опоры, неразъемные соединения, муфты, упругие элементы, механизмы электронных средств.</p>	<p>- уравнения движения точки и тел; -расчеты на прочность при простых видах деформаций; -методы расчета деталей и узлов машин; -характеристика конструкционных и электротехнических материалов.</p>	<p>-расчета и анализа реальных конструкций на прочность</p>
<b>Т.09.01.00 — Радиотехника</b>	30	<p>Основы расчетов на прочность; соединения; упругие элементы; опоры и направляющие. Основы теории механизмов; зубчатые передачи; фрикционные передачи; механизмы прерывистого движения. Общая методика проектирования механических систем. Общее уравнение динамики для подвижной системы материальных точек; условия равновесия; уравнения динамики системы в обобщенных координатах. Колебания механической системы с одной степенью свободы.</p>	<p>-характеристики радиоматериалов; -методы расчетов на прочность соединений -различные виды механических передач в радиотехнических устройствах.</p>	<p>-измерения основных характеристик механических соединений и передач; -выполнения расчетов и проектирования механических систем.</p>

<p>Т.09.02.00 — <i>Радиотехнические системы</i></p>	<p>35</p>	<p>Конструкционные материалы. Основные понятия сопротивления материалов. Растяжение. Сжатие. Сдвиг. Кручение. Изгиб. Валы. Оси. Пружины. Опоры скольжения. Опоры качения. Механические передачи радиопередающих устройств и радиотехнических систем. Кулачковые передачи. Передачи зацеплением. Фрикционные передачи. Специальные передачи с гибкой связью. Соединения.</p>	<p>-методы расчетов механических систем; -характеристики конструктивных и радиотехнических материалов</p>	<p>-расчета и анализа механических передач радиотехнических устройств и систем; -методами расчетов механизмов и машин радиотехнических систем.</p>
<p>Т.08.01.00 — <i>Проектирование и производство радиоэлектронных средств</i></p>	<p>90</p>	<p>Основы расчетов на прочность; соединения; угругие элементы; опоры и направляющие; основы теории механизмов; основы теории точности механизмов; зубчатые передачи; фрикционные передачи; механизмы прерывистого движения; методика проектирования и механические колебания систем; общая методика проектирования механических систем; принцип возможных перемещений; общее уравнение динамики для подвижной системы материальных точек; условия равновесия и уравнения динамики системы в обобщенных координатах; колебания механической системы с одной степенью свободы.</p>	<p>-методы расчета механических систем; -методы расчета зубчатых, фрикционных передач; -методику проектирования механических колебательных систем; -методы измерения геометрических параметров, средства измерения шероховатостей.</p>	<p>-расчетов механизмов и машин.</p>
<p>П.03.02.00 <i>Трудовое обучение</i></p>	<p>125</p>	<p>Общие принципы конструирования, расчета и надежной эксплуатации технических систем. Основы расчета абсолютно твердого тела как модели механического объекта. Основы кинематики и динамики машин и механизмов. Особенности расчета, конструирования и надежной эксплуатации типовых элементов машин.</p>	<p>-методы расчетов механических систем; -характеристики конструктивных материалов и сплавов.</p>	<p>-методами расчетов механических конструкций, механизмов и машин на прочность; -способами выбора конструктивных материалов для конкретных условий их применения.</p>

На основании многолетнего опыта преподавания данной дисциплины и с учетом приведенных материалов предлагается:

1. Внести изменения в образовательные стандарты анализируемых специальностей с целью повышения роли курса «Техническая механика» в общинженерной подготовке и довести объем аудиторных занятий как минимум до 75 часов.

2. Разработать единую концепцию курса «Техническая механика», создать типовую рабочую программу и творческие коллективы по подготовке комплекса учебно-методической литературы.

### **Литература**

*1. Завистовский В.Э., Соколова Н.В. Некоторые подходы к совершенствованию стандартов технического образования // Теория и практика стандартизации образования: Материалы Междунар. науч.-практ. Конф., Минск, 18–19 янв. 2001 г.— Мн.: БГПУ им М.Танка, 2001. Ч.1, с.142–143.*

*2. Образцов Н.С., Ткачук А.М. Основные принципы разработки образовательных стандартов радиотехнического профиля // Там же, с.153–155.*

*3. Образцов Н.С., Ткачук А.М. Особенности разработки образовательного стандарта по специальности «Проектирование и производство радиоэлектронных средств» // Там же, с.155–157.*

УДК 621. 01; 621 + 621.52(075.8)

## **ТИПОВАЯ ПРОГРАММА НОВОГО УЧЕБНОГО КУРСА «ТЕОРИЯ МАШИН-АВТОМАТОВ И МАНИПУЛЯТОРОВ» И ЕЕ МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ.**

**П. П. Анципорович, В. К. Акулич, Э. И. Астахов, В. В. Кудин**

Широкое развитие в настоящее время новых интеллектуальных технологий, очувствленных роботизированных комплексов, адаптивных машин, биологосистем «человек-компьютер» и т.д. вызывают потребность в подготовке в вузах соответствующих специалистов. С этой целью на машиностроительном факультете БГПА с 2001 г. начата подготовка инженеров по новым специальностям; Т.23.01 «Интеллектуальные приборы, машины, технологии и производства». и Т.23.02 «Интегральные сенсорные системы». В учебный план этих специальностей включен новый учебный курс «Теория машин — автоматов и манипуляторов» (ТМА и М) в



объеме 179 часов (лекций — 72, практических занятий — 54, лабораторных работ — 36, групповые консультации по курсовому проектированию — 17 часов). Кафедре «Теория механизмов и машин» БГПА поручено подготовить типовую программу этого нового курса и в дальнейшем разработать ее учебно-методическое обеспечение. Используя предыдущий опыт разработки программ новых учебных дисциплин в работах [1], [2], [3] авторов и методические концепции работы [4], предлагается следующий вариант программы.

В предлагаемом проекте типовой программы ТМА и М лекционный курс состоит из введения и 4-х разделов, включающих 21 тему.

**Тема 1.** Введение (современное производство как совокупность технологических, транспортных, энергетических и информационных процессов).

**Раздел 1.** Основы теории механизмов и машин (темы 2–11):

- основы строения, структура механизмов;
- кинематические и геометрические характеристики механизмов (рычажных и зубчатых);
- динамическое исследование движения машин и механизмов с жесткими звеньями;
- силовой анализ, трение и изнашивание в механизмах;
- качественная оценка механизмов и машин;
- исследование движения машин и механизмов с упругими звеньями, колебания в механизмах;
- использование вибраций, защита от вибраций, уравнивание звеньев и механизмов;
- общие методы синтеза, синтез рычажных механизмов;
- синтез зубчатых передач и механизмов;
- синтез кулачковых механизмов.

**Раздел 2.** Основы теории роботов и манипуляторов (темы 12–14):

- структура и основные параметры роботов и манипуляторов;
- геометрия и кинематика манипуляторов (методы преобразования координат в матричной форме);
- динамика манипуляторов (в матричной форме).

**Раздел 3.** Основы теории машин — автоматов (темы 15–18):

- структура и производительность машин — автоматов;
- синтез принципиальной, структурной и компоновочной схемы машины — автомата;
- динамика приводов машин — автоматов и роботов;
- динамические показатели качества машин, машин — автоматов и манипуляторов.

**Раздел 4.** Системы управления машин — автоматов промышленных роботов (темы 19–21):

- структура и параметры автоматических систем управления;
- синтез логических двоичных систем управления по пути;
- современные системы управления промышленных роботов и робототехнических комплексов.

Тематика практических занятий включает такие вопросы: 1) Определение степени подвижности плоских механизмов и пространственных манипуляторов. 2) Структурный анализ и синтез плоских механизмов. 3) Кинематический анализ плоского рычажного механизма методом планов. 4) Кинематический анализ кулачкового механизма методом диаграмм. 5) Кинематический анализ зубчатых механизмов с подвижными осями колес. 6) Определение передаточных функций рычажных механизмов с заданным относительным движением. 7) Определение параметров динамических моделей машин и механизмов. Приведение сил и масс. 8) Определение закона движения звена привода. 9) Определение инерционных нагрузок звеньев плоских механизмов. 10) Силовой расчет плоских механизмов. 11) Трение в кинематических парах и к.п.д. механизмов. 12) Уравновешивание роторов и механизмов. 13) Определение размеров и качественных показателей цилиндрической зубчатой передачи. 14) Определение основных размеров кулачковых механизмов. 15) Определение параметров динамической модели механизма с упругими звеньями. 16) Анализ собственных и вынужденных колебаний поступательного звена механизма. 17) Расчет параметров и анализ эффективности виброизоляции машины. 18) Синтез рычажных механизмов по коэффициенту изменения скорости и по положениям звеньев. 19) Определение маневренности, размеров рабочей зоны и коэффициента сервиса манипулятора 20) Определение координат схвата манипулятора методом преобразования координат. 21) Определение инерционных нагрузок звеньев манипулятора. 22) Составление структурной схемы машины — автомата многопозиционного станка, его циклограммы, определение производительности. 23) Определение динамических показателей электропривода с упругой муфтой. 24) Анализ динамики разгона поступательного гидропривода. 25) Анализ динамики торможения поступательного пневмопривода. 26) Разработка логической многотактной СУ контрольного автомата.

Примерный перечень лабораторных работ:

- 1) Условные обозначения кинематических схем машин и составление структурных схем механизмов.
- 2) Структурный анализ и синтез плоских механизмов.
- 3) Исследование кинематических характеристик рычажного механизма на ЭВМ.

- 4) Определение передаточных отношений зубчатых механизмов.
- 5) Определение приведенного момента инерции рычажного механизма.
- 6) Определение КПД винтового механизма.
- 7) Динамическая балансировка пространственного ротора.
- 8) Профилирование эвольвентных зубьев колес на приборе.
- 9) Определение размеров и параметров цилиндрической зубчатой передачи на ЭВМ.

10) Определение параметров и анализ эффективности динамического виброгасителя.

11) Исследование жесткости механической цепи манипулятора.

12) Определение динамических характеристик манипулятора резонансным методом.

13) Экспериментальное определение характеристик рабочей машины.

14) Исследование собственных и вынужденных колебаний двухмассовой модели машины на ЭВМ.

15) Анализ динамики разгона и торможения гидропривода на ЭВМ.

16) Исследование на ЭВМ колебаний упругого толкателя кулачкового механизма.

17) Исследование динамики разгона электропривода на ЭВМ.

18) Исследование на ЭВМ отработки траектории схватом манипулятора.

Большинство лабораторных работ уже имеются в лабораториях кафедры по учебным курсам «Теория механизмов и машин», «Колебания в машинах методы их устранения», «Динамика машин». Небольшое число работ (в частности по манипуляторам и машинам-автоматам) необходимо подготовить в течение учебного года до прихода студентов названных специальностей на кафедру для изучения данного учебного курса.

Курсовой проект по курсу «ТМА и М» планируется в объеме 4 чертежных листов формата А1 и пояснительной записки с необходимыми пояснениями, алгоритмами, расчетами и выводами. Задание на курсовой проект является комплексным, предусматривающим проектирование и исследование основных видов механизмов, объединенных в систему машины-автомата, промышленного робота, РТК или автоматического устройства. В проекте предусматривается разработка следующих вопросов:

1) кинематический синтез и анализ механической цепи манипулятора промышленного робота (или РТК) по отработке заданной траектории схвата;

2) динамический анализ движения звеньев манипулятора;

3) анализ динамической нагруженности механической цепи манипулятора;

4) разработка принципиальной логической схемы управления пневмоцилиндрами манипулятора.

Расчеты по большинству разделов курсового проекта выполняются на ЭВМ с использованием как типовых компьютерных программ, разработанных на кафедре, так и специальных программ, разработанных некоторыми студентами по соответствующей теме проекта.

Изучение такого курса ТМА и М студентами указанных (в начале) специальностей позволит решить следующие задачи:

1) научиться составлять расчетные схемы и модели механизмов и машин, предназначенных для решения технологических и технических задач, возникающих на различных этапах конструирования машин-автоматов и промышленных роботов; 2) создавать программные продукты, применяемые в системах управления современных машин-автоматов; давать качественную оценку применяемых механизмов, машин и систем управления и производить их оптимизацию по различным критериям;

3) обучить использовать современные интеллектуальные системы управления в машинах-автоматах и промышленных роботах с целью наиболее полного использования физических свойств механической системы с одной стороны и интеллектуальных возможностей управления с другой стороны.

## Литература

1. *Теория механизмов, машин и манипуляторов. Типовая программа для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений / Составители: Анципорович П.П., Акулич В.К. — Мн.: БГПА, 2001г. — 12с.*

2. *Колебания в машинах и методы их устранения. Типовая программа для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. Проект./ Составители: Кудин В.В., Астахов Э.И. — Мн.: БГПА, 1999. — с.*

3. *Астахов Э.И., Кудин В.В. Содержание и методическое обеспечение нового учебного курса «Динамика станков». Материалы Республиканского научно-методического семинара преподавателей кафедр теоретической механики, теории машин и механизмов, сопротивления материалов ВУЗов Беларуси. Минск, 15–17 июня 2000г. /Под ред. А.В. Чигарева, В.К. Сапелкина. — Мн.: УП «Технопринт», 2001, с.75–76.*

4. *Коловский М.З., Смирнов Г.А. О некоторых особенностях преподавания теории механизмов и машин для специализации «Робота и манипуляторы». Сборник научно-методических статей по теории механизмов и машин». Вып. 10. — М.: Высш. шк., 1984, с.55–59.*

## **ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА «ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВГУ**

***В. Г. Буткевич***

Абстрактный характер общенаучных дисциплин накладывает негативный отпечаток на усвоение курсов, приводит студентов к мнению о неважности их изучения. Это убеждение в большей мере относится к студентам-технологам, чья будущая работа тесно связана с предприятиями текстильной промышленности, на которых, за редким исключением, реализованы технологии 60-х годов и используется устаревшее оборудование.

Основная цель, по нашему мнению, преподавания общенаучных дисциплин, к которым относится и курс «Теория механизмов и машин» показать тесную взаимосвязь его с прикладными дисциплинами, сформировать у студента мировоззрение инженера, развить техническое мышление, без которого невозможно решать на производстве технические, технологические и организационные задачи.

Предлагаемый курс должен помочь студенту научиться понимать технику, анализировать структуру технических устройств, определять принципы их действия, обнаруживать недостатки, несовершенства, находить неполадки, улавливать сущность динамических, геометрических и силовых параметров машины при изменении нагрузок и т.д. Без этого невозможно конструирование новых и совершенствование уже действующих машин и технологических процессов.

Основной характеристикой курса ТММ должен стать его теоретико-практический характер. Необходимо стремиться максимально приблизить теоретические аспекты курса к решению конкретных практических задач. Например, при изучении структурного анализа и синтеза механизмов необходимо, для студентов-прядаильщиков, рассматривать вопросы на базе машин прядаильного производства (например чёсальной); при изучении вопросов, связанных с проектированием эвольвентных профилей целесообразно рассмотреть дифференциал ровничной машины и т.д.

Для технологических специальностей учебными планами предусматриваются все виды нагрузки: лекции, практические и лабораторные работы, курсовой проект, самостоятельная работа студентов.

Методика чтения лекций для студентов-технологов в области текстильной промышленности имеет ряд специфических особенностей. В связи с тем, что

курс «Теория механизмов и машин» объединяет в единое целое несколько самостоятельных дисциплин, особое значение приобретает вопрос о межпредметных связях. Причем их необходимо установить не только между разделами самого курса, но и не нарушить связей со смежными дисциплинами. Следует также учитывать требования специальных дисциплин, таких как «Прядение натуральных и химических волокон», «Технология тканей и трикотажа» и др., которые изучаются студентами-технологами на более старших курсах.

Лекционный курс должен включать в себя и те вопросы, которые непосредственно могут возникнуть перед студентами в дальнейшей их профессиональной деятельности. Поэтому в разделы включаются задачи анализа и синтеза базового, для каждой специальности, оборудования: ткацкого, трикотажного, прядильного.

Для качественного изучения и успешного освоения курса студент под контролем преподавателя должен выполнить ряд достаточно серьезных и объемных лабораторных и практических работ. В заданиях к ним предусматривается использование как приобретенных знаний по другим дисциплинам (например «Введение в специальность»), так и внедрение элементов расчетов, характерных для будущей специальности студентов. Выполнить на достаточно уровне объем лабораторных и практических работ студент может только в том случае, если ранее были изучены только в полном объеме курсы «Сопротивление материалов», «Теоретическая механика», «Высшая математика», «Инженерная графика». Студенты учатся не только рассчитывать и конструировать машины и их узлы в соответствии с требованиями стандарта, но и воплощать результаты на практике.

Полное изучение курса «Теория механизмов и машин» невозможна без курсового проектирования. По нашему мнению курсовой проект должен быть максимально приближен к базовой специальности студента и отражать те вопросы, которые ему предстоит решать на практике. Чтобы придти к такому проектированию необходимо: поставить значимые задачи, связав их с будущим профессиональным предназначением студента; соподчинить все решаемые задачи единой цепи; включить в проектирование вопросы обоснованного выбора, в том числе промежуточных входных данных; освободить проект от задач, непосредственно не связанных с достижением основной цели, являющихся нежелательным фоном для основной задачи.

Исходя из такого понимания целей проекта по ТММ — первого в творческой биографии студента, нами разработано новое его содержание, которое можно рассматривать как «введение» в проектирование современных высокопроизводительных машин текстильной промышленности. В конечном итоге проект должен логически стыковаться со следующим проектом

по «Деталям машин», позволяя при необходимости получить для него входные данные.

Исходными для проектирования являются базовые элементы с реально существующего оборудования, а также основные скоростные их параметры. В процессе проектирования и на защите проекта внимание студента концентрируется на принципиальных вопросах избранной им специальности, вопросах преемственности и обоснования выбора вариантов решений, исторических аспектах развития машин и др.

Таким образом, предлагается полностью изменить профориентацию проектирования и его сущность. На примере своего задания студент не только осваивает методику разработки технических предложений, но и постигает высшие цели будущей специальности в начале своей творческой карьеры, убеждается в том, что инициатива и самостоятельность — отличительные черты профессии инженера.

При изучении курса «Теория механизмов и машин» важную роль играет самостоятельная работа студентов.

Проанализировав опыт организации самостоятельной работы студентов технологических специальностей ВГТУ мы убедились, что ее формы могут и должны быть различны в зависимости от этапов обучения. Как показали наши исследования, при изучении ТММ студентами-технологами наиболее целесообразной является индивидуальная форма организации самостоятельной работы студентов. Она предполагает выполнение различных индивидуальных заданий: самостоятельное решение отдельных задач, работа с карточками — заданиями, работа с компьютером и др.

В процессе разработки индивидуальных заданий мы придаем им практическую направленность и учитываем реально возникающие ситуации, чтобы в дальнейшем сформировать исследовательский стиль умственной деятельности студентов, научить их мыслить, рассуждать и применять полученные знания на практике. Разнообразие видов индивидуальных заданий позволяет в большей степени заинтересовать студента в самостоятельной работе, тем самым способствуя эффективности ее проведения и повышению результатов.

Кроме индивидуальной, организована и коллективная форма самостоятельной работы. Она создает благоприятные условия для коллективного решения предлагаемых заданий, стимулирует совместные действия студентов, что в конечном итоге формирует общее мнение и вырабатывает единую позицию по отношению к изучаемой дисциплине.

Степень понимания и усвоения курса ТММ выявляется с помощью различных видов контроля. На кафедре ТМ и ТММ контроль знаний, полученных на лабораторных и практических занятиях, осуществляется с помощью пакета программ, обеспечивающих диалоговый режим работы с ЭВМ.

Совершенствование методики преподавания курса «Теория механизмов и машин» способствует выработке заинтересованного отношения студентов-технологов к механике и оборудованию. Это подтверждается тем фактом, что отдельные студенты успешно выполнили исследовательские дипломные проекты, связанные с разработкой новых видов оборудования прядильного производства под руководством преподавателей кафедры «Теоретическая механика и теория механизмов и машин».

Комплексное сочетание дисциплин, входящих в курс ТММ, а также используемая вышеприведенная методика, должны обеспечить будущим молодым специалистам возможность свободной ориентации в многообразии общетехнических проблем.

УДК 621.9(07)+621.01

## **ОСОБЕННОСТИ ОТРАЖЕНИЯ ВОПРОСОВ РЕЗАНИЯ И ТРЕНИЯ В УЧЕБНОМ КУРСЕ «ДИНАМИКА СТАНКОВ»**

***Э. И. Астахов, В. В. Кудин***

Для улучшения фундаментальной механико-математической подготовки будущих инженеров-механиков по специальности «Металло-режущие станки и инструменты» на 4-ом курсе машиностроительного факультета БГПА с 2000г. введен новый курс «Динамика станков» в объеме 17 часов лекций, 17 часов лабораторных. Чтение этого курса поручено кафедре «Теория механизмов и машин», преподавателями которой в 2000/2001 учебном году разработана базовая учебная программа, подготовлен конспект лекций, поставлены 8 новых лабораторных работ. Цель данного учебного курса — научить студентов применять в инженерной практике методы теоретической механики, ТММ, теории колебаний и теории автоматического регулирования для анализа динамических систем металлорежущих станков и другого технологического оборудования с учетом упругости элементов конструкции станков, диссипативных потерь энергии в узлах, технологических процессов, а также показать пути и методы проектирования кинематических схем и конструкций станков с улучшенными динамическими параметрами (быстродействие, виброустойчивость, точность, запас устойчивости, динамическая жесткость, спектр собственных частот, резансные амплитуды колебаний, виброакустические характеристики).

При подготовке этого курса, используя предыдущий опыт чтения курсов «ТММ», «Колебания в машинах» в БГПА, «Динамика и виброзащита» в БГТУ



не возникло особых трудностей по изложению вопросов динамических моделей станков, динамических систем и упругих систем СПИД (станок, приспособление, инструмент, деталь). Некоторые сложности возникли при изложении разделов динамики резания в станках и динамики трения в суппортах станков. Для подготовки этих специфических разделов были использованы как немногочисленные учебные пособия [1,2] по этому курсу в других вузах, так и специальная литература по металлорежущим станкам [3].

Резание представляет собой комплекс взаимосвязанных процессов деформирования, трения, теплового и др. Сила резания нелинейно зависит от многих факторов (скорости резания, подачи, параметров детали и инструмента) и их взаимосвязи. Для определения сил резания при различных видах обработки использованы эмпирические формулы из литературы [1,2,3], учитывающие как параметры режима резания (подача и скорость резания), так и физико-механические свойства обрабатываемых деталей и параметры инструмента.

После превышения определенного уровня режимов резания в системе СПИД возникают вибрации — автоколебания инструмента относительно заготовки. Нормальный процесс резания может протекать при небольших колебаниях, образующих на обрабатываемой поверхности волнистость в допустимых пределах. При дальнейшем повышении режимов резания в системе возникают недопустимые автоколебания, и она теряет устойчивость. Основными причинами автоколебаний при резании являются: 1) нелинейность характеристики силы резания, наличие убывающих участков зависимости сила — скорость; 2) инертность самого процесса резания, сдвиг фаз между колебаниями и изменением сил резания; 3) изменение толщины среза и силы резания вследствие относительного движения инструмента и заготовки по сложной замкнутой траектории, обусловленной наличием двух и более степеней свободы упругой системы; 4) сочетанием двух и более вышеназванных факторов.

Для закрепления раздела динамики резания студентами выполняется лабораторная работа «Исследование динамики резания токарной обработки при нелинейной характеристике силы резания», в которой по заданной схеме продольного течения токарного станка составляется упрощенная одномассовая динамическая модель поперечных колебаний этого узла. Выписывается эмпирическая зависимость силы резания, по которой при заданных параметрах режима резания, параметрах узла станка исследуется нелинейная зависимость силы резания и ее крутизна, т.е. производная от силы резания по скорости. Составив и решив дифференциальное уравнение поперечных колебаний резца, производится анализ возможности появления автоколебаний при резании сравнением величины крутизны силы резания и коэффициента сопротивления упругой системы резца.

При изложении вопросов динамики трения в станках подчеркивается нелинейная зависимость силы и коэффициента трения от скорости скольжения, что особенно важно при рассмотрении трения в направляющих суппортов станков. Для учета влияния схемы нагружения суппорта на величину силы трения используют приведенный коэффициент трения, как отношение суммарной силы трения к сумме проекций активных сил на нормаль к направляющей.

Особенно выделяется вопрос о возникновении фрикционных автоколебаний (в направляющих суппортов станков), которые вызываются нелинейной зависимостью силы трения и неоднозначной зависимостью силы трения от перемещения. Такие условия возникают при скачке силы трения от покоя к движению, убывающей характеристике силы трения от скорости, зависимости силы трения от времени неподвижного контакта, инерционности трения, а также особенностей упругой системы СПИД с несколькими степенями свободы. Как известно, автоколебания бывают двух видов: 1) почти гармонические (квазигармонические); 2) релаксационные (резко отличающиеся от гармонических), разрывные — к последним относится скачкообразное перемещение узлов.

Для закрепления раздела динамики трения в станках выполняется лабораторная работа «Исследование фрикционных автоколебаний суппорта станка при ступенчатой характеристике трения», разработанная на основе математических зависимостей в литературе [4, 5]. В ней по заданной схеме привода суппорта станка составляется одностепенная динамическая модель, приводится ступенчатый график силы трения скольжения. Записывается дифференциальное уравнение движения суппорта и его решение на участке срыва, когда сила упругости привода становится более силы трения покоя. По рассчитанным значениям перемещения и скорости строятся их графики и производится анализ движения суппорта.

## Литература

1. Кудинов В.А. Динамика станков. — М.: Машиностроение, 1967. — 359 с.
2. Орликов М.Л. Динамика станков: Учебн. пособие. — Киев: Вища школа, 1980, — 256 с.
3. Металлорежущие станки: Учебник для машиностроит. вузов/Под ред. В.Э. Пуша. — М.: Машиностроение, 1986, — 576 с.
4. Левитский Н.И. Колебания в механизмах: Учебн. пособие для вузов. — М.: Наука, 1988, — 336 с.
5. Астахов Э.И., Кудин В.В. Колебания в машинах и методы их устранения. — Учебн. пособие для студ. машиностроит. спец. — Мн.: БГПА, 1977, — 131 с.

## ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО КУРСУ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

**Ю. А. Грибков, А. М. Моисейков**

Курс теории механизмов занимает важное место в цикле общинженерных дисциплин, обеспечивающих фундаментальную подготовку инженеров для Вооруженных сил Республики Беларусь. Успешное усвоение этого курса во многом зависит от качества выполнения лабораторных работ.

Лабораторные занятия имеют целью углубить и закрепить теоретические знания, полученные курсантами на лекциях, обучить их методам экспериментальных исследований, привить навыки обобщения полученных результатов. В лабораториях курсанты знакомятся с работой типовых механизмов, вникают в физическую сущность явлений, знакомятся с методами измерения геометрических, кинематических, динамических параметров механизмов, получают навыки работы с измерительными приборами.

Данному виду занятий на кафедре механики Военной академии РБ уделяется достаточно большое внимание, так в курсе теории механизмов объемом в 66 часов 18 часов отведено на лабораторные работы.

В зависимости от количества обучаемых в учебных группах, занятия проводятся либо фронтальным, либо циклическим методами. Применение последнего метода проведения работ связано с отсутствием достаточного количества лабораторных установок. В этом случае начитывается теоретический материал, а затем организуется цикл лабораторных работ. Смена мест подгрупп производится по круговой системе.

Эффективность лабораторных занятий обеспечивается широким использованием активных методов обучения, организацией их проведения.

Подготовка курсантов к лабораторным занятиям включает:

- изучение задания на лабораторную работу, ознакомление с лабораторной установкой, порядком выполнения работы;
- повторение или дополнительное изучение основных теоретических положений, необходимых для понимания сути лабораторных исследований и ответов на предусмотренные заданием контрольные вопросы;
- предварительное оформление отчетов по лабораторной работе, где указывается цель, краткое описание оборудования, при необходимости проводятся предварительные расчеты и графические построения;
- изучение правил техники безопасности применительно к лабораторной установке.

Как правило, подготовка к занятию осуществляется на обязательной самостоятельной подготовке накануне дня проведения. Организует данную консультационную работу профессорско-преподавательский состав, который разрабатывает соответствующие задания по каждой лабораторной работе. В обязательном порядке к проведению занятий привлекается инженерно-технический состав учебной лаборатории.

Военная направленность обучения достигается привязкой лабораторных установок к военной технике. Так, для определения кинематических параметров зубчатых механизмов используется коробка приводов агрегатов авиационного газотурбинного двигателя.

Преподавателями кафедры разработаны два учебно-методических пособия по лабораторному практикуму.

На кафедре практикуется жесткие временные рамки защиты отчетов по лабораторным работам. Курсанты, не прошедшие данный вид отчетности, к зачетам и экзаменам не допускаются, как не выполнившие в полном объеме учебный план по данной дисциплине.

УДК 539.3/8

## ПРИМЕНЕНИЕ ПЭВМ В КУРСЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

*С. С. Шапилевич, В. В. Коптик*

Для летательных аппаратов характерны очень жесткие требования по их массе с обеспечением необходимой прочности и жесткости конструкции. Это обуславливает применение на современных самолетах и вертолетах моноблочных и лонжеронных крыльев. Основным признаком таких крыльев является наличие силовых блоков, набранных из тонкостенных конструкций и выполненных из различных материалов (рис. 1).

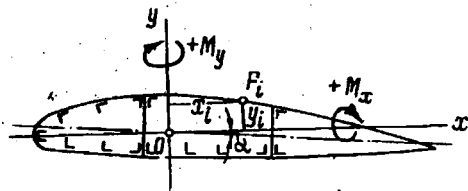


Рис. 1 Нагрузки, действующие на силовой блок

Определение напряжений при поперечном изгибе оболочек и вычисление их несущей способности ведется по методу редуционных коэффициентов.

Как известно из курса сопротивления материалов, нормальные

$$\sigma_i = \varphi_i \left( \frac{N}{F_{ред}} - \frac{M_x}{I_{ред}} y_i + \frac{M_y}{I_{ред}} \right), \quad (1)$$

Расчет напряжений и несущей способности подкрепленной оболочки требует вычисления редуционных коэффициентов, которое невозможно без предварительного построения диаграмм при растяжении и сжатии поясов лонжеронов и стрингеров (рис. 2).

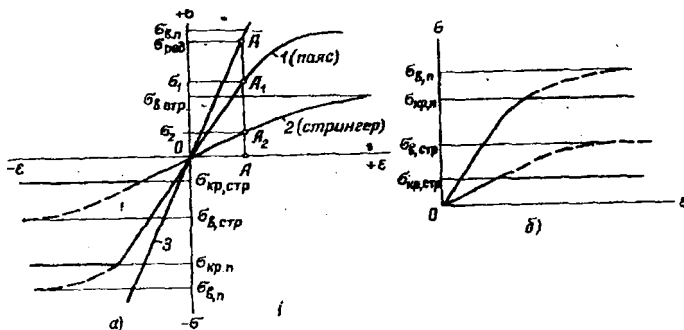


Рис. 2. Диаграмма растяжения и сжатия поясов лонжеронов и стрингеров

Диаграммы для элементов оболочки в области растяжения полностью совпадают с соответствующими диаграммами для материала, получаемыми из стандартных испытаний.

Приведем примерный порядок вычисления нормальных напряжений по методу редуционных коэффициентов.

1. Строятся диаграммы растяжения—сжатия для поясов лонжеронов и стрингеров оболочки. Примерный вид этих диаграмм дан на рисунке 1. Кривая 1 относится к стальным элементам (пояса), кривая 2 — к дуралюминовым (стрингеры с присоединенной к ним обшивкой).

2. Оболочка приводится к идеальному материалу с модулем упругости  $E_0$  (диаграмма этого материала изображена рисунке 2 прямой 3). Чаще всего в качестве модуля  $E_0$  выбирают модуль стали. Тогда прямая 3 совпадает с прямолинейным участком кривой 1.

3. В первом приближении задаются редуционными коэффициентами  $\varphi_i$  для всех элементов панели.

В лонжеронных крыльях все элементы редуцируются по отношению к поясам. Редукционные коэффициенты поясов принимаются равными 1. Для стрингеров в сжатой зоне редукционный коэффициент в первом приближении принимают равным отношению критического напряжения стрингера к критическому напряжению лонжерона. Критические напряжения вычисляются по методике, принятой как для тонкостенных стержней. Редукционный коэффициент для растянутых стрингеров удобно брать равным отношению временных сопротивлений материалов стрингера и лонжерона. Для того чтобы привести обшивку к идеальному материалу с модулем  $E_0$ , надо умножить редукционный коэффициент обшивки по отношению к стрингеру на редукционный коэффициент стрингера по отношению к лонжерону. В результате для обшивки в сжатой зоне имеем следующую величину редукционного коэффициента:

$$\Phi_{\text{общ,сж}} = \Phi_{\text{стр,сж}} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{кр,общ}} E_{\text{стр}}}{\sigma_{\text{общ}} E_{\text{стр}}}}. \quad (2)$$

Редукционный коэффициент растянутой обшивки принимают равным:

$$\Phi_{\text{общ,р}} = \frac{\sigma_{\text{кр,общ}}}{\sigma_{\sigma,л}} = \Phi_{\text{стр,р}} \frac{\sigma_{\sigma,общ}}{\sigma_{\sigma,стр}}. \quad (3)$$

Моноблочные крылья и фюзеляжи не имеют продольных элементов типа поясов, все стрингеры имеют примерно одинаковые площади сечения. В этом случае редукционные коэффициенты стрингеров принимаются равными единице, а редукционные коэффициенты обшивки вычисляются по формулам (2) и (3).

4. После выбора редукционных коэффициентов вычисляются приведенные площади первого приближения:  $F_i^{\text{ред}} = \varphi_i F$ , определяются положение центра тяжести приведенного сечения, главные оси и главные моменты инерции  $I_x^{\text{ред}}, I_y^{\text{ред}}$ . Для того чтобы учесть ослабление растянутой зоны отверстиями под заклепки, площади растянутых элементов берутся на 10% меньше фактических.

5. Вычисляются нормальные напряжения в элементах редуцированного сечения  $\sigma_{i,1}^{\text{ред}}$  по формуле (1).

6. По найденным значениям  $\sigma_{i,1}^{\text{ред}}$ , определяют истинные напряжения  $y_{i,1}$  в элементах действительной оболочки по диаграмме (рисунок 2).

7. По найденным значениям напряжений  $y_{i,1}$  вычисляются редукционные коэффициенты во втором приближении:  $\varphi_{i,2} = \sigma_{i,1} / \sigma_{i,1}^{\text{ред}}$ . Если  $\varphi_{i,2}$  сильно отличаются от  $\varphi_{i,1}$  то расчет повторяется сначала, только значения редукционных коэффициентов берутся равными  $\varphi_{i,2}$ . Вычисления продолжают до тех пор, пока редукционные коэффициенты в двух последовательных приближениях не окажутся достаточно близкими друг к другу. Редукционные коэффициенты последнего приближения кладутся в основу окончательного вычисления ис-

тинных напряжений. Точность расчета можно считать удовлетворительной, если окончательные величины нормальных напряжений отличаются от предыдущего приближения не более чем на 5%.

Метод редуцированных коэффициентов дает точные результаты, но очень громоздкий и занимает много времени.

Расчет с помощью ПЭВМ уменьшит трудоемкие трудозатраты и увеличивает эффективность исследования напряженного и деформированного состояния авиационных конструкций.

Исходными данными являются: геометрические характеристики сечения крыла, механические характеристики конструкционных материалов, нагрузки, действующие на крыло.

В результате расчета получают: истинные напряжения в крыле, полное касательное усилие, постоянный угол закручивания крыла.

Таким образом, с помощью данной программы можно произвести точный расчет силовых элементов крыла на прочность. Это позволяет использовать ее в учебном процессе для ознакомления курсантов с методом редуцированных коэффициентов, а также применять ее при курсовом и дипломном проектировании для авиационных специальностей.

УДК 531.1

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЕДИНИЧНЫХ ФАКТОРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

**Г. С. Бокун, В. С. Вихренко**

Существует глубокая, идейная связь между подходами к решению разнообразных задач механики и методами решения систем линейных уравнений в математике. Здесь остановимся на подходах, наиболее тесно примыкающих к методам функций Грина и прогонки. В задачах механики эта взаимосвязь может быть реализована введением единичных факторов, что позволяет разбить решение громоздкой задачи на ряд простых «независимых» задач, каждая из которых решается как бы до конца, представляя собой заверченный этап исходного полного решения.

Такой подход широко используется в курсах сопротивления материалов, теории механизмов и машин. Достаточно упомянуть такие разделы, как «Универсальный метод определения перемещений в линейно-деформируемых системах» или «Расчет статически неопределимых систем методом единичной силы».

Не менее широко рассматриваемый подход используется в задачах кинематического анализа механизмов. Так, путем введения передаточных функций

показывается, что для описания многообразия движений механизма достаточно рассмотреть упрощенную задачу, когда приводное звено совершает равномерное движение с единичным значением скорости. Например, этот подход наглядно демонстрирует, как получить результаты всевозможных движений в случае двух степеней свободы, рассмотрев кинематику упрощенных движений с единичными скоростями. Поочередно «замораживая» одну из степеней свободы и изучая кинематику при единичном значении другой обобщенной скорости, легко путем суперпозиции получить характеристики составного движения.

Еще в большей мере этот подход применяется для установления общих закономерностей при рассмотрении динамики механизмов. Обратимся, например, к дифференциальной форме уравнения движения машины

$$J_{\text{пр.}} \cdot \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{\text{пр.}}}{d\varphi} = M_{\text{пр.}}, \quad (1)$$

в соответствии с которым движение под действием заданных сил определяется двумя характеристиками: коэффициентом инерции  $J$  и его производной по обобщенной координате  $dJ/d\varphi$ . Для вычисления последних рассматриваются две упрощенные задачи с введением единичных факторов. Значение  $J_{\text{пр.}}$  определяется расчетом кинетической энергии при единичной скорости, а для определения  $dJ/d\varphi$  решается прямая задача динамики об определении величины момента, который необходимо приложить к приводному звену (другие силы при этом игнорируются), чтобы обеспечить его равномерное движение с единичной обобщенной скоростью.

В связи с широкими возможностями такого подхода и интенсивным его использованием в названных дисциплинах, представляется целесообразным обратить внимание на этот аспект и в курсе теоретической механики. Как показал опыт, это не приводит к существенным дополнительным затратам времени, но приносит несомненную пользу.

Так, при изложении координатного способа задания закона движения точки, в качестве примера, рассматривалась задача 10.12 (здесь и далее номера задач из сборника [1]). Зависимость координаты ползуна от угла поворота кривошипа определяется координатным способом в виде

$$x_B = x_B(\varphi). \quad (2)$$

Далее скорость и ускорение ползуна были записаны в форме

$$V_B = \frac{dx_B}{d\varphi} \dot{\varphi}, \quad (3)$$



$$a_B = \frac{d^2 x_B}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{dx_B}{d\varphi} \ddot{\varphi}, \quad (4)$$

и было отмечено, что эти соотношения справедливы для любой системы, если может быть записано соотношение вида (2).

Соответственно, в дальнейшем при рассмотрении темы «Плоскопараллельное движение твердого тела» на практических занятиях были независимо рассчитаны скорость и ускорение ползуна (задача 18.9) при условии равномерного вращения кривошипа с единичной угловой скоростью. После этого студентам для самостоятельного расчета было выдано задание: определить значения  $V_B$  и  $a_B$  при произвольном сочетании численных значений  $w$  и  $e$  кривошипа. Неподдельный интерес был проявлен, когда при совместном обсуждении выяснилось, что правильность расчетов легко проконтролировать, опираясь на соотношения (3)–(4) и результаты предыдущей задачи, где  $\dot{\varphi} = 1$ , а  $\ddot{\varphi} = 0$ .

Излагаемый подход был также апробирован и в динамике при определении ускорения движения груза в различных трособлочных системах (задачи типа 33.38—33.45). Наряду с традиционным решением этих задач, сводящимся к построению системы линейных уравнений, связывающих ускорения с силами, рассмотрено решение, основанное на введении единичных факторов. Искомое ускорение принимается известным и равным единице. Тогда вторая задача динамики становится первой. Решение последней существенно проще, так как сводится к последовательному рассмотрению в замкнутой форме отдельных элементарных задач (по числу тел в системе) по расчету сил, обеспечивающих известное движение каждого тела.

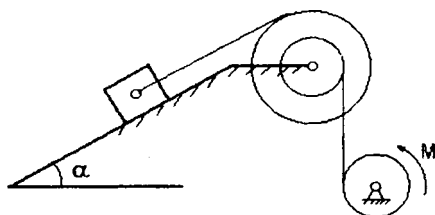


Рис. 1.

Например, в задаче (см. рис. 1) сначала ставился вопрос об определении момента  $M_1$ , необходимого для равномерного подъема груза по наклонной плоскости, затем необходимо было найти момент  $M_2$  при котором груз движется с единичным ускорением.

Далее, в силу линейности уравнений механики по отношению к ускорениям и силам утверждалось, что связь между приложенным моментом и ускорением груза должна быть линейной

$$a = \alpha + \beta M, \quad (5)$$

где коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  не зависят от  $a$  и  $M$ .

Для определения последних подставляем в (5) результаты рассмотренных выше задач и приходим к системе

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta M_1 \\ 1 = \alpha + \beta M_2 \end{cases} \quad (6)$$

Из (6) находим:

$$\beta = \frac{1}{M_2 - M_1}, \quad \alpha = -\frac{M_1}{M_2 - M_1}. \quad (7)$$

Тогда, согласно (5), зависимость ускорения от величины действующего момента  $M$  имеет вид

$$a = \frac{M - M_1}{M_2 - M_1} \quad (8)$$

В частности, такой подход оказался очень полезным для студентов, которые не смогли с первого предъявления выполнить контрольную работу по расчету трособлочной системы по общепринятой методике, когда задача решается в общем виде и все взаимосвязи надо увидеть и учесть с самого начала, сконструировав и решив систему линейных уравнений.

Излагаемый здесь подход представляется возможным использовать при рассмотрении задач по применению принципа Даламбера и общего уравнения динамики.

Например, если общее уравнение динамики можно записать в форме

$$\delta A^{(e)} + a \delta A^{ин} = 0, \quad (9)$$

где  $dA^{ин}$  – элементарная работа всех сил инерции, соответствующая единичному значению искомого ускорения  $a$ , то выражение для расчета ускорения принимает вид

$$a = -\frac{\delta A^{(e)}}{\delta A^{ин}}. \quad (10)$$

Не продолжая перечень задач, которые могли бы решаться в рамках излагаемого подхода, отметим, что нам представляется возможным «вкрапление»

метода единичных факторов при рассмотрении некоторых вопросов в курсе теоретической механики. Это не потребует существенных дополнительных затрат учебного времени, поможет студенту лучше усвоить как собственно теоретическую механику, так и глубже понять смысл линейности взаимосвязей (принцип суперпозиции), и осознанно воспринять в дальнейшем общие подходы, формулируемые фактически на этой основе в курсах сопротивления материалов, теории механизмов и машин и, естественно, не только в учебных целях.

### Литература

1. И. В. Мещерский. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1986. — 448 с.

УДК 517:531.112

## К ВОПРОСУ РАСЧЕТА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

**А. В. Локтионов**

В работах [1,2] скорость  $\vec{v}$  и ускорение  $\vec{a}$  в цилиндрической системе координат определяются как частный случай их расчета в ортогональных криволинейных координатах. Для расчета скорости определяются частные производные от декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки по соответствующим криволинейным координатам  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  и находятся коэффициенты Ляме  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ . Для ортогональных криволинейных координат модуль скорости точки определяется из выражения  $v^2 = \dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2$ .

Для расчета ускорения также используются коэффициенты Ляме, определяются соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщенным криволинейным скоростям  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_2$ ,  $\dot{q}_3$  и координатам  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  и полные производные по времени от полученных соответствующих разностей частных производных по  $\dot{q}$  и  $q$ .

Такая методика расчета кинематических параметров достаточно трудоемка. При этом искомые  $\vec{v}$  и  $\vec{a}$  определяются только в проекциях на подвижные цилиндрические оси координат  $r$ ,  $\phi$ ,  $z$ , связанные с движущейся точкой  $M$ .

В работах [3,4] скорость  $\vec{v}$  и ускорение  $\vec{a}$  получены с использованием векторного анализа. Матричное исчисление использовано в работе [3] для преобразования от прямоугольных к цилиндрическим системам координат, и наоборот.

Рассмотрим матричный метод расчета кинематических параметров в цилиндрических координатах и применим изложенную методику к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности [5,6].

Аналитические исследования по расчету кинематических параметров точки  $M$  (на рис. 1 не показана) матричным методом выполнены для случая, когда относительно центра  $O$  ее координаты  $x_3, y_3, z_3 = const$ .

В прямоугольной неподвижной системе координат  $xuz$  положение вектора  $\vec{R}$  (рис.1) определяется текущими координатами  $x, y, z$  точки  $O_3$ . В цилиндрической подвижной системе координат положение точки  $O_3$  определяется расстоянием  $r$ , углом  $\varphi$ , величиной  $O_2O_3 = z$ . Введем также подвижные системы координат  $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2$ , начало которых находится в точках  $O_1, O_2$ . Указанные на рисунке 1 системы координат составляют между собой углы, косинусы которых образуют матрицы  $A_1, A_2, A$ . В окончательных расчетных формулах принято, что  $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ ; точка  $M$  совпадает с точкой  $O_3$ . Проекция абсолютной скорости  $\vec{v}$  и ускорения  $\vec{a}$  точки  $O_3 = M$  определены как на неподвижные оси координат  $xuz$ , так и на подвижные цилиндрические оси координат  $x_3y_3z_3 (r, \varphi, z)$ .

Координаты точки  $M$  в неподвижной системе  $xuz$  в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе  $x_3y_3z_3$  следующим образом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix} + A_\varphi \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Вектор скорости  $\vec{v}$  точки  $M$  в системе  $xuz$  определяется дифференцированием текущих координат равенства (1) из выражения

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \left( A_\varphi \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + A_\varphi \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right).$$

При  $x_3, y_3, z_3 = const$  получим

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_\varphi \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + A_\varphi \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \dot{A}_\varphi \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

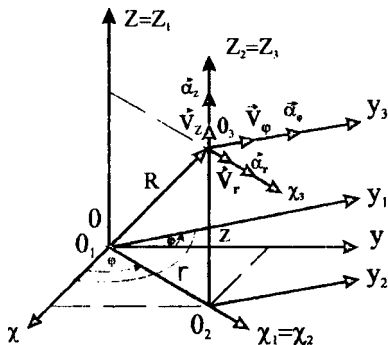


Рис. 1. Расчетная схема для определения кинематических параметров в цилиндрической системе координат

Из формулы (2) определяются проекции вектора скорости точки  $M(O_3)$  на неподвижные оси координат  $xyz$ , которые при  $x_3 = y_3 = z_3 = 0$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi; \\ \dot{y} &= v_y = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi;\end{aligned}\quad (3)$$

Модуль скорости точки  $\bar{v}_3$  найдется из равенств (3) по формуле

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}.\quad (4)$$

Направление вектора скорости определится из равенств (3) и (4) соответствующими направляющими косинусами.

В свою очередь вектор скорости  $\bar{v}_3$  точки  $M$  в системе  $x_3 y_3 z_3 (r, \varphi, z)$

$$\bar{v}_3 = A^T \bar{v},\quad (5)$$

где  $A^T$  — транспортированная матрица, равная произведению транспортированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке:  $A^T = A_2^T A_1^T A_\varphi^T = A_\varphi^T$ . В рассматриваемом случае системы координат  $x_1 y_1 z_1$ ,  $x_2 y_2 z_2$ ,  $x_3 y_3 z_3$  составляют между собой углы, косинусы которых образуют единичные матрицы  $A_1$  и  $A_2$ . Поэтому  $A = A_\varphi \cdot A_1 \cdot A_2 = A_\varphi$ , а  $A^T = A_\varphi^T$ .

Векторы  $\bar{v}$ ;  $\bar{v}_3$  в равенствах (2) и (5) представляют разложение одного и того же вектора  $\bar{v}$  по разным базисам систем координат  $xyz$  и  $x_3 y_3 z_3$ . С учетом (2) равенство (5) будет иметь вид

$$\bar{v}_3 = A_\varphi^T \dot{A}_\varphi \phi \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + A_\varphi^T \dot{A}_\varphi \phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\quad (6)$$

Из формулы (6) определяются проекции вектора скорости точки  $M(O_3)$  на подвижные цилиндрические оси координат  $x_3 y_3 z_3$ , которые при  $x_3 = y_3 = z_3 = 0$  имеют вид

$$\dot{x}_3 = v_r = \dot{r}; \quad \dot{y}_3 = v_\varphi = r\dot{\varphi}; \quad \dot{z}_3 = v_z = \dot{z}. \quad (7)$$

Модуль скорости точки  $O_3$  определяется из равенств (7) формулой (4), а направление скорости — направляющими косинусами.

Определим ускорение точки в цилиндрической системе координат матричным методом. Вектор ускорения  $\vec{a}$  точки  $M$  в системе  $x y z$  определится дифференцированием равенства (2)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{A}_\varphi \varphi^2 + \dot{A}_\varphi \dot{\varphi}) \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + 2\dot{A}_\varphi \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + A_\varphi \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + (\ddot{A}_\varphi \varphi^2 + \dot{A}_\varphi \dot{\varphi}) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Из формулы (8) определяются проекции вектора ускорения точки  $M(O_3)$  на неподвижные оси координат  $x y z$ , которые при  $x_3 = y_3 = z_3 = 0$  имеют вид:

$$\begin{aligned} a_x &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (r\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \sin \varphi; \\ a_y &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi - (r\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \cos \varphi; \\ a_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Модуль ускорения точки  $O$  определяется из равенств (9) по формуле

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}. \quad (10)$$

Направляющие косинусы вектора ускорения определяются из равенств (9) и (10). Вектор ускорения  $\vec{a}$  точки  $M$  в системе  $x_3 y_3 z_3$  ( $r, \varphi, z$ , см. рис. 1)

$$\vec{a}_3 = A^T \vec{a}. \quad (11)$$

С учетом (8) из равенства (11) получим проекции вектора ускорения точки  $M(O_3)$  на подвижные цилиндрические оси координат  $x_3 y_3 z_3$ , которые при  $x_3 = y_3 = z_3 = 0$  имеют вид (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} a_{x_3} &= a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \\ a_{y_3} &= a_\varphi = r\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}; \\ a_{z_3} &= a_z = \ddot{z}. \end{aligned} \quad (12)$$

Модуль ускорения точки  $O$  определяется формулой (10), а направление ускорения — направляющими косинусами.

Полученные расчетные формулы (2), (6) и (8), (11) позволяют определить скорость и ускорение точки  $M$  в цилиндрических координатах матричным методом.

Вывод формул для расчета проекций скорости и ускорения точки (см. рис.1) на неподвижные  $x_{uz}$  и подвижные  $x_3, y_3, z_3$  ( $r, \varphi, z$ ) оси координат достаточно прост. В рассматриваемом случае это объясняется тем, что все элементы третьей строки и столбца матрицы  $A = A_\varphi$ , кроме главной диагонали, равны нулю. Элемент главной диагонали равен единице. Кроме того, второй элемент столбцовых матриц расчетных формул (2), (6), (8), (11) также равен нулю; при расчете  $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ . Для численного расчета скорости и ускорения точки можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ.

Изложенную методику расчета кинематических параметров следует использовать для определения скорости и ускорения точки в сферических координатах, когда применение известных методов расчета нецелесообразно. Полученные расчетные формулы (3), (4), (7), (9), (10), (12) в частном случае применимы для движения, заданного в полярных координатах. Они позволяют найти проекции скорости и ускорения на радиальное и поперечное направления.

Пример (№ 12.38 [5]). Механизм робота-манипулятора состоит (рис. 2) из поворотного устройства, колонны для вертикального перемещения и выдвигающейся руки со схватом. Найти скорость и ускорение центра схвата при заданных  $\varphi(t), z(t), r(t)$ .

Кинематическая и расчетная схема для робота-манипулятора с тремя степенями подвижности, работающего в цилиндрической системе координат, изображена на рис. 2. Координаты центра схвата (точка  $M$ ) в неподвижной системе  $x_{uz}$  при заданных  $\varphi(t), z(t), r(t)$ , выражаются формулой (1), где  $x_3 = y_3 = z_3 = 0$ .

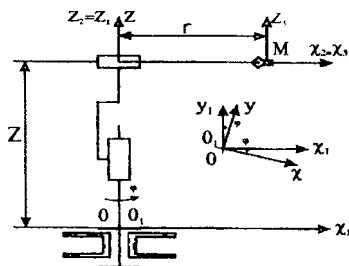


Рис. 2. Кинематическая схема робота-манипулятора с тремя степенями подвижности, работающего в цилиндрической системе координат

Формула для расчета скорости центра схвата имеет вид (6); проекции скорости точки  $M$  на подвижные цилиндрические оси координат определяются из (7); искомая скорость — из (4).

Формула для расчета ускорения центра схвата имеет вид (11); его проекции на оси координат определяются из (12); искомое ускорение — из (10).

При заданных  $\varphi(t), z(t), r(t)$  уравнения траектории центра схвата в параметрической форме получим из формулы (1), где роль параметра играет время  $t$ . Они имеют вид

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (13)$$

При заданных  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  уравнения траектории центра схвата в параметрической форме, используя транспонированную матрицу  $A_{\varphi}^T$ , получим из формулы (1). Они имеют вид

$$r = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad \varphi = \arctg(y/x), \quad z = z. \quad (14)$$

Уравнения (13) и (14) позволяют построить траекторию центра схвата как при заданных  $\varphi(t), z(t), r(t)$ , так и при  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ .

Изложенную методику расчета скорости и ускорения следует использовать для роботов-манипуляторов, работающих в цилиндрической системе координат.

### Литература

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, том 1.— М.: Наука, 1970.— с.240.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики, ч. 1.— М.: Наука, 1972.— с. 468.
3. Халфман Р.Л. Динамика. — М.: Наука, 1972.— с. 568.
4. Доброцаров В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1983. — с. 575.
5. Меццерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1986. — с. 448.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие для втузов. Т 1. Статика и кинематика.— М.: Наука, 1990. — с. 672.



## ПРИМЕНЕНИЕ МЕХАНИКИ ПРИ ОПИСАНИИ СВОЙСТВ МОЛЕКУЛЫ ДНК

**В. Б. Немцов**

Молекула ДНК (дезоксирибонуклеиновая кислота) является носителем генетической информации и представляет собой макромолекулу, максимальное число структурных элементов (мономеров) в которой может достигать  $10^8$ , а длина может приближаться к 2 м (для человека). По своей структуре молекула ДНК представляет собой двойную спираль, точнее двойную правозакрученную винтовую линию, витки которой образованы линейными полимерными цепочками, состоящими из фосфатов и молекул сахара. Пространство между винтовыми линиями заполнено азотистыми основаниями (аденином, тиминном, цитозином и гуанином). Последовательность азотистых оснований кодирует наследственную информацию.

Структура молекулы ДНК была установлена в 1953 году (см., например, [1]). Молекула ДНК существует как в линейной, так и в замкнутой кольцевой формах.

Характерной особенностью молекулы ДНК является ее хиральность, обязанная ее винтовой структуре. Шаг винтовой линии составляет 34А и в этом промежутке располагается около 10 оснований, поэтому расстояние между соседними парами оснований составляет 3.4 А. Диаметр молекулы ДНК равен 20А. Соседние пары оснований повернуты друг относительно друга на угол  $360^\circ/10=36^\circ$ . Благодаря этому достигается наиболее плотная упаковка азотистых оснований в пространстве между сахаро-фосфатными цепочками. Необходимость плотной упаковки приводит к так называемой комплементарности расположения азотистых оснований, когда против аденина всегда находится тимин, а против гуанина - цитозин. Азотистые основания для так называемой В-формы молекулы ДНК имеют плоскую форму и расположены перпендикулярно оси двойной спирали.

Одной из широко применяемых моделей молекулы ДНК является ее модель в виде тонкого упругого стержня, обладающего изгибной и крутильной жесткостями.

Так как молекула ДНК является одномерной системой, то в соответствии с теоремой Пайерлса ее прямолинейная форма неустойчива. Это означает, что тепловые флуктуации изгиба и кручения существенно влияют на поведение и свойства рассматриваемой макромолекулы.

Так, для описания изгибной и крутильной жесткостей молекулы ДНК используются так называемые персистентные длины, учитывающие упомянутые тепловые флуктуации. Характерное значение персистентной длины для изгиба составляет 500А, а для кручения персистентная длина равна 750А. Умножив указанные длины на  $kT$  ( $k$  - постоянная Больцмана;  $T$  - абсолютная температура) получим жесткости на изгиб и кручение равные при  $T = 300\text{K}$  по порядку величины  $10^{-28} \text{ Нм}^2$  [2].

В то же время значительный интерес представляет учет внутренней структуры молекулы ДНК. Одной из моделей является жидкокристаллическая модель, согласно которой молекула ДНК представляет собой одномерный хиральный смектический жидкий кристалл. Рассматриваемая модель предоставляет возможность, опираясь на статистическую теорию упругих свойств жидких кристаллов [3], оценить коэффициенты изгибной и крутильной жесткости молекулы ДНК [4].

На основе теории механо-калорического эффекта [3], согласно которому для хиральной среды скалярная величина (теплота или соответствующее изменение энтропии) связана с псевдовектором, описывающим кручение молекулы, оказывается возможным рассчитать теплоту ее раскручивания («плавления») [3].

Другой интересной моделью является модель молекулы ДНК в виде двойной винтовой пружины [5]. Предлагаемая модель позволяет с помощью теории упругости пружин [6], рассчитать упругие свойства макромолекулы ДНК и на этой основе описать частотный спектр внутренних движений структурных элементов рассматриваемой макромолекулы [7].

Учитывая винтовую структуру молекулы можно на основе теории упругости пружин дать простое описание характерного для ДНК эффекта взаимосвязи ее кручения и растяжения [5].

В свою очередь, наличие нелинейной упругости растяжения молекулы, которая на ее начальном участке объясняется изменением ориентации мономеров (так называемая энтропийная упругость) определяет возможность описать распространение деформации растяжения вдоль оси молекулы ДНК в виде уединенных волн (солитонов) [8].

В настоящее время с помощью техники лазерных пинцетов (захватов) проведены уникальные опыты по растяжению одиночной молекулы ДНК (см., например, [9]). Соответствующая диаграмма растяжения, отвечающая значительному увеличению (в 1.5-2 раза) исходной длины молекулы ДНК (сверхрастяжение), имеет характерное плато, напоминающее площадку текучести для металлических образцов. Однако в отличие от металлов растяжение молекулы ДНК обратимо.

С нашей точки зрения появление плато на диаграмме сверхрастяжения молекулы ДНК объясняется потерей устойчивости при растяжении. В самом деле, пусть конечная деформация растяжения молекулы описывается лагранжевой мерой деформации  $\epsilon = 0.5(\lambda^2 - 1)$ , где  $\lambda$  — кратность удлинения, то есть отношение длины молекулы в растянутом состоянии к ее исходной длине. Тогда выражение для свободной энергии  $F$  молекулы, растягиваемой силами  $P$ , можно представить в виде отрезка ряда по деформации  $\epsilon$  подобно разложению свободной энергии в теории Ландау фазовых переходов первого рода

$$F = a\epsilon^2 - b\epsilon^3 + c\epsilon^4 - P\epsilon, \quad (1)$$

причем  $a$ ,  $b$  и  $c$  — параметры, которые могут зависеть от температуры и от концентрации ионов в окружающей молекулу среде.

Используя условие равновесия  $\frac{dF}{d\epsilon} = 0$ , установим зависимость растягивающей силы от деформации:

$$P = 4c\epsilon^3 + 2a\epsilon - 3b\epsilon^2. \quad (2)$$

Вводя безразмерную силу  $P^* = \frac{P}{P_0}$ ,  $P_0 = 4c$ , получим уравнение для кривой растяжения в виде

$$P^* = \epsilon^3 - 2\alpha\epsilon^2 + \beta\epsilon, \quad (3)$$

где  $2\alpha = \frac{3b}{4c}$ ;  $\beta = \frac{2a}{4c}$ .

Из условия, что кривая растяжения касается оси абсцисс, получим соотношение  $\alpha^2 = \beta$ .

Легко показать, что сила  $P^*$  имеет максимум  $P_1^* = \frac{4\alpha^3}{27}$  при  $\epsilon_1 = \frac{\alpha}{3}$ , минимальное же значение  $P_2^* = 0$  достигается при  $\epsilon_2 = \alpha$ .

Безразмерная сила растёт от нуля до максимума  $P_1^*$ , затем убывает до нуля ( $P_2^* = 0$ ) и в последующем снова возрастает (рис. 1).

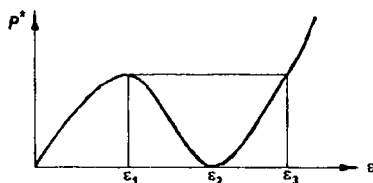


Рис. 1.

При  $\epsilon_1 = \frac{\alpha}{3}$  происходит потеря устойчивости и совершается перескок на возрастающую ветвь кривой. Горизонтальный участок, описывающий упомянутый перескок, и представляет собой плато. Нетрудно убедиться, что горизонтальный участок пересекается с возрастающей ветвью кривой растяжения

$$\text{при } \epsilon_3 = \frac{4\alpha}{3}.$$

В итоге ширина плато равна  $\epsilon_3 - \epsilon_1 = \alpha$ .

По экспериментальным данным (см., например, [9]) кратности удлинения, ограничивающие плато равны соответственно  $\lambda_1 = 1.15$ ,  $\lambda_3 = 1.6$ . Им отвечает лагранжевы деформации  $\epsilon_1 = 0.161$ ,  $\epsilon_3 = 0.780$  и ширина плато оказывается равной  $\epsilon_3 - \epsilon_1 = 0.619$ , то есть  $\alpha = 0.619$ .

Согласно упомянутым экспериментальным данным плато начинается при силе  $P_1 = 65$  пН (пикоНьютон), которой отвечает безразмерная сила

$$P_1^* = \frac{4\alpha^3}{27} = 0.0351 \text{ при } \alpha = 0.619 \text{ и поэтому величина } P_0 = \frac{P_1}{P_1^*} = 1852 \text{ пН.}$$

По отношению  $K = \frac{P}{\epsilon_1} = 403$  пН, можно оценить секущий модуль продольной упругости  $E = \frac{K}{A}$ , где  $A$  — площадь поперечного сечения молекулы ДНК. Учитывая, что радиус упомянутого сечения  $r = 10$  А, найдем, что  $E = 1.28 \cdot 10^{28}$  Па. В свою очередь, касательный модуль упругости определяется величиной  $b$ .

Нетрудно рассмотреть более общий случай, когда минимум зависимости  $P^*$  от  $\epsilon$  не равен нулю. В этом случае  $\alpha^2 \neq \beta$ , и кривая зависимости безразмерной силы от деформации описывается двумя параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ , определяемыми с помощью опытных данных.

Таким образом, на основе представления о том, что при конечном растяжении молекулы ДНК происходит потеря устойчивости, можно описать экспериментальные данные по уникальному явлению сверхрастяжения рассматриваемой молекулы.

Много интересных задач механики упругих тонких стержней при их больших перемещениях возникает при анализе поведения кольцевых (замкнутых) молекул ДНК. Одной из них является задача о намотке молекулы ДНК на белки (гистоны) при ее упаковке в ядре клетки и образовании нуклеосомы. Эта задача требует учета изгибной жесткости молекулы, для обеспечения же конечности усилий, распределенных в зоне контакта молекулы с поверхностью гистонов, необходимо учитывать влияние сдвига на форму упругой линии деформированного стержня (молекулы ДНК).

Другой актуальной задачей является описание сверхспирализации кольцевых замкнутых молекул ДНК. Если при образовании замкнутой формы молекулы она подвергается предварительной закрутке, то молекула закручивается сама на себя подобно телефонному шнуру. При описании этого явления находит применение не только теория больших упругих деформаций стержней, но и топологические методы [10].

Приведенными примерами не исчерпываются возможности применения механики к исследованию поведения и свойств макромолекул ДНК.

### Литература

1. Франк-Каменецкий М.Д. Самая главная молекула. М.: Наука, 1983-160 с.
2. Гросберг А.Ю., Хохлов А.Р. Статистическая физика макромолекул. М.: Наука, 1989-344 с.
3. Немцов В.Б. Неравновесная статистическая механика систем с ориентационным порядком. Мн.: Тэхналогія, 1997-280 с.
4. Nemtsov V.B. Statistical theory of the elastic properties of DNA molecules. // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 1998, V.1, N1, p. 109-113.
5. Немцов В.Б., Камлюк А.Н. оценка силовых констант молекулы ДНК с помощью ее модели в виде витых пружин. // *ИФЖ*, 2001, т.74, N5, с. 146-152.
6. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. -400 с.
7. Nemtsov V.B., Kamluk A.N. Generalized dynamics of the conformational mobility in the DNA molecule. // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2001, V.4, N1, p. 58-63.
8. Kamluk A.N., Nemtsov V.B. Effect of ion concentration on soliton propagation along DNA molecules // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2001, V.4, N4, p. 370-375.
9. Marko F.J. DNA under high tension. // *Phys. Rev. E.*, 1998, V.57, N2, p. 2134-2149.
10. Франк-Каменецкий М.Д., Вологодский А.В. Топологические аспекты физики полимеров: теория и ее биофизические приложения. // *УФН*, 1981, т.134. вып. 4, с.641-673.

## К ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДВУХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

**В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик**

Система ДУ несвязанных нестационарных краевых и начально-краевых задач классической термоупругости для изотропных материалов при отсутствии источников тепла имеет следующий вид [1]:

$$T_{,kk} - \frac{1}{a} \dot{T} = 0, \quad (1)$$

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = \rho \ddot{u}_i + (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T_{,i} - X_i, \quad (2)$$

Для полной постановки задачи необходимо сформулировать краевые условия. Граничные и начальные условия задаются отдельно для уравнений движения (2) и уравнения теплопроводности (1). Для ДУ (2) на границе задаются перемещения или нагрузки, для уравнения теплопроводности — распределение температуры или теплового потока. Возможно также задание смешанных граничных условий. Начальные условия характеризуют соответственно движение тела или распределение температуры в некоторый начальный момент времени. В уравнениях (1) и (2):  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе,  $\alpha_T$  — коэффициент линейного теплового расширения,  $a$  — коэффициент теплопроводности [2],  $X_i(x, t)$  — массовые нагрузки,  $c_e$  — теплоемкость при постоянной деформации.

Решение краевых и начально-краевых задач термоупругости в такой постановке для любых конструктивных элементов и граничных условий возможно только численным путем. Наиболее оптимальным методом является метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [3]. Метод ГИУ — метод решения, основанный на сочетании идей теории потенциала и методов теории аппроксимации. Метод ГИУ характеризуется как один из наиболее перспективных методов анализа показателей напряженно-деформированного состояния применительно к широкому классу практических задач строительной механики, теории упругости и термоупругости. Сущность методов потенциала — в преобразовании дифференциальных уравнений в эквивалентную систему интегральных уравнений. Это позволяет получить систему уравнений, включающую только значения переменных на границе области. С помощью соответ-

ствующих формул представления определяются значения неизвестных величин во внутренних точках области через их граничные значения и значения их первых производных. Кроме того, такой подход уменьшает размерность исходной задачи на единицу. Метод ГИУ позволяет решать краевые задачи в областях произвольной конфигурации, в т. ч. и бесконечной, имеет меньше затрат памяти и времени вычислительных операций по сравнению с методом конечных элементов, позволяет легко комбинировать этот метод с другими численными методами.

Этапы решения краевых и начально-краевых задач термоупругости методом потенциала:

1. Разбиение поверхности рассматриваемого тела (границы области в случае двухмерной задачи) на граничные элементы.
2. Построение конечномерных пространств граничных элементов, т. е. пространств интерполантов граничных функций по поверхности (границе) и по времени в случае нестационарной задачи.
3. Построение системы дискретных аналогов ГИУ (системы линейных уравнений).
4. Численное решение дискретных аналогов ГИУ и вычисление механических и теплофизических величин, связанных с решениями ГИУ.

Решение задачи проводится в 2 этапа. На первом этапе рассматривается краевая задача теплопроводности в постановке (1). Одно из решений уравнения (1), описывающее двумерное распространение тепла от точечного источника с интенсивностью, равной единице, который начинает действовать в некоторой произвольной точке тела  $P_0$  в нулевой момент времени, имеет вид [2]:

$$T(P, t) = F(P_0, P, t) = \frac{1}{4\pi at} \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right), \quad (3)$$

где  $r$  — расстояние между точками  $P(x, y)$  и  $P_0(x_0, y_0)$ .

Используя преобразование Лапласа к уравнению (1), получаем:

$$a\nabla^2 T^* - sT^* = 0, \quad (4)$$

где  $T^* = T^*(P, s)$  — трансформанта Лапласа температуры  $T$  как функция координат и параметра преобразования  $s$  (изображение функции  $T$ ). Уравнению (4) удовлетворяет трансформанта Лапласа функции (3):

$$T^* = F^* = \frac{1}{2\pi a} K_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a}} r \right), \quad (5)$$

где  $K_0$  — модифицированная функция Бесселя второго рода и нулевого порядка.

С помощью второй формулы Грина можно из выражения (5) получить следующее тождество:

$$T^*(P, s) = a \int_D \left[ \frac{\partial T^*(Q, s)}{\partial n} F^*(P, Q, s) - T^*(Q, s) \frac{\partial F^*(P, Q, s)}{\partial n} \right] dS, \quad (6)$$

где  $D$  — граница плоской области,  $Q$  — точка, принадлежащая границе,  $S$  — расстояние вдоль границы,  $n$  — внешняя нормаль к  $D$  в точке  $Q$ .

Таким образом, если всюду на границе известны  $T^*$  и  $\frac{\partial T^*}{\partial n}$  при любом параметре  $s$ , то значение температуры в любой внутренней точке  $P$  можно определить для данного значения  $s$  по формуле (6) при помощи квадратурных формул.

В случае, если в краевой задаче задается только часть граничных значений, уравнение (6) может использоваться в данном случае для определения недостающих данных. Для возможности такого его использования необходимо в (6) перейти к пределу при стремлении внутренней точки  $P$  к произвольной точке  $P'$  границы:

$$T^*(P', s) + 2a \int_D \left[ T^*(Q, s) \frac{\partial F^*(P', Q, s)}{\partial n} - \frac{\partial T^*(Q, s)}{\partial n} F^*(P', Q, s) \right] dS = 0. \quad (7)$$

Получить решение уравнения (7) аналитически практически не представляется возможным, особенно при сложной геометрии границы. Поэтому проводится приближенное решение численными методами.

После того, как будут определены неизвестные значения на границе области, величину трансформанты температуры  $T^*$  в любой внутренней точке можно найти по формуле (6) при помощи простого интегрирования.

Для решения уравнения (7) граница области  $D$  разбивается на некоторое число сегментов, математически это можно представить в виде:

$$T^*(P', s) + 2a \sum_{i=1}^N \int_{D_i} \left[ T^*(Q, s) \frac{\partial F^*(P', Q, s)}{\partial n} - \frac{\partial T^*(Q, s)}{\partial n} F^*(P', Q, s) \right] dS = 0, \quad (8)$$

где каждое значение индекса  $i$  соответствует одному из  $N$  сегментов  $D_i$ . Способ разбиения границы произвольный и зависит от требуемой точности результатов (чем меньше размер сегментов, тем выше точность вычислений). Затем уравнение (8) сводится к системе алгебраических уравнений  $T^*(Q, s)$  и  $\frac{\partial T^*(Q, s)}{\partial n}$  на каждом сегменте при помощи функций от  $S$  некоторого заданного вида, т.е. полиномами некоторой данной степени. Так,  $T^*(Q, s)$  можно представить например на  $i$ -м сегменте постоянной  $T^*(Q_i, s)$ . Если последо-



вательно на каждом из сегментов приписывать точке  $P$  дискретное значение  $P_j$ , то уравнение (7) переходит в систему

$$T^*(P'_j, s) + 2a \sum_{i=1}^N \left[ T^*(Q_i, s) \int_{D_i} \frac{\partial F^*(P'_j, Q, s)}{\partial n} dS - \frac{\partial T^*(Q_i, s)}{\partial n} \int_{D_i} F^*(P'_j, Q, s) dS \right] = 0, \quad (9)$$

$j = 1, 2, \dots, N$

Для заданного значения  $s$  интегралы в уравнениях (9) содержат лишь известные функции, значения которых определены для каждого  $P_j$  во всех точках  $Q$  на границе. Они могут быть вычислены путем численного интегрирования и представляют собой коэффициенты при переменных  $T^*(Q_i, s)$  и  $\frac{\partial T^*(Q_i, s)}{\partial n}$ . Если заданы значения переменных, соответствующие известным граничным условиям корректно поставленной граничной задачи, то остальные значения можно определить из решения алгебраических уравнений.

Для получения окончательного решения уравнения (1) необходимо провести обращение преобразования Лапласа. Здесь возможны различные подходы. Удобно пользоваться рекомендациями [3]. Искомая функция от времени приближенно представляется в виде

$$T = A + Bt + \sum_{k=1}^m a_k e^{-b_k t}, \quad (10)$$

где  $A, B, a_k, b_k, m$  — постоянные. Преобразуя уравнение (9) по Лапласу и умножая на параметр преобразования  $s$ , можно получить:

$$sT^*(s) = A + \frac{B}{s} + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{1 + \frac{b_k}{s}}. \quad (11)$$

Сначала необходимо задать число  $m$  и последовательность значений параметра  $s$ :  $s = s_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, M$ , где  $M = m + 2$ . Входящие в формулу (10)  $m$  постоянных  $b_k$  принимаются равными первым  $m$  значениям  $s_n$ . Затем вычисляется трансформанта функции  $T^*(s)$  для каждого из  $M$  значений  $s_n$ . При подстановке этих величин для каждого значения  $s_n$  в формулу (11) получается  $M$  уравнений:

$$s_n T^*(s_n) = A + \frac{B}{s_n} + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{1 + \frac{s_k}{s_n}}, \quad n = 1, 2, \dots, M. \quad (12)$$

Они образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно  $M$  неизвестных  $A, B$  и  $a_k$ , решение которой не представляет особых трудностей.

Рассмотрим решение ДУ термоупругости (2). Частное решение (2) представляем в виде, предложенном Гудьером, вводя потенциал термоупругого перемещения  $\Phi$  [5]:

$$u_i = \Phi_{,i}. \quad (13)$$

Подставляя формулы (13) в (2) в случае отсутствия массовых сил, получим:

$$\Phi_{,ii} = mT, \quad (14)$$

где  $m = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_T$ .

Рассмотрим задачу определения температуры и перемещений в пространстве  $E^2$ , вызванных действием единичного источника тепла, помещенного в начале координат. В силу центральной симметрии поля перемещений и деформаций, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi' &= mT_*', \\ \Delta T_*' - \frac{1}{a} T_*' &= -\frac{\delta(R)}{a} \delta(t), \\ \Delta &= \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR}. \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя к уравнениям (15) преобразование Лапласа [6], получаем выражения для потенциала термоупругого перемещения и температуры в пространстве преобразований по Лапласу:

$$\bar{\Phi}'(R, p) = -\frac{m}{2\pi p} \left[ \ln\left(\frac{1}{R}\right) - K_0\left(R\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \right], \quad (16)$$

$$\bar{T}_*' (R, p) = \frac{1}{2\pi a} K_0\left(R\sqrt{\frac{p}{a}}\right). \quad (17)$$

где  $K_0$  — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Применяя обратное преобразование Лапласа к формулам (16) и (17) и принимая во внимание соотношение (14), получаем в истинном времени следующие фундаментальные решения двумерных задач несвязанной нестационарной термоупругости:

$$T'_*(x, y, t) = \frac{1}{4\pi at} \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right), \quad (18)$$

$$u'_i(x, y, t) = -\frac{H(t)R_{,i}}{2\pi R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right) \right], \quad (19)$$

где:  $H(t)$  — функция Хевисайда;  $R_{,i} = \frac{\partial R}{\partial x_i}$ .

Если источник тепла перенести из начала координат в точку  $y(y_1, y_2)$ , то функции  $\Phi'(R, t)$  и  $T'_*(R, t)$  будут вычисляться по формулам (18) и (19) лишь с тем отличием, что величина  $R$  определяется в этом случае по равенству:

$$R(x, t) = \sqrt{(x_i - y_i)(x_i - y_i)}, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

При этом для определения перемещений в бесконечной области можно получить следующую формулу:

$$u'_i = \frac{m}{2\pi} \left( \frac{(x_i - y_i)}{R^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^t \frac{\exp\left(-\frac{R^2}{4a\tau}\right)}{t} dt \right). \quad (21)$$

Температуры и перемещения в бесконечной области  $E^2$ , вызванные действием единичной нагрузки, приложенной в точку  $y$ , можно определить из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\mu u'_{ij,kk} + (\lambda + \mu)u'_{kj,ki} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T'_{j,i} = -\delta_{ij} \delta(x - y), \quad (22)$$

$$aT'_{j,kk} - \dot{T}'_j = 0, \quad k, i, j = 1, 2. \quad (23)$$

Очевидно, что  $T'_j = 0$ , а компоненты  $u'_{ij}(x, y)$  являются компонентами фундаментального решения изотермической эластостатики и определяются по формуле [4]:

$$u'_i(x, y) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{R} \delta_{ij} + R_{,i} R_{,j} \right]. \quad (24)$$

На основе представленных формул построены двухмерные сингулярные решения от действия единичной сосредоточенной нагрузки и от источника тепла единичной интенсивности. С их помощью получены граничные интегральные уравнения для первой и второй нестационарной начально-краевой задачи термоупругости.

Для численного решения построенных интегральных уравнений аппроксимируется геометрия рассматриваемой области и входящие в них краевые функции. Дискретные представления границы тела осуществляется с использованием одномерных конечных элементов различной формы, задаваемых на отрезке по локальным координатам с помощью функции формы. Аппроксимация по времени граничных функций осуществляется с помощью интерполяции относительно временных узлов по элементам  $t_r$  на заданном интервале времени. При этом можно применять кусочно-постоянную или кусочно-переменную аппроксимацию по времени на равномерной системе узлов и кусочно-постоянную, кусочно-переменную или кусочно-квадратичную (изопараметрическую) аппроксимацию по граничному элементу. В ходе шагового продвижения по времени находятся либо неизвестные граничные перемещения и температуры (в случае решения второй задачи), либо напряжения и тепловой поток (в случае решения первой задачи). Перемещения и температура, напряжения и тепловой поток во внутренних точках могут быть определены по заданным напряжениям и тепловым потокам и найденным напряжениям и температурам в случае второй задачи, или по заданным граничным перемещениям и температурам и найденным поверхностным нагрузкам и тепловым потокам в случае первой задачи с помощью интегрирования по границе и по времени с использованием формул интегральных представлений. Формулы интегральных представлений для перемещений и температуры, напряжений и теплового потока в случае двухмерной несвязанной задачи термоупругости являются формулами типа Сомильяна и позволяют определять значения соответствующих параметров во внутренних точках через их граничные значения и значения их первых производных.

### Литература

1. Коваленко А.Д. *Основы термоупругости*. — Киев: Наукова думка, 1970. — 239 с.
2. Карслоу Б., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. — М.: Наука, 1964. — 487 с.
3. Риццо Ф. *Метод граничных интегральных уравнений — современный вычислительный метод прикладной механики*. // *Метод граничных интегральных уравнений*. — М.: Мир, 1978. — с.11–17.
4. Новацкий В. *Вопросы термоупругости*. М.: Изд-во АН СССР, 1962 — 364 с.
5. Новацкий В. *Теория упругости*. — М.: Мир, 1975. — 256 с.
6. Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. М.: Высшая школа, 1967 г. — 599 с.

## ОСОБЕННОСТИ ИЗЛОЖЕНИЯ РАЗДЕЛА «ДИНАМИКА ГИДРОПРИВОДА» В КУРСЕ ТММ

**В. И. Зинкевич**

Анализ исследований по динамике гидроприводов различного назначения (технологических машин-автоматов и систем гидроавтоматики транспортных машин) показывает на сложность процессов, происходящих в потоке жидкости при ее взаимодействии с твердыми телами. Уравнения переходных процессов в гидравлических приводах, как правило, нелинейны. Нелинейность их обусловлена рядом факторов, главными из которых являются: нелинейные характеристики внешних сопротивлений (нагрузки), нелинейные потери давления в магистральных, сила трения, зазоры.

В учебном пособии О.Н.Левитская, Н.И.Левитский «Курс теории механизмов и машин» рассмотрена типовая схема объемного поршневого гидропривода с тормозным устройством, включенным в сливную линию при рабочем ходе. Применены общие методы динамического анализа и синтеза, которые были ранее предложены для механизмов, составленных только для твердых тел. Скорость поршня исследовалась при установившемся движении. Характеристики насоса, т.е. зависимость между давлением на выходе насоса и расходом принималась в виде двух отрезков прямой. Причем расход жидкости на выходе из насоса и скорость поршня связаны линейным соотношением. Динамическая нагруженность гидропривода на участке торможения не рассматривалась.

В общем случае система уравнений, описывающих динамику гидропривода, должна включать в себя три типа уравнений, которые соответствуют физическим процессам в этих приводах:

– дифференциальное уравнение движения перемещающихся деталей системы;

– уравнение течения рабочей жидкости в элементах гидропривода;

– уравнение баланса мгновенных массовых расходов.

Из дифференциального уравнения второго порядка находится зависимость обобщенной координаты от времени. За обобщенную координату принята координата перемещения поршня. Уравнение течения жидкости учитывает режим течения жидкости (ламинарный или турбулентный). Уравнение баланса мгновенных объемных расходов жидкости представляет собой алгебраическую сумму входного, выходного расходов и расхода, затраченного на де-

формацию. Таким образом, динамика гидравлической цепи описывается системой дифференциальных уравнений, представляющих собой математическую модель этой цепи. В этой модели принято ряд допущений: жидкость рассматривается несжимаемой и сосредоточенной в одном объеме, наличие одного режима течения.

Последовательность изложения раздела «Динамика гидропривода» включает в себе следующие вопросы:

1. Составление дифференциальных уравнений движения гидропривода на участках установившегося движения и торможения;
2. Рассмотрение различных вариантов изменения скорости поршня от массы подвижных механических элементов и силы технологического соприкосновения;
3. Определение закона изменения площади проходного сечения в тормозном устройстве для получения необходимой величины постоянного ускорения;
4. Расчет максимальной величины давления в сливной линии;
5. Построение графиков пути, скорости и ускорения поршня в зависимости от времени.

УДК 621. 01: 621-144

## **АНАЛИЗ СХЕМ АВТОМАТИЧЕСКИХ КОРОБОК ПЕРЕДАЧ ДЛЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПО «ТММ».**

**Э. И. Астахов, А. А. Адамович, С. В. Пашкевич**

В соответствии с типовыми программами учебного курса «Теория механизмов и машин» (ТММ) для механических специальностей в него включен раздел «Основы теории машин-автоматов, роботов и систем автоматического управления механизмами». Соответственно в курсовое проектирование по ТММ вводится ( по усмотрению ВУЗа) раздел « Синтез логической системы управления механизмами машины — автомата по заданной тактограмме». В учебниках и пособиях по курсовому проектированию [1, 2] дается методика и пример синтеза цикловой системы управления движением трех механизмов (M1, M2, M3) произвольной машины — автомата без указания вида машины и функционального назначения механизмов, что нежелательно в курсовом проекте, где должен рассматриваться комплекс механизмов конкретной машины, соответствующий специальности студента. В [3,4] автора приводится пример синтеза логической системы управления механизмами M1, M2, M3 конкрет-

ной машины (агрегатного станка), работа которой обуславливает необходимую последовательность работы механизмов  $M_i$  ( $i=1,2,3$ ) и соответствующий шифр тактограммы.

Наиболее универсальным примером машины — автомата, которая может обрабатывать почти все 100 вариантов шифров тактограмм, приведенных в пособии [2] и выдаваемых студентам к листу курсового проекта, является промышленный робот. При ограничении в курсовом проекте до трех механизмов — приводов  $M_i$  в нем используется манипулятор с тремя степенями свободы, в котором, например,  $M_1$  поворачивает колонну манипулятора вокруг вертикальной оси,  $M_2$  перемещает по вертикали ползун руки, а  $M_3$  перемещает горизонтально руку со схватом. Такие примеры схем машин можно использовать для студентов машиностроительных специальностей.

Для студентов автотракторных специальностей темами курсовых проектов являются мобильные машины (автомобили, тракторы, самосвалы, самоходные шасси и др.), содержащие двигатель внутреннего сгорания (Д.В.С.), трансмиссию (с коробкой передач, задним мостом, редукторами), рабочий движитель (колеса или гусеницы). В современных машинах автотракторной техники широко используются системы автоматического управления двигателем, автоматические коробки передач, системы автоматической блокировки тормозов, оптимизаторы нагрузок на оси многоосных машин и др. Для курсового проектирования по ТММ наиболее подходящими, на наш взгляд, являются ступенчатые зубчатые автоматические коробки передач (далее АКП), в которых включение отдельных передач осуществляется автоматически приводами — механизмами (например, пневмо-, или гидроцилиндрами, электромагнитными муфтами)  $M_i$ . Поэтому задачей данной работы явился анализ схем существующих ступенчатых зубчатых АКП автотракторной техники для использования в курсовом проекте по «ТММ» в разделе «Синтез логической системы управления АКП».

Как показал анализ специальной литературы [5, 6, 7, 8] по автотракторной технике в ступенчатых коробках передач используются как схемы с неподвижными осями колес, так и схемы планетарно — дифференциальных механизмов с подвижными осями. В схемах АКП с неподвижными осями колес для переключения передач используются чаще всего; 1) скользящие (подвижные вдоль оси) шестерни; 2) синхронизаторы (зубчатые муфты) на шестернях постоянного зацепления.

Схемы со скользящими шестернями в современных АКП используются сравнительно редко. В учебных курсовых проектах они могут быть использованы, как показано ниже очень ограниченно, т.к. в них необходимы увеличенные числа тактов работы и числа добавочных элементов памяти. Это обуслав-

ливается тем, что в таких коробках передач при включении каждой передачи необходимо обязательно выключать-включать сцепление, а также необходимостью строго последовательного включения передач при разгоне (или торможении). Так, в простейшей двухскоростной АКП с тремя приводами управления  $M_1$  ( $M1$ -перемещения шестерни 1-й передачи,  $M2$ -перемещения шестерни 2-й передачи,  $M3$ -включения-выключения муфты сцепления) для разгона последовательность работы механизмов  $M_1$  (при работающем двигателе и нейтральном положении АКП) будет следующей: 1) выключить сцепление ( $M3$  вперед); 2) включить 1-ю передачу ( $M1$  вперед); 3) включить сцепление ( $M3$  назад) и разгон на 1-ой скорости; 4) выключить сцепление ( $M3$  вперед); 5) выключить 1-ую передачу ( $M1$  назад); 6) включить 2-ую передачу ( $M2$  вперед); 7) включить сцепление ( $M3$  назад) и разгон на 2-ой передаче; 8) выключить сцепление ( $M3$  вперед); 9) выключить 2-ую передачу ( $M2$  назад); 10) включить сцепление ( $M3$  назад).

Такая последовательность работы  $M_1$  в 10-ти тактах движения записывается шифром тактограммы 3133123323. Определение реализуемости этой тактограммы приведено в табл.1, где веса тактов  $Q_j$  ( $j=1,2, \dots, 10$ ) определялись суммой произведений:

$$Q_j = q_1 X = q_{1q} X_1 + q_2 X_2 + q_3 X_3 \quad (1)$$

где  $X_i$  — двоичные входные сигналы в начале такта в крайнем положении  $M_1$ .

Веса тактов  $Q_{\Pi_1}$  с элементами памяти  $\Pi_1$  — аналогично:

$$Q_{\Pi_1} = Q_j + q_{\Pi_1} Z_1 \quad (2)$$

Веса тактов с двумя элементами памяти  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  :

$$Q_{\Pi_2} = Q_{\Pi_1} + q_{\Pi_2} Z_2 \quad (3)$$

где  $q_{\Pi_1}, q_{\Pi_2}$  — веса сигналов  $Z_1$  и  $Z_2$  элементов памяти  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ;  $q_{\Pi_1} = 2^0 = 1, q_{\Pi_2} = 2^4 = 16$ .

Звездочками (\*,\*\*) в табл. 1 помечены веса  $Q$  совпадающих тактов, имеющие одинаковые наборы  $x_i$ .

Как видно из табл. 1 тактограмма 3133123323 АКП со скользящими колесами может быть реализована с двумя элементами памяти  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

Перестановкой  $i$ -х номеров механизмов  $M_1$  можно получить еще 5 дополнительных вариантов подобных реальных тактограмм: 1211231131, 2122132232, 1311321121, 2322312212, 3233213313 — всего 6 вариантов. Следует отметить, что такие сложные тактограммы можно выдавать только хорошо и отлично успевающим студентам или по студенческой научной работе.

Более широко в АКП с неподвижными осями колес используются схемы с синхронизаторами на шестернях постоянного зацепления (рис. 2), в которых



для включения синхронизатора нужной передачи или сцепления в качестве приводов  $M_i$  часто используются электромагнитные муфты. В таких схемах АКП при переходе с одной передачи на другую необязательно включать — выключать сцепление ФМ, а только при трогании с места для включения 1-ой передачи.

Таблица 1.

Тактограмма 3133123323

Наименование		Сигнал входной	Такты движения										Вес сигнала $q_i$
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Механизмы	$M_1$	$X_1$	1	впер.	0	0	0	назад	1	1	1	1	$2^1=2$
	$M_2$	$X_2$	1	1	1	1	1	1	впер.	0	0	назад	$2^2=4$
	$M_3$	$X_3$	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
Вес такта $Q_i$		-	14	6*	4*	12	4*	6*	2**	10	2**	6*	-
Память $\Pi_1$		$Z_1$	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	$2^0=1$
Вес $Q_{\Pi_1}$		-	15	7*	5	12	4	6	2	11	3	7*	-
Память $\Pi_2$		$Z_2$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$2^4=16$
Вес $Q_{\Pi_2}$		-	31	23	5	12	4	6	2	11	3	7	-

Таблица 2

Тактограмма 313122

Наименование		Сигнал входной	Такты движения						Вес сигнала $q_i$
			1	2	3	4	5	6	
Механизмы	$M_1$	$X_1$	1	1	0	0	1	1	$2^1=2$
	$M_2$	$X_2$	1	1	1	1	1	0	$2^2=4$
	$M_3$	$X_3$	1	0	0	1	1	1	$2^3=8$
Вес такта $Q_i$		-	14*	6	4	12	14*	10	-
Память $\Pi$		$Z_1$	0	0	0	1	1	0	$2^0=1$
Вес $Q_{\Pi}$ с памятью		-	14	6	4	13	15	10	-

Тогда последовательность работы управляющих приводов-механизмов  $M_i$  в двухскоростной АКП будет такой: 1) выключить сцепление ФМ ( $M_3$  впе-

120

ред-вправо); 2) включить 1-ю передачу ( $M_1$  вперед-влево); 3) включить сцепление ( $M_3$  назад-влево), и разгон на 1-ой передаче; 4) выключить 1-ую передачу ( $M_1$  назад-влево); 5) включить 2-ую передачу ( $M_2$  вперед-вправо); 6) выключить 2-ую передачу ( $M_2$  назад-влево). Такая последовательность работы механизмов  $M_i$  в 6-ти тактах запишется шифром тактограммы 313122, которая реализуется, как видно из табл. 2 с одним элементом памяти П. Перестановкой номеров  $i$ -х  $M_i$  получается еще 5 добавочных вариантов реальных тактограмм (323211, 212133, 232311, 121233, 131322). Таким образом схема АКП может обеспечить 6 указанных вариантов шифров тактограмм. Эти варианты можно выдавать любым студентам в обычных курсовых проектах по ТММ и они входят в число 100 типовых в пособии [2].

УДК 621-752.8

## **ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ ВИБРОИЗОЛИРОВАННЫХ ФУНДАМЕНТОВ МАШИН НА ОБЪЕКТАХ С КИНЕМАТИЧЕСКИМ ВИБРОВОЗМУЩЕНИЕМ**

***В. В. Кудин В.В., Э.И. Астахов***

Введение в современный учебный курс «Теория механизмов и машин» таких разделов как «Колебания в механизмах и машинах», «Уравновешивание и виброзащита машин» требует от преподавателя не только полного и краткого изложения сравнительно сложных вопросов учебной рабочей программы, но и умения показать прикладное значение этих разделов как для улучшения динамических и виброакустических параметров самих машин, так и для защиты от вибраций окружающей среды и человека. В инженерных вузах очень ценно оживить теоретическое изложение учебного материала не только конкретными примерами из техники по соответствующей специальности студента, но и реальными примерами прикладных работ на производстве, где принимал участие или ранее работал преподаватель.

Одним из таких примеров виброзащиты прецизионного оборудования от повышенных вибраций производственных цехов являются разработанные ранее авторами виброизолированные фундаменты для установок лазерной резки листовых материалов [1,2,3]. В данном случае имеем типичный пример виброзащиты машины при кинематическом вибровозмущении основания (или пола цеха), изложенный ранее авторами в учебном пособии [4]. Объектом виброзащиты является прецизионные лазерные установки, а источниками

кинематического вибровозмущения являются рабочие площадки в прессовых цехах, получающие ударновибрационное возмущение от соседнего прессового оборудования.

Согласно монтажных требований под лазерные комплексы фирм BISTRONIC и TRUMPF для них необходим отдельный монолитный фундамент в виде плоской железобетонной плиты с размерами в плане (10,5×12,5) м и толщиной не менее 500мм, на которой монтируется все основное и вспомогательное оборудование. Допустимые вибрации на фундаментах этих установок регламентируются такими параметрами: для установок фирмы BISTRONIC максимальная амплитуда колебаний не должна превышать  $[A]=0,01$  мм; для установок фирмы TRUMPF максимальное виброускорение не должно превышать  $[a]=0,1$   $g=0,981$  м/с. Железобетонные плиты фундаментов должны располагаться на сухом эластичном основании из слоев досок, битума, песка и лесовой глины, что представляет собой естественную виброизоляцию плит фундаментов от вибраций соседнего оборудования. Однако, как показали результаты измерения вибрации на работающей установке BISTRONIC, такое устройство виброизоляции не дает эффекта: уровни замеренных вибраций на плите фундамента и на соседних точках пола цеха оказались почти одинаковыми. Кроме того, такой массивный фундамент размерами (10,5×12,5×0,5)м для всего оборудования лазерного комплекса требует большого объема железобетона, и является более дорогостоящим. Поэтому задача состояла в оптимизации параметров и размеров виброизолированного фундамента при минимальном объеме стройматериалов и объема строительного-монтажных работ.

На первом этапе были экспериментально исследованы вибрационные характеристики рабочих площадок, на которых планировался монтаж оборудования лазерных комплексов. Для определения амплитуд «А» виброперемещений использовался виброметр ВИП— 2 с электроиндукционным датчиком Д21Ф, позволяющий измерять среднеквадратичные значения размаха  $N_{\text{ск}}=2A_{\text{ск}}$  виброперемещений, по которым рассчитывались действительные значения амплитуд колебаний  $A = \sqrt{2}N_{\text{ск}} / \approx 0,707 N_{\text{ск}}$ . Для определения амплитуд виброускорений  $a_{\text{макс}}$  использовался измеритель шума и вибраций ВШВ-003-М2 с пьезодатчиком ДН-3, позволяющей измерять среднеквадратичные значения виброускорений  $a_{\text{ск}} \approx 0,707a_{\text{макс}}$ , как по общему уровню, так и в октавных полосах частот со среднегеометрическими частотами 2, 4, 8, 16, 31, 63, 125, 250, 500, 1000 Гц. Это позволяет проводить спектральный анализ действующих вибраций. Измерения вибраций на рабочих площадках проводились в трех направлениях по осям X, Y, Z (ось X горизонтальная поперечная, ось Y — горизонтальная продольная вдоль длинной стороны площадки, ось Z — вертикальная (перпендикулярная плоскости площадки)). Результаты измерения вибраций

показали, что вибрации на площадках являются полигармоническими в полосе частот от 4 до 125 Гц с максимальными значениями в диапазоне (1631) Гц. Это объясняется тем, что рабочие площадки под лазерные комплексы удалены на десятки метров от источников вибраций (прессового оборудования), поэтому прилегающими грунтами ослабляются более сильно высокочастотные составляющие (свыше 100 Гц), а низкочастотные составляющие вибраций передаются почти без ослабления. Максимальные значения вибраций значительно превысили допустимые по монтажным условиям:  $A_{\max} = 0,035 \text{ мм} > > [A] = 0,01 \text{ мм}$ ,  $a_{\text{гн}} = 1,5 \text{ м/с}^2 > [a] = 0,98 \text{ м/с}^2$ . Причем вибрации по вертикальной оси Z значительно превышали вибрации по осям X и Y. На основании этих результатов была уточнена задача виброзащиты: снижение вертикальных вибраций рабочих площадок в диапазонах частот (16 ÷ 31) Гц.

Наиболее распространенным и эффективным (при широкополосной полигармонической вибрации) методом виброзащиты является виброизоляция, заключающаяся в размещении между источником вибровозмущения и защищаемым объектом упругого элемента — виброизолятора. В подобных случаях в технике используются виброизолированные фундаменты, которые представляют монолитную плиту с жестко закрепленным на ней защищаемым оборудованием и изолированную от вибрирующей площадки пола цеха упругими элементами (резиновыми, пластмассовыми, резинометаллическими, металлическими (сетчатыми, пружинными и др.)). Как показано в работе [3] виброизолированный фундамент в первом приближении может быть представлен типовой одномассовой колебательной системой с 6-ю степенями свободы (три линейных по X, Y, Z и три угловых вокруг X, Y, Z) при кинематическом вибрационном возмущении основания. С учетом преобладающих вертикальных вибраций можно для предварительных расчетов оставить одну линейную степень свободы по Z.

Как известно [4], виброизоляция дает положительный эффект по уменьшению вибраций, если собственная частота колебаний упругой системы (виброизолированного фундамента) в несколько раз ( $>2$ ) меньше низшей частоты возмущающего воздействия. Принимая по результатам экспериментальных измерений преобладающую низшую частоту кинематического вибровозмущения  $f_{\text{н}} = (10 \div 30) \text{ Гц}$  из условия  $f_{\text{с}} \ll f_{\text{н}}$  при оптимально низкой амплитуде колебаний  $A_{\max} < [A]$ , рассчитана необходимая собственная частота колебаний виброизолированного фундамента  $f_{\text{с}} \approx 3,5 \text{ Гц}$ . Результаты более точного расчета методом конечных элементов в работе [2] подтвердили полученную приближенную величину ( $f_{\text{с}} = 3,56 \text{ Гц}$ ). По этой  $f_{\text{с}}$  и известной массе плиты фундамента с оборудованием рассчитана приведенная суммарная жесткость системы виброизоляторов. Для обеспечения такой низкой частоты  $f_{\text{с}}$  и условий долговеч-

ности (не менее 20 лет) в качестве виброизоляторов взяты серийные металлические цилиндрические пружины ТЭ 30.35.30 жесткостью 2.3350Н/мм. Таким образом главное условие оптимизации (минимизация амплитуды вибро смещения  $A_{\max}$  [A]) обеспечено путем виброизоляции фундаментной плиты (размерами 10,5×12,5×0,5)м с помощью пружинных виброизоляторов, размещенных между нижней поверхностью плиты и забетонированным коробом рабочей площадки.

Другое условие оптимизации (минимизация объема фундаментной плиты) было достигнуто за счет уменьшения размеров фундаментной плиты в плане. Изучение монтажной документации лазерных комплексов показало, что для исключения смещения лазерного луча относительно обрабатываемой заготовки необходимо, чтобы на одном жестком фундаменте находился модуль и устройство подачи и фиксации заготовки. Вспомогательное оборудование (шкафы электрооборудования, погрузочный манипулятор, газовые баллоны и др.) не оказывают влияния на точность обработки и, следовательно, не нуждаются в виброизоляции. Поэтому было предложено делать виброизолированный фундамент только под основное оборудование (лазерный модуль и устройство фиксации заготовки) лазерного комплекса. Это позволило уменьшить размеры виброизолированной фундаментной плиты в плане до (2,9×7,8)м, что обеспечило снижение объема железобетона в 4,8 раза без снижения качества лазерной обработки.

Следующее условие оптимизации (минимизация угловых смещений фундаментной плиты.  $\min(Y_x, Y_y, Y_z)$ ) достигнуто путем совмещения центра масс фундаментной плиты с оборудованием и центра жесткости виброизоляторов. Обычно виброизоляторы размещают на установочной плоскости равномерно. Однако в данном случае массы основного лазерного модуля и устройства фиксации заготовок значительно отличаются и распределены на фундаментной плите неравномерно. Поэтому из условия равенства статических моментов масс найдено положение общего центра масс и рассчитано такое неравномерное размещение пружинных изоляторов, при котором центр жесткости 24-х виброизоляторов расположился по оси Z основного вибровозмущения, проходящей через центр масс. Это же обеспечило одинаковую статическую нагрузку всех пружинных изоляторов.

## Литература

1. Кудин В.В., Астахов Э.И. Схемы виброизолированных фундаментов под установку лазерной резки. Материалы международной научно-технической конференции «Вклад ВУЗовской науки в развитие приоритетных направлений производственно-хозяйственной деятельности, разработку экономичных и экологически чистых

технологий и прогрессивных методов обучения», посвященной 80-ти летию Белорусской государственной политехнической академии. В 10-ти частях. Часть 5.— Мн.: БГПА, 2000, с. 7.

2. Босаков В.В., Кудин В.В., Астахов Э.И. Исследование собственных и вынужденных колебаний виброизолированного фундамента методом конечных элементов. Там же с. 13.

3. Кудин В.В., Астахов Э.И. Расчет виброизолированных фундаментов под прецизионное оборудование. Материалы Республиканского семинара преподавателей кафедр теоретической механики, теории механизмов и машин, сопротивления материалов ВУЗов Беларуси. Минск, 15–17 июля 2000г. — Мн.: Технопринт, 2001, с.73–75.

4. Астахов Э.И., Кудин В.В. Колебания в машинах и методы их устранения. Учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей.— Мн.: БГПА, 1997. — 130 с.

УДК 621. 01

## **НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРУГИХ ЗВЕНЬЕВ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ АВТОМОБИЛЯ С УЧЕТОМ ИХ ЖЕСТКОСТИ И ДИССИПАТИВНОСТИ**

**В. И. Зинкевич, А. М. Белоус**

При конструировании машинного агрегата необходимо получить такие законы движения его звеньев, осуществление которых обеспечит выполнение необходимого рабочего процесса. Не учтенные при расчете деформации звеньев и зазоры в кинематических парах приводят к отклонениям законов движения звеньев от программных, т.е. динамическим ошибкам. Учет упругости звеньев и их сочленений позволит на начальной стадии проектирования решать некоторые задачи, без которых невозможно создание высокопроизводительных и надежных машин.

При построении динамической модели упругой машины необходимо, в первую очередь, учитывать упругость наиболее податливых звеньев машины. Практика инженерных расчетов показывает, что во многих случаях наиболее податливыми оказываются звенья передаточных механизмов. Звенья исполнительных механизмов, а также системы двигателя оказываются более жесткими. С другой стороны, массы звеньев передаточного механизма часто оказываются незначительными по сравнению с массами остальных движущих частей машины и их величиной в первом приближении можно пренебречь. Учет

этих обстоятельств приводит к динамической модели, в которой механическая система трансмиссии автомобиля представлена на рис. 1, где  $M_D$  — движущий момент;  $M_c$  — момент трения в сцеплении;  $M_r$  — момент сопротивления дороги. Здесь указанные механизмы соединены безинерционными упруго-диссипативными звеньями, имеющими жесткость  $C_i$ , коэффициент диссипации  $b_i$  и момент инерции  $J_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 4$ ).

В работе исследовалось изменение моментов и ускорений в упругих звеньях 1,2,3,4 на заданном промежутке времени.

Уравнение движения механической системы в предположении об идеальности связей можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_n}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

где  $E_k$  и  $E_n$  — кинетическая и потенциальная энергия системы;  $\Phi$  — диссипативная функция;  $Q$  — обобщенная сила;  $q$  — обобщенная координата.

Для заданной динамической модели (рис. 1) в качестве обобщенных координат выбраны углы поворота упругих звеньев вокруг их собственных осей вращения:  $j_1, j_2, j_3, j_4$  и уравнения кинетической, потенциальной энергии и диссипативной функции соответственно будут иметь вид:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{I_1 \varphi_1^2}{2} + \frac{I_2 \varphi_2^2}{2} + \frac{I_3 \varphi_3^2}{2} + \frac{I_4 \varphi_4^2}{2}; \\ E_n &= \frac{c_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} + \frac{c_2 (\varphi_2)^2}{2} + \frac{c_3 (\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1)^2}{2}; \\ \Phi &= \frac{b_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} + \frac{b_2 (\varphi_2)^2}{2} + \frac{b_3 (\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1)^2}{2}; \end{aligned} \quad (2)$$

Найдем частные производные кинетической энергии по обобщенной координате:

$$\left( \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1} \right) = J_1 \varphi_1; \quad \left( \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} \right) = J_2 \varphi_2; \quad \left( \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_3} \right) = J_3 \varphi_3; \quad \left( \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_4} \right) = J_4 \varphi_4$$

Производные по времени ранее найденных частных производных

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

будут равны:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial q_1} \right) &= J_1 \varphi_1; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial q_2} \right) &= J_2 \varphi_2; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial q_3} \right) &= J_3 \varphi_3; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial q_4} \right) &= J_4 \varphi_4; \end{aligned}$$

Частные производные  $\frac{\partial E_k}{\partial q_i}$  при  $t=0$  будут равны нулю

Найдем частные производные потенциальной энергии по обобщенной координате:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\pi}{\partial \varphi_1} &= c_1(\varphi_1 - \varphi_2) - c_3(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_4); \\ \frac{\partial E_\pi}{\partial \varphi_2} &= c_2(\varphi_2) - c_1(\varphi_1 - \varphi_2); \\ \frac{\partial E_\pi}{\partial \varphi_3} &= c_3(\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1); \\ \frac{\partial E_\pi}{\partial \varphi_4} &= -c_3(\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1); \end{aligned} \tag{3}$$

Найдем частные производные диссипативной функции по обобщенно координате:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} &= b_1(\varphi_1 - \varphi_2) - b_3(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_4); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} &= b_2(\varphi_2) - b_1(\varphi_1 - \varphi_2); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_3} &= b_3(\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_4} &= -b_3(\varphi_3 - \varphi_4); \end{aligned} \tag{4}$$

С учетом найденных производных запишем уравнения движения для заданной модели пользуясь уравнением Лагранжа второго рода. Причем число уравнений равно числу обобщенных координат



$$\begin{aligned}
I_1\varphi_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) + b_1(\varphi_1 - \varphi_2) - c_3(\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1) - b_3(\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1) &= 0; \\
I_2\varphi_2 - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) + c_2(\varphi_2) - b_1(\varphi_1 - \varphi_2) + b_2(\varphi_2) &= 0; \\
I_3\varphi_3 + c_3(\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1) + b_3(\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1) &= M_\Delta; \\
I_4\varphi_4 - c_3(\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1) - b_3(\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1) &= -M_f \operatorname{sgn}(\varphi_3);
\end{aligned} \tag{5}$$

Их можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
I_1\varphi_1 + M_1 - M_3 &= 0; & M_1 &= c_1(\varphi_1 - \varphi_2) + b_1(\varphi_1 - \varphi_2); \\
I_2\varphi_2 - M_1 + M_2 &= 0; & M_2 &= c_2(\varphi_2) + b_2(\varphi_2); \\
I_3\varphi_3 + M_3 &= M_D; & M_3 &= c_3(\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1) + b_3((\varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_1)); \\
I_4\varphi_4 - M_3 &= -M_f \operatorname{sgn}(\varphi_3); & M_D &= M_{D0}(1 - e^{-kt}); \\
& & M_c &= M_{c0}(1 - e^{-k_c t}); \\
& & M_f &= M_{f0} \operatorname{sgn}(\varphi_3);
\end{aligned} \tag{6}$$

аН

систему (7) накладываются ограничения  $|M_1| \leq M_c$ ;  $|M_2| \leq M_f$ .

Используя ранее полученные зависимости (6) получим уравнения для определения угловых ускорений упругих звеньев:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{M_3 - M_1}{I_1}; \\
\varphi_2 &= \frac{M_1 - M_2}{I_2}; \\
\varphi_3 &= \frac{M_D - M_2}{I_3}; \\
\varphi_4 &= \frac{M_3 - M_f \operatorname{sgn}(\varphi_3)}{I_4}
\end{aligned} \tag{8}$$

Для численного решения уравнений был использован метод Рунге-Кутты 4 порядка. Полученные зависимости были запрограммированы для вычислений на языке Паскаль.

Начальные данные к расчету:

$$J_1=5.1 \text{ кгм}^2, J_2=0.45 \text{ кгм}^2, J_3=7.5 \text{ кгм}^2, J_4=2.3 \text{ кгм}^2,$$

$$c_1=59 \text{ нм/рад}, c_2=248 \text{ нм/рад}, c_3=84 \text{ нм/рад},$$

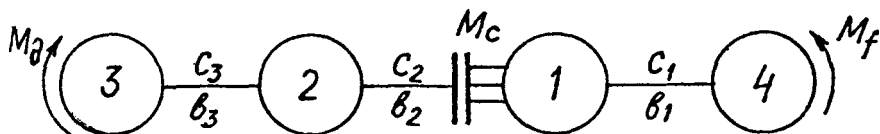


Рис. 1. Динамическая модель трансмиссии автомобиля:  
 1 — коробка передач; 2 — маховик; 3 — двигатель; 4 — задний мост

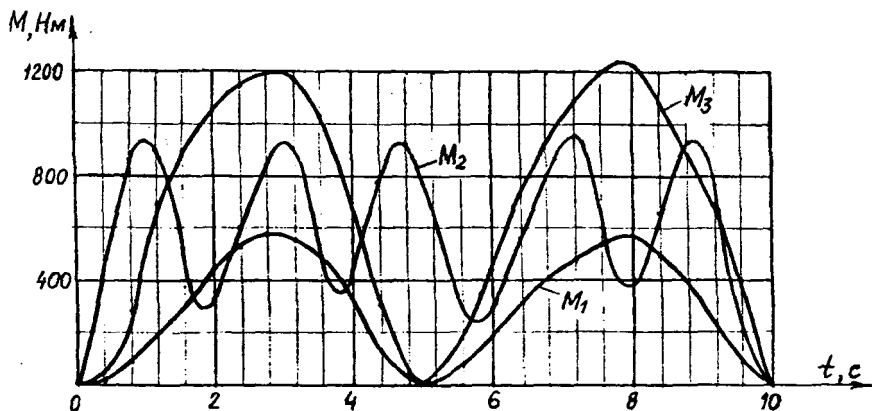


Рис. 2. Изменение моментов упругих звеньев от времени

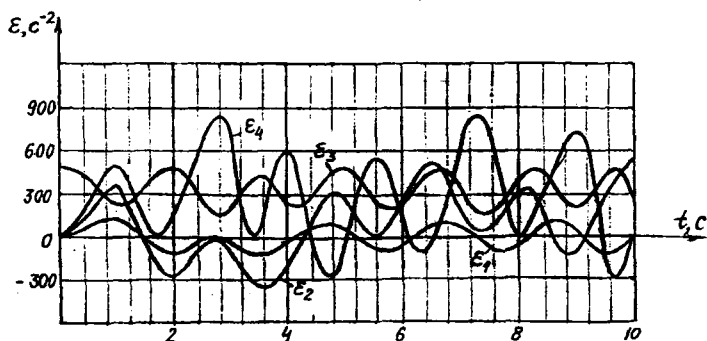


Рис. 3. Изменение ускорений упругих звеньев от времени

$$b_1=0.51 \text{ нмс/рад}, b_2=0.16 \text{ нмс/рад}, b_3=0.025 \text{ нмс/рад}.$$

$M_{\text{до}}=580 \text{ нм}$  — начальный движущий момент,

$M_{\text{с}_0}=950 \text{ нм}$  — начальный момент сцепления,

$M_{\text{г}}=590 \text{ нм}$ ,  $K_{\text{д}}=25 \text{ с}^{-1}$  — темп нарастания моментов.

По данным файлов расчета были построены графики изменения моментов на упругих звеньях (рис.2) и угловых ускорений (рис.3) на участке времени от 0 до 10с.

Результаты расчетов показывают, что движение данной динамической системы носит колебательный характер. Моменты и ускорения упругих звеньев непосредственно зависят от параметров жесткости  $c_i$  и коэффициентов диссипации  $b_i$ . Причем моменты, возникающие в упругих звеньях 1 и 2 ограничены моментами  $M_{\text{с}}$  и  $M_{\text{г}}$ .

### Литература

1. Поляков Д.Б., Круглов И.Ю. Программирование в среде Турбо Паскаль. М.: Изд-во МАИ, 1992.

2. Динамика машин и управление машинами. Справочник под редак. Крейнина Г.В. М.: Машиностроение, 1988.

УДК 621.828.3

## КИНЕМАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ НА ЭВМ МЕТОДОМ ЗАМКНУТЫХ ВЕКТОРНЫХ КОНТУРОВ

**Л. С. Тетерюкова, В. Л. Комар, Д. О. Тетерюков**

Существуют различные методы кинематического анализа рычажных механизмов. Основной целью всех методов является установление зависимости координат выходного звена и входного. Данная задача решается наиболее просто, если определена функция положения. Вид функции положения зависит от кинематической схемы.

Если механизм содержит шатуны, кулисы или колебатели, то при составлении функции положения целесообразно использовать метод замкнутых векторных контуров.

Суть метода состоит в том, что, например, механизм второго класса представляют структурно состоящим из ряда четырехзвенников. Причем, выходное

звено предыдущего четырехзвенника становится входным звеном последующего четырехзвенника. Выделив таким образом ряд контуров четырехзвенников, с каждым из них связывают систему координат. Вдоль каждого звена направляют вектор от шарнира к шарниру либо вдоль направляющих элементов кинематических пар. Вектор позволяет ориентировать звено в системе координат.

Затем составляется уравнение замкнутости векторного контура, которое проектируется на оси координат. Последующим дифференцированием уравнений в проекциях на оси координат получают параметры передаточной функции скоростей и передаточной функции ускорения. После этого рассчитываются значения скоростей и ускорений. Последовательно переходя от контура к контуру, определяют линейные скорости, ускорения характерных точек звеньев и угловые скорости, ускорения всех звеньев.

Рассмотрим использование метода замкнутых векторных контуров для двухдиадного кулисного механизма. Схема механизма приведена на рис. 1.

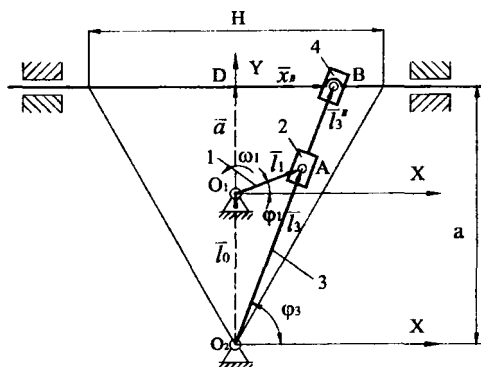


Рис. 1. Схема двухдиадного кулисного механизма: 1 — кривошип; 2 — кулисный камень; 3 — кулиса; 4 — кулисный камень; 5 — ползун.

Вводим систему координат  $XOY$  в соответствии с направлением угловой скорости входного звена  $\omega_1$ . Положение звеньев ориентируем в системе координат посредством векторов и углов  $j_1, j_3$ .

Выделяем два векторных контура  $O_1O_2A$  и  $DO_2B$ .

Уравнение замкнутого контура  $O_1O_2A$  имеет вид:

$$\vec{l}_0 + \vec{l}_1 = \vec{l}_3 \quad (1)$$

Уравнение замкнутости в проекциях на координатные оси  $X$  и  $Y$ :

$$0 + l_1 \cdot \cos \varphi_1 = l_3 \cdot \cos \varphi_3$$

$$l_0 + l_1 \cdot \sin \varphi_1 = l_3 \cdot \sin \varphi_3 \quad (2)$$

После математических преобразований получим:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{l_0 + l_1 \cdot \sin \varphi_1}{l_1 \cdot \cos \varphi_1} \quad (3)$$

Для определения передаточной функции скоростей  $U_{31}$  необходимо взять производные от левой и правой части уравнения (3) по  $j_1$ :

$$U_{31} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \cos^2 \varphi_3 \cdot \frac{l_1^2 + l_0 \cdot l_1 \cdot \sin \varphi_1}{l_1^2 \cdot \cos^2 \varphi_1} = \frac{l_1^2 + l_0 \cdot l_1 \cdot \sin \varphi_1}{l_1^2 + l_0^2 + 2 \cdot l_0 \cdot l_1 \cdot \sin \varphi_1} \quad (4)$$

Передаточная функция ускорений определяется уравнением (5):

$$U'_{31} = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} = \frac{l_0 \cdot l_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot (l_0^2 - l_1^2)}{(l_1^2 + l_0^2 + 2 \cdot l_0 \cdot l_1 \cdot \sin \varphi_1)^2} \quad (5)$$

Тогда угловую скорость кулисы можно найти из выражения (6):

$$\omega_3 = \omega_1 \cdot U_{31} \quad (6)$$

Угловое ускорение кулисы определяется формулой (7):

$$\varepsilon_3 = \omega_1^2 \cdot U'_{31} + \varepsilon_1 \cdot U_{31} \quad (7)$$

Уравнение замкнутого контура  $DO_2B$  имеет вид:

$$\bar{a} + \bar{x}_B = \bar{l}_3^B \quad (8)$$

Уравнение замкнутости в проекциях на координатные оси X и Y принимает вид:

$$\begin{aligned} 0 + x_B &= l_3^B \cdot \cos \varphi_3 \\ a + 0 &= l_3^B \cdot \sin \varphi_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Решая совместно уравнения системы, получим:

$$x_B = a \cdot \operatorname{ctg} \varphi_3 \quad (10)$$

Дифференцированием  $x_B$  по параметру  $j_3$  получим  $U_{53}$ :

$$U_{53} = -a \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi_3} \quad (11)$$

Передаточная функция ускорений определяется уравнением (12):

$$U'_{53} = \frac{2 \cdot a \cdot \cos \varphi_3}{\sin^3 \varphi_3} \quad (12)$$

Тогда скорость точки В можно определить из уравнения(13):

$$V_B = \omega_3 \cdot U_{53} \quad (13)$$

Формула для определения ускорения точки В имеет вид:

$$a_B = \omega_3^2 \cdot U'_{53} + \epsilon_3 \cdot U_{53} \quad (14)$$

По полученному алгоритму расчета ускорений и скоростей точки В при изменении  $j_1$  разработана программа на языке Visual Basic. Поскольку данный механизм является циклическим, расчеты проводились за цикл движения с шагом по углу поворота кривошипа. Результаты расчета скорости точки В приведены на рис. 2, ускорения точки В — на рис. 3 для следующих исходных данных:  $\omega_1 = 6.803$  рад/с;  $l_0 = 0.32$  м;  $l_1 = 0.0768$  м;  $a = 0.5$  м;  $H = 0,25$  м.

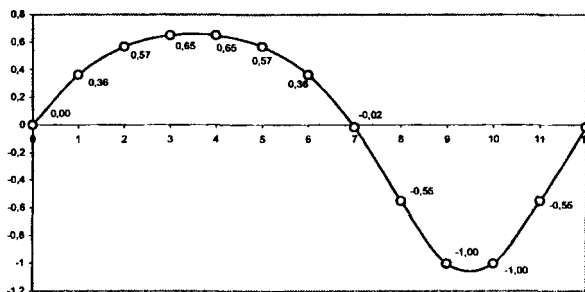


Рис. 2. График скорости точки В.

Полученный алгоритм позволяет вычислять значения скоростей и ускорений выходного звена для двухдвух кулисного механизма. Алгоритмы расчета синусного механизма, тангенсного механизма, кривошипно-ползунного механизма, кулисного механизма, шарнирного четырехзвенника и двухдвух рычажного механизма методом замкнутых векторных контуров приведены в литературе [2].

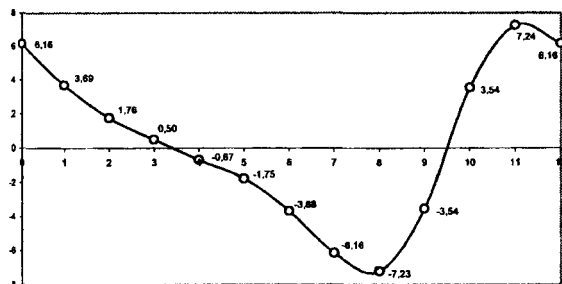


Рис. 3. График ускорения точки В.

## Литература

1. Артоболевский И.И. Теория машин и механизмов. М.: Наука, 1975. — 720 с.
2. Кинематический расчет рычажных механизмов на ЭВМ методом замкнутых векторных контуров// Тетерюкова Л.С. Комар В.Л. Методические указания к курсовому проекту по ТММ. Могилев: МГТУ, 2000. — 38с.

УДК 621.01

## ЕДИНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОДВИЖНОСТИ МЕХАНИЗМОВ

**В. Ф. Коренский, Е. В. Волынец**

Подвижность механизмов обычно определяют по формулам П.Л. Чебышева, либо Сомова-Мальшева, решив, предварительно, плоским или пространственным является механизм. О трудностях принятия таких решений на многочисленных примерах сообщается в книге Л.Н.Решетова[2].

Кроме того, подвижность механизмов в указанных формулах зависит как от подвижности образующих кинематических пар, так и от количества подвижных звеньев. Механику влияния звена на подвижность механизма представить весьма трудно.

Предлагаем методику определения подвижности механизмов на основе анализа образующих кинематических пар.

Пусть мы имеем рычажный шестизвенник OABСDE (рис.1):

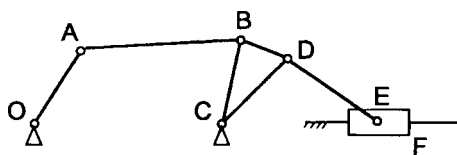


Рис. 1.

Размыкаем все, кроме одной, кинематические пары (С и F), в которых осуществляется присоединение подвижных звеньев к стойке. В полученной открытой кинематической цепи подвижность звеньев определяется лишь подвижностью кинематических пар [3]:

$$W_1 = \sum_1^n P_i \quad (1)$$

Восстанавливая ранее разомкнутые кинематические пары вновь, вводим связи  $\sum_1^k (S_j)$  Т.о. подвижность механизма

$$W_1 = \sum_1^n P_i - \sum_1^k S_j \quad (2)$$

где  $n$  — число кинематических пар открытой кинематической цепи.  $k$  — число кинематических пар, в которых кинематическая цепь была отсоединена от стойки.

При пользовании изложенным методом необходимо иметь в виду два обстоятельства. Первое состоит в том, что не всегда удастся получить открытую кинематическую цепь простым размыканием пар присоединяющих её к стойке. Например, в плоском механизме четвертого класса [1], показанном на рис. 2.

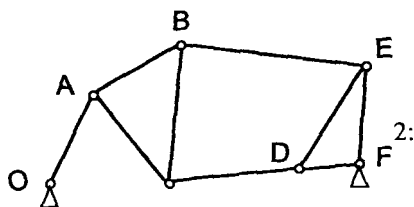


Рис. 2.

Размыкание кинематической пары F не приводит к появлению открытой кинематической цепи и потому формула (1) здесь оказывается не справедливой. Она справедлива, если одноподвижный контур BCDE рассмотреть как одноподвижное кинематическое соединение двух звеньев — ABC и DEF.

Второе обстоятельство связано с подсчетом условий связи  $\sum_1^k S_j$  налагаемых на открытую кинематическую цепь кинематическими парами, присоединяющими эту цепь к стойке. Необходим анализ движений звеньев в окрестностях присоединяемых пар. Например, если в шарнирном четырехзвенике OABC (рис.3) условия таковы, что после расчленения кинематической пары C звено BC совершает плоское движение, присоединение его к стойке может быть осуществлено кинематическими парами пятого, либо четвертого класса может быть осуществлено с введением двух либо одного условия связи.

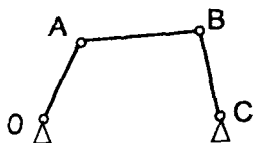


Рис. 3.



Если же указанное условие не соблюдается, то названные пары внесут полное число условий связи с влиянием их на движение, пропорциональным соответствующим отклонениям.

### Литература

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. — М.: Наука, 1975.
  2. Решетов Л.Н. Конструирование рациональных механизмов. Изд. 2 — М.: Машиностроение., 1972.
- Теория механизмов и машин /под ред. Фролова К. В. — М.: Наука, 1989.

УДК 639.3+625.7/.8.002.5+69.002.5+ 622.002.5.001.24

## К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ РАМ МОБИЛЬНЫХ МАШИН

**В.Ф. Кондратюк, В.А. Цыбулько, Д.П. Сологуб**

Несущие конструкции мобильных дорожно-строительных, горных машин — рамы — самые ответственные базовые узлы. Для нормальной работы монтируемых на них механизмов должна быть обеспечена соответствующая их жесткость.

Приведем пример, в котором показана возможность получить решение всего по двум алгебраическим уравнениям. Информацией о геометрии рассчитываемой конструкции являются осевые моменты инерции — минимальные сведения о геометрических параметрах. Однако, как оказалось, можно получить приемлемые результаты.

Кручение рамы в общем случае сопровождается депланацией — перемещением вдоль оси рамы — гипотеза Бернулли нарушается.

В работе [1] рассмотрен случай стесненного кручения рамы. Для сравнительной оценки низких приближений по этой же методике и решения сопротивления материалов [2] рассмотрим кручение рамы со свободным концом.

Искомые перемещения :

$u = Uyz = Ur^2 \sin \theta \cos \theta$ ,  $w_{\tau} = W_{\tau}rx$  — трансверсальное перемещение,

$\frac{w_{\tau}}{r} = W_{\tau}x$  — угол закручивания произвольного сечения,  $w_r = 0$  — радиальное перемещение,

$v = -w_{\tau} \sin \theta = -W_{\tau} xy$ ,  $w = w_{\tau} \cos \theta = W_{\tau} xy$  — составляющие перемещения по осям  $y$  и  $z$ ;

$U, W_{\tau}$  — обобщенные перемещения — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Здесь  $x$  — продольная,  $y, z$  — поперечные (горизонтальная и вертикальная) оси рамы;  $r, \theta$  — полярные координаты.

$U, W_{\tau}$  находим на основе принципа возможных перемещений.

Разрешающая система уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad bU + IW_{\tau} &= 0, \\ 2) \quad IU + bW_{\tau} &= T_{\kappa} l; \quad b = G \int_V (y^2 + z^2) dV = G \int_V r^2 dV, \quad I = G \int_V (y^2 - z^2) dV. \end{aligned}$$

Стержень круглого сечения

$$b = G \int_V (y^2 + z^2) dV, \quad I = G \int_V (y^2 - z^2) dV.$$

Элемент объема:  $dV = l dA$ ,  $l$  — длина стержня.

$$b = Gl \int_A (y^2 + z^2) dA = Gl (I_z + I_y) = Gl I_p,$$

$$I = Gl \int_A (y^2 - z^2) dA = Gl (I_z - I_y) = 0;$$

$I_p$  — полярный момент инерции сечения.

Уравнения:

$Gl I_p U + 0 W_{\tau} = 0$ ,  $U = 0$  и  $W_{\tau} = 0$  — деформация отсутствует.

$b W_{\tau} = T_{\kappa} l$ ,  $Gl I_p W_{\tau} = T_{\kappa} l$ ,  $Gl_p W_{\tau} = T_{\kappa}$ ; трансверсальное перемещение:

$$w_{\tau} = \frac{T_{\kappa} x}{I_p G} r.$$

Угол закручивания сечения:  $\varphi = W_{\tau} x = \frac{T_{\kappa} x}{I_p G}$ , что совпадает с решением «сепарата».

Стержень прямоугольного сечения.

$$I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad I_z = \frac{hb^3}{12}, \quad I_y + I_z = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh(h^2 + b^2)}{12}, \quad I_z - I_y = \frac{hb(b^2 - h^2)}{12}.$$

Решение:

$$1) Gl \frac{bh(b^2 + h^2)}{12} U + Gl \frac{bh(b^2 - h^2)}{12} W_\tau = 0, (b^2 + h^2)U + (b^2 - h^2)W_\tau = 0; U = -\frac{b^2 - h^2}{b^2 + h^2} W_\tau;$$

$$2) Gl \frac{bh(b^2 - h^2)}{12} U + Gl \frac{bh(b^2 + h^2)}{12} W_\tau = T_\kappa l, W_\tau = \frac{3T_\kappa (b^2 + h^2)}{b^3 h^3 G}.$$

Принимаем  $b=1$  м,  $H=1$  м:

$$W_\tau = \frac{3T_\kappa (1^2 + 0,1^2)}{G l^3 \cdot 0,1^3} = 3 \frac{1,01 T_\kappa}{10^{-3} G} = 3030 \frac{T_\kappa}{G}; U = -\frac{1^2 - 0,1^2}{1^2 + 0,1^2} W_\tau = -\frac{0,99}{1,01} W_\tau = -0,9802 W_\tau.$$

Угол закручивания:  $\varphi = W_\tau x$ ; полагая  $x=1$  м,  $\varphi = W_\tau = 3030 \frac{T_\kappa}{G}$  рад.

По формуле сопротивления материалов:

$$\varphi = \frac{T_\kappa x}{G I_\alpha}, I_\alpha = 3,123 h^4 = 3,123 \cdot 10^{-4}, \frac{1}{I_\alpha} = \frac{1}{3,123 \cdot 10^{-4}} = 3202, \varphi = 3202 \frac{T_\kappa}{G}.$$

$$\text{Расхождение: } \frac{3202 - 3030}{3202} 100\% = 5,3\%.$$

Принимаем:  $b=1$  м,  $h=1$  м (квадрат).

$$U = -\frac{b^2 - h^2}{b^2 + h^2} W_\tau = 0, \text{ так как } b=h \text{ (депланация отсутствует).}$$

$$W_\tau = \frac{12 T_\kappa (1^2 + 1^2)}{G \cdot 4 \cdot 1^3 \cdot 1^3} = 6 \frac{T_\kappa}{G}, \varphi = W_\tau x, x=1, \varphi = 6 \frac{T_\kappa}{G} \text{ рад.}$$

По формуле сопротивления материалов:

$$\varphi = \frac{T_\kappa \cdot 1}{G \cdot I_\alpha}, I_\alpha = 0,140 h^4, 1/I_\alpha = 7,14, \varphi = 7,14 \frac{T_\kappa}{G} \text{ рад.}$$

$$\text{Расхождение: } \frac{7,14 - 6}{6} \cdot 100\% = 16\%.$$

Так как сечение рам ближе к вытянутому прямоугольному, то методика расчета деформаций вполне приемлема.

## Литература

1. Кондратюк В.Ф. Математические модели расчета базовых конструкций машин. — Мн.: Белорусская гос. политех. академия, 1999. — 120 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 512 с.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АВТОНОМНОГО РОБОТА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

*Е. Н. Левковский*

## ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемый автономный робот представляет собой манипулятор, установленный на колесной мобильной платформе. Такой робот имеет намного большее рабочее пространство, чем манипулятор на неподвижном основании. Проблемы моделирования и управления движением мобильных манипуляторов исследовались во многих работах, см., например, ссылки в статье [3]. Динамические уравнения движения плоской жесткой модели колесного мобильного робота с двухзвенным манипулятором получены в работе [1].

Цель этой работы — показать, как выводятся дифференциальные уравнения движения автономного робота посредством уравнений Эйлера-Лагранжа, потому что они применимы для систем с голономными и неголономными связями.

## УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

Рассмотрим механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+m}$ . Предположим, что эта система имеет  $m$  неголономных связей, задаваемых уравнениями

$$\sum_{s=1}^{n+m} a_{n+v,s} \dot{q}_s = 0, \quad v = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_{n+v,s}$  — функции обобщенных координат  $q_1, \dots, q_{n+m}$ .

Для определения скоростей точек системы часто предпочтительнее использовать не сами обобщенные скорости, а некоторые их линейные комбинации с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат, в виде  $\pi_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, n + m$

$$\pi_i = \omega_i = \sum_{s=1}^{n+m} a_{is} \dot{q}_s, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\pi_{n+v} = \omega_{n+v} = \sum_{s=1}^{n+m} a_{n+v,s} \dot{q}_s, \quad v = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Величины  $\pi_r$ ,  $s, r = 1, 2, \dots, n + m$  называются квазискоростями, а символы  $\pi_r$  — квазикоординатами.

Правые части соотношений (3) совпадают с левыми частями соответствующих уравнений неголономных связей (1), а коэффициенты  $a_v$  в выражениях

(2) выбираются так, чтобы соотношения (2) и (3) были бы однозначно разрешимы относительно  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n+m}$ . Тогда из равенств (2) и (3) обобщенные скорости можно представить через квазискорости в виде

$$\dot{q}_s = \sum_{r=1}^{n+m} b_{rs} \dot{\pi}_r, \quad s = 1, 2, \dots, n+m \quad (4)$$

Для произвольной функции  $f(q_1, \dots, q_{n+m})$  символ  $\partial f / \partial \pi_i$  обозначает по определению следующую операцию

$$\frac{\partial f}{\partial \pi_i} = \sum_{s=1}^{n+m} b_{si} \frac{\partial f}{\partial q_s} \quad (5)$$

Уравнения движения Эйлера-Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_i} + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_r} \left( \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}^r \dot{\pi}_j \right) = \Pi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-m, \quad (6)$$

где  $T^*$  — функция, которая получается из выражения кинетической энергии системы заменой  $\dot{q}_s$  на псевдоскорости  $\dot{\pi}_r$ ,  $s, r = 1, 2, \dots, n+m$  согласно уравнениям (4). Величина

$$\Pi_i = \sum_{s=1}^{n+m} Q_s b_{si}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

представляет собой обобщенную силу, которая производит работу на возможном перемещении  $\delta \pi_i$ , а  $Q_s$  — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $q_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n+m$ .

Трехиндексные символы Больцмана  $\gamma_{ij}^r$  вычисляются [2, с. 32–35, 68] или по формулам

$$\gamma_{ij}^r = \sum_{s=1}^{n+m} \sum_{l=1}^{n+m} \left( \frac{\partial a_{rs}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{rl}}{\partial q_s} \right) b_{si} b_{lj}, \quad r = 1, 2, \dots, n+m, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

или из перестановочных соотношений (билинейных ковариантов Фробениуса)

$$\frac{d}{dt} \delta \pi_r - \delta \omega_r = (\delta \pi_r)^* - \delta \omega_r = d \delta \pi_r - \delta d \pi_r, \quad r = 1, 2, \dots, n+m \quad (9)$$

Значения символов  $\gamma_{ij}^r = -\gamma_{ji}^r$  зависят только от принятого определения квазискоростей (2) и (3) через обобщенные скорости. Они не зависят ни от структуры, ни от движения системы.

В уравнениях (6) после выполнения всех указанных операций квазискорости следует приравнять нулю

$$\dot{\pi}_{n+1} = 0, \dots, \dot{\pi}_{n+m} = 0 \quad (10)$$

Заметим, что в уравнениях (6) кинетическая энергия  $T^*$  является функцией всех  $n + m$  квазискоростей  $\dot{\pi}_r$ . Поскольку в (6) содержатся производные от  $T^*$  по всем квазискоростям, в том числе и по квазискоростям  $\dot{\pi}_{n+v}$ , обращающимся в нуль согласно соотношениям (1), то связи (1) нужно учитывать только после составления уравнений (6), когда дифференцирование по квазискоростям уже выполнено.

Уравнения Эйлера-Лагранжа (6) вместе с уравнениями связей (1) и выражениями (2) представляют собой  $2n + m$  уравнений движения системы в квази-координатах. При известных начальных условиях интегрированием этих уравнений можно найти  $+2n + m$  неизвестных функций  $\dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_n, q_1, \dots, q_{n+m}$ .

Уравнения (6) для последних  $m$  квазикоординат  $\pi_{n+1}, \dots, \pi_{n+m}$  будут уравнениями  $m$  обобщенных реакций неголономных связей

$$R_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_k} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\partial T^*}{\partial \pi_r} \left( \sum_{j=1}^n \gamma_{kj}^r \dot{\pi}_j \right) - \Pi_k, \quad k = n+1, \dots, n+m. \quad (11)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа или Больцмана-Гамеля позволяют записать уравнения движения голономных и неголономных систем в единой форме. Далее эти уравнения используются для вывода уравнений движения модели автономного робота.

## ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Модель автономного робота состоит из трехзвенного манипулятора и колесной мобильной платформы 3, как показано на рис. 1. Мобильная платформа оборудована двумя приводными и управляющими колесами 1 и 2 на одной оси; по углам она поддерживается четырьмя пассивными колесами, которые при выводе уравнений движения не учитываются. Приводные колеса 1 и 2 во время движения катятся без скольжения. Предполагается, что модель робота сделана из жесткой платформы 3, снабженной недеформируемыми колесами, перемещающимися по гладкой горизонтальной плоскости. Звенья 4, 5 и 6 манипулятора считаются также жесткими.

Движение модели робота рассматривается в инерциальной системе отсчета  $O_0x_0y_0z_0$ , закрепленной в плоскости движения. Система отсчета  $C_3x_{C_3}y_{C_3}z_{C_3}$  связана с мобильной платформой. Точка М есть середина расстояния равного  $2a$  между колесами 1 и 2. Положение модели робота полностью определяется координатами  $x_{C_3}$ ,  $y_{C_3}$ ,  $z_{C_3}$  точки  $C_3$  в системе отсчета  $O_0x_0y_0z_0$  в плоскости движения, углом ориентации  $\psi$  между продольной осью  $C_3x_{C_3}$  платформы 3 и осью  $O_0x_0$ , углами поворота  $\varphi_1, \varphi_2$  колес 1 и 2, оба радиуса  $r$ ,

вращающихся относительно их горизонтальных осей  $O_1y_1, O_2y_2$ , углами поворота  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$  звеньев 4, 5, 6 манипулятора соответственно. Предполагается, что для каждого из звеньев манипулятора локальные оси систем отсчета, показанных на рис. 1, параллельны главным центральным осям инерции. Длины звеньев 4, 5 и 6 обозначены через  $l_4, l_5, l_6$  соответственно. Пусть точки  $O_1, O_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  — центры масс колес 1 и 2, платформы 3, звеньев манипулятора 4, 5 и 6 соответственно;  $MC_3 = h, O_3C_4 = l_{C4}, O_4C_5 = l_{C5}, O_5C_6 = l_{C6}, z_{C3} = r + h$ . Вращающие моменты, развиваемые двигателями, есть  $\tau_1, \tau_2$  для вращения колес 1 и 2,  $\tau_4, \tau_5, \tau_6$  для поворота звеньев 4, 5 и 6 соответственно.

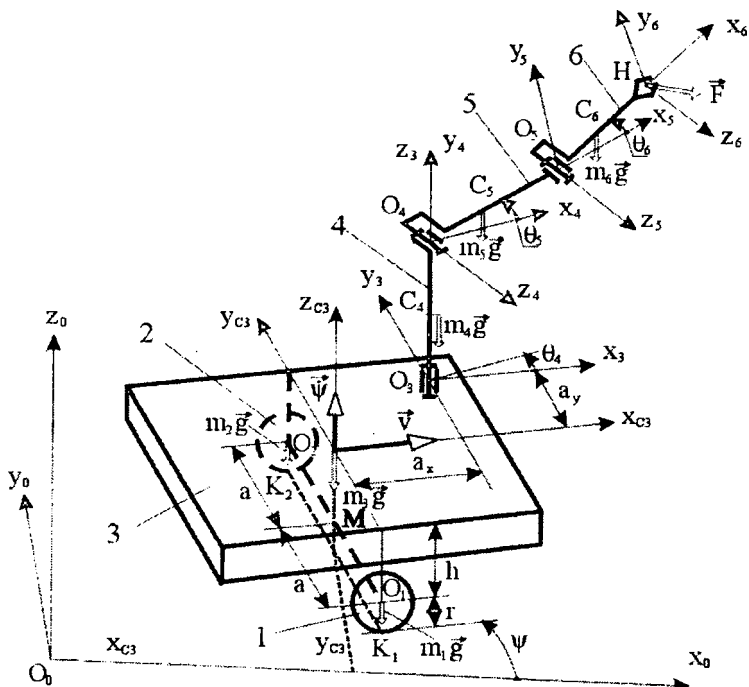


Рис. 1. Пространственная модель автономного робота

Пусть обобщенные координаты

$$q_1 = \theta_4, \quad q_2 = \theta_5, \quad q_3 = \theta_6, \quad q_4 = x_{C3}, \quad q_5 = y_{C3}, \quad q_6 = \psi, \quad q_7 = \varphi_1, \quad q_8 = \varphi_2 \quad (12)$$

Уравнения неголономных связей могут быть записаны в виде

$$(\vec{v})_{x_{C3}} = -\dot{x}_{C3} \sin \psi + \dot{y}_{C3} \cos \psi = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (\vec{v}_{K1})_{x_{C3}} &= \dot{x}_{C3} \cos \psi + \dot{y}_{C3} \sin \psi + a\dot{\psi} - r\dot{\phi}_1 = 0, \\ (\vec{v}_{K2})_{x_{C3}} &= \dot{x}_{C3} \cos \psi + \dot{y}_{C3} \sin \psi - a\dot{\psi} - r\dot{\phi}_2 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Соотношения (13) отражают невозможность бокового скольжения ортогонально плоскостям колес. Здесь  $\vec{v}$  — вектор скорости мобильной платформы. Формулы (14) являются условиями отсутствия скольжения каждого из колес 1 и 2 в их средних плоскостях в точках контакта  $K_1, K_2$  колес соответственно.

Итак, пространственная модель автономного робота имеет восемь обобщенных координат (12), три неголономные связи (13) и (14) и пять степеней свободы движения. Поэтому необходимо вывести три уравнения движения каждого звена манипулятора, два уравнения движения колесной платформы и три уравнения реакций неголономных связей.

Теперь введем квазикоординаты соотношениями

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \omega_1 = \dot{\theta}_4, \quad \pi_2 = \omega_2 = \dot{\theta}_5, \quad \pi_3 = \omega_3 = \dot{\theta}_6, \quad \pi_4 = \omega_4 = \dot{\psi} \\ \pi_5 &= \omega_5 = (\vec{v})_{x_{C3}} = v = \dot{x}_{C3}^{(3)} = \dot{x}_{C3} \cos \psi + \dot{y}_{C3} \sin \psi, \\ \pi_6 &= \omega_6 = (\vec{v})_{y_{C3}} = \dot{y}_{C3}^{(3)} = -\dot{x}_{C3} \sin \psi + \dot{y}_{C3} \cos \psi \\ \pi_7 &= \omega_7 = (\vec{v}_{K1})_{x_{C3}} = \dot{x}_{C3} \cos \psi + \dot{y}_{C3} \sin \psi + a\dot{\psi} - r\dot{\phi}_1, \\ \pi_8 &= \omega_8 = (\vec{v}_{K2})_{x_{C3}} = \dot{x}_{C3} \cos \psi + \dot{y}_{C3} \sin \psi - a\dot{\psi} - r\dot{\phi}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

Вариации квазикоординат на основании соотношений (15) будут

$$\begin{aligned} \delta\pi_1 &= \delta\theta_4, \quad \delta\pi_2 = \delta\theta_5, \quad \delta\pi_3 = \delta\theta_6, \quad \delta\pi_4 = \delta\psi \\ \delta\pi_5 &= \delta x_{C3} \cos \psi + \delta y_{C3} \sin \psi, \quad \delta\pi_6 = -\delta x_{C3} \sin \psi + \delta y_{C3} \cos \psi \\ \delta\pi_7 &= \delta x_{C3} \cos \psi + \delta y_{C3} \sin \psi + a\delta\psi - r\delta\phi_1, \\ \delta\pi_8 &= \delta x_{C3} \cos \psi + \delta y_{C3} \sin \psi - a\delta\psi - r\delta\phi_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Обобщенные скорости из формул (15)

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_4 &= \dot{\pi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\theta}_5 = \dot{\pi}_2 = \omega_2, \quad \dot{\theta}_6 = \dot{\pi}_3 = \omega_3, \quad \dot{\psi} = \dot{\pi}_4 = \omega_4 \\ \dot{x}_{C3} &= \omega_5 \cos \psi - \omega_6 \sin \psi, \quad \dot{y}_{C3} = \omega_5 \sin \psi + \omega_6 \cos \psi \\ \dot{\phi}_1 &= (a\omega_4 + \omega_5 - \omega_7)/r, \quad \dot{\phi}_2 = (-a\omega_4 + \omega_5 - \omega_8) \end{aligned} \quad (17)$$

Ненулевые элементы матрицы коэффициентов  $b_{sr}$ ,  $s, r = 1, \dots, 8$  согласно (17)

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{22} = b_{33} = 1, \quad b_{45} = \cos \psi, \quad b_{46} = -\sin \psi, \quad b_{55} = \sin \psi, \quad b_{56} = \cos \psi, \quad b_{64} = 1 \\ b_{74} &= a/r, \quad b_{75} = 1/r, \quad b_{77} = -1/r, \quad b_{84} = -a/r, \quad b_{85} = 1/r, \quad b_{88} = -1/r \end{aligned} \quad (18)$$



Вариации обобщенных координат, используя уравнения (17),

$$\begin{aligned} \delta\theta_4 &= \delta\pi_1, \quad \delta\theta_5 = \delta\pi_2, \quad \delta\theta_6 = \delta\pi_3, \quad \delta\psi = \delta\pi_4, \quad \delta x_{C3} = \delta\pi_5 \cos \psi - \delta\pi_6 \sin \psi \\ \delta y_{C3} &= \delta\pi_5 \sin \psi + \delta\pi_6 \cos \psi, \quad \delta\varphi_1 = (a\delta\pi_4 + \delta\pi_5 - \delta\pi_7)/r, \\ \delta\varphi_2 &= (-a\delta\pi_4 + \delta\pi_5 - \delta\pi_8)/r \end{aligned} \quad (19)$$

Трехиндексные символы  $\gamma'_{ij}$  вычисляются путем составления перестановочных соотношений (9). Следовательно

$$\begin{aligned} (\delta\pi_5)^* - \delta\omega_5 &= d(\delta x_{C3} c\psi + \delta y_{C3} s\psi) / dt - \delta(\dot{x}_{C3} c\psi + \dot{y}_{C3} s\psi) = \\ &= -\dot{\psi} \delta x_{C3} s\psi + \dot{\psi} \delta y_{C3} c\psi + \dot{x}_{C3} \delta\psi s\psi - \dot{y}_{C3} \delta\psi c\psi \end{aligned}$$

В этом выражении обобщенные скорости надо заменить их значениями (17) через квазискорости, а вариации обобщенных координат по аналогичным формулам (19) через вариации квазикоординат. Тогда

$$\begin{aligned} (\delta\pi_5)^* - \delta\omega_5 &= -\omega_4 (\delta\pi_5 c\psi - \delta\pi_6 s\psi) s\psi + \omega_4 (\delta\pi_5 s\psi - \delta\pi_6 c\psi) c\psi + \\ &+ (\omega_5 c\psi - \omega_6 s\psi) \delta\pi_4 s\psi - (\omega_5 s\psi + \omega_6 c\psi) \delta\pi_4 c\psi = \omega_4 \delta\pi_6 - \omega_6 \delta\pi_4 \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем  $s\psi = \sin \psi$ ,  $c\psi = \cos \psi$ ,  $s(\psi + \theta_4)$ ,  $c(\psi + \theta_4) = \cos(\psi + \theta_4)$ ,  $s\theta_i = \sin \theta_i$  и так далее.

$$(\delta\pi_6)^* - \delta\omega_6 = d(-\delta x_{C3} s\psi + \delta y_{C3} c\psi) / dt - \delta(-\dot{x}_{C3} s\psi + \dot{y}_{C3} c\psi) = -\omega_4 \delta\pi_5 + \omega_5 \delta\pi_4$$

$$(\delta\pi_7)^* - \delta\omega_7 = d(\delta x_{C3} c\psi + \delta y_{C3} s\psi + a\delta\psi - r\delta\varphi_1) / dt - \delta(\dot{x}_{C3} c\psi + \dot{y}_{C3} s\psi + a\dot{\psi} - r\dot{\varphi}_1) = \omega_4 \delta\pi_6 - \omega_6 \delta\pi_4$$

$$(\delta\pi_8)^* - \delta\omega_8 = d(\delta x_{C3} c\psi + \delta y_{C3} s\psi - a\delta\psi - r\delta\varphi_2) / dt - \delta(\dot{x}_{C3} c\psi + \dot{y}_{C3} s\psi - a\dot{\psi} - r\dot{\varphi}_2) = \omega_4 \delta\pi_6 - \omega_6 \delta\pi_4$$

Отсюда следует, что ненулевые трехиндексные символы

$$\gamma_{46}^5 = -\gamma_{64}^5 = 1, \quad \gamma_{54}^6 = -\gamma_{45}^6 = 1, \quad \gamma_{46}^7 = -\gamma_{64}^7 = 1, \quad \gamma_{46}^8 = -\gamma_{64}^8 = 1 \quad (20)$$

Координаты центров масс в системе отсчета  $O_0 x_0 y_0 z_0$  представляются в виде

$$\begin{aligned} x_1^{(0)} &= x_{C3} + a s\psi, & y_1^{(0)} &= y_{C3} - a c\psi, & z_1^{(0)} &= r \\ x_2^{(0)} &= x_{C3} - a s\psi, & y_2^{(0)} &= y_{C3} + a c\psi, & z_2^{(0)} &= r \\ x_{C3}^{(0)} &= x_{C3}, & y_{C3}^{(0)} &= y_{C3}, & z_{C3}^{(0)} &= r + h \\ x_{C4}^{(0)} &= x_{C3} + a_2 c\psi - a_2 s\psi, & y_{C4}^{(0)} &= y_{C3} + a_2 s\psi + a_2 c\psi, & z_{C4}^{(0)} &= r + h + l_{C4} \\ x_{C5}^{(0)} &= x_{C4}^{(0)} + l_{C5} c(\psi + \theta_4) c\theta_5, & y_{C5}^{(0)} &= y_{C4}^{(0)} + l_{C5} s(\psi + \theta_4) c\theta_5, & z_{C5}^{(0)} &= r + h + l_4 + l_{C5} s\theta_5, \\ x_{C6}^{(0)} &= x_{C4}^{(0)} + l_5 c(\psi + \theta_4) c\theta_5 + l_{C6} c(\psi + \theta_4) c(\theta_5 + \theta_6) \\ y_{C6}^{(0)} &= y_{C4}^{(0)} + l_5 s(\psi + \theta_4) c\theta_5 + l_{C6} s(\psi + \theta_4) c(\theta_5 + \theta_6), & z_{C6}^{(0)} &= r + h + l_4 + l_5 s\theta_5 + l_{C6} s(\theta_5 + \theta_6) \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения (21) позволяют найти абсолютные обобщенные скорости центров масс, а также и захвата манипулятора, если в последних трех уравнениях (21) величину  $l_{C_6}$  заменить на  $l_6$ .

### КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭРГИЯ

Проекции векторов абсолютных угловых скоростей звеньев модели на оси координат, связанных с этими звеньями, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1^{(1)} &= [0 \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\psi}]^T, \quad \bar{\omega}_2^{(2)} = [0 \ \dot{\phi}_2 \ \dot{\psi}]^T, \quad \bar{\omega}_3^{(3)} = [0 \ 0 \ \dot{\psi}]^T, \quad \bar{\omega}_4^{(4)} = [0 \ \dot{\psi} + \dot{\theta}_4 \ 0]^T \\ \bar{\omega}_5^{(5)} &= [(\dot{\psi} + \dot{\theta}_4)s_5 \ (\dot{\psi} + \dot{\theta}_4)c_5 \ \dot{\theta}_5]^T, \quad \bar{\omega}_6^{(6)} = [(\dot{\psi} + \dot{\theta}_4)s_{56} \ (\dot{\psi} + \dot{\theta}_4)c_{56} \ \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6]^T \end{aligned} \quad (22)$$

Кинетическая энергия звена  $s$  определяется по формуле

$$T_s = 0.5(m_s \bar{v}_{Cs}^2 + \bar{\omega}_s^T I_{Cs} \bar{\omega}_s) \quad (23)$$

где  $m_s$  — масса звена  $s$ ,  $\bar{v}_{Cs}$  — абсолютная скорость центра масс,  $\bar{\omega}_s$  — абсолютная угловая скорость звена,  $I_{Cs}$  — тензор инерции звена в центре масс. Массы звеньев механизмов приводов не учитываются. Моменты инерции относительно главных центральных осей звена  $s$  обозначены через  $I_{ix}$ ,  $I_{iy}$ ,  $I_{iz}$ . Величины  $I_{1y} = I_{2y}$ ,  $I_{1z} = I_{2z}$  — моменты инерции колес 1 и 2 относительно их горизонтальных осей вращения и диаметра соответственно.

Введем следующие обозначения для сокращения записей

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6, \quad m_{12} = m_1 + m_2, \quad m_{46} = m_4 + m_5 + m_6 \\ I_z &= I_{1z} + I_{2z} + I_{C3z}, \quad I_\psi = I_{4y} + I_{5x}s_5^2 + I_{5y}c_5^2 + I_{6x}s_{56}^2 + I_{6y}c_{56}^2, \quad I_6 = (I_{6x} - I_{6y})s_{56}c_{56} \\ I_{\psi\theta} &= (I_{5x} - I_{5y})s_5c_5 + I_6, \quad b_1 = m_6l_5l_{C6}s_6, \quad b_2 = m_6l_5l_{C6}c_6, \quad b_3 = m_6l_{C6}s_{56} \\ b_4 &= m_6l_{C6}c_{56}, \quad a_1 = a_xc_4 + a_y s_4, \quad a_2 = a_x s_4 - a_y c_4, \quad a_3 = m_5l_{C5}c_5 + m_6l_5c_5 + b_4 \\ a_4 &= m_5l_{C5}s_5 + m_6l_5s_5 + b_3, \quad a_5 = m_5l_{C5}^2c_5 + m_6(l_5c_5 + l_{C6}c_{56})^2 \\ a_6 &= b_2s_{56} + m_6l_{C6}^2s_{56}c_{56}, \quad a_7 = m_5l_{C5}^2s_5c_5 + m_6l_5^2s_5c_5 + m_6l_{C6}^2s_{56}c_{56} + b_1c_{56} + b_2s_{56} \end{aligned}$$

Кинетическая энергия модели робота равна сумме кинетических энергий колес 1 и 2, платформы 3, звеньев манипулятора 4, 5 и 6. Поэтому

$$\begin{aligned} 2T &= \dot{x}_3^2 m + \dot{y}_3^2 m + \dot{\psi}^2 [m_{12}a^2 + m_{46}(a_x^2 + a_y^2) + 2a_1a_3 + a_5 + I_z + I_\psi] + \dot{\theta}_4^2(a_5 + I_\psi) + \\ &+ \dot{\theta}_5^2 [m_5l_{C5}^2 + m_6l_5^2 + m_6l_{C6}^2 + 2b_2 + I_{5z} + I_{6z}] + \dot{\theta}_6^2 (m_6l_{C6}^2 + I_{6z}) + (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2)I_{1y} - \\ &- 2\dot{x}_3\dot{\psi} [m_{46}(a_x s\psi + a_y c\psi) + a_3s(\psi + \theta_4)] - 2\dot{x}_3\dot{\theta}_4 a_3 s(\psi + \theta_4) - \\ &- 2\dot{x}_3\dot{\theta}_5 a_4 c(\psi + \theta_4) - 2\dot{x}_3\dot{\theta}_6 b_3 c(\psi + \theta_4) + 2\dot{y}_3\dot{\psi} [m_{46}(a_x c\psi - a_y s\psi) + a_3c(\psi + \theta_4)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\dot{y}_{C3}\dot{\theta}_4 a_3 c(\Psi + \theta_4) - 2\dot{y}_{C3}\dot{\theta}_5 a_4 s(\Psi + \theta_4) - 2\dot{y}_{C3}\dot{\theta}_6 b_3(\Psi + \theta_4) + \\
& + 2\Psi\dot{\theta}_4(a_1 a_3 + a_7 + I_\Psi) - 2\Psi\dot{\theta}_5 a_2 a_4 - 2\Psi\dot{\theta}_6 a_2 b_3 + 2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6(b_2 + m_6 l_{C6}^2 + I_{6z}) \quad (24)
\end{aligned}$$

Кинетическая энергия модели через квазискорости

$$\begin{aligned}
2T^* &= \omega_1^2(a_5 + I_\Psi) + \omega_2^2(m_5 l_{C5}^2 + m_6 l_5^2 + m_6 l_{C6}^2 + 2b_2 + I_{5z} + I_{6z}) + \omega_3^2(m_6 l_{C6}^2 + I_{6z}) + \\
& + \omega_4^2[m_{12} a^2 + m_{46}(a_x^2 + a_y^2) + 2a_1 a_3 + a_5 + 2I_{1y} a^2 / r^2 + I_z + I_\Psi] + \omega_5^2(m + 2I_{1y} / r^2) + \omega_6^2 m + \\
& + \omega_7^2 I_{1y} / r^2 + \omega_8^2 I_{1y} / r^2 + 2\omega_1 \omega_4(a_1 a_3 + a_5 + I_\Psi) - 2\omega_1 \omega_5 a_3 s_4 + 2\omega_1 \omega_6 a_3 c_4 + \\
& + 2\omega_2 \omega_3(b_2 + m_6 l_{C6}^2 + I_{6z}) - 2\omega_2 \omega_4 a_2 a_4 - 2\omega_2 \omega_5 a_4 c_4 - 2\omega_2 \omega_6 a_4 s_4 - 2\omega_3 \omega_4 a_2 b_3 - \\
& - 2\omega_3 \omega_5 b_3 c_4 - 2\omega_3 \omega_6 b_3 s_4 - 2\omega_4 \omega_5[m_{45} a_y + a_3 s_4] + 2\omega_4 \omega_6(m_{45} a_x + a_3 c_4) - \\
& - 2\omega_4 \omega_7 I_{1y} a / r^2 + 2\omega_4 \omega_8 I_{1y} a / r^2 - 2\omega_5 \omega_7 I_{1y} / r^2 - 2\omega_5 \omega_8 I_{1y} / r^2
\end{aligned}$$

Производные от  $T^*$  по квазискоростям

$$\begin{aligned}
\partial T^* / \partial \dot{\pi}_1 &= \partial T^* / \partial \omega_1 = \omega_1(a_5 + I_\Psi) + \omega_4(a_1 a_3 + a_5 + I_\Psi) - \omega_5 a_3 s_4 + \omega_6 a_3 c_4 \\
\partial T^* / \partial \dot{\pi}_2 &= \omega_2(m_5 l_{C5}^2 + m_6 l_5^2 + m_6 l_{C6}^2 + 2b_2 + I_{5z} + I_{6z}) + \omega_3(b_2 + m_6 l_{C6}^2 + I_{6z}) - \omega_4 a_2 a_4 - \omega_5 a_4 c_4 - \omega_6 a_4 s_4 \\
\partial T^* / \partial \dot{\pi}_3 &= \omega_2(b_2 + m_6 l_{C6}^2 + I_{6z}) + \omega_3(m_6 l_{C6}^2 + I_{6z}) - \omega_4 a_2 b_3 - \omega_5 b_3 c_4 - \omega_6 b_3 s_4 \\
\partial T^* / \partial \dot{\pi}_4 &= \omega_1(a_1 a_3 + a_5 + I_\Psi) - \omega_2 a_2 a_4 - \omega_3 a_2 b_3 + \\
& + \omega_4[m_{12} a^2 + m_{46}(a_x^2 + a_y^2) + a_1 a_3 + a_5 + 2I_{1y} a^2 / r^2 + I_z + I_\Psi] - \\
& - \omega_5[m_{46} a_y + a_3 s_4] + \omega_6(m_{46} a_x + a_3 c_4) - (\omega_7 - \omega_8) I_{1y} a / r^2 \\
\partial T^* / \partial \dot{\pi}_5 &= -\omega_1 a_3 s_4 - \omega_2 a_4 c_4 - \omega_3 b_3 c_4 - \omega_4[m_{46} a_y + a_3 s_4] + \omega_5(2I_{1y} / r^2 + m) - (\omega_7 + \omega_8) I_{1y} / r^2 \\
\partial T^* / \partial \dot{\pi}_6 &= \omega_4 a_3 c_4 - \omega_2 a_4 s_4 - \omega_3 b_3 s_4 + \omega_4(m_{46} a_x + a_3 c_4) + \omega_6 m \\
\partial T^* / \partial \dot{\pi}_7 &= (-\omega_4 a - \omega_5 + \omega_7) I_{1y} / r^2, \quad \partial T^* / \partial \dot{\pi}_8 = (\omega_4 a - \omega_5 + \omega_8) I_{1y} / r^2
\end{aligned}$$

Ненулевые производные от  $T^*$  по квазикоординатам с учетом (5)

$$\begin{aligned}
\partial T^* / \partial \pi_1 &= \partial T^* / \partial \theta_4 = -\omega_4^2 a_2 a_3 - \omega_1 \omega_4 a_2 a_3 - \omega_1 \omega_5 a_2 c_4 - \omega_1 \omega_6 a_2 s_4 - \omega_2 \omega_4 a_1 a_4 + \\
& + \omega_2 \omega_5 a_1 s_4 - \omega_2 \omega_6 a_1 c_4 - \omega_3 \omega_4 a_1 b_3 + \omega_3 \omega_5 b_3 s_4 - \omega_3 \omega_6 b_3 c_4 - \omega_4 \omega_5 a_3 c_4 - \omega_4 \omega_6 a_3 s_4 \\
\partial T^* / \partial \pi_2 &= \partial T^* / \partial \theta_5 = -\omega_1^2(a_7 - I_{\Psi\theta}) - \omega_4^2(a_1 a_4 + a_7 - I_{\Psi\theta}) - \omega_1 \omega_4(a_1 a_4 + 2a_7 - 2I_{\Psi\theta}) + \omega_3 \omega_4 a_1 s_4 - \\
& - \omega_1 \omega_6 a_1 c_4 - \omega_2 \omega_4 a_2 a_3 - \omega_2 \omega_5 a_2 c_4 - \omega_2 \omega_6 a_2 s_4 - \omega_3 \omega_4 a_2 b_4 - \omega_3 \omega_5 b_4 c_4 - \omega_3 \omega_6 b_4 s_4 + \omega_4 \omega_5 a_4 s_4 - \omega_4 \omega_6 a_4 c_4 \\
\partial T^* / \partial \pi_3 &= \partial T^* / \partial \theta_6 = -\omega_1^2(a_6 - I_6) - \omega_4^2 b_1 - \omega_1^2(a_1 b_3 + a_6 - I_6) - \omega_1 \omega_4(a_1 b_3 + a_6 - I_6) + \\
& + \omega_1 \omega_5 b_3 s_4 - \omega_1 \omega_6 b_3 c_4 - \omega_2 \omega_3 m_6 l_{C6} s_6 - \omega_2 \omega_4 a_2 b_4 - \omega_2 \omega_5 b_4 c_4 - \omega_2 \omega_6 b_4 s_4 - \omega_3 \omega_4 a_2 b_4 - \\
& - \omega_3 \omega_5 b_4 c_4 - \omega_3 \omega_6 b_4 s_4 + \omega_4 \omega_5 b_3 s_4 - \omega_4 \omega_6 b_3 c_4
\end{aligned}$$

Вычисление сумм

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^8 \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \left( \sum_{i=1}^8 \dot{\gamma}_{4i} \dot{\pi}_i \right) &= \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_5} \dot{\gamma}_{45} \dot{\pi}_5 + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_6} \dot{\gamma}_{45} \dot{\pi}_6 + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_7} \dot{\gamma}_{46} \dot{\pi}_6 + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_8} \dot{\gamma}_{46} \dot{\pi}_8 = -\omega_1 \omega_5 a_3 c_4 - \omega_1 \omega_6 a_3 s_4 + \\
& + \omega_2 \omega_5 a_4 s_4 - \omega_2 \omega_6 a_4 c_4 + \omega_3 \omega_5 b_3 s_4 - \omega_3 \omega_6 b_3 c_4 - \omega_4 \omega_5(m_{46} a_x + a_3 c_4) - \omega_4 \omega_6(m_{46} a_y + a_3 s_4)
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \left( \sum_{k=1}^8 \gamma'_{5k} \dot{\pi}_k \right) = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_6} \gamma'_{54} \dot{\pi}_4 = \omega_4^2 (m_{46} a_x + a_3 c_4) + \omega_1 \omega_4 a_3 s_4 - \omega_2 \omega_4 a_4 s_4 - \omega_3 \omega_4 b_3 s_4 + \omega_4 \omega_6 m$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_j} \left( \sum_{k=1}^8 \gamma'_{6k} \dot{\pi}_k \right) = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_5} \gamma'_{64} \dot{\pi}_4 + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_7} \gamma'_{64} \dot{\pi}_4 + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_8} \gamma'_{64} \dot{\pi}_4 =$$

$$= \omega_4^2 (m_{46} a_y + a_3 s_4) + \omega_1 \omega_4 a_3 s_4 + \omega_2 \omega_4 a_4 c_4 + \omega_3 \omega_4 b_3 c_4 - \omega_4 \omega_5 m$$

Остальные суммы равны нулю.

## ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ

Все кинематические пары модели робота считаются идеальными. Предполагается, что на модель действуют движущие моменты  $\tau_{r1}, \tau_{r2}, \tau_{r4}, \tau_{r5}, \tau_{r6}$  приведенные к осям вращения колес 1 и 2 или поворота звеньев 4, 5 и 6, силы тяжести, эквивалентные сосредоточенным силам  $m_s \vec{g}$ ,  $s = 1, \dots, 6$ , приложенным в центрах масс звеньев, сила сопротивления  $F(F_x, F_y, F_z)$ , действующая на захват  $H$ . Все силы заданы в системе отсчета  $O_0 x_0 y_0 z_0$ . Обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, 8$  могут быть определены по формулам

$$Q_j = \tau_{rj} - \sum_{k=j}^8 m_k g \frac{\partial z_{ck}^{(0)}}{\partial q_j} + F_x \frac{\partial x_H^{(0)}}{\partial q_j} + F_y \frac{\partial y_H^{(0)}}{\partial q_j} + F_z \frac{\partial z_H^{(0)}}{\partial q_j}, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6 \quad (29)$$

Обобщенные силы, соответствующие квазикоординатам, определены по уравнениям (7) в виде

$$\Pi_1 = \Pi_{04} = Q_1 b_{11} = Q_1 = \tau_{r4} - F_x [l_5 s(\psi + \theta_4) c_5 + l_6 s(\psi + \theta_4) c_{56}] + F_y [l_5 c(\psi + \theta_4) c_5 + l_6 c(\psi + \theta_4) c_{56}]$$

$$\Pi_2 = \Pi_{05} = Q_2 b_{22} = Q_2 = \tau_{r5} - m_5 g l_{c5} c_5 - m_6 g (l_5 c_5 + l_{c6} c_{56}) -$$

$$- F_x [l_5 c(\psi + \theta_4) s_5 + l_6 c(\psi + \theta_4) s_{56}] - F_y [l_5 s(\psi + \theta_4) s_5 + l_6 s(\psi + \theta_4) s_{56}] + F_z (l_5 c_5 + l_{c6} c_{56})$$

$$\Pi_3 = \Pi_{06} = Q_3 b_{33} = Q_3 = \tau_{r6} - m_6 g l_{c6} c_{56} - F_x l_6 c(\psi + \theta_4) s_{56} - F_y l_6 s(\psi + \theta_4) s_{56} + F_z l_6 c_{56}$$

$$\Pi_4 = \Pi_{\psi} = Q_6 b_{64} + Q_7 b_{74} + Q_8 b_{84} = -F_x [a_x s\psi + a_y c\psi + l_5 s(\psi + \theta_4) c_5 + l_6 s(\psi + \theta_4) c_{56}] +$$

$$+ F_y [a_x c\psi - a_y s\psi + l_5 c(\psi + \theta_4) c_5 + l_6 c(\psi + \theta_4) c_{56}] + (\tau_{r1} - \tau_{r2}) a / r$$

$$\Pi_5 = Q_4 b_{45} + Q_5 b_{55} + Q_7 b_{75} + Q_8 b_{85} = F_x c\psi + F_y s\psi + (\tau_{r1} + \tau_{r2}) / r \quad (30)$$

$$\Pi_6 = Q_4 b_{46} + Q_5 b_{56} = -F_x s\psi + F_y c\psi, \quad \Pi_7 = Q_1 b_{77} = -\tau_{r1} / r, \quad \Pi_8 = Q_8 b_{88} = -\tau_{r2} / r$$

Итак, определены все величины для использования в уравнениях Эйлера-Лагранжа.

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Подставив уравнения (26), (27), (28) в формулу (6) с учетом выражений (10), после преобразований получим пять уравнений движения модели робота в виде

$$\begin{aligned}
 & -\dot{\nu}a_3s_4 + \dot{\psi}(a_1a_3 + a_5 + I_\psi) + \ddot{\theta}_4(a_5 + I_\psi) + \dot{\psi}^2a_2a_3 - \nu\dot{\psi}a_3c_4 - 2\nu\dot{\theta}_4a_3c_4 + 2\nu\dot{\theta}_5a_4s_4 + 2\nu\dot{\theta}_6b_3s_4 - \\
 & -2\dot{\psi}\dot{\theta}_4a_2a_3 - 2\dot{\psi}\dot{\theta}_5(a_1a_4 + a_7 - I_{\psi 0}) - 2\dot{\psi}\dot{\theta}_6(a_1b_3 + a_6 - I_6) - 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5(a_7 - I_{\psi 0}) - 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6(a_6 - I_6) = \Pi_1, \\
 & -\dot{\nu}a_4c_4 - \dot{\psi}a_2a_4 + \ddot{\theta}_5(m_3l_{C5}^2 + m_6l_5^2 + m_6l_{C6}^2 + 2b_2 + I_{5z} + I_{6z}) + \ddot{\theta}_6(b_2 + m_6l_{C6}^2 + I_{6z}) + \\
 & + \dot{\psi}^2(a_1a_4 + a_7 - I_{\psi 0}) + \dot{\theta}_4^2(a_7 - I_{\psi 0}) - \dot{\theta}_6^2b_1 - \nu\dot{\psi}a_4s_4 + 2\dot{\psi}\dot{\theta}_4(a_7 - I_{\psi 0}) - 2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6b_1 = \Pi_2 \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\dot{\nu}b_3s_4 - \dot{\psi}a_2b_3 + \ddot{\theta}_5(b_2 + m_6l_{C6}^2 + I_{6z}) + \ddot{\theta}_6(m_6l_{C6}^2 + I_{6z}) - \dot{\psi}^2(a_1b_3 + a_6 - I_6) + \dot{\theta}_4^2(a_6 + I_6) - \dot{\theta}_6^2b_1 + \nu\dot{\psi}b_3s_4 + \\
 & + 2\nu\dot{\theta}_4b_3s_4 - 2\nu\dot{\theta}_5b_4c_4 - 2\nu\dot{\theta}_6b_4c_4 - 2\dot{\psi}\dot{\theta}_4(a_1b_3 + a_6 - I_6) - 2\dot{\psi}\dot{\theta}_5a_2b_4 - 2\dot{\psi}\dot{\theta}_6a_2b_4 - 2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6b_1 = \Pi_3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\dot{\nu}(m_{46}a_y + a_3s_4) + \dot{\psi}[m_{12}a^2 + m_{46}(a_x^2 + a_y^2) + a_5 + 2a_1a_3 + 2a^2I_{1y}/r^2 + I_x + I_\psi] + \\
 & + \ddot{\theta}_4(a_1a_3 + a_6 - I_\psi) - \ddot{\theta}_5a_2a_4 - \ddot{\theta}_6a_2b_3 - \dot{\theta}_5^2a_2a_3 - \dot{\theta}_5^2a_2a_3 - \dot{\theta}_6^2a_1b_4 - \nu\dot{\psi}(m_{46}a_x + a_3c_4) - \\
 & - 2\nu\dot{\theta}_4a_3c_4 + 2\nu\dot{\theta}_5a_4s_4 + 2\nu\dot{\theta}_6b_3s_4 - 2\dot{\psi}\dot{\theta}_4a_2a_3 - 2\dot{\psi}\dot{\theta}_5(a_1a_4 + a_7 - I_{\psi 0}) - 2\dot{\psi}\dot{\theta}_6(a_1b_3 + a_6 - I_6) - \\
 & - 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5(a_1a_4 + a_7 - I_{\psi 0}) - 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6(a_1b_3 + a_6 - I_6) - 2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6a_2b_4 = \Pi_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dot{\nu}(m + 2I_{1y}/r^2) - \dot{\psi}(m_{46}a_y + a_3s_4) - \ddot{\theta}_4a_3s_4 - \ddot{\theta}_5a_4c_4 - \ddot{\theta}_6b_3c_4 + \dot{\psi}^2(m_{46}a_x + a_3c_4) - \\
 & - \dot{\theta}_4^2a_3c_4 - \dot{\theta}_5^2a_3c_4 - \dot{\theta}_6^2b_4c_4 + 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5a_4s_4 + 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6b_3s_4 - 2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6b_4c_4 = \Pi_5
 \end{aligned}$$

Уравнения для определения реакций связей колес с плоскостью имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \dot{\psi}(m_{46}a_x + a_3c_4) + \ddot{\theta}_4a_3c_4 - \ddot{\theta}_5a_4s_4 - \ddot{\theta}_6b_3s_4 + \dot{\psi}^2(m_{46}a_y + a_3s_4) - \\
 & - \dot{\theta}_4^2a_3s_4 - \dot{\theta}_5^2a_3s_4 - \dot{\theta}_6^2b_4s_4 - \nu\dot{\psi}m - 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5a_4c_4 + 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6b_3c_4 - 2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6b_4s_4 = \Pi_6
 \end{aligned}$$

$$-(\nu + \dot{\psi}a)I_{1y}/r^2 = \Pi_7 \quad (32)$$

$$-(\nu - \dot{\psi}a)I_{1y}/r^2 = \Pi_8$$

Таким образом, динамика модели автономного робота описывается уравнениями движения (31) и связей (13) и (14). Как видно из уравнений (31), в случае одновременного движения по всем степеням свободы существует взаимосвязанность уравнений движения, что приводит, в частности, к дополнительным нагрузкам на двигатели.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе уравнения Эйлера-Лагранжа применены для вывода уравнений движения автономного робота с голономными и неголономными свя-

зьями. Исследование упрощенной модели робота позволяет проследить взаимозависимость движений мобильной платформы и манипулятора.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Levkovsky, E. N., Motion of Autonomous Robot with Manipulator. In: Jakowluk, A., Karpovich, S. E. (Eds.) Algorithmization of Mathematical Models for Non-holonomic Constraint System and Nonlinear Mechanics in the Biaxial Stress States of Solid Bodies, Publishers of Bialystok Technical University, Bialystok Poland, 1998, pp 74–86.*
2. *Лурье А.И. Аналитическая механика. - М.: Физматгиз, 1961.— С. 824.*
3. *Yamamoto, Y., Yun, X., Effect of the Dynamic Interaction on Coordinated Control of Mobile Manipulators, IEEE Trans. Robot. Automat., Vol.12, No.5, 1996, pp 816–824.*

## **СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ В РАЗДЕЛЕ «СТАТИКА»**

**С. И. Русан**

**1. Общие замечания.** Вопрос рассматривается в рамках плоской задачи. Содержание раздела «Статика» в большинстве учебников, видимо, ориентировано на те специальности, программы которых предусматривают в дальнейшем изучение курса «Строительная механика». Поэтому в нем не рассматриваются такие вопросы, как свойства статически определимых систем, их структурный анализ, мгновенная изменяемость и некоторые другие. В программах машиностроительных специальностей этот пробел на последующих стадиях обучения не восполняется. Вместе с тем в «Статике» рассматривается множество составных статически определимых систем (рамы, фермы, арки, смешанные системы), где упомянутые вопросы являются актуальными. Контрольные и расчетно-графические работы изобилуют ошибками, когда студенты на схемах конструкций произвольно заменяют один вид связи другим внешне похожим, опускают или вводят внутренние шарниры и т. д.

В учебниках приводится только краткое описание статически определимых систем. Чтобы им воспользоваться, необходимо сравнить количество неизвестных сил и реакций связей с числом возможных условий равновесия. Если указанные числа совпадают, то система статически определима. Описанный способ прост для систем, состоящих из одного тела и наложенных на него связей. Если система включает несколько тел, то он вызывает затруднения, а в некоторых случаях дает сбой. Отсутствие у студентов первичных навыков структурного анализа и синтеза вызывает трудности в дальнейшем при изучении структуры механизмов (группы Ассур) в теории механизмов и машин. Следует отметить, что студенты, синтезируя составную статически определимую систему, приобретают и первые в вузе конструкторские навыки. Все вышесказанное побудило дополнить раздел «Статика» небольшим вопросом, вынесенным в заголовок этого материала. К структурному анализу как самому надежному обращаются и в тех случаях, когда аналитический способ (на основании формул) неприемлем.

**2. О статической определимости и изменяемости систем.** Как уже отмечалось, статически определимой системой в разделе «Статика» называют такую систему, у которой число неизвестных силовых факторов и геометрических параметров равно числу возможных независимых условий равновесия

для этой системы. Для более полной характеристики статической определимости следует добавить, что в составной системе она может быть *внешней* и *внутренней*. В системах, обладающих внешней статической определимостью, условий равновесия достаточно для определения реакций внешних связей. Для определения внутренних сил взаимодействия между частями системы уравнений статики может оказаться недостаточно. На рис. 2.1 показаны системы, обладающие только внутренней и только внешней статической определимостью. В этом же смысле будем понимать внутреннюю и внешнюю *изменяемость* систем.

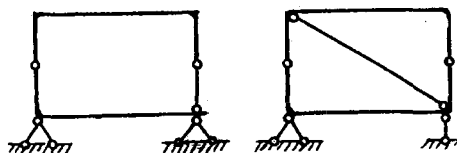


Рис. 2.1.

**3. О классификации и преобразовании связей в статике.** Классифицировать связи в статике будем не по их названиям, а по существенным (глубинным) свойствам – по числу ограничений, которые налагаются ими на перемещения точек системы. Назовем это свойство *валентностью* связи. Тогда идеальный подвижный цилиндрический шарнир и двойную скользящую заделку следует отнести к одновалентным связям, неподвижный цилиндрический шарнир и жесткую заделку – соответственно к двух- и трехвалентным. Самую высокую валентность, равную шести, имеет жесткая пространственная заделка. Систему связей будем характеризовать суммарной валентностью. Механические связи можно преобразовывать путем понижения их валентности и введения соответствующих реакций. На рис. 3.1 показаны некоторые варианты преобразования жесткой заделки А. Каждый из них допускает дальнейшее понижение валентности.

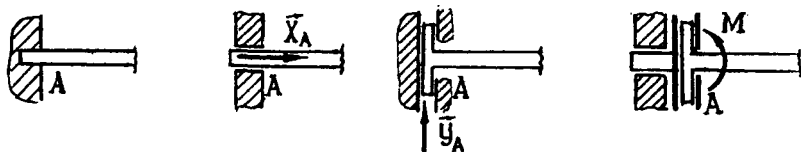


Рис. 3.1.

Описанное здесь преобразование связей можно рассматривать как *частичное* освобождение материального объекта от наложенных связей. В анали-



тической механике оно используется для определения реакций на основании принципа возможных перемещений. Однако делается это без какого-либо обоснования. Ссылка на аксиому о связях здесь не состоятельна, поскольку в ней идет речь об освобождении от *всех* связей. Поэтому целесообразно главную аксиому о связях сформулировать в следующем виде: *состояние равновесия материального объекта не нарушится, если понизить валентность наложенной на него системы связей*. В таком виде аксиома может служить основанием для применения принципа возможных перемещений при решении упомянутого класса задач статики. Если, следуя аксиоме, понизить валентность связей до нуля, то получим известную аксиому о *полном* освобождении от связей. Валентность системы связей можно и повышать, что согласуется с аксиомой о наложении новых связей. Связи, способные воспринимать сжимающие силы, будем иногда называть *опорами*.

**4. Первичные свободные и несвободные статически определимые системы.** К *первичным* (простейшим) будем относить неизменяемые статически определимые системы, состоящие из твердых тел и не допускающие выделения из них более простых систем с аналогичными свойствами без нарушения целостности входящих в них тел. Здесь под неизменяемостью свободных систем следует понимать внутреннюю неизменяемость. К первичным свободным системам отнесем одно тело 1 и совокупность трех тел 1, 2, 3, связанных между собой двухвалентных связей (рис. 4.1). В дальнейшем будем обозначать их соответственно через  $C_1, C_2$ . Первичные несвободные системы  $HC_1, HC_2, HC_3$  представлены на рис. 4.2. Они образованы из систем  $C_1, C_2$  путем наложения трехвалентных систем связей.

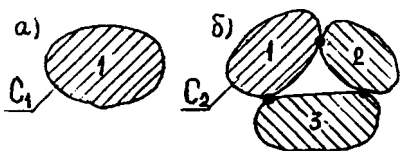


Рис. 4.1.

Систему  $HC_2$  получаем из системы  $C_2$ , закрепляя только одно тело, например, 3. Его можно совместить с неподвижным основанием. В результате получаем первичную систему из двух тел 1, 2 с четырехвалентной системой внешних связей А, В и внутренней двухвалентной связью С. Каждая из связей А, В, С может быть представлена двумя одновалентными связями. В отличие от системы  $HC_2$ , имеющей одно закрепленное тело, в системе  $HC_3$  связи налагаются на разные тела (рис. 4.2 в). Наиболь-

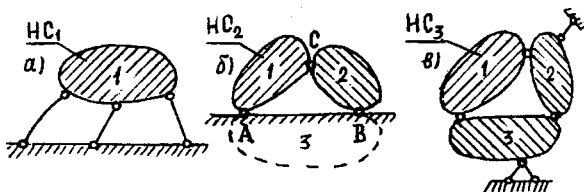


Рис. 4.2.

шее распространение получили системы  $HC_1$ ,  $HC_2$ . Примеры их использования в схемах реальных конструкций показаны на рис. 4.3, 4.4.

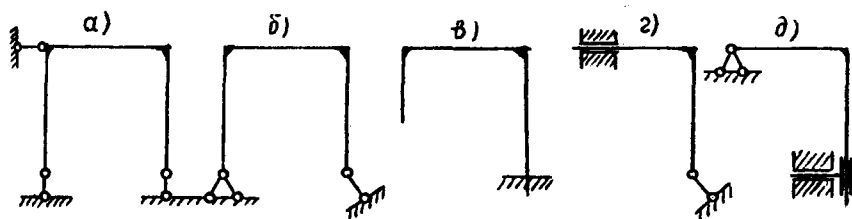


Рис. 4.3.

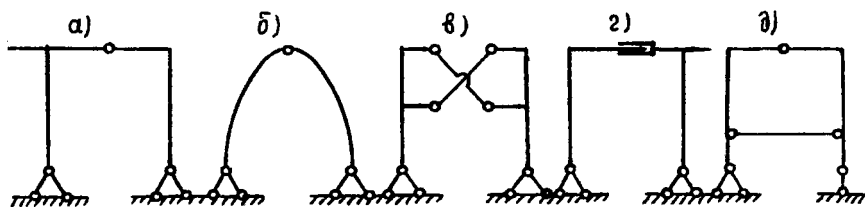


Рис. 4.4.

**5. Принцип образования сложных составных систем.** Структурными элементами синтеза (или подсистемами) сложных составных систем являются первичные статически определимые системы. Так, свободная составная система может включать только подсистемы  $C_1$  или  $C_2$ , или те и другие одновременно.

Подсистемы соединяются между собой посредством трехвалентной системы связей. В качестве самостоятельного структурного элемента синтеза свободных сложных систем выделим из подсистемы  $C_2$  изменяемую структуру из двух тел с двухвалентной связью  $C$  (рис. 5.1). В теории механизмов и машин ее называют *диадой* ( $D$ ). В процессе синтеза диада присоединяется к другим элементам с помощью четырехвалентной системы связей. Пример сложной свободной системы приведен на рис. 5.2. Последовательность ее «сборки» можно представить структурной схемой:  $C_1(1) > C_1(2) > D(3, 4)$ . Эту запись следует понимать так: к телу 1 посредством связей  $A$  и  $BC$  присоединяется тело 2 (тела 1 и 2 – подсистемы  $C_1$ ); к полученной неизменяемой системе присоединяется диада  $D(3, 4)$  при помощи двухвалентных связей  $B, C$ .

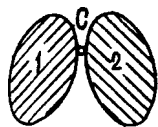


Рис. 5.1.

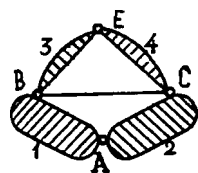


Рис. 5.2.

Мы рассмотрели *первый уровень* синтеза составных систем из первичных элементов. На *втором уровне* синтеза полученную составную систему следует рассматривать как одно *жесткое тело*, то есть принимать ее в качестве первичного элемента синтеза  $C_1$ . Два таких жестких тела с двухвалентной связью образуют диаду  $C_2$ , три – первичную систему  $C_3$ . Затем повторяется описанная выше «технология сборки» первого уровня синтеза. Синтез составных систем может быть продолжен и на более высоких уровнях. В теоретической механике ограничимся первым уровнем синтеза.

Перейдем к синтезу сложных несвободных систем. Их структурными элементами являются подсистемы  $HC_1$ ,  $HC_2$ ,  $HC_3$ . На рис. 4.2 на каждую из них наложена трехвалентная система внешних связей. В процессе синтеза в зависимости от положения подсистемы в структуре всей системы часть внешних связей или все они становятся внутренними. По валентности внешних связей будем различать *базисные*, *надстроенные* и *промежуточные* подсистемы. К базисным отнесены подсистемы, сохранившие трехвалентную систему внешних связей. Они могут выступать в качестве независимых самостоятельных систем (рис. 4.3, 4.4). Надстроенные подсистемы не имеют внешних связей, а их валентность у систем промежуточного типа меньше трех. Надстроенные и промежуточные подсистемы могут существовать лишь как структурные элементы сложных составных систем. Представленная на рис. 5.3 система включает подсистемы всех трех типов: две базисные –  $HC_2$  (1,2),  $HC_2$  (3, 4); одну промежуточную –  $HC_1$  (5) и две надстроенные –  $D$  (6, 7),  $D$  (8, 9). Синтез («сборка») системы начинается с базисных подсистем. Затем присоединяются смешанные и надстроенные элементы. Возможную очередность «сборки» системы, показанной на рис. 5.3, можно представить структурной схемой:

$$\left\{ \begin{array}{l} HC_2(1,2) \\ HC_2(3,4) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} HC_1(5) \\ D(6,7) \end{array} \right\} \rightarrow D(8,9)$$

Последовательность присоединения элементов, записанных в одном столбце, допустимо менять местами или вести «сборку» параллельно. Схему структурного синтеза системы можно использовать при силовом анализе системы, если учесть следующее замечательное свойство схемы: *действие нагрузки, приложенной к какой-либо подсистеме, не передается на элементы, расположенные на структурной схеме справа от нагруженной подсистемы*. Так, на приведенной выше схеме к рис. 5.3 все элементы структуры механической системы рас-

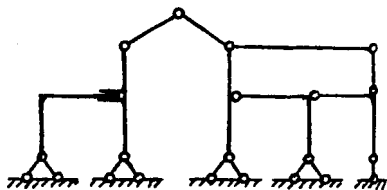


Рис. 5.3.

положены справа от базисных подсистем  $HC_2(1,2)$ ,  $HC_2(3,4)$ . Следовательно, они не будут включены в работу, если нагрузка приложена к этим подсистемам.

**6. Анализ и порядок расчета сложных составных систем.** Если задана сложная составная система, то для установления статической определенности необходимо выполнить анализ ее структуры по первичным элементам  $C_1, C_2, HC_1, HC_2, HC_3$  и  $D$  с учетом валентности наложенных на них связей. Последовательность анализа обратна синтезу. Например, из несвободных систем в начале следует выделить надстроенные подсистемы, затем промежуточные и базисные. Если система допускает такое деление, значит она статически определима. Силовой расчет выполняется в такой же последовательности, как и структурный анализ. При этом учитывается приведенное в п. 5 свойство структурной схемы.

**7. Понятие о мгновенно-изменяемых системах.** Как определено выше, в процессе синтеза составных систем структурные элементы вводятся в систему при помощи трех- или четырехвалентной системы связей. Однако наличие необходимой валентности не всегда обеспечивает неизменяемость и статическую определенность системы. Установлено, что если линии действия реакций связей параллельны или пересекаются в одной точке, то система (или ее структурный элемент) обладает *мгновенной изменяемостью*. Это негативное свойство систем исключает их использование в технике, так как при нагружении реакции связей достигают весьма больших значений и создают угрозу разрушения конструкции. Примеры мгновенно-изменяемых систем приведены на рис. 7.1.

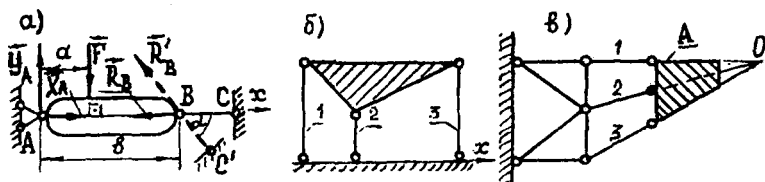


Рис. 7.1.

Системы связей при которых имеет место мгновенная изменяемость систем будем называть *некорректными*. На рис. 7.1 а, б некорректными являются внешние связи А, ВС и 1, 2, 3, а на рис. 7.1 в – внутренние 1, 2, 3, образующие вместе с телом А надстроенную подсистему типа  $HC_1$ . Не трудно убедиться, что мгновенно-изменяемые системы являются статически неопределимыми, так как для определения реакций не хватает одного условия равновесия. Так,

для систем на рис. 7.1 а, в реакции связей не войдут в суммы моментов относительно точек А и О; для системы на рис. 7.1 б – в сумму проекций на ось х. Чтобы получить представление о величине реакций связей рассмотрим систему 7.1 а. Стержень ВС повернем на угол  $\alpha$  в положение ВС'. Система станет статически определимой. Составим для нее сумму моментов относительно точки А:  $R_B' \sin \alpha b - Fa = 0$ . Отсюда получаем:  $R_B' = aF/(b \sin \alpha)$ . Из формулы видно, что при обратном переходе к мгновенно-изменяемой системе  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $R_B' \rightarrow R_B \rightarrow \infty$ . В процессе синтеза необходимо следить, чтобы все структурные элементы вводились с помощью корректных систем связей.

УДК

## МЕТОД РАЗРЫВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД.

**А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев**

В настоящей работе, применяя операцию разрывов [1] исследуем поведение нестационарных возмущений вдоль характеристик в неоднородной упруговязкопластической среде. Получены уравнения для изменения интенсивности возмущенного состояния, которые приводятся к виду удобному для исследования динамической устойчивости сложных сред [2].

Рассмотрим упруговязкопластическое тело объема  $V$ , ограниченное поверхностью  $S$ , с заданными на ней краевыми условиями. Считаем тело изотропным, неоднородным. Тензор упругих деформаций  $e_{ij}^e$  связан с напряжениями  $\sigma_{ij}$  законом Гука.

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \quad (1)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе.

Среда находится в упругом состоянии, если

$$S_{ij} S_{ij} = \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) < k^2 \quad (2)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $k$  — коэффициент пластичности.

Если  $S_{ij} S_{ij} > k^2$ , то тело деформируется пластическим образом. В этом случае, компоненты тензора скорости пластических деформаций  $\dot{e}_{ij}^p$  связаны с тензором напряжений условием

$$(S_{ij} - \eta \dot{e}_{ij}^p)(S_{ij} - \eta \dot{e}_{ij}^p) = 2k^2, \quad (3)$$

где  $\eta$  — коэффициент вязкости.

Ассоциированный закон течения имеет вид

$$\dot{e}_{ij}^p = \psi (S_{ij} - \eta \dot{e}_{ij}^p), \quad \psi > 0 \quad (4)$$

Полные деформации связаны с упругими  $e_{ij}^e$  и пластическими  $e_{ij}^p$  обычным образом

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p \quad (5)$$

и выражаются через перемещения  $u_i$  с помощью формул Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i,j}) \quad (6)$$

Представленная модель является обобщением модели тела Бингама. Для замыкания системы определяющих уравнений запишем уравнения движения и граничные условия в виде

$$[\sigma_{kj}(\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

где  $\rho$  — плотность.

$$[\sigma_{kj}(\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} n_j = p_i \quad (8)$$

где  $n_j$  — нормаль к гранитной поверхности,  $p_i$  — приложенные силы.

В соотношениях (1) — (4) коэффициенты упругости —  $\lambda$ ,  $\mu$  пластичности —  $k$ , вязкости —  $\eta$ , являются функциями пространственных координат.

Обозначим решение системы (1) — (8) через  $\sigma_{ij}^0(x_n, t)$ ,  $e_{ij}^0(x_n, t)$ ,  $u_{ij}^0(x_n, t)$ . Будем считать, что с течением времени они асимптотически стремятся к  $\sigma_{ij}^0(x_n)$ ,  $e_{ij}^0(x_n)$ ,  $u_{ij}^0(x_n)$ .

Представим величины связанные с возмущенной формой движения в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^+; e_{ij} = e_{ij}^0 + e_{ij}^+; u_{ij} = u_{ij}^0 + u_{ij}^+ \quad (9)$$

Будем считать возмущение  $\sigma_{ij}^+$ ,  $e_{ij}^+$ ,  $u_{ij}^+$  малыми, а величины  $e_{ij,k}^{p+} = 0$ . Тогда при подстановке (9) в исходные уравнения получим из (7) и (1) соотношения возмущенного движения

$$E_{nm, m}^+ = \rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}; \quad (10)$$

$$E_{nm}^+ - \sigma_{mn}^0 e_{i,j}^+ = \lambda e_{ij}^0 \delta_{nm} + \mu (e_{n,n}^+ + e_{n,m}^+) \quad (11)$$

где

$$E_{nm}^+ - \sigma_{nm}^+ = \sigma_{nk}^+ \left(1 - 3\lambda(3\lambda + 2\mu)^{-1}\right) \sigma_{mk}^0 / 2\mu \quad (12)$$

Рассмотрим распространение нестационарных возмущений в рассматриваемой среде в виде поверхностей разрыва  $L_t$ , на которых величины возмущений напряжений и деформаций испытывают разрыв, а величины напряжений и деформаций основного состояния и параметры среды непрерывны. Знаком [ ] обозначим разность значений некоторой функции  $f$  на разных сторонах от поверхности разрыва т.е.  $[f] = f^+ - f^-$ , где  $f^-$  — значение  $f$  на задней,  $f^+$  — на передней стороне поверхности. Используя [1] можно получить, что скачок возмущений распространяется в виде продольной и поперечной волн со скоростями

$$C_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu + v_i v_j \sigma_{ij}^0}{\rho}} \quad (13)$$

$$C_t = \sqrt{\frac{\mu + v_i v_j \sigma_{ij}^0}{\rho}} \quad (14)$$

здесь  $v_i$  — компоненты вектора единичной нормали к поверхности  $L_t$ .

Уравнение интенсивности возмущений получим с помощью динамических, геометрических и кинематических условий совместности на поверхности  $L_t$ .

$$\left[ \frac{\partial E_{mn}^+}{\partial t} \right] = \frac{\delta [E_{mn}]}{\delta t} - \Pi_{mn}^+ c \quad (15)$$

$$\left[ \frac{\partial E_{mn}^+}{\partial x_m} \right] = g^{ab} \frac{\partial [E_{mn}^+]}{\partial y^a} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial y^b} + v_m \Pi_{mn}^+ \quad (16)$$

$$\left[ \frac{\partial V_m^+}{\partial x_n} \right] = v_m T_n + g^{ab} \frac{\partial [V_m^+]}{\partial y^a} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^b} \quad (17)$$

$$\left[ \frac{\partial V_m^+}{\partial t} \right] = \frac{\delta [V_m]}{\delta t} - c T_m \quad (18)$$

Тогда уравнение для изменения интенсивности продольной волны с учетом (10), (11), (15)–(18) имеет вид

$$\frac{d\gamma^+}{ds} = \frac{\gamma(A+B)}{2\rho c_e^2} \quad (19)$$

а поперечной

$$\frac{d[V_i^+]}{ds} = A_{ij} [V_j^+] + B_{ikg} \left( [V_k^+] v_g + [V_g^+] v_k \right) \quad (20)$$

здесь  $\gamma^+ = [V_i^+] v_i^{-1}$ , коэффициенты  $A, B, A_{ij}, A_{ikg}, \Pi_{mn}$  и  $T_m$  — зависят от средней кривизны поверхности, от первой и второй квадратичных форм;  $s$  — расстояние вдоль траектории луча.

Аналогично работе [4] для плоского случая (координаты —  $x, y$ ) получим уравнение траектории, которое может быть приведено к виду

$$\ddot{z} + \omega^2 z + \hat{\omega} z^3 = W(x, z) \quad (21)$$

по математической структуре соответствующей уравнению Дуффинга. В (21) обозначим  $z = y\sqrt{n}$  ( $n$  — коэффициент преломления среды,  $\omega$  — собственная частота траектории возмущений,  $\hat{\omega} = 8\epsilon^2 \Pi \Omega$ );  $\epsilon \ll 1$ ;  $W(x, z) = zW(x)$ .

Уравнение (21) можно исследовать на устойчивость известными методами [5], в том числе и в случаях задания параметров среды случайными функциями координат [6].

## Литература

1. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. — М.: Наука, 1964.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961.
3. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. — М.: Физматлит, 2001.
4. Чигарев А.В., Чигарев Ю.В. О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах. — Акустический журнал, Т.24, вып. 5, 1978. с. 765-771.
5. Болотин В.В., Григолюк Э.И. Устойчивость упругих и неупругих систем. В сб. «Механика в СССР за 50 лет», М.: Наука, 1977.
6. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОЖНЫХ АГРОЭКОСИСТЕМ

**Ю.В. Чигарев**

Агрофизическое состояние почвы влияет на развитие агрофитоценоза, биоценоза и микробиоценоза агроэкосистемы, а следовательно, и на ее поведение ( равновесие), которое может быть устойчивым или не устойчивым по отношению к тем или иным внешним возмущениям ( механическим и климатическим воздействиям) [1].

Для оценки устойчивого (неустойчивого) состояния агроэкосистемы удобно ввести понятие экологической инвариантности.

Под экологической инвариантностью будем понимать неизменяемость компонентов агроэкосистемы в пределах нормированных границ в результате производственного сельскохозяйственного цикла связанного с возделыванием той или иной культуры или культур.

Нормированные границы определяют параметры экологодопустимого физического состояния агроэкосистемы, которое она приобретет в результате сельскохозяйственных процессов в течение определенного времени при использовании соответствующей технологии.

Нормированные границы обеспечивают агроэкосистеме на данной ступени ее развития устойчивый уровень состояния.

Если обозначить определяющую функцию состояния агроэкосистемы, экологический потенциал, через  $\epsilon_{AC}$ , то ее локальная изменимость будет зависеть от компонентов структуры и плодородия почвы, агрофитоценоза, биоценоза и микробиоценоза, т.е.

$$\epsilon_{AC} = F \left\{ F \left[ \sum f_{C_i}(t) \right]; F_{\Phi} \left[ \sum f_{\Phi_i}(t) \right]; F_3 \left[ \sum f_{3_i}(t) \right]; F_M \left[ \sum f_{M_i}(t) \right] \right\},$$

где  $F_C, F_{\Phi}, F_3, F_M$  — интегральные характеристики состояния структуры почвы, фитоценоза, зооценоза и микробиоценоза. ( $i=1,2,\dots$ ).

Величина  $\epsilon_{AC}$  будет инвариантна, если функции  $F_C, F_{\Phi}, F_3, F_M$  в процессе производственного цикла изменяются в пределах жестко установленных границ, обеспечивая тем самым устойчивое состояние агроэкосистемы. Естественно, что интегральные характеристики зависят от техногенных процессов, которые связаны с механической и химической обработкой почвы, с общей культурой земледелия и с климатическими воздействиями.

Оценка устойчивости агроэкосистемы к техногенным механико-химическим и климатическим нагрузкам представляет весьма сложную инженерно-экологическую задачу [ 2].

Одно и тоже техногенное воздействие в разных агроэкосистемах, отличающихся по рельефу, природно-климатическим условиям, севообороту, типу почвы и т.д. приводит к различным последствиям. Поэтому нормативные значения допускаемых нагрузок и воздействий<sup>1</sup> на агроэкосистемы являются строго дифференцированными характеристиками.

Данные интегральные характеристики являются главными составляющими компонентами агроэкосистемы. Каждая из перечисленных компонент в свою очередь делится на отдельные составляющие. Например, структура почвы характеризуется такими параметрами, как плотность, пористость, воздухопроницаемость, влажность, упругость и т.д.

В литературе указанные параметры часто называют переменными состояниями. Так переменными состояниями фитоценоза могут быть масса сухого вещества растения и поверхность его листьев. Для построения агромоделей в число переменных состояний предпочтительно включать те количественные характеристики и свойства экосистемы, которые, во-первых, поддаются измерению и, во-вторых, представляют особый интерес для исследователя.

Если  $F_C, F_\Phi, F_3, F_M$  — являются независимыми переменными, то ни одна из них не может быть определена через значения остальных. Значения переменных  $F_C, F_\Phi, F_3, F_M$  определяют единственным образом состояние системы в момент времени  $t$ .

Возможны три формы представления агроэкосистемы: одномерное ( линейно выраженное)

$$A_1 = f_1(x),$$

двухмерное ( площадочно выраженное)

$$A_2 = f_2(x, y),$$

трехмерное ( объемно выраженное)

$$A_3 = f_3(x, y, z).$$

Выбор той или иной формы представления зависит от цели исследования.

Интегральная характеристика региональной агроэкосистемы  $\epsilon_{AC}$  выражает совокупные свойства как производные регионального антропогенеза

$$\epsilon_{AC} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n e_i \\ f(e_1, e_2 \dots e_n) \end{cases},$$

где  $\sum_{i=1}^n e_i$  — линейно выраженные функциональные свойства

$f(e_1, e_2, e_3 \dots e_n)$  — нелинейно выраженные функциональные свойства.

Выражение  $\epsilon_{AC}$  носит символический характер и его конкретный вид зависит от специфики решаемой задачи и конкретных условий формирования и развития агроэкосистемы.

Составляющие свойства интегральной характеристики агроэкосистемы можно сгруппировать по различным признакам.

Обозначим через  $A$  группу показателей свойств атмосферы (состояние воздуха в почве);

$G$  — группу показателей свойств гидросферы (состояние поверхностных и грунтовых вод);

$L$  — группа показателей физико-механических свойств почвы (плотность, влажность, воздухопроницаемость и т.д.);

$\Phi$  — группа показателей свойств фитоценоза (выращиваемые сельскохозяйственные культуры);

$Z$  — группа показателей свойств зооценоза (сообщество животных, обитаемых на территории агроландшафта);

$M$  — группа показателей свойств микробиоценоза (сообщество микроорганизмов);

$H$  — группа показателей состояния человека.

Тогда показатель одной из возможных форм представления интегральной характеристики агроэкосистемы будет

$$\epsilon_{AC} = \sum_{i=1}^k e_{Ai} + \sum_{i=1}^l e_{Gi} + \sum_{i=1}^m e_{Li} + \sum_{i=1}^n e_{\Phi i} + \sum_{i=1}^r e_{Zi} + \sum_{i=1}^p e_{Mi} + \sum_{i=1}^{\lambda} e_{Hi};$$

Иногда составляющие агроэкосистемы группируют по другому: вместо фитоценоза, зооценоза и микробиоценоза рассматривают группы флоры ( $F_f$ ) и фауны ( $F_\phi$ ).

Будем считать, что показатели атмосферы  $A$ , гидросферы  $G$ , свойств почвы  $L$  равночувствительны (в экологическом смысле) к техногенным воздействиям со стороны с/хозяйственной техники, а показатели  $\Phi$  — фитоценоза,  $Z$  — зооценоза,  $M$  — микробиоценоза равночувствительны к антропогенным изменениям  $A$ ,  $G$  и  $L$ .

Общий экологический потенциал агроэкосистемы является функционалом параметров биосферы и геосферы и может быть выражен в виде [261/

$$\epsilon_{AC} = \phi[\epsilon_1, \epsilon_2], \quad (I)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varphi(\varepsilon_A, \varepsilon_G, \varepsilon_L) \\ \varepsilon_2 &= \psi(\varepsilon_\phi, \varepsilon_3, \varepsilon_M) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Составляющие компоненты функций  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  зависят от времени, поэтому состояние объектов геосфер  $A, G, L$  описывается уравнением

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_A} \frac{d\varepsilon_A}{dt} + \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_G} \frac{d\varepsilon_G}{dt} + \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_L} \frac{d\varepsilon_L}{dt} \quad (3)$$

Показатели  $A, G, L$  функционально зависимы от параметров техногенеза со стороны с/хозяйственной техники и технологии обработки почвы (вес тракторов и агрегатов, частоты колеблющихся органов машин, жесткость шин и рисунка протектора, количества проходов по полю и т.д.). Эти параметры будем символически обозначать  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда, обозначая через  $\tau$  временную координату техногенного процесса можно записать

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= f_1'(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \tau) \\ \varepsilon_G &= f_2'(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \tau) \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Поэтому (3) можно представить в виде системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{d\omega_1} &= \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_A} \frac{d\varepsilon_A}{d\omega_1} + \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_G} \frac{d\varepsilon_G}{d\omega_1} + \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_L} \frac{d\varepsilon_L}{d\omega_1} + \frac{d\varepsilon_1}{dt} \frac{dt}{d\omega_1} \\ \frac{d\varepsilon_1}{d\omega_2} &= \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_A} \frac{d\varepsilon_A}{d\omega_2} + \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_G} \frac{d\varepsilon_G}{d\omega_2} + \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_L} \frac{d\varepsilon_L}{d\omega_2} + \frac{d\varepsilon_1}{dt} \frac{dt}{d\omega_2} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d\varepsilon_1}{d\omega_n} &= \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_A} \frac{d\varepsilon_A}{d\omega_n} + \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_G} \frac{d\varepsilon_G}{d\omega_n} + \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_L} \frac{d\varepsilon_L}{d\omega_n} + \frac{d\varepsilon_1}{dt} \frac{dt}{d\omega_n} \\ \frac{d\varepsilon_1}{d\tau} &= \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_A} \frac{d\varepsilon_A}{d\tau} + \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_G} \frac{d\varepsilon_G}{d\tau} + \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_L} \frac{d\varepsilon_L}{d\tau} + \frac{d\varepsilon_1}{dt} \frac{dt}{d\tau} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Состояние объектов региональной биосферы  $\Phi, 3, M$  тоже можно представить в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\varepsilon_2}{d\tau} = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_\phi} \frac{d\varepsilon_\phi}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_3} \frac{d\varepsilon_3}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_M} \frac{d\varepsilon_M}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (5)$$

Так как объекты региональной биосферы  $\Phi, 3, M$  зависят от объектов геосфер  $A, 3, L$ , то, очевидно, что

$$\varepsilon_{\phi} = f_1'(\varepsilon_A, \varepsilon_G, \varepsilon_L, \tau);$$

$$\varepsilon_3 = f_2'(\varepsilon_A, \varepsilon_G, \varepsilon_L, \tau);$$

$$\varepsilon_M = f_3'(\varepsilon_A, \varepsilon_G, \varepsilon_L, \tau)$$

и уравнение (5) трансформируется в систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_A} &= \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_{\phi}} \frac{d\varepsilon_{\phi}}{d\varepsilon_A} + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_3} \frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_A} + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_M} \frac{d\varepsilon_M}{d\varepsilon_A} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \frac{dt}{d\varepsilon_A}; \\ \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_G} &= \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_{\phi}} \frac{d\varepsilon_{\phi}}{d\varepsilon_G} + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_3} \frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_G} + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_M} \frac{d\varepsilon_M}{d\varepsilon_G} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \frac{dt}{d\varepsilon_G}; \\ \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_L} &= \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_{\phi}} \frac{d\varepsilon_{\phi}}{d\varepsilon_L} + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_3} \frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_L} + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_M} \frac{d\varepsilon_M}{d\varepsilon_L} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \frac{dt}{d\varepsilon_L}; \\ \frac{d\varepsilon_2}{d\tau} &= \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_{\phi}} \frac{d\varepsilon_{\phi}}{d\tau} + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_3} \frac{d\varepsilon_3}{d\tau} + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_M} \frac{d\varepsilon_M}{d\tau} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \frac{dt}{d\tau} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Масштаб времени техногенного и антропогенного процесса в агроэкосистеме может совпадать, т.е.  $t = \tau$ .

Уравнения (3)–(6) описывают изменение параметров агроэкосистемы в зависимости от составляющих ее объектов и времени. Использование данных уравнений требует накопления и анализа большого массива информации о действительных формированиях и эксплуатации реальных агроэкосистем. Поэтому данная математическая модель агроэкосистемы не совсем удобна для практического использования, хотя имеет очень большие перспективы, т.к. учитывает почти все параметры влияющие на ее поведение. Уравнения (3) — (2) необходимо приводить к виду удобному для исследования устойчивости агроэкосистемы.

## Литература

1. Чигарев Ю.В. Термодинамический подход к исследованию критических уровней агроэкологических систем. *Весці АНБ. сер. фіз.-тэх.* №3, 1995.
2. Заславский В.Г., Полуэктов Р.А. *Управление экологическими системами.* М. 1988.

## ИНВЕРСИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КЕЛЬВИНА В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

**О.В. Жихарев**

Многие методы исследования пространственных (статических) задач теории упругости основываются на решениях однородной системы уравнений Ламе с помощью гармонических и бигармонических функций. Для тел конечных размеров, границы которых допускают описание в рамках координатных поверхностей, эти решения могут быть найдены с помощью разложений по собственным вектор-функциям.

Известный прогресс в решении задач плоской теории упругости во многом достигнут благодаря использованию методов теории функции комплексного переменного, в частности, метода конформных отображений. Соответствующим аналогом этого метода в пространстве является метод инверсии, который остается единственным конформным отображением пространственных областей.

Инверсия — это некоторое точечное преобразование пространственных областей относительно сферы радиуса  $\varepsilon$  (радиус инверсии) с центром в точке  $(a_1, a_2, a_3)$  (центр инверсии), задаваемое следующими соотношениями [3, 8]:

$$x_1 - a_1 = \frac{\varepsilon^2}{r^2}(x - a_1); \quad y_1 - a_2 = \frac{\varepsilon^2}{r^2}(y - a_2); \quad z_1 - a_3 = \frac{\varepsilon^2}{r^2}(z - a_3), \quad (1)$$

где  $r^2 = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2$ .

По Кельвину, если  $V(x, y, z)$  — гармоническая в области  $D$  функция, то функция

$$V_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{\varepsilon}{r_1} V \left( a_1 + \frac{\varepsilon^2}{r_1^2}(x_1 - a_1), a_2 + \frac{\varepsilon^2}{r_1^2}(y_1 - a_2), a_3 + \frac{\varepsilon^2}{r_1^2}(z_1 - a_3) \right), \quad (2)$$

где  $r_1^2 = (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - a_2)^2 + (z_1 - a_3)^2$ , будет гармонической в области  $D_1$ , полученной из  $D$  в результате преобразования (1) [3, 8].

Класс областей, в которых можно ожидать аналитические представления перемещений для тел конечных размеров, может быть расширен с помощью метод инверсии. Он позволяет находить решения пространственных задач теории упругости для новых тел (допускающих разделение переменных) и апп-

роксимировать тела конечных размеров некоторыми другими телами со сглаженными границами. Так, например, цилиндр конечных размеров можно приблизить вписанным в него телом вращения заданных размеров со сглаженными углами (рис. 1).

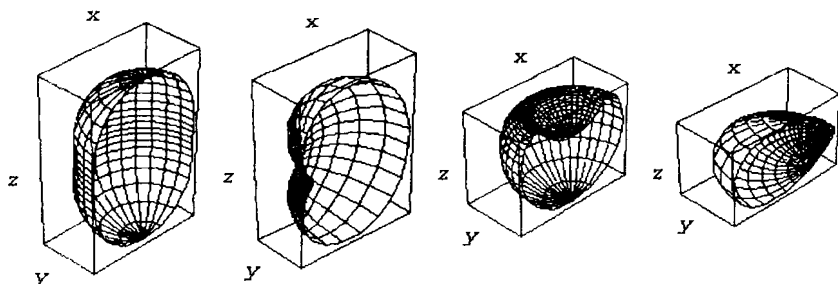


Рис. 1 Фигуры, получаемые в результате применения инверсии к эллипсоиду вращения.

Рассмотрим в качестве примера, решение пространственной задачи теории упругости для сжатого эллипсоида вращения [6]. Фундаментальная система решений уравнения Лапласа в эллипсоидальных координатах имеет вид [6]:

$$V(\eta, \theta, \varphi) = \left[ f_{nm} P_n^{(m)}(ch\eta) + g_{nm} Q_n^{(m)}(ch\eta) \right] P_n^{(m)}(\sin \theta) (i_{nm} \cos m\varphi + k_{nm} \sin m\varphi),$$
 где  $0 \leq \eta \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  — эллипсоидальные координаты, связанные с декартовыми следующими соотношениями [5]:

$$ch\eta = \frac{s_1 + s_2}{2a}, \quad \sin \theta = \frac{s_1 - s_2}{2a}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad s_1 = \sqrt{z^2 + (\rho \pm a)^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Применяя преобразование Кельвина, приходим к такому решению уравнения Лапласа в новой (преобразованной по инверсии) системе координат:

$$V_*(\eta, \theta, \varphi) = \sqrt{ch^2 \eta - \cos^2 \theta} \quad V(\eta, \theta, \varphi), \quad (3)$$

где  $ch\eta = \frac{s'_1 + s'_2}{2a}$ ,  $\sin \theta = \frac{s'_1 - s'_2}{2a}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{y_1}{x_1}$  и  $\frac{s'_1}{s'_2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 \pm \frac{1}{a})^2}$ .

Воспользовавшись результатами Ю. Н. Подильчука [6] и учитывая (3), получим следующее решение задачи теории упругости для преобразованного с помощью инверсии эллипсоида вращения:

$$u = \frac{\sqrt{ch^2\eta - \cos^2\theta}}{2aG} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} P_n^{(m-1)}(\cos\theta) Q_n^{(m-1)}(\sin i\eta) [\pm a_{nm} \cos^{(m-1)}\theta + b_{nm} \frac{\sin}{\cos} (m-1)\theta] +$$

$$w = -\frac{\sqrt{ch^2\eta - \cos^2\theta}}{2aG} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \frac{1}{(n+m)(n-m+1)} P_n^{(m)}(\cos\theta) Q_n^{(m)}(\sin i\eta) [a_{nm} \cos m\theta + b_{nm} \sin m\theta]$$

Следует отметить, что указанный метод позволяет строить приближенные решения пространственных задач теории упругости для областей со сложной геометрией граничных поверхностей. Для таких областей отсутствуют способы решения, которые были бы близкими по точности и эффективности к способам решения задач плоской теории упругости.

О возможностях применения метод инверсии к решению контактных задач теории упругости указывал Л. А. Галина [1]. В. И. Довноровичем [2] была разработана формальная схема использования этого метода для решения контактных задач теории упругости. В.Л. Рвачев [7] применил МИ при решении контактной задачи для штампа, имеющего в плане форму двух соприкасающихся окружностей.

Используя результаты А. И. Лурье [4], полученные при решении задачи о вдавливании штампа с плоским основанием, имеющего в плане форму эллипса силой  $Q$ , сосредоточенной в точке  $(x_0, y_0)$ , в упругое полупространство  $z \leq 0$ , находим следующее решение новой контактной задачи для штампа, очерченного в плане контуром, являющимся инверсией эллипса (рис. 2):

$$p_1(x, y) = \frac{Q}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \left( (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{3x_0}{a^2} \left( \frac{x-a_1}{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} + a_1 \right) + \frac{3y_0}{a^2(1-e^2)} \left( \frac{y-a_2}{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} + a_2 \right) \right) \times$$

$$\times \left( 1 - \left( \frac{x-a_1}{a((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2)} + \frac{a_1}{a} \right)^2 - \left( \frac{y-a_2}{a\sqrt{1-e^2}((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2)} + \frac{a_2}{a\sqrt{1-e^2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эта формула получена в предположении, что центр инверсии находится в плоскости  $z = 0$ , она учитывает перемещение штампа как жесткого целого, и потому уточняет решение В. И. Довноровича.



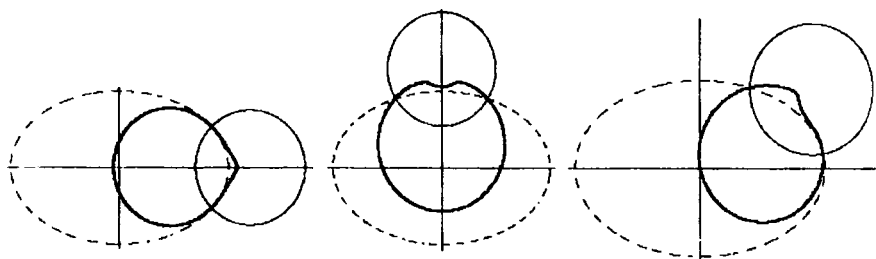


Рис. 2 Кривые, получаемые в результате инверсии эллипса.

Применение метод инверсии может привести к появлению областей перемены знака  $p_1(x, y)$ , т.е. зон отрыва точек границ полупространства от поверхности штампа, поэтому формула (4) должна быть дополнена условием  $p_1(x, y) \geq 0$  при  $(x, y) \in S^*$ , где  $S^*$  — площадка контакта. Кроме того, нужно следить за тем, во что преобразуется исходная область. В зависимости от того, принадлежит ли центр инверсии исследуемой области (внутренность эллипса) или он находится вне ее, получаемая в результате преобразования область, будет соответственно неограниченной в первом случае и ограниченной (рис. 2) во втором.

### Литература

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М. Гостехиздат, 1963.
2. Довнорович В.И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Мн. БГУ, 1959.
3. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., 1950.
4. Лурье А.И. Теория упругости, М., 1955, с.306–324.
5. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М., 1968 г.
6. Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. Киев, 1979.
7. Рвачев В.Л. О характере распределение давления под штампом, очерченным в плане двумя соприкасающимися окружностями. — Изв. АН СССР, ОТН, 1959, 2, 400.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М. Наука, 1981, том 4, часть 2.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ.

*Т. А. Емельянова*

В настоящее время в различных областях техники широкое применение находят слоистые конструкции, и, в частности, трехслойные оболочки. В статье рассматриваются свободные колебания пологой трехслойной оболочки с легким трансверсально-изотропным заполнителем, подкреплённой ребрами жесткости. Расстояния между ребрами, а также их жесткости, считаются одинаковыми. Ребра расположены симметрично относительно срединной поверхности оболочки.

Соединение оболочки с ребрами и ребер между собой принимается жестким. Внешние силы, приложенные к срединным плоскостям наружных слоев и к ребрам, не изменяются в процессе колебаний. Влияние рассеивания энергии на частоты свободных колебаний мало, а поэтому им можно пренебречь.

Для наружных изотропных слоев трехслойной оболочки принимаются следующие допущения:

- а) гипотеза прямых нормалей,
- б) поперечные деформации наружных слоев не учитываются, поэтому

$$\epsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z} = 0, \quad w = w(x, y, t) \quad (1)$$

в) пренебрегаем напряжением  $\sigma_y$  по сравнению с напряжениями  $\sigma_x, \sigma_y$ , следовательно

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_x + \mu\epsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_y + \mu\epsilon_x); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{1-\mu^2}\gamma_{xy} \quad (2)$$

Легкий трансверсально-изотропный заполнитель предполагается таким, что он воспринимает только напряжения  $\tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_3$ . Как и для наружных слоев, поперечные деформации заполнителя не учитываются, т.е.

$$w_3 = w_3(x, y, t) \quad (3)$$

Следствием этих допущений является закон о линейном изменении перемещений  $u$  и  $v$  по толщине заполнителя.

Закон Гука для легкого трансверсально-изотропного заполнителя принимает вид:

$$\tau_{xz} = G_3 \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G_3 \gamma_{yz}. \quad (4)$$

С учетом принятых допущений выражения для перемещений запишутся так:

для верхнего слоя ( $-h-\delta \leq z \leq -h$ )

$$w_n = w; u_n = u_1 - (z+H) \frac{\partial w}{\partial x}; v_n = v_1 - (z+H) \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (5)$$

для нижнего слоя ( $h \leq z \leq h+d$ )

$$w_n = w; u_n = u_2 - (z-H) \frac{\partial w}{\partial x}; v_n = v_1 - (z-H) \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6)$$

для заполнителя ( $-h \leq z \leq h$ )

$$w_3 = w; u_3 = \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{z}{h} \left( \frac{u_1 - u_2}{2} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad (7)$$

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2} - \frac{z}{h} \left( \frac{v_1 - v_2}{2} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right);$$

Здесь:  $H = h + 0,5 d$ .

Для ребер учитываем изгиб и кручение в вертикальной плоскости, продольную деформацию, а также их деформации сдвига в вертикальной и горизонтальной плоскостях, принимая при этом гипотезу о линейном изменении тангенциальных перемещений по толщине ребра.

Закон Гука для ребер запишется так:

$$\sigma_x = E_p \varepsilon_x; \quad \tau_{xz} = G_{xzp} \gamma_{xz}; \quad (\text{для ребер, параллельных оси X}); \quad (8)$$

$$\sigma_y = E_p \varepsilon_y; \quad \tau_{yz} = G_{yzp} \gamma_{yz}; \quad (\text{для ребер, параллельных оси Y}).$$

Выражения для перемещений ребер имеют вид (7), как и для заполнителя.

Перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  будем считать величинами одного порядка и малыми по сравнению с толщиной оболочки. При рассмотрении малых перемещений выражения для деформаций запишутся так:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R_1}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_2};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (9)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Здесь:  $R_1, R_2$  — главные радиусы координатной поверхности;  $w_1, w_2$  — углы поворота сечений ребер при кручении.

Для упрощения в дальнейшем записи уравнений обозначим:

$$u_\alpha = \frac{u_1 + u_2}{2}; u_\beta = \frac{u_1 - u_2}{2}; v_\alpha = \frac{v_1 + v_2}{2}; v_\beta = \frac{v_1 - v_2}{2} \quad (10)$$

Получим выражения для потенциальной и кинетической энергий оболочки и ребер. Для потенциальной энергии деформации оболочки имеем:

$$U_{об} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left[ \int_{-h}^{-h-\delta} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dz + \right. \\ \left. + \int_h^{h+\delta} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dz + \int_{-h}^h (\tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dz \right] dx dy \quad (11)$$

Принимая во внимание формулы (5), (6), (7), (9) из выражения (11) получим, вводя обозначения:

$$N_x = N_{1x} - N_{2x}; n_{xy} = S_1 - S_2; m_x = M_{1x} + M_{2x}; m_{xy} = H_1 + H_2;$$

$$N_{1x} = \int_{-h-\delta}^{-h} \sigma_{1x} dz, \quad N_{2x} = \int_h^{h+\delta} \sigma_{2x} dz, \quad S_1 = \int_{-h-\delta}^{-h} \tau_{1xy} dz, \quad S_2 = \int_h^{h+\delta} \tau_{2xy} dz, \\ M_{1x} = \int_{-h-\delta}^{-h} \sigma_{1x} (z+H) dz, \quad M_{2x} = \int_h^{h+\delta} \sigma_{2x} (z-H) dz,$$

$$H_1 = \int_{-h-\delta}^{-h} \tau_{1xy} (z+H) dz, \quad H_2 = \int_h^{h+\delta} \tau_{2xy} (z-H) dz, \quad N_x = N_{1x} + N_{2x}, \quad (12)$$

$$Q_{3x} = \int_{-h}^h \tau_{3xz} dz = \int_{-h}^h G_3 \gamma_{3xz} dz, \quad Q_{3y} = \int_{-h}^h \tau_{3yz} dz = \int_{-h}^h G_3 \gamma_{3yz} dz,$$

$$S = S_1 + S_2, n_y = N_{1y} - N_{2y}, m_y = M_{1y} + M_{2y}, N_y = N_{1y} + N_{2y},$$

$$N_{1y} = \int_{-h}^h \sigma_{1y} dz, \quad N_{2y} = \int_{-h+\delta}^h \sigma_{2y} dz, \quad M_{1y} = \int_{-h}^h \sigma_{1y} (z+H) dz, \\ M_{2y} = \int_{-h+\delta}^h \sigma_{2y} (z-H) dz$$

следующее выражение для потенциальной энергии оболочки:

$$\begin{aligned}
\Pi_{об} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left\{ N_x \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + N_y \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + S \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + S \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + n_x \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \right. \\
& + n_{xy} \frac{\partial u_\beta}{\partial y} - \frac{1}{h} Q_{3x} u_\beta + n_y \frac{\partial v_\beta}{\partial y} + n_{xy} \frac{\partial v_\beta}{\partial x} - \frac{1}{h} Q_{3y} v_\beta - m_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\
& - m_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2m_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\delta + 2h}{2h} Q_{3x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\delta + 2h}{2h} Q_{3y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{N_x}{R_1} w - \\
& \left. - \frac{N_y}{R_2} w \right\} dx dy. \tag{13}
\end{aligned}$$

Для потенциальной энергии деформации ребер имеем:

$$\begin{aligned}
\Pi_p = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{s+1} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left[ \int_{-bp/2-h}^{bp/2-h} \int_{-bp/2-h}^h (\tau_{pxz} \gamma_{pxz} + \sigma_{py} \epsilon_{py} + \tau_{pyz} \gamma_{pyz}) dx dz + C_i \left( \frac{\partial \varpi_1}{\partial y} \right)^2 \right] dy + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^s \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ \int_{-bp/2-h}^{bp/2-h} \int_{-bp/2-h}^h (\tau_{pxz} \gamma_{pyz} + \sigma_{px} \epsilon_{px} + \tau_{pyz} \gamma_{pxz}) dy dz + C_k \left( \frac{\partial \varpi_2}{\partial x} \right)^2 \right] dx \tag{14}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы (7), (9) из выражения (14) получим, вводя обозначения:

$$\begin{aligned}
Q_{ix} = & \int_{-bp/2-h}^{bp/2-h} \int_{-bp/2-h}^h \tau_{pxz} dx dz, \quad Q_{iy} = \int_{-bp/2-h}^{bp/2-h} \int_{-bp/2-h}^h \tau_{pyz} dx dz, \quad N_{iy} = \int_{-bp/2-h}^{bp/2-h} \int_{-bp/2-h}^h \sigma_{py} dx dz, \\
M_{iy} = & \int_{-bp/2-h}^{bp/2-h} \int_{-bp/2-h}^h \sigma_{py} Z dx dz, \quad Q_{kx} = \int_{-bp/2-h}^{bp/2-h} \int_{-bp/2-h}^h \tau_{pxz} dy dz, \quad Q_{ky} = \int_{-bp/2-h}^{bp/2-h} \int_{-bp/2-h}^h \tau_{pyz} dy dz, \tag{15} \\
N_{kx} = & \int_{-bp/2-h}^{bp/2-h} \int_{-bp/2-h}^h \sigma_{px} dy dz, \quad M_{kx} = \int_{-bp/2-h}^{bp/2-h} \int_{-bp/2-h}^h \sigma_{px} Z dy dz
\end{aligned}$$

следующее выражение для потенциальной энергии ребер:

$$\begin{aligned}
\Pi_p = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ -\frac{1}{h} Q_{ix} u_\beta + \frac{H}{h} Q_{ix} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{iy} \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - \frac{1}{h} M_{iy} \frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \frac{\delta}{2h} M_{iy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\
& - \frac{N_{iy}}{R_2} w - \frac{1}{h} Q_{iy} v_\beta + \frac{H}{h} Q_{iy} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{C_i}{4h^2} \left( \frac{\partial v_\beta}{\partial y} + (H-\delta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \left. \right\} dy + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^s \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ -\frac{1}{h} Q_{kx} u_\beta + \frac{H}{h} Q_{kx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{ky} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \frac{1}{h} M_{ky} \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\delta}{2h} M_{ky} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \right. \\
& - \frac{N_{ky}}{R_1} w - \frac{1}{h} Q_{ky} v_\beta + \frac{H}{h} Q_{ky} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{C_k}{4h^2} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + (H-\delta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \left. \right\} dx. \tag{16}
\end{aligned}$$

Здесь:  $C_i, C_k$  — жесткость ребер при кручении.

Для кинетической энергии оболочки имеем:

$$T = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_{-h}^{+h} \left[ \frac{\rho_H}{2} \int_{-h-\delta}^h (u_B^2 + v_B^2 + w^2) dz + \right. \\ \left. + \frac{\rho_H}{2} \int_{-h}^{h+\delta} (u_H^2 + v_H^2 + w^2) dz + \frac{\rho_3}{2} \int_{-h}^h (u_3^2 + v_3^2 + w^2) dz \right] dx dy dt \quad (17)$$

Подставляя в (17) выражения (5), (6), (7) и выполнив интегрирование по  $Z$ , с учетом обозначений (10), получим:

$$T = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int \left[ (\rho_H \delta + \rho_3 h) \left( u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + w^2 + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 \right) \right] + \quad (18)$$

Здесь:  $\rho_H, \rho_3$  — плотность материала наружных слоев и заполнителя, приходящаяся на единицу объема. Точки вверху над  $u_\alpha, u_\beta, v_\alpha, v_\beta, w$  обозначают дифференцирование по времени  $t$ .

Кинетическая энергия ребер, параллельных оси  $Z$ :

$$T_P = \frac{\rho_P}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{s+1} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_{-h}^h \int_{-Bp/2}^{+Bp/2} (u_p^2 + v_p^2 + w^2) dx dy dz dt \quad (19)$$

Вводя выражения (7) в (19) и выполнив интегрирование по  $Z$  и  $X$ , с учетом обозначений (10), получим:

$$T_P = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{s+1} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int \left[ \rho_P b_P h \left( u_\alpha^2 + \frac{1}{3} u_\beta^2 - \frac{\delta}{3} u_\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + v_\alpha^2 + \frac{1}{3} v_\beta^2 - \frac{\delta}{3} v_\beta \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 + w^2 \right) dy dt \right] \quad (20)$$

Аналогично для ребер, параллельных оси  $X$ :

$$T_P = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^s \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int \left[ \rho_P b_P h \left( u_\alpha^2 + \frac{1}{3} u_\beta^2 - \frac{\delta}{3} u_\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + v_\alpha^2 + \frac{1}{3} v_\beta^2 - \frac{\delta}{3} v_\beta \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 + w^2 \right) dx dt \right] \quad (21)$$

Если в срединных плоскостях наружных слоев действует внешняя сжимающая нагрузка  $2T_1, 2T_2$ , то

$$A_{об} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left[ 2T_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2T_2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (22)$$

Если по концам ребер действуют сжимающие силы  $P_x, P_y$ , то

$$A_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^s \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_k \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{s+1} \int_{y_{k-1}}^{y_k} P_i \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy \quad (23)$$

Когда оболочка совершает одно из главных колебаний, то

$$w(x, y, t) = w(x, y) \sin \omega t \quad (w \rightarrow u_\alpha \rightarrow u_\beta \rightarrow v_\alpha \rightarrow v_\beta) \quad (24)$$

Для таких колебаний максимальное значение потенциальной энергии оболочки и ребер получим, если в (13), (16), (22), (23) подставим выражение (24). Оставляя прежние обозначения для  $w, u_\alpha, u_\beta, v_\alpha, v_\beta$ , выражение для максимальной потенциальной энергии оболочки и ребер будет иметь вид:

$$\begin{aligned} U_{\max} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left\{ N_x \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + N_y \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + S \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + S \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + n_x \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + n_{xy} \frac{\partial u_\beta}{\partial y} - \right. \\ & - \frac{1}{h} Q_{3x} u_\beta + n_{xy} \frac{\partial v_\beta}{\partial y} + n_{xy} \frac{\partial v_\beta}{\partial x} - \frac{1}{h} Q_{3y} v_\beta - m_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2m_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\delta + 2h}{2h} Q_{3x} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & + \frac{\delta + 2h}{2h} Q_{3y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{N_x}{R_1} w - \frac{N_y}{R_2} w - 2T_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 2T_2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left. \right\} dx dy + \quad (25) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{s+1} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left\{ -\frac{1}{h} Q_{ix} u_\beta + \frac{H}{h} Q_{ix} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{iy} \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - \frac{1}{h} M_{iy} \frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \frac{\delta}{2h} M_{iy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{N_{iy}}{R_2} w - \right. \\ & - \frac{1}{h} Q_{iy} v_\beta + \frac{H}{h} Q_{iy} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{C_i}{4h^2} \left( \frac{\partial v_\beta}{\partial y} + (H - \delta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - P_i \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left. \right\} dy + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^s \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ -\frac{1}{h} Q_{ix} u_\beta + \frac{H}{h} Q_{ix} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{ix} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \frac{1}{h} M_{ix} \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\delta}{2h} M_{ix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \right. \\ & - \frac{N_{ix}}{R_1} w - \frac{1}{h} Q_{iy} v_\beta + \frac{H}{h} Q_{iy} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{C_k}{4h^2} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + (H - \delta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - P_k \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left. \right\} dx. \end{aligned}$$

Вводя в (18), (20), (21) выражение (24), выражение для максимальной кинетической энергии:

$$T_{\max} = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left\{ (\rho_H \delta + \rho_3 h) \omega^2 \left[ u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + w^2 + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \omega^2 \left( \rho_H \delta + \frac{1}{3} \rho_3 h \right) \left[ u_\beta^2 + v_\beta^2 \right] - \frac{\rho_3 h \delta}{3} \omega^2 \left[ u_\beta \frac{\partial w}{\partial x} + v_\beta \frac{\partial w}{\partial y} \right] \} dx dy + \\
& + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{s+1} \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} \rho_p b_p h \omega^2 \left[ u_\alpha^2 + \frac{1}{3} u_\beta^2 - \frac{\delta}{3} u_\beta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + v_\alpha^2 + \frac{1}{3} v_\beta^2 - \right. \\
& - \left. \frac{\delta}{3} v_\beta \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + w^2 \right] dy + \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^s \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \rho_p b_p h \omega^2 \left[ u_\alpha^2 + \frac{1}{3} u_\beta^2 - \frac{\delta}{3} u_\beta \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + v_\alpha^2 + \frac{1}{3} v_\beta^2 - \frac{\delta}{3} v_\beta \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\delta^2}{12} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + w^2 \right] dx.
\end{aligned} \quad (26)$$

Рассматривая функционал-действие по Остроградскому — Гамильтону

$$S = \int_a^a (T - U) dt \quad (27)$$

на совокупности главных колебаний  $\overset{ib}{\text{одного}}$  и того же периода  $2\pi/\omega$  и выполнив интегрирование по времени на промежутке  $t_A - t_B = 2\pi/\omega$ , придем к уравнению [1]

$$\delta(T_{\max} - U_{\max}) = 0, \quad (28)$$

которому должны удовлетворять собственные формы действительных главных колебаний подкрепленной оболочки.

Подставляя в (28) значения максимальной потенциальной и кинетической энергий (25), (26) и выполнив интегрирование по частям, например:

$$\delta \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} 2B \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right) dx dy = 2 \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} 2B \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \delta u_\alpha \Big|_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} dy - 2 \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} 2B \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} \delta u_\alpha dx dy,$$

представим вариационное уравнение (28) в виде:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} \left\{ \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + 2(\rho_H \delta + \rho_3 h) \varpi^2 u_\alpha \right) \delta u_\alpha + \left( \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2(\rho_H \delta + \rho_3 h) \varpi^2 \right) \delta v_\alpha + \left( \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{h} Q_{3x} + 2 \left( \rho_H \delta + \frac{1}{3} \rho_3 h \right) \varpi^2 u_\beta - \right. \right. \\
& \left. \left. - \rho_3 h \frac{\delta}{3} \varpi^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta u_\beta + \left( \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{h} Q_{3y} + 2 \left( \rho_H \delta + \frac{1}{3} \rho_3 h \right) \varpi^2 v_\beta - \right. \right. \\
& \left. \left. - \rho_3 h \frac{\delta}{3} \varpi^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta v_\beta + \left( \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{H}{h} \left( \frac{\partial Q_{3x}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{3y}}{\partial y} \right) + \frac{N_x}{R_1} + \right.
\end{aligned} \quad (29)$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{N_y}{R_2} - 2T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(\rho_H \delta + \rho_3 h) \omega^2 w - \frac{\delta^2}{6} (\rho_H \delta + \rho_3 h) \omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& - \frac{\delta^2}{6} (\rho_H \delta + \rho_3 h) \omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho_3 h \frac{\delta}{3} \omega^2 \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) \delta w \} dx dy + \\
& + \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} \left\{ \left( N_x \delta u_\alpha + S \delta v_\alpha + n_x \delta u_\beta + n_{xy} \delta v_\beta - m_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial m_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{H}{h} Q_{3x} - 2T_1 \frac{\partial w}{\partial x} - (\rho_H \delta + \rho_3 h) \omega^2 \frac{\delta^2}{6} \frac{\partial w}{\partial x} + \rho_3 h \frac{\delta}{3} \omega^2 u_\beta \right) \delta w \right\}_{x_{i-1}}^{x_i} dy + \\
& + \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ \left( S \delta u_\alpha + N_y \delta v_\alpha + n_y \delta v_\beta + n_{xy} \delta u_\beta - m_y \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left( \frac{\partial m_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{H}{h} Q_{3y} - 2T_2 \frac{\partial w}{\partial y} - (\rho_H \delta + \rho_3 h) \frac{\delta^2}{6} \omega^2 \frac{\partial w}{\partial y} + \rho_3 h \frac{\delta}{3} \omega^2 v_\beta \right) \delta w \right\}_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} dx + \\
& + 2 \left[ \left( m_{xy} \delta w \right)_{x_{i-1}}^{x_i} \right]_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} + \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^s \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} - \left( \frac{\partial N_{kx}}{\partial x} - 2\rho_\rho b_\rho h \omega^2 u_\alpha \right) \delta u_{\alpha k} + \right. \\
& + \left. \left( \frac{1}{h} Q_{ky} - \frac{C_k}{4h^2} \left( \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} + \left( h - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{2\rho_\rho b_\rho h \omega^2}{3} \left( v_\beta - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \delta v_{\beta k} + \right. \\
& + \left. \left( \frac{1}{h} \left( Q_{kx} - \frac{\partial M_{kx}}{\partial x} \right) - \frac{2\rho_\rho b_\rho h \omega^2}{3} \left( u_\beta - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \delta u_{\beta k} - \left( \frac{H}{h} Q_{ky} + \frac{C_k}{4h^2} \left( h - \frac{\delta}{2} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left( \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} + \left( h - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\rho_\rho b_\rho h \delta}{3} \omega^2 \left( v_\beta - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \delta \frac{\partial w_k}{\partial y} + \right. \\
& + \left. \left( \frac{H}{h} \frac{\partial Q_{kx}}{\partial x} - \frac{\delta}{2h} \frac{\partial^2 M_{kx}}{\partial x^2} + \frac{N_{kx}}{R_1} + P_k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho_\rho b_\rho h \delta}{3} \omega^2 \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\rho_p b_p h \omega^2 w_k \delta w_k \} dx - \left( N_{kx} \delta u_{\alpha} - \left( \frac{H}{h} Q_{kx} + \frac{\delta}{2h} \frac{\partial M_{kx}}{\partial x} + P_k \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w_k - \frac{1}{h} M_{kx} \delta u_{\beta x} + \right. \\
& + \frac{\delta}{2h} M_{kx} \delta \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{C_k}{4h^2} \left( \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x} + \left( h - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta v_{\beta k} - \frac{C_k}{2h^2} \left( h - \frac{\delta}{2} \right) + \\
& + \left. \left( \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x} + \left( h - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta \frac{\partial w_k}{\partial y} \right)_{x_{i-1}}^{x_i} + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{s+1} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left\{ - \left( \frac{\partial N_{iy}}{\partial y} - 2\rho_p b_p h \omega^2 v_{\alpha} \right) \delta v_{\alpha i} + \right. \\
& + \left. \left( \frac{1}{h} Q_{ix} - \frac{C_i}{4h^2} \left( \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial y^2} + \left( h - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{2\rho_p b_p h \omega^2}{3} \left( u_{\beta} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \delta u_{\beta i} + \right. \\
& + \left. \left( \frac{1}{h} \left( Q_{iy} - \frac{\partial M_{iy}}{\partial y} \right) - \frac{2\rho_p b_p h \omega^2}{3} \left( v_{\beta} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \delta v_{\beta i} - \left( \frac{H}{h} Q_{ix} + \frac{C_i \left( h - \frac{\delta}{2} \right)}{4h^2} \left( \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial y^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. \left( h - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\rho_p b_p h \delta}{3} \omega^2 \left( u_{\beta} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \delta \frac{\partial w_i}{\partial x} + \left( \frac{H}{h} \frac{\partial Q_{iy}}{\partial y} - \frac{\delta}{2h} \frac{\partial^2 M_{iy}}{\partial y^2} + \frac{N_{iy}}{R_2} + P_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \right. \\
& - \left. \frac{\rho_p b_p h \delta}{3} \omega^2 \left( \frac{\partial v_{\beta}}{\partial y} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2\rho_p b_p h \omega^2 w_i \right) \delta w_i \} dy - \left( N_{iy} \delta v_{\alpha} - \left( \frac{H}{h} Q_{iy} + \frac{\delta}{2h} \frac{\partial M_{iy}}{\partial y} + \right. \right. \\
& + \left. P_k \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta w_i - \frac{1}{h} M_{iy} \delta v_{\beta i} + \frac{\delta}{2h} M_{iy} \delta \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{C_i}{4h^2} \left( \frac{\partial u_{\beta}}{\partial y} + \left( h - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta u_{\beta i} - \\
& - \left. \frac{C_i}{4h^2} \left( h - \frac{\delta}{2} \right) \left( \frac{\partial u_{\beta}}{\partial y} + \left( h - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta \frac{\partial w_i}{\partial x} \right)_{y_{k-1}}^{y_k} = 0
\end{aligned}$$

В соответствии со значениями (12) используя (5), (6), (7), (9), получим следующие выражения для усилий через перемещения:

$$\begin{aligned}
N_{1x} &= B \left[ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right) - w \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) + \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) \right]; \\
N_{2x} &= B \left[ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right) - w \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) - \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) \right]; \\
N_x &= N_{1x} + N_{2x} = 2B \left[ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} \right) - w \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right) \right]; \\
M_{1x} = M_{2x} &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); H_1 = H_2 = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\
S_1 &= \frac{(1-\mu)B}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial y} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x} \right) \right]; \\
S_2 &= \frac{(1-\mu)B}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial y} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x} \right) \right]; \\
S &= (1-\mu)B \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \right); Q_{3x} = -2G_3 \left( u_\beta - H \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\
N_{1y} &= B \left[ \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right) - w \left( \frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) + \left( \frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_\beta}{\partial x} \right) \right]; \\
N_{2y} &= B \left[ \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right) - w \left( \frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) - \left( \frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_\beta}{\partial x} \right) \right]; \\
N_y &= N_{1y} + N_{2y} = 2B \left[ \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right) - w \left( \frac{1}{R_2} + \frac{\mu}{R_1} \right) \right]; \\
M_{1y} = M_{2y} &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); Q_{3y} = -2G_3 \left( v_\beta - H \frac{\partial w}{\partial y} \right); \\
B &= \frac{E\delta}{1-\mu^2}; D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Дифференциальные уравнения свободных колебаний участка оболочки, заключенного между ребрами или между ребрами и краями оболочки, с учетом действия сил в срединных плоскостях наружных слоев получим из вариационного уравнения (29).

Полагая  $\delta u_\alpha, \delta v_\alpha, \delta u_\beta, \delta v_\beta, \delta w$  произвольными внутри участка оболочки, из уравнения (29) получаем пять уравнений свободных поперечных колебаний.

$$-\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + 2(\rho_H \delta + \rho_3 h) \omega^2 u_\alpha = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + 2(\rho_H \delta + \rho_3 h) \omega^2 v_\alpha = 0$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{h} Q_{3x} + 2\left(\rho_H \delta + \frac{1}{3} \rho_3 h\right) \omega^2 u_\beta - \rho_3 h \frac{\delta}{3} \omega^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{h} Q_{3y} + 2\left(\rho_H \delta + \frac{1}{3} \rho_3 h\right) \omega^2 v_\beta - \rho_3 h \frac{\delta}{3} \omega^2 \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (32)$$

$$+\rho_3 h \frac{\delta}{3} \omega^2 \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) = 0$$

Последние два члена уравнений (31) и (32) учитывают инерцию вращения трехслойной оболочки.

А. П. Прусаковым [2], А.И.Холодом [3] и другими авторами показано, что инерция вращения оказывает малое влияние на первые частоты свободных колебаний и ними можно пренебречь. Так как в этой работе рассматриваются поперечные колебания, то не учитываем и последние члены уравнений (30).

Преобразовывая уравнение (32) с помощью уравнений (31), получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [(M_{1x} + M_{2x}) - H(N_{1x} - N_{2x})] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(M_{1y} + M_{2y}) - H(N_{1y} - N_{2y})] +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(H_1 + H_2) - H(S_1 + S_2)] + \frac{N_x}{R_1} - 2T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{N_y}{R_2} - 2T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} +$$

$$+ 2(\rho_H \delta + \rho_3 h) \omega^2 w = 0 \quad (33)$$

Для упрощения решения системы (30), (31), (33) введем функцию усилий F:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad S = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (34)$$

Тогда уравнения (30) обратятся в тождество, а для определения функции  $F$  будем иметь уравнение неразрывности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\alpha}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha y}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\alpha y}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (35)$$

Здесь:  $\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} - \frac{w}{R_1}$ ;  $\varepsilon_{\alpha y} = \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial y} - \frac{w}{R_2}$ ;  $\varepsilon_{\alpha\alpha y} = \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x} \right)$ .

Используя зависимости (30), (34), определяем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{N_x - \mu N_y}{2B(1-\mu^2)} = \frac{1}{2B(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right); \\ \varepsilon_{\alpha y} &= \frac{N_y - \mu N_x}{2B(1-\mu^2)} = \frac{1}{2B(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right); \\ \varepsilon_{\alpha\alpha y} &= \frac{S}{(1-\mu)} = -\frac{1}{(1-\mu)B} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставляя (36) в уравнения (35), получаем:

$$\frac{1}{2B(1-\mu^2)} \nabla^4 F + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (37)$$

С учетом (12), (30), (34) уравнения (31) и (33) имеют вид:

$$\begin{aligned} u_{\beta} - H \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{Bh}{G_3} \left( \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_{\beta}}{\partial x \partial y} \right); \\ v_{\beta} - H \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{Bh}{G_3} \left( \frac{\partial^2 v_{\beta}}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_{\beta}}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x \partial y} \right); \\ -2D\nabla^4 w - 2BH\nabla^2 \left( \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial y} \right) &+ \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \\ -2T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(\rho_{\mu}\delta + \rho_3 h) \omega^2 w &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Если в уравнениях (38) положить  $\omega = 0$ , получим уравнения устойчивости участка оболочки, заключенного между ребрами.

## Литература

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. Физматгиз, М., 1965.
2. Прусаков А.П. Устойчивость и свободные колебания трехслойных пластин с легким наполнителем. Докторская диссертация, т.1, институт строительной механики АН УССР, 1955.
3. Холод А.И. Некоторые задачи динамики трехслойных пластин и оболочек. Диссертация, Днепрпетровск, 1965.

УДК 620.178.7:669.14

## АНАЛИЗ ХРУПКИХ РАЗРУШЕНИЙ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ УГЛЕРОДИСТЫХ СТАЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ДИАГРАММ ХРУПКОВЯЗКОГО СОСТОЯНИЯ

**А. А. Хмелев, В. А. Сидоров**

То, что работа статического деформирования образца, оцениваемая площадью диаграммы растяжения, коррелирует с ударной вязкостью и твердостью изложено в работах [1,2], где установлена количественная взаимосвязь между характеристиками твердости, пластичности и ударной вязкости конструкционных сталей.

В данной работе изложены некоторые материалы дальнейших исследований и результаты обработки экспериментальных данных, а именно применение диаграмм хрупковязкого состояния [1] для анализа и выявления причин хрупких разрушений заготовок треугольных звеньев грузовых стропов (рис. 1), изготовленных из стержней диаметром 56 мм.

Технологический процесс изготовления данных изделий требует применения для них стержней из стали 20 или СтЗсп с их холодной гибкой, сваркой и последующей термообработкой. Здесь же рассматривается два случая их разрушения после холодной гибки в не отапливаемом помещении и падении на бетонный пол с высоты 1,3 м.

Установлено, что одна из заготовок изготовлена из стали 20 и разрушилась при падении при температуре около минус 20° С, а вторая — при температуре около нуля. При этом, последняя заготовка была изготовлена из стали Ст5.

Диаграммы хрупковязкого состояния исследованных сталей приведены на рис. 2. Каждая из них состоит из двух частей. Левая часть диаграммы построена в координатных осях: твердость по Бринеллю — работа разрушения ударного образца с дополнительными характеристиками пластичности стали,

приведенными на оси абсцисс. Правая часть диаграммы является аналогом ее левой части и представляет собой линейную зависимость работы разрушения ударного образца от угла его пластического изгибав после разрушения.

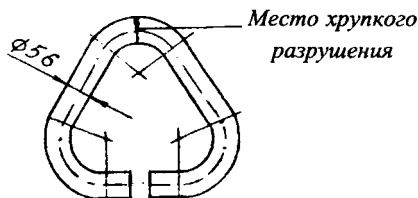


Рис. 1. *Ход одногнутая заготовка треугольного звена грузового стропа*

Механические свойства указанных сталей, полученные в результате проведенных исследований, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Материал	$\sigma_{в}$ , МПа	$\sigma_{Т}$ , МПа	$\sigma_{\delta}$	НВ, МПа	tg $\alpha$	Удельная работа пластического деформирования $a_v$ , Н · мм/мм <sup>3</sup>
Сталь 20	473,2	282,1	0,31	1310	0,84	291,66
Ст5	520,3	290,7	0,19	1520	0,36	126,33

Для построения указанных диаграмм, заготовки для ударных образцов вырезали из недеформированных участков разрушенных изделий и испытывали на ударную вязкость при температурах от +20 до -60 °С.

Для учета влияния деформации холодной гибки на снижение ударной вязкости аналогичные заготовки предварительно подвергли растяжению при температуре +20 °С на 5,10% и до начала образования шейки. Испытания на ударный изгиб производили для всех уровней предварительной пластической деформации аналогично испытанию металла в состоянии поставки. В интервале указанных температур производили измерение твердости по Бринеллю на всех ударных образцах перед их испытанием.

Снижение работы разрушения и повышение твердости стали, в состоянии поставки только от снижения температуры характеризуется штриховой кривой диаграммы, на которой указаны температуры испытания. Аналогичные зависимости для предварительно деформированного металла характери-

зуются кривыми 1–5. Начала кривых уровней предварительной пластической деформации отмечены на верхней кривой I диаграммы. Дополнительные характеристики пластичности стали  $\delta_d$  и  $\psi_p$ , приведенные на оси абсцисс левой части диаграмм, служат для возможности определения пластичности стали для контролируемого состояния методом измерения твердости по Бринеллю. Так, относительное удлинение стали для любого заданного состояния можно определить по формуле:

$$\delta_d = \frac{d_t - d_{\min}}{d_{\min}}, \quad (1)$$

где  $d_t$  — диаметр отпечатка при измерении твердости по Бринеллю для исследуемого состояния;  $d_{\min}$  — диаметр отпечатка, соответствующий максимальной твердости диаграммы.

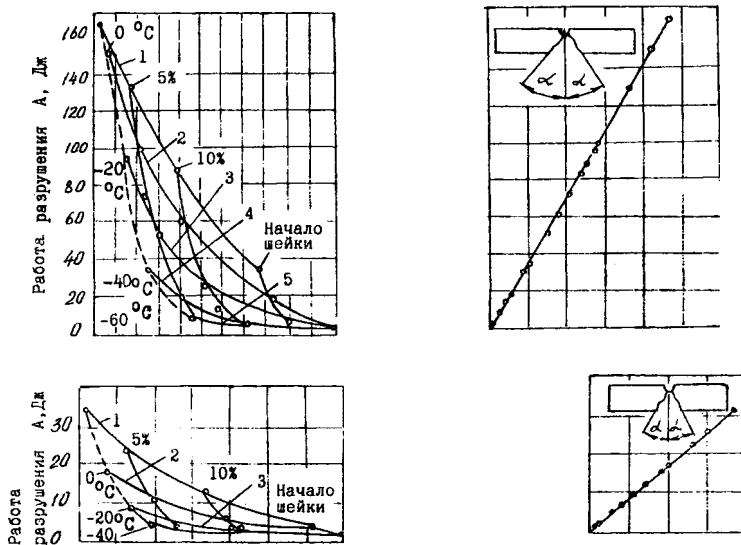


Рис.2. Диаграммы хрупковязкого состояния стержней диаметром 56 мм из стали 20(а) и из стали Ст5 (б); 1–5 — температуры испытания соответственно + 20,0; –20; –40; –60° С; --- снижение работы разрушения и повышение твердости стали в состоянии поставки при снижении температуры

Относительное сужение  $\psi_p$ , определяемое по результатам измерения твердости, вычислено по формуле:



$$\psi_n = \ln \frac{h_t}{h_{\min}}$$

где  $h_t$  — глубина отпечатка при измерении твердости по Бринеллю для исследуемого состояния стали;  $h_{\min}$  — глубина отпечатка, соответствующая максимальной твердости диаграммы.

Максимальная твердость на сжатой стояще гнутого участка стержня из стали 20 при температуре  $+20^\circ\text{C}$  составила 2070 НВ, а для стержня из стали Ст5 — 2120 НВ, что почти совпадает со значением твердости этих сталей при деформировании заготовок для ударных образцов до начала образования шейки.

Значение  $\text{tg } \alpha$  для обеих стержней на приведенных диаграммах для указанного уровня предварительной пластической деформации и температуры хрупкого разрушения равно 0,01.

Зная значение удельной работы пластического деформирования  $a_\phi$  (см. табл. 1) и  $\text{tg } \alpha$ , для обеих стержней можно определить значение требуемой работы разрушения готовых изделия, применительно к исследуемому состоянию по формуле [2.]:

$$A = a_\phi V_{nn} = a_\phi \frac{\pi d^3}{4} \text{tg } \alpha$$

где  $\frac{\pi d^3}{4} \text{tg } \alpha$  — объем пластически деформированной части стержня,  $\text{мм}^3$

Формулу (3) можно преобразовать, заменив значение  $\text{tg } \alpha$  относительным сужением  $y_n$ , определяемым по результатам измерения твердости, исходя из линейной взаимосвязи между этими характеристиками, (рис. 3)

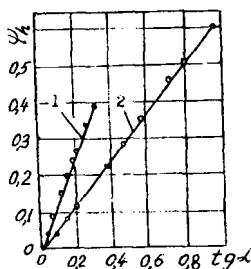


Рис. 3. Зависимость относительного поперечного сужения  $y_n$  от  $\text{tg } \alpha$ : 1 — Ст5; 2 — сталь 20

Значение работы разрушения гнутого треугольного звена из стали 20 по формуле (3) составит 401,1 Дж, а для стержня из стали Ст5 — 173,7 Дж.

Масса, падающего с высоты 1,3 м, звена 22 кг. В случае удара его о бетонный пол деформированной частью с разгибанием не сваренных ветвей (рис. 1), значение запасаемой стержнем энергии при ударе составит около 400 Дж, достаточной для его разрушения.

На основании данных исследований можно утверждать о расширении представлений о комплексе механических свойств, о количественной связи ударной вязкости (работы разрушения) с другими характеристиками во всем диапазоне их изменений в дополнение к ее важному назначений — выявлению хрупкости, дополнение к ее

### Литература

1. Жданович Г.М., Хмелев А.А. О диаграмме хрупковязкого состояния малоуглеродистых сталей при ударном изгибе // Проблемы прочности. — 1981. № 1. — С. 85—89.
2. Сидоров В.А., Хмелев А.А. О диаграмме хрупковязкого состояния малоуглеродистых сталей при ударной вязкости по результатам измерения твердости // Машиностроения вып. 17, Республиканский межведомственный сборник научных трудов. — Мн.: УП «Технопринт». 2001. — С. 387—391.

УДК 624.014.2

## МЕХАНИЗМ ЗАРОЖДЕНИЯ ТРЕЩИН ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ОБРАЗЦОВ С ВЫРЕЗАМИ

**Е. А. Мойсейчик**

Экспериментальные исследования проводились на трех сериях образцов в форме пластин с противоположными U-образными вырезами. Образцы первой серии изготавливались из стали марки ВСтЗсп, второй — из битума БН-IV, третьей — из меди М1. Стальные образцы имели размеры вырезов, обеспечивающие начальные коэффициенты концентрации напряжений, равные 1,3,6,9,12. Их толщины принимались: 6,12,18,25,30 мм. Нагружение стальных образцов выполнено на машине ЦДМ-200 со скоростью 0,4 МПа/сек в воздушной среде, температура которой изменялась от 20 до -80 °С. Испытание дополнительных серий стальных и медных образцов проводилось при комнатной температуре на машине Р-50. Вырезы в образцах из битума обеспечивали названные величины начальных коэффициентов концентрации напряжений. Битумные пластины отливались с начальной толщиной 50 мм. Нагружение их велось на машине Р-5 со скоростью 1 – 8 мм/мин. При испытаниях образцов

всех серий фиксировались изменения геометрических размеров в окрестности вырезов и вне их и температура (с точностью до  $0,1^{\circ}\text{C}$ ). В процессе эксперимента выявлено следующее.

1. Зарождение разрушения в стальных образцах определяет небольшой объем материала у корня выреза. После некоторой утяжки боковых кромок в этом объеме возникает медленно растущая «ногтеобразная» трещина, скорость роста которой резко увеличивается при достижении ею некоторой предельной длины. В образцах небольших толщин и с плавными вырезами трещина развивалась по механизму скола; при больших толщинах, острых вырезах и действии низких температур она росла по схеме вязкого отрыва. На поверхности излома образцов выделяются две области: область «ногтеобразной» трещины в зоне утяжки боковых кромок и область ее быстрого распространения с характерными признаками хрупкого излома. Сталь в первой области сразу после разрушения проявляет заметные магнитные свойства, а температура — на  $5\text{--}60^{\circ}\text{C}$  превышает температуру удаленного от выреза металла. В процессе эксперимента отмечено характерное поведение клинообразных угловых ненагруженных зон, примыкающих к берегам вырезов. С раскрытием берегов эти «клинья» скользили по примыкающему металлу с поворотом к корню выреза. С целью изучения зависимости теплообразования от скорости деформирования проведены дополнительные испытания образцов с изменением скорости растяжения в пределах  $1\text{--}8$  мм/мин. Установлено, что повышение температуры стали в зоне течения металла пропорционально скорости деформирования. При этом для более толстых образцов повышение температуры деформируемого металла выше, чем для тонких (при одной и той же скорости течения металла у надреза).

2. В образцах из битума также отмечена локализация деформирования материала в трещинообразных зонах течения. Повышение температуры в этих местах составляло  $0,1\text{--}2,1^{\circ}\text{C}$ . Поворот и смещение «клиньев» у вырезов были большими. В местах значительного течения битума образования трещин не отмечено, а появлялись отдельные поры, выстраивающиеся затем в цепочки вдоль траекторий течения. Из машинных диаграмм деформирования видно, что образцам из битума присуще некоторое самоупрочнение при интенсивном течении материала. Характерным является, что упругий участок машинной диаграммы завершается образованием порообразных дефектов, которые при течении растут, разрушаются и вновь образуются.

3. На образцах из медных пластин толщиной  $4$  мм повышение температуры в зонах интенсивного течения материала колебалось в пределах  $0,2\text{--}1,4^{\circ}\text{C}$ .

4. Сопоставление результатов экспериментов с данными других авторов позволяет предположить, что зарождение и развитие порообразных дефектов

предшествует образованию трещин и может рассматриваться в качестве отличительного признака наступления предельного состояния для различных конструкционных материалов. При этом выделяющееся в зонах течения тепло сказывается на свойствах материала и кинетике зарождения и развития поробразных дефектов.

УДК 620.22-419.8:539.4

## **ВЛИЯНИЕ РАЗБРОСОВ СВОЙСТВ КОМПОНЕНТОВ ДЕГРАДИРУЮЩЕЙ КОМПОЗИЦИОННОЙ СРЕДЫ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ МОДУЛИ**

***Е. А. Белоус***

**Введение:** Проблеме усталостного разрушения металлов, сплавов и композитов посвящены работы [1–6]. В работах [1–2] приведены экспериментальные зависимости время до разрушения от напряжения в условиях малоциклового (статического) нагружения. На основании которых в [1] получена модель накопления повреждений как наиболее удобная аппроксимация. В работах [3–4] приведены кинетические уравнения изменения концентрации повреждений в процессе эксплуатации: Качанова, Работнова, Шестерикова и др. Аналитический расчет физико-механических постоянных композиционных материалов имеет место в работе [5]. Там же приведены сравнительные данные расчета и экспериментов. Наблюдается хорошее согласование расчета с результатами экспериментов. Недостатками приведенных методик является то, что физико-механические постоянные рассчитаны для композитов с ограниченным числом компонентов. Известно, что разрушение является динамическим процессом и может произойти при разных уровнях напряжений. В процессе эксплуатации вследствие подвижности вакансий происходит образование дислокаций в кристаллической решетке, повышается пластичность твердого тела и как результат – изменение физико-механических свойств материала. Эти явления связаны с увеличением концентрации пор и микротрещин. Изучить данные явления на атомном уровне не представляется возможным, поэтому находят применение эмпирические формулы, выведенные на основании статистических данных.

В данной работе предложено расчет, позволяющий определить эффективные упругие модули трехкомпонентной, неоднородной среды с учетом деградации матрицы, при разных разбросах свойств компонентов.

**Постановка задачи:** В качестве объекта исследования рассмотрим композит, состоящий из трех компонентов: 1-стальная матрица, 2-графитовые включения, 3-поры (в дальнейших обозначениях характеристики каждого из вышеуказанных компонентов снабжены соответствующим индексом). Объект подвергался растяжению при  $s=315$  МПа. Композит характеризуется эффективными упругими модулями:  $k$ -объемный модуль упругости,  $m$ -сдвиговой модуль упругости. Для пор принимаем  $k=0$ ,  $m=0$ . В вычислениях полагалось:  $E_1=206$  ГПа,  $E_2=27$  ГПа,  $n_1=0.33$ ,  $n_2=0.3$ . В соответствии с формулами [6]:

$$k = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\nu)} \quad (1)$$

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (2)$$

где  $E, \nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Для упрощения расчетов будем полагать, что поры распределены по объему равномерно. Изменение концентрации пор в зависимости от времени опишем кинетическим уравнением Качанова

$$\frac{d(1-c)}{dt} = -A \cdot \left(\frac{\sigma}{1-c}\right)^n \quad (3)$$

где  $\sigma$  — напряжение,  $A, N$  — параметры материала, определяемые из экспериментальных зависимостей согласно методике предложенной в работе [1]. Для стали  $A = 3.26 \cdot 10^{-15}$ ,  $n=4$ . По данным работы [5] эффективные модули упругости композита определяются по уравнениям:

$$\Gamma^{(k)} = \frac{1}{k_0 + \frac{4}{3} \cdot \mu_0} \quad (4)$$

$$\Gamma^{(\mu)} = \frac{2 \cdot (k_0 + 2 \cdot \mu_0)}{5 \cdot \mu_0 \cdot (k_0 + \frac{4}{3} \cdot \mu_0)} \quad (5)$$

$$\Gamma^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^N \frac{2 \cdot c_i}{\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}} \cdot \sum_{\beta=1}^2 \left[ \frac{A^{(\lambda)} + (-1)^\beta \cdot \varepsilon_{i\beta}^{(\lambda)}}{\varepsilon_{i\beta}^{(\lambda)}} \right] \cdot \ln \left[ \frac{A^{(\lambda)} + (-1)^\beta \cdot \varepsilon_{i\beta}^{(\lambda)}}{A^{(\lambda)}} \right] \quad (6)$$

$$A^{(\lambda)} = \lambda - \lambda_0 + \frac{1}{\Gamma^{(\lambda)}}, \quad \lambda = k, \mu \quad (7)$$

Рассмотрим случай разброса свойств компонентов при:  
 $\epsilon_{11}^{(k)} = \epsilon_{32}^{(k)} = 11 \cdot 10^4$  МПа,  $\epsilon_{12}^{(k)} = \epsilon_{21}^{(k)} = \epsilon_{22}^{(k)} = \epsilon_{31}^{(k)} = 0$ ,  $\epsilon_{12}^{(\mu)} = \epsilon_{21}^{(\mu)} = \epsilon_{22}^{(\mu)} = \epsilon_{31}^{(\mu)} = 0$ ,  
 $\epsilon_{11}^{(\mu)} = \epsilon_{32}^{(\mu)} = 3,7 \cdot 10^4$  МПа, данный случай разброса свойств компонентов представлен на рис 1.

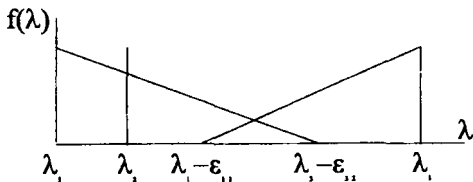


Рис.1. Распределение упругих модулей в гетерогенной  $n$ -компонентной среде.

Уравнение (6) имеет недостаток в том, что при  $\epsilon \rightarrow 0$  правая часть становится неопределенностью вида:  $0/0$ . Разложив слагаемые правой части уравнения (6), которые дают неопределенность, в ряд Маклорена и подставив уравнения (4), (5) и (7), получим расчетные уравнения:

$$k_0 = \frac{1}{\frac{2c_1}{\epsilon_{11}} \left( \frac{A_1 - \epsilon_{11}}{\epsilon_{11}} \ln \frac{A_1 - \epsilon_{11}}{A_1} \right) + c_2 \left( \frac{1}{A_2} \right) + \frac{2c_2}{\epsilon_{32}} \left( \frac{A_3 + \epsilon_{32}}{\epsilon_{32}} \ln \frac{A_3 + \epsilon_{32}}{A_3} \right)} - \frac{4}{3} \mu_0 \quad (8)$$

где  $A_i = k_i + \frac{4}{3} \mu_0$   $i = 1, \dots, 3$

$$\mu_0 = \frac{2(k_0 + 2\mu_0)}{5 \left( k_0 + \frac{4}{3} \mu_0 \right) \left( \frac{2c_1}{\epsilon_{11}} \left( \frac{B_1 - \epsilon_{11}}{\epsilon_{11}} \ln \frac{B_1 - \epsilon_{11}}{B_1} \right) + c_2 \left( \frac{1}{B_1} \right) + \frac{2c_3}{\epsilon_{32}} \left( \frac{B_3 + \epsilon_{32}}{\epsilon_{32}} \ln \frac{B_3 + \epsilon_{32}}{B_3} \right) \right)} \quad (9)$$

где  $B_i = \mu_i - \mu_0 + \frac{5\mu_0(k_0 + \frac{4}{3}\mu_0)}{2(k_0 + 2\mu_0)}$

По формулам (8), (9) проведен расчет для композита сталь-графит-поры, в котором концентрация пор увеличивается за счет уменьшения концентрации матрицы. Так как концентрация пор  $c(t)$ , тогда концентрация стали определяется  $c_s(t) = c_s - c(t)$ . Зададим начальные концентрации  $c_1 = 0.8$  (сталь),  $c_3 = 0.2$  (графит). Подставив значения разброса свойств компонентов  $\epsilon_{ij}^{(k)}$  и  $\epsilon_{ij}^{(\mu)}$  полу-

чим графики зависимости упругих модулей от времени испытаний результаты расчетов представлены на рис 2, 3.

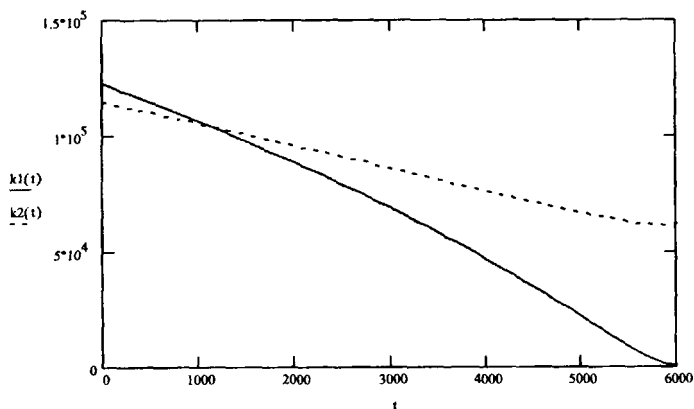


Рис.2. Зависимость объемного модуля упругости от времени эксплуатация для разных значений разбросов свойств.  
 $k1(t)$  — без разброса свойств компонентов,  $k2(t)$  — с разбросом свойств компонентов.

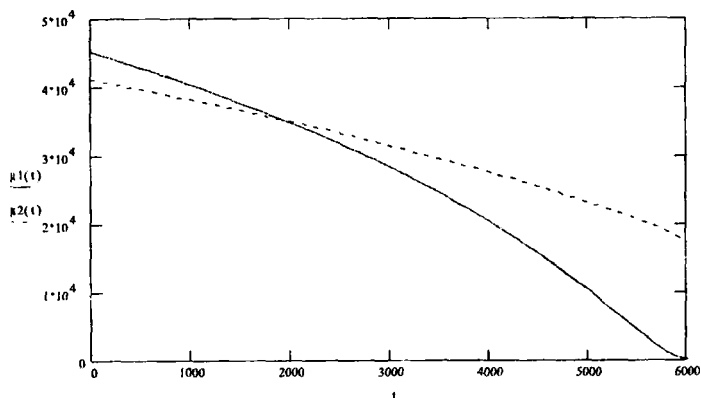


Рис.3. Зависимость сдвигового модуля упругости от времени эксплуатация для разных значений разбросов свойств.  
 $\mu1(t)$  — без разброса свойств компонентов,  $\mu2(t)$  — с разбросом свойств компонентов

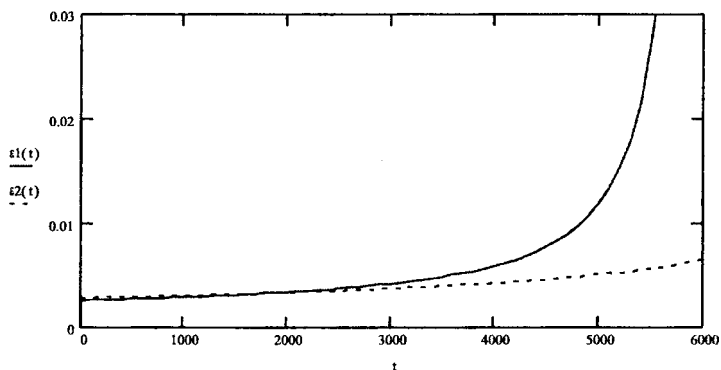


Рис.4. Графики ползучести:  $\epsilon_1(t)$  — без учета разброса свойств компонентов,  $\epsilon_2(t)$  — с учетом разброса свойств компонентов

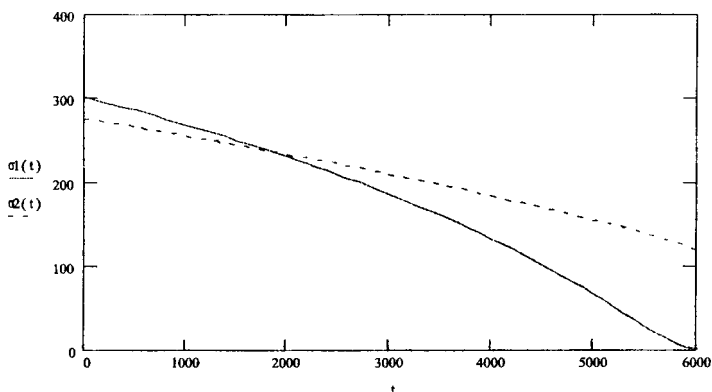


Рис.5. Графики релаксации:  $\sigma_1(t)$  — без учета разброса свойств компонентов,  $\sigma_2(t)$  — с учетом разброса свойств компонентов

На рис. 2–3 изображены графики зависимостей упругих модулей от времени испытания. Сплошная кривая соответствует идеальному случаю (без разброса свойств), прерывистая — случаю с разбросом свойств компонентов. Второй случай характерен при деградации матрицы и одновременном залечивании пор (например, в условиях ползучести или фазовых превращениях). В результате залечивания пор наблюдается повышение прочностных характеристик композита, о чем также свидетельствуют кривые ползучести и релаксации.



## Выводы

1. В результате процесса деградации матрицы происходит уменьшение значений эффективных упругих модулей, при любых значениях разбросов свойств компонентов.

2. Наличие разброса  $\epsilon_{32}$  позволяет получить зависимость эффективных упругих модулей от времени, для всех значений  $c \in [0; 1]$ . Для пористой среды без учета  $\epsilon_{32}$  самосогласованный метод дает обращение  $\lambda_0$  в нуль при  $c(t)=1/2$

3. Полученные в работе формулы могут быть использованы для решения задачи по определению разброса  $\epsilon_{ij}$  по измеренным и заданным значениям  $\lambda_i$  и  $c$ . Эту задачу можно рассматривать как обратную.

4. На основе уравнения типа (7) можно получить системы уравнений для эффективных упругих свойств, распределение материальных коэффициентов подчиняется любым упругим законам распределения, если в пределе взятое распределение переходит в комбинацию d-функций:  $f(\lambda) = \sum c_i \delta(\lambda - \lambda_i)$  где, соответственно, расчетные уравнения переходят в известные уравнения p-компонентной среды, получаемые методом самосогласования.

## Литература

1. Одинг И.А. Иванова В.С. Теория ползучести и длительной прочности металлов М: 1959
2. Журков С.Н. Томашевский Э.Е. Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.: АН СССР 1959
3. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука 1974
4. Голуб В.П. Романов А.В. К задаче построения нелинейных моделей накопления повреждений при ползучести. //Проблемы прочности 1990, №6
5. Дрозд С.Г. Контактное взаимодействие сферических пар трения с учетом накопления повреждений и изменения физико-механических свойств в поверхностном слое. // Трение и износ, 17(1996), № 2, 163–169
6. Хорошун Л.П. Маслов Б.П. Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянных композиционных материалов М: 1980

## РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**О. Н. Скляр**

Метод разделения переменных (метод Фурье) является одним из наиболее применяемых методов аналитического решения краевых задач математической физики, теории упругости и др. Ниже выводятся условия его реализации для уравнений вида:

$$\Delta U + K_1 \frac{\partial U}{\partial x} + K_2 \frac{\partial U}{\partial y} + K_3 \frac{\partial U}{\partial z} + K_4 U = 0 \quad (1)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $K_i f_i = 1, 4$  — функции  $x, y, z$ .

Перейдем в (1) к вращательным координатам  $(\eta, \theta, \varphi)$  по формулам:

$$x + iy = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho = e^{-i\varphi}(x + iy) \quad (2)$$

$$z + i\rho = f(\eta + i\theta), \quad \eta + i\theta = F(z + i\rho) \quad (F = f^{-1}) \quad (3)$$

откуда

$$\rho = \frac{1}{2i} [f(\eta + i\theta) - \bar{f}(\eta - i\theta)]$$

$$z = \frac{1}{2} [f(\eta + i\theta) + \bar{f}(\eta - i\theta)]$$

$$x + iy = \frac{1}{2i} [f(\eta + i\theta) - \bar{f}(\eta - i\theta)] e^{i\varphi}$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение.

Т.к.  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ , то:  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho} = -\frac{2i \sin \varphi}{f(\eta + i\theta) - \bar{f}(\eta - i\theta)}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos \varphi}{\rho} = \frac{2i \cos \varphi}{f(\eta + i\theta) - \bar{f}(\eta - i\theta)} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Из  $\eta + i\theta = F(z + i\rho)$  следует:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} [F(z + i\rho) + \bar{F}(z - i\rho)] \\ \theta &= \frac{1}{2i} [F(z + i\rho) - \bar{F}(z - i\rho)] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{i}{2} [F'(z + i\rho) - \bar{F}'(z - i\rho)] \cos \varphi, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{i}{2} [F'(z + i\rho) - \bar{F}'(z - i\rho)] \sin \varphi \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} &= \frac{i}{2} [F'(z + i\rho) + \bar{F}'(z - i\rho)] \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{2} [F'(z + i\rho) + \bar{F}'(z - i\rho)] \cos \varphi, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{2} [F'(z + i\rho) + \bar{F}'(z - i\rho)] \sin \varphi \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{2i} [F'(z + i\rho) - \bar{F}'(z - i\rho)] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для оператора Лапласа имеем:

$$\Delta U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right] \quad (8)$$

где  $h_i$  — параметра Лама, вводимые равенством:

$$dS^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (h_1 d\varphi)^2 + (h_2 d\eta)^2 + (h_3 d\theta)^2 \quad (9)$$

Внося в (9) формулы (2)–(3) получим

$$h_1 = \rho, \quad h_2 = h_3 = \sqrt{f'(\eta + i\theta) \cdot \overline{f'(\eta - i\theta)}}$$

Поэтому уравнение (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{f'(\eta + i\theta) \cdot \overline{f'(\eta - i\theta)}} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right] + \tilde{K}_1 \frac{\partial U}{\partial \eta} + \tilde{K}_2 \frac{\partial U}{\partial \theta} + \tilde{K}_3 \frac{\partial U}{\partial \varphi} + K_4 U \\ & \text{или} \\ & \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\rho^2}{f'(\eta + i\theta) \cdot \overline{f'(\eta - i\theta)}} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right] + \rho^2 \left[ \tilde{K}_1^2 + \frac{1}{\rho f'(\eta + i\theta) \cdot \overline{f'(\eta - i\theta)} \partial \eta} \right] \frac{\partial U}{\partial \eta} + \\ & + \rho^2 \left[ \tilde{K}_2 + \frac{1}{\rho f'(\eta + i\theta) \cdot \overline{f'(\eta - i\theta)} \partial \theta} \right] \frac{\partial U}{\partial \theta} + \rho^2 K_3 \frac{\partial U}{\partial \varphi} + K_4 \rho^2 U = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} F'(z+i\rho) [i(K_1 \cos \varphi + K_2 \sin \varphi) + K_3] + \frac{1}{2} \bar{F}'(z-i\rho) [K_3 - i(K_1 \cos \varphi + K_2 \sin \varphi)] \\ K_2 &= \frac{1}{2} F'(z+i\rho) [K_1 \cos \varphi + K_2 \sin \varphi - iK_3] + \frac{1}{2} \bar{F}'(z-i\rho) [K_1 \cos \varphi + K_2 \sin \varphi + iK_3] \\ K_3 &= K_1 \cos \varphi + K_2 \sin \varphi \end{aligned} \right\} (11)$$

Заметим, что  $\bar{K}_3 \cdot \rho^2 = -K_1 y + K_2 x$  (12)

Предположим, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_3 \rho^2 &= g(\varphi) \\ K_4 &= K_4(\eta, \theta) \\ K_1 &= K_1(\eta, \theta), \quad K_2 = K_2(\eta, \theta) \end{aligned} \right\} (13)$$

Тогда, полагая

$$U(\eta, \theta, \varphi) = F_1(\varphi) \cdot V(\eta, \theta), \quad (14)$$

где  $F_1$  — удовлетворяет уравнению

$$F_1''(\varphi) + g(\varphi) F_1'(\varphi) = \lambda F_2, \quad \lambda = const, \quad (15)$$

получим из (10)–(13)–(15):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \left[ \frac{\partial \rho}{\rho \partial \eta} + \bar{K}_1 f'(\eta+i\theta) \bar{f}'(\eta-i\theta) \right] \frac{\partial V}{\partial \eta} + \\ & + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \bar{K}_2 f'(\eta+i\theta) \bar{f}'(\eta-i\theta) \right] \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{f'(\eta+i\theta) \bar{f}'(\eta-i\theta)}{\rho^2} (\rho^2 K_4 + \lambda) V = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Если кроме (13) выполнены такие условия:

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_1 f'(\eta+i\theta) \bar{f}'(\eta-i\theta) + \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} &= a(\eta) \\ \bar{K}_2 f'(\eta+i\theta) \bar{f}'(\eta-i\theta) + \frac{\partial \ln \rho}{\partial \theta} &= b(\theta) \\ K_4 f'(\eta+i\theta) \bar{f}'(\eta-i\theta) &= \alpha(\eta) + \beta(\theta) \\ \frac{f'(\eta+i\theta) \bar{f}'(\eta-i\theta)}{\rho^2} &= c(\eta) + d(\theta) \end{aligned} \right\} (17)$$

Тогда (10) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + a(\eta) \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + b(\theta) \frac{\partial V}{\partial \theta} + \{\alpha(\eta) + \beta(\theta) + \lambda[c(\eta) + d(\theta)]\} V = 0 \quad (18)$$

Представим  $V$  в током виде:

$$V(\eta, \theta) = F_2(\eta)F_3(\theta) \quad (19)$$

Внося (19) в (18), получим для  $F_i (i = 2, 3)$  такие уравнения

$$\left. \begin{aligned} F_2''(\eta) + a(\eta)F_2' + [a(\eta) + \lambda c(\eta) - \mu]F_2 &= 0 \\ F_3''(\theta) + b(\theta)F_3' + [b(\theta) + \lambda d(\theta) + \mu]F_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$M = const.$$

Итак, если выполнены условия (13)–(17), тогда уравнение (1) допускает решения в виде  $U = F_1(\varphi)F_2(\eta)F_3(\theta)$

В заключение отметим, что примененный здесь метод ранее использовался рядом авторов при решении краевых задач для уравнения Лапласа в областях, ограниченных поверхностями вращения [1].

### Литература

*Е.В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций М., 1952, с.476.*

УДК 539.3

## БЕЗИГИБНЫЕ ФОРМЫ ТОНКОСТЕН ОБОЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ИХ ДЕФОРМАЦИИ ПО ТОЛЩИНЕ

**Т.М. Мартыненко**

Задача определения безизгибных форм упругих оболочек берет свое начало с работы [Хорна], которая получила свое дальнейшее развитие в работах [Мартыненко М.Д., Фан Нго Хьюнг Нью, Гариба]. В настоящей работе дается ее дальнейшее развитие применительно к учету их деформации по толщине. Будем исходить из следующей системы уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(T_1 B) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(S A^2) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + \frac{AB}{R_1} Q_1 + AB q_1 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(T_2 B) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(S B^2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{AB}{R_2} Q_2 + AB q_2 &= 0 \\ \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha}(Q_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta}(Q_2 A) \right] - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + q_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Перерезывающие силы  $Q_1, Q_2$  определены из уравнений для изгибающих  $H_1, H_2$  и крутящего момента  $H$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha}(M_1 B) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(H A^2) \right] &= Q_1 \\ \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta}(M_2 B) - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(H B^2) \right] &= Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из формул (1)–(2) следует, что строгий учет  $Q_1, Q_2$  значительно повышает порядок разрешающей системы уравнений и, как следствие, процедуру ее решения. Поэтому, примем  $Q_1 k_1 T_1, Q_2 k_2 T_2, Q_i = k T_i \quad (i = 1, 2)$ .

Здесь  $k_1$  и  $k_2$  определяются экспериментально. В случае упругих тонких пластин установлено  $k = \frac{5}{6}$  или, как показал Миндлин,  $k = \frac{\pi^2}{16}$ . В работах Свицкого и Мартыненко было показано, что снятие кромки приводит при уточнении классической теории с  $k = \frac{h}{R}$  где  $h$  — толщина пластины,  $R$  — ее радиус.

Поэтому определим  $k_1$  и  $k_2$  следующими формулами:  $k_1 = \frac{h}{R_1}, k_2 = \frac{h}{R_2}$ , где  $h$  — толщина оболочки,  $R$  — радиус кривизны. В рамках линейной теории тонких упругих оболочек, это предположение может быть уточнено формулами (2). Таким образом решаемая здесь задача будет решаться в рамках уточненной теории Кизаха—Лява, т.е. мы применяем здесь предположение о нормальном сечении оболочки, и уточняем последующие гипотезы (о нормальных напряжениях к площадкам, нормаль к которым совпадает с нормалью к срединной поверхности, в форме, позволяющей учитывать изменение длины нормального сечения).

Таким образом, разрешающая система уравнений безизгибного ( $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_{12} = 0$ ) деформирования тонкостенных упругих оболочек записываются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(T_1 B) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(S A^2) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + \frac{A B}{R_1} k_1 T_1 + A B q_1 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(T_2 B) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(S B^2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{A B}{R_2} k_2 T_2 + A B q_2 &= 0 \\ \frac{1}{A B} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha}(k_1 T_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta}(k_2 T_2 A) \right] - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + q_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Эта система уравнений может быть упрощена, если в первых двух уравнениях отбросить члены  $\frac{k_i T_i}{R_i} = 0$  как бесконечно малые второго порядка малости  $\frac{k_i h}{R_i^2}$ . К ним присоединяются уравнения совместимости деформаций и закон Гука [Видезман]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \gamma_{12} + \frac{1}{R_1} \left[ -\frac{\partial}{\partial \alpha}(\epsilon_2 B) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \epsilon_1 + \frac{\partial}{\partial \beta}(\gamma_{12} A) \right] &= 0 \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_{12} + \frac{1}{R_2} \left[ -\frac{\partial}{\partial \beta}(\epsilon_1 A) + \frac{\partial A}{\partial \beta} \epsilon_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha}(\gamma_{12} A^2) \right] &= 0 \\ \frac{1}{A B} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[ -\frac{\partial}{\partial \alpha}(\epsilon_2 B) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \epsilon_1 + \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial \beta}(\gamma_{12} A^2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{A B} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left[ -\frac{\partial}{\partial \beta}(\epsilon_1 A) + \frac{\partial A}{\partial \beta} \epsilon_2 + \frac{1}{2B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(\gamma_{12} B^2) \right] \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Предположим, что материал оболочки изотропен, и следует такому закону Гука:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{E h}{2 - \mu^2} (\epsilon_1 + \mu \epsilon_2) & T_2 &= \frac{E h}{1 - \mu^2} (\epsilon_2 + \mu \epsilon_1) \\ S &= \frac{E h}{2(1 + \mu)} \gamma_{12} \end{aligned} \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial U}{A \partial \alpha} + \frac{1}{A B} \frac{\partial A}{\partial \beta} V + \frac{W}{R_1} = \frac{1}{E h} (T_1 - \mu T_2) \\ \epsilon_2 &= \frac{\partial V}{B \partial \beta} + \frac{1}{A B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} U + \frac{W}{R_2} = \frac{1}{E h} (T_2 - \mu T_1) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\gamma_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{U}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{V}{B} \right) = \frac{2(1+\mu)}{Eh} S$$

Систему (4) можно упростить, если отбросить в первых двух уравнениях члены  $\frac{AB}{R_1} k_1 T_1$  и  $\frac{AB}{R_2} k_2 T_2$  в силу их малости. Таким образом разрешающие уравнения сводятся к следующим уравнениям равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (T_1 B) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (S A^2) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + AB q_1 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (T_2 A) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (S B^2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + AB q_2 &= 0 \\ \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (k_1 T_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta} (k_2 T_2 A) \right] - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + q_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Закон Гука для изотропных тел:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} V + \frac{W}{R_1} = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} U + \frac{W}{R_2} = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1) \\ \gamma_{12} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{U}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{V}{B} \right) = \frac{2(1+\mu)}{Eh} S \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

условия совместности деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \gamma_{12} + \frac{1}{R_1} \left[ -\frac{\partial}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 B) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_1 + \frac{\partial}{\partial \beta} (\gamma_{12} A) \right] &= 0 \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_{12} + \frac{1}{R_2} \left[ -\frac{\partial}{\partial \beta} (\varepsilon_1 A) + \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\gamma_{12} B) \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[ -\frac{\partial}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 B) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_1 + \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial \beta} (\gamma_{12} A^2) \right] \right\} + \\ + \frac{1}{AB} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[ -\frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 A) + \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_2 + \frac{1}{2B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\gamma_{12} B) \right] \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Третье уравнение (9) может быть упрощено за счет первых двух условий.



Таким образом, задача, построенная безизгибных (безмоментных) форм оболочечных конструкций с учетом смятия кромки приводится к решению уравнений (7)–(8)–(9). Ее можно упростить, полагая, например,  $A = const$ ,  $B = const$ , или же  $A \ll 1$ ,  $B \ll 1$ , или же рассматривая оболочку нулевой гауссовой кривизны  $\frac{1}{R_1} = 0$ ,  $\frac{1}{R_2} \neq 0$ .

### Литература

1. Мартыненко М.Д. *Определение безмоментной формы оболочки под действием заданной внешней нагрузки// Вопросы математической физики и теории функций. Киев «Наукова Думка» 1969, с.91-96.*
2. Нго Хьюнг Нью *некоторые обратные задачи безмоментной теории оболочек. Автореферат дисс....канд. физ.-мат. наук. Минск БГУ, 1987, с.15*
3. Фам Хонг Нга *Некоторые обратные задачи безмоментной теории монжевых оболочек. Автореферат дисс....канд. физ.-мат. наук. Минск БГУ, 1989, с.15*
4. Гариб Муса Ибрагим Гариб *Геометрия безизгибных форм тонкостенных пологих оболочечных конструкций. Автореферат дисс....канд. физ.-мат. наук. Минск БГУ, 1991, с.15*
5. Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика М., Машиностроение, 1977, с.488*

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

**С. М. Босяков**

Рассмотрим упругие тела, характеризующиеся тремя материальными постоянными. К таким материалам относятся, например, алмазы, многие стеклопластики, а также большинство металлов, используемых в промышленности. Уравнения движения для таких сред имеют следующий вид [1]:

$$(A_4 \Delta - (A_1 - A_2 - 2A_4) \partial_i^2) u_i + (A_2 + A_4) \partial_i \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k + X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

где  $A_1, A_2, A_4$  — упругие постоянные,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  — вектор перемещения,  $X_i$  — массовые силы,  $\rho$  — плотность,

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = \overline{1,3}.$$

Характеристическое уравнение для системы уравнений (1) с начальными данными на поверхности  $Z(t, X) = const$  не разрешимо в аналитическом виде [2—4]. Поэтому анализ распространения поверхностей разрыва целесообразно проводить в некоторых плоскостях кубически анизотропного тела. Для квазипоперечных волн такими плоскостями являются плоскости грани куба ( $x_i = 0, i = \overline{1,3}$ ) и плоскости  $x'_1 = 0$  либо  $x'_2 = 0$ , повернутые относительно  $x_1 = 0$  либо  $x_2 = 0$  на угол равный  $45^\circ$  [1]. Обратимся ко второму случаю, так как он является наименее изученным. Система уравнений движения (1) принимает следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} (A_{11}\partial_1^2 + A_{66}\partial_2^2 + A_{44}\partial_3^2)u_1 + (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2u_2 + (A_{13} + A_{44})\partial_1\partial_3u_3 &= \rho\ddot{u}_1, \\ (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2u_1 + (A_{66}\partial_1^2 + A_{11}\partial_2^2 + A_{44}\partial_3^2)u_2 + (A_{13} + A_{44})\partial_2\partial_3u_3 &= \rho\ddot{u}_2, \\ (A_{13} + A_{44})\partial_1\partial_3u_1 + (A_{13} + A_{44})\partial_2\partial_3u_2 + (A_{44}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + A_{33}\partial_3^2)u_3 &= \rho\ddot{u}_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные данные к системе (2) зададим на поверхности  $Z(t, X) = const$  и перейдем к новым переменным по формулам [2, 3]

$$Z_k = Z_k(t, X), \quad k = \overline{0,3}, \quad Z_0 \equiv Z.$$

Выразим производные по старым переменным через производные по новым переменным:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{m,n=0}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial Z_n \partial Z_m} \frac{\partial Z_n}{\partial x_k} \frac{\partial Z_m}{\partial x_l} + \sum_{m=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial Z_m} \frac{\partial^2 Z_m}{\partial x_k \partial x_l}, \quad k, l = \overline{0,3}, x_0 = t. \quad (3)$$

Подставим (3) в (2) и приравняем нулю определитель, составленный из коэффициентов при производных  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial Z^2}$ ,  $i = \overline{1,3}$  [2, 3]:

$$\det \|\omega_{ij}\| = 0, \quad (4)$$

где  $\omega_{ii} = A_{11}p_i^2 + A_{66}p_j^2 + A_{44}p_3^2$ ,  $\omega_{ij} = (A_{12} + A_{66})p_i p_j$ ,

$$\omega_{33} = A_{44}(p_1^2 + p_2^2) + A_{33}p_3^2, \omega_{i3} = \omega_{3i} = (A_{13} + A_{44})p_i p_3, i \neq j = 1, 2,$$

$$p_k = \frac{\partial Z}{\partial x_k}, p_0 = \frac{\partial Z}{\partial t}, k = \overline{1,3}.$$

Раскроем определитель (5) и разделим полученное выражение на  $g^6$ ,  $g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ . Будем иметь кубическое уравнение относительно  $V^2 = \frac{p_0^2}{g^2}$ , в которое войдут также упругие постоянные и направляющие коси-

нуса нормали к характеристической поверхности  $\cos \alpha_i = \frac{p_i}{\rho}, i = \overline{1,3}$  [2, 3].  
 Примем  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha, \cos \alpha_2 = 0, \cos \alpha_3 = \sin \alpha$  и запишем решение этого уравнения в следующем виде:

$$V_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2\rho} (A_{44} + A_{11} \cos^2 \alpha + A_{33} \sin^2 \alpha \pm \sqrt{((A_{11} - A_{44}) \cos^2 \alpha + (A_{44} - A_{33}) \sin^2 \alpha)^2 + (A_{13} + A_{44})^2 \sin^2 2\alpha}},$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{A_{66} \cos^2 \alpha + A_{44} \sin^2 \alpha}{\rho}}. \quad (6)$$

Выразим постоянные  $A_{11}, A_{33}, A_{44}, A_{66}, A_{12}, A_{13}$  через модули упругости кубически анизотропной среды  $A_1, A_2, A_4$  [1]:

$$A_{11} = A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2}, A_{13} = A_{12} = A_2, A_{33} = A_1, A_{44} = A_4, A_{66} = \frac{A_1 - A_2}{2}.$$

Окончательно для скоростей распространения поверхностей разрыва (6) будем иметь

$$V_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2\rho} \left( A_4 + \left( A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2} \right) \cos^2 \alpha + A_1 \sin^2 \alpha \pm \sqrt{\left( \frac{A_1 + A_2}{2} \cos^2 \alpha + (A_4 - A_1) \sin^2 \alpha \right)^2 + (A_2 + A_4)^2 \sin^2 2\alpha}},$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left( \frac{A_1 - A_2}{2} \cos^2 \alpha + A_4 \sin^2 \alpha \right)}. \quad (7)$$

Формулы (7) позволяют построить кривые векторов рефракции  $R_i = \frac{1}{V}, i = \overline{1,3}$  (аналогичные поверхностям показателей преломления в оптике [1, 2]) в плоскости  $x'_2 = 0$  (рис. 1) для различного рода кубически анизотропных материалов [5].

Кривые  $R_i$  позволяют определить значение фазовой скорости в зависимости от значения угла  $\alpha$ , а также найти направление переноса упругой энергии по направлению нормали к кривой  $R_i, i = \overline{1,3}$ . Важной особенностью кривой  $R_2$  для свинца является наличие касательных, имеющих с  $R_2$  две точки касания [2]. Наличие таких особенностей приводит к появлению в интервале углов  $(-\theta; \theta)$  и  $(-\theta'; \theta')$  лакун, то есть таких участков, где происходит много-

кратное усиление упругой энергии [2]. В плоскости  $x'_2 = 0$  кубически анизотропных сред условия существования лакун можно записать как условия существования решений уравнений относительно углов  $q$  и  $\theta^*$  в интервале от нуля до  $\pi/2$ :

$$\begin{aligned} & (A_1^2 + 4A_2^2 + 9A_2A_4 + 6A_4^2 - A_1(A_2 + 3A_4) - \\ & - (A_1 - A_2 - 2A_4)(3A_1 + 4A_2 + A_4) \cos 2\theta)^2 - 16(A_1 + A_4)^2 \times \\ & \times \left( \left( \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \cos^2 \theta + (A_4 - A_1) \sin^2 \theta \right)^2 + (A_2 + A_4)^2 \sin^2 2\theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & ((A_1 - 3A_2 - 4A_4)(A_1 + 3A_2 + 2A_4) - \\ & - (A_1 - A_2 - 2A_4)(3A_1 + 7A_2 + 4A_4) \cos 2\theta^*)^2 - 16(A_1 + A_2 + 2A_4)^2 \times \\ & \times \left( \left( \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \cos^2 \theta^* + (A_4 - A_1) \sin^2 \theta^* \right)^2 + (A_2 + A_4)^2 \sin^2 2\theta^* \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

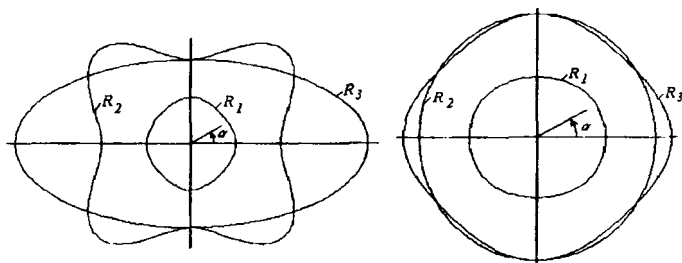


Рис. 1. Кривые рефракции в плоскости  $x'_2 = 0$

Расчет, проведенный на основании формул (8), (9) для ряда кубически анизотропных сред показывает, что в плоскости  $x'_2 = 0$  лакуны отсутствуют у молибдена, алмаза, вольфрама и алюминия. Для некоторых других кубически анизотропных материалов значения углов  $q$  и  $\theta^*$  приведены в таблице 1.

Как следует из таблицы 1, в большинстве случаев  $q > \theta^*$ , обратное неравенство выполняется, например, для германия. Случаев, когда при  $q \neq 0$  угол  $\theta^*$  равен нулю, либо при  $\theta^* \neq 0$  угол  $q$  равен нулю, для известных кубически анизотропных сред не выявлено.

С помощью формул (7) легко получить бихарактеристики, которые позволяют построить характеристические поверхности и являются составляющими групповой скорости распространения упругой волны [2, 3].

Таблица 1.

Значения углов  $\varphi$  и  $\theta^*$  для некоторых кубически анизотропных тел

Материал	Упругие постоянные, $\cdot 10^{10}, \text{Н/м}^2$			Плотность, $\rho, \text{кг/м}^3$	Угол $\theta$	Угол $\theta^*$
	$A_1$	$A_2$	$A_4$			
германий	12.89	4.83	6.71	5460	$17^{\circ}28'$	$20^{\circ}40'$
золото	18.6	15.7	4.20	19300	$32^{\circ}07'$	$31^{\circ}30'$
никель	24.65	14.73	12.47	8750	$29^{\circ}36'$	$28^{\circ}38'$
серебро	12.40	9.34	4.61	10505	$32^{\circ}27'$	$31^{\circ}11'$
медь	16.84	12.14	7.54	8930	$33^{\circ}07'$	$31^{\circ}19'$
свинец	4.66	3.92	1.44	11342	$35^{\circ}03'$	$33^{\circ}26'$

### Литература

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М., 1982.
2. Петрашень Г. И. Распространение волн в упругих анизотропных средах. Л., 1980.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, ч. 2. М., 1981.
4. О. Н. Скляр, С. М. Босяков // Материалы, технологии, инструменты, 2000, т. 5, № 4, С.26-28.
5. Современная кристаллография. Физические свойства кристаллов. Т. IV. М., 1984.

УДК 546.621:621.785

## ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ И ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ БЫСТРОЗАТВЕРДЕВШИХ ФОЛЬГ СПЛАВОВ АЛЮМИНИЯ С НИКЕЛЕМ И МАРГАНЦЕМ

**Е. Ю. Василевич, В. Г. Шепелевич**

В последние десятилетия активно ведутся исследования алюминиевых сплавов, полученных сверхбыстрой закалкой из жидкой фазы при скоростях охлаждения  $10^5 \text{ К/с}$  и выше. При этом особый интерес представляют сплавы алюминия с переходными элементами [1], что обусловлено их низкой взаим-

ной растворимостью в твердом состоянии при комнатной температуре, а также способностью образовывать интерметаллические соединения. Но сплавы, полученные сверхбыстрой закалкой из жидкой фазы, находятся в неравновесном состоянии из-за образования микрокристаллической структуры, пересыщенного твердого раствора, метастабильных фаз. В связи с этим исследование стабильности быстрозатвердевших сплавов, содержащих никель и марганец, является актуальным.

Быстрозатвердевшие фольги сплавов Al-Mn и Al-Ni получены при затвердевании капли расплава (~0,2 г), инжесктированной на полированную поверхность вращающегося медного цилиндра диаметром 20 см. Линейная скорость движения поверхности цилиндра 14 м/с. Толщина фольг находится в пределах 10...100 мкм. Скорость охлаждения расплава, как показал расчет [2], порядка  $10^6$  К/с. Рентгеноструктурный анализ применялся для исследования текстуры, определения фазового состава, физического уширения  $\beta$  дифракционной линии 420, параметра  $\alpha$  элементарной ячейки твердого раствора на основе алюминия. Полюсные плотности дифракционных линий 111, 200, 220, 311, 331 и 420 рассчитывали по методу Харриса [3]. Микротвердость фольг  $H_u$  измеряли на приборе ПМТ-3 с использованием нагрузки 20 г. Изохронный отжиг быстрозатвердевших фольг проводили от комнатной температуры до  $600^\circ\text{C}$  через  $\sim 30^\circ\text{C}$  с выдержкой по 20 мин при каждой температуре.

Рентгеноструктурные исследования показали, что быстрозатвердевшие сплавы системы алюминий-марганец являются пересыщенными твердыми растворами на основе алюминия. Быстрозатвердевшие фольги сплавов системы алюминий-никель, кроме пересыщенного твердого раствора на основе алюминия, содержат выделения интерметаллической фазы  $\text{Al}_3\text{Ni}$ . Зеренная структура является микрокристаллической. Также наблюдается текстура (111), а не текстура (100), которая характерна для алюминия и его сплавов и получаемых при условиях кристаллизации, близких к равновесным [3]. Таким образом, фольги сплавов системы алюминий-марганец и алюминий-никель, полученные сверхбыстрой закалкой из жидкой фазы, находятся в неравновесном состоянии.

Быстрозатвердевшие фольги подвергали изохронному и изотермическому отжигам. На рис. представлены графики изменения микротвердости фольг сплава Al-2 ат.% Mn и Al-0,6 ат.% Ni. При повышении температуры отжига микротвердость фольг сплава Al-0,6 ат.% Ni интенсивно изменяется в пределах  $100...180^\circ\text{C}$ ,  $260...380^\circ\text{C}$  и  $420...540^\circ\text{C}$ . На первых двух этапах происходит уменьшение параметра элементарной ячейки твердого раствора, что указывает на уменьшение в нем концентрации никеля. Физическое уширение дифракционной линии 420 уменьшается при отжиге  $180^\circ\text{C}$  и  $480^\circ\text{C}$ , но увеличивается при отжиге  $340^\circ\text{C}$ . Отжиг при температурах  $180...340^\circ\text{C}$  не вызывает существенно-

го перераспределения полюсных плотностей дифракционных линий твердого раствора на основе алюминия. Но отжиг при  $480^{\circ}\text{C}$  вызывает ослабление интенсивности одних и усиление других дифракционных линий твердого раствора на основе алюминия и фазы  $\text{Al}_3\text{Ni}$ . Изменения в структуре и микротвердости на первом этапе обусловлены незначительным развитием диффузионных процессов, приводящих к миграции никеля к межзерненным границам. В интервале  $260\dots 380^{\circ}\text{C}$  диффузионные процессы проходят активно, что приводит к образованию мелкодисперсных частиц  $\text{Al}_3\text{Ni}$  при распаде пересыщенного твердого раствора, которые создают в матрице микронапряжения, обуславливающие физическое уширение дифракционных линий. Дальнейший отжиг при  $480^{\circ}\text{C}$  способствует коалесценции частиц второй фазы, что позволяет протекать рекристаллизационным процессам [4], уменьшающих физическое уширение дифракционных линий и вызывающих изменения полюсных плотностей дифракционных линий.

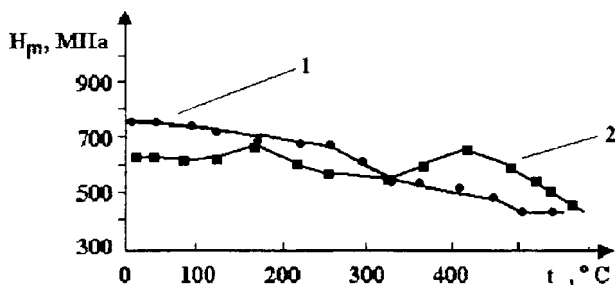


Рис. Изменение  $H_m$  при изохронном отжиге быстротвердевших фольг сплава Al-0,6 ат.% Ni (1) и Al-2 ат.% Mn (2).

Изменение микротвердости быстротвердевших фольг сплава Al-2 ат.% Mn происходит более сложно. На графике зависимость  $H_m$  от температуры отжига наблюдается два экстремума при  $180^{\circ}\text{C}$  и  $420^{\circ}\text{C}$ . Установлено, что отжиг выше  $300^{\circ}\text{C}$  вызывает появление новых дополнительных дифракционных линий, принадлежащих стабильной фазе  $\text{Al}_6\text{Mn}$ , обуславливает уменьшение концентрации марганца в твердом растворе на основе алюминия и увеличение физического уширения дифракционной линии  $420$ . Увеличение физического уширения дифракционной линии при отжиге в интервале  $300\dots 400^{\circ}\text{C}$  вызвано возникновением микронапряжений, обуславливающих повышение микротвердости. Отжиг при  $400^{\circ}\text{C}$  приводит к огрублению структуры, что

уменьшает  $\beta$  и  $H_c$ . Изменение микротвердости и физического уширения дифракционных линий и параметра элементарной ячейки при изохронном отжиге в интервале 100...300° С целесообразно связать с появлением метастабильных квазикристаллических фаз, выделение которых предшествует появлению стабильной фазы  $Al_6Mn$  при изотермическом отжиге [4].

### Литература

1. Мондольфо Л. Ф. Структура и свойства алюминиевых сплавов. — М.: Металлургия, 1979. — 640 с.
2. Мирошниченко И. С. Закалка из жидкого состояния. — М.: Металлургия, 1982. — 168 с.
3. Вассерман Г., Гревен И. Текстуры металлических материалов. — М.: Металлургия, 1969. — 654 с.
4. Колачев Б.А., Габидулин Р. М., Пигузов Ю. В. Технология термической обработки цветных металлов и сплавов. — М.: Металлургия, 1980. — 280 с.

УДК 621.384.2

## КОНТУРНЫЙ ДЕТЕКТОР НА ОСНОВЕ КООРДИНАТНО-ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ФОТОПРИЕМНИКА. ПРИНЦИПЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

**Д. В. Лисовский, Л.И. Шадурская, В. Б. Яржембицкий**

Автоматизация производственных процессов в настоящее время немаловажна без систем технического зрения (СТЗ). Совершенствуется как элементная база СТЗ (в частности, видеодатчики), так и принципы обработки и распознавания визуальной информации. В круг задач СТЗ входят: распознавание объектов (деталей, заготовок и др.) простейших типов [1], определение их координат, размеров, угла ориентации, что характерно для процессов сортировки и манипулирования объектами. Такие задачи могут быть эффективно решены на основании анализа теневых изображений этих объектов. Контроль теневых изображений упрощается с применением анализатора [2], функцией которого является выделение линии контура изображения объекта (контурного детектора).

В литературе подробно описан координатно-чувствительный фотоприемник (КЧФ) на основе продольного фотозффекта [3], особенности функционирования которого позволяют использовать его в качестве основы для построения контурного детектора с применением линейного или радиального целевого сканирования.



В общем случае, теневое изображение плоского компактного объекта произвольной формы, воспринимаемое анализатором изображения в виде светового пятна, падающего на фоточувствительный слой, характеризуется постоянной по площади освещенностью  $E_n$  при наличии некоторой фоновой освещенности  $E_D$ , распределенной по площади фоточувствительного слоя. Множество точек  $K$ , лежащих на границе раздела области светового пятна и области фона при  $E_n \gg E_D$ , составляет линию контура изображения объекта, которая несет информацию о его форме, размерах и ориентации.

Допустим, световой поток от объекта, падающий на фоточувствительный слой КЧФ, формируется устройством линейного щелевого сканирования, моделью которого служит непрозрачный экран со щелью (см. рис. 1, а), осуществляющий сканирование объекта, ноказанного штриховой линией, с постоянной скоростью  $u$  в направлении, указанном стрелкой. В этом случае устройство сканирования с дискретностью  $q$  преобразует теневое изображение объекта в совокупность линейных элементов  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ , параллельных одной из осей прямоугольной системы координат, условно помещенной в плоскость изображения, и равномерно распределенных во времени вдоль другой оси в соответствии с рис. 2 (линейные элементы представлены в виде прямоугольников, площадь которых соответствует площади реальных элементов, в целях упрощения математического описания).

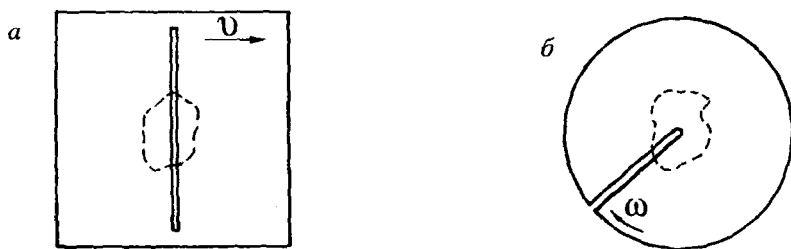


Рис. 1. Модели устройств сканирования

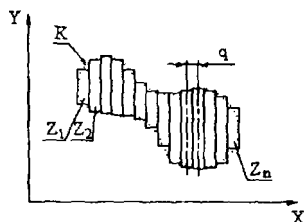


Рис. 2. Представление изображения совокупностью линейных элементов:

При этом в произвольный момент времени  $t_i$  на фоточувствительный слой КЧФ проецируется только один линейный элемент изображения  $Z_i$  шириной  $d$ , равной ширине сканирующей щели (см. рис. 3,а).

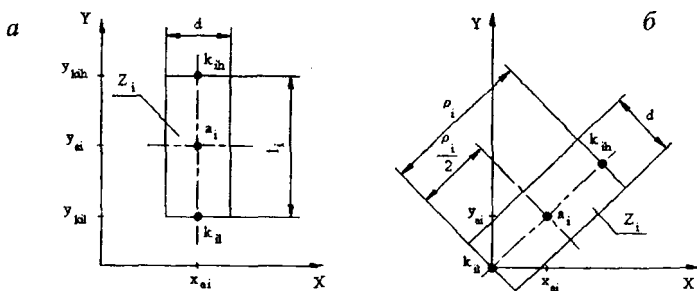


Рис. 3. Элементы изображения

На этом элементе можно выделить характерные точки  $a_i, k_{il}, k_{ih}$ . Точка  $a_i$  с координатами  $x_{ai}, y_{ai}$  соответствует энергетическому центру тяжести элемента изображения  $Z_i$ . Точки  $k_{il}$  с координатами  $x_{ai}, y_{kil}$  и  $k_{ih}$  с координатами  $x_{ai}, y_{kih}$  представляют собой крайние точки элемента изображения  $Z_i$ , причем  $k_{il}OK, k_{ih}OK$ . Расстояние между точками  $k_{il}$  и  $k_{ih}$  определяется длиной элемента изображения  $l_i$ . Значения  $x_{ai}, y_{ai}, l_i$  связаны [3] с напряжениями  $U_x, U_y$  и  $U$  между соответствующими электродами КЧФ (в соответствии с рис. 4) выражениями (1), (2), (3) соответственно.

$$x_{ai} = \frac{S}{S_{np}} \cdot \frac{U_x}{U} \quad (1)$$

где  $S$  — чувствительность фотоприемника в режиме поперечного фотоэффекта;  $S_{np}$  — чувствительность фотоприемника в режиме продольного фотоэффекта.

$$y_{ai} = \frac{S}{S_{np}} \cdot \frac{U_y}{U} \quad (2)$$

$$l_i = \frac{U}{SE_H d} \quad (3)$$

Совокупность значений  $x_{ai}, y_{ai}, l_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  дает полное координатное описание линии контура теневого изображения объекта.

Если световой поток от объекта, падающий на фоточувствительный слой КЧФ, формируется устройством радиального щелевого сканирования, моделью которого служит непрозрачный диск со щелью (см. рис. 1,б), осуществляющий сканирование объекта в процессе вращения с постоянной скоростью  $w$ , то линейный элемент изображения  $Z_i$ , проецируемый на фоточувствительный слой КЧФ в произвольный момент времени  $t_i$  имеет вид, приведенный на рис. 3,б. В этом случае длина элемента изображения определяется радиус-вектором  $r_i$ . Совокупность значений координат  $x_{ai}, y_{ai}$  энергетического центра тяжести элемента изображения  $Z_i$ , для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  дает полное координатное описание линии контура теневого изображения объекта.

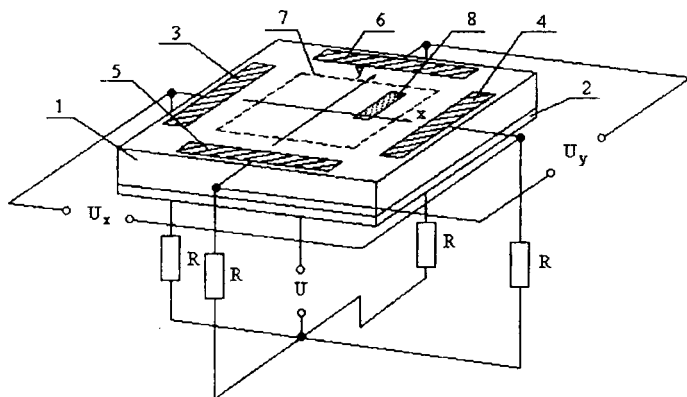


Рис. 4. Схема включения координатно-чувствительного фотоприемника: 1 — базовая область p-n-перехода; 2 — эмиттерная область p-n-перехода; 3, 4 — базовые электроды в направлении X; 5, 6 — базовые электроды в направлении Y; 7 — проекция границы поля зрения устройства сканирования; 8 — элемент изображения  $Z_i$

Контроль теневого изображения объекта наблюдения может быть осуществлен на основании анализа зависимостей  $U_y(U_x)$ ,  $U(U_x)$  при использовании линейного щелевого сканирования и  $U_y(U_x)$  при использовании радиального щелевого сканирования. Однако, непосредственное использование этих зависимостей неудобно для анализа изображений. Кроме того, они подвержены влиянию изменений величины падающего светового потока  $\Phi$ . Поэтому в данном случае целесообразным является анализ зависимостей нормированных величин  $U_{yn}^+$ ,  $U_{yn}^-$ ,  $U_{yn}$  определяемых выражениями (4), (6), (7) соответственно, от нормированной величины  $U_{xn}$ , определяемой выражением (8).

$$U_{yn}^+ = \frac{U_y}{U} + \frac{\eta U}{2} \quad (4)$$

где  $h$  — коэффициент пересчета поперечного напряжения.

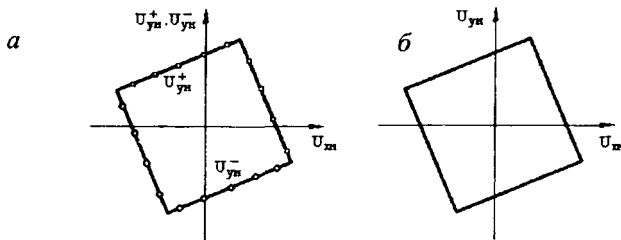
$$\eta = \frac{S_{np}}{S^2 E_H d} \quad (5)$$

$$U_{yn}^- = \frac{U_y}{U} - \frac{\eta U}{2} \quad (6)$$

$$U_{yn} = \frac{U_y}{U} \quad (7)$$

$$U_{xn} = \frac{U_x}{U} \quad (8)$$

Характер зависимостей  $U_{yn}^+$  ( $U_{xn}^+$ ),  $U_{yn}^-$  ( $U_{xn}^-$ ) и  $U_{yn}$  ( $U_{xn}$ ) при линейном и радиальном сканировании изображения плоского объекта квадратной формы произвольной ориентации представлен на рис 5,а и рис 5,б соответственно. Следует отметить, что подобное представление выходных сигналов позволяет восстанавливать форму изображения объекта, что существенно облегчает его анализ.



**Рис. 5. Представление выходных сигналов КЧФ зависимостями нормированных величин**

### Литература

1. Козырев Ю.Г. Промышленные роботы: Справочник. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1988. — 392 с.: ил.
2. Якушенков Ю.Г. Теория и расчет оптико-электронных приборов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1989. — 360 с.: ил.
3. Павлов А.В. Оптико-электронные приборы (Основы теории и расчета). — М.: Энергия, 1974. — 360 с.: ил.

## **АВТОМАТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ЖИДКИХ СРЕД**

***Р. И. Воробей, О. К. Гусев, В. П. Киреенко,  
А. К. Тявловский, К. Л. Тявловский, В. Б. Яржембицкий***

При подготовке специалистов метрологических служб промышленных предприятий и метрологических центров особое внимание должно уделяться освоению ими наиболее современной измерительной техники, поверочных установок и оборудования.

В настоящее время 26 предприятий молокоперерабатывающей промышленности Республики Беларусь оснащены приборами и измерительными системами комплекта средств измерений параметров жидких сред ИКР, ИКР-2Д, АТР, ИИС СН и ИИС ИТС, разработанного и выпускаемого в Белорусской государственной политехнической академии.

Основное назначение приборов и систем, входящих в комплект, следующее:

- Обеспечение соответствия концентрации и чистоты рабочих моющих растворов кислот и щелочей требованиям санитарных норм при санитарной обработке (мойке) технологического оборудования перерабатывающих предприятий растворами кислот и щелочей.
- Предотвращение смешивания (нейтрализации) рабочих моющих растворов кислот и щелочей и организация их рационального циркулирования (наведение в технологических танках до регламентированных концентраций, санобработка по заданной программе, возврат в танки рабочих растворов, пригодных для дальнейшего использования, направление на утилизацию непригодных отработанных растворов, сброс в канализацию обезвреженных смесей).
- Обеспечение нейтрализации отработанных моющих растворов до уровня санитарно-экологических норм, позволяющих их сброс в городскую канализацию.
- Предотвращение попадания органических веществ в сточные воды.
- Обеспечение контроля за чистотой воды в контурах охлаждения.
- Комплексная автоматизация основных и вспомогательных производственных процессов промышленных предприятий.

Эксплуатация комплекта предполагает ежегодную периодическую поверку всех средств измерений, входящих в комплект. При нарушении метрологических характеристик поверяемых изделий возникает необходимость проведения диагностики технических средств комплекта и их испытаний во всех режимах эксплуатации с целью выявления и устранения неисправностей.

Чувствительные элементы комплекта, как правило, функционируют в жестких условиях агрессивных химических сред в присутствии значительного органического загрязнения, в результате чего нарушение метрологических характеристик элементов комплекта при натуральных испытаниях может происходить также в силу нарушений режимов профилактического обслуживания датчиков.

Однако, существуют серьезные организационно-технические факторы, ограничивающие возможности реализации полномасштабных натуральных испытаний приборов и систем комплекта.

Динамический асинхронный характер изменения параметров контролируемых сред (получаемых путем не прямых измерений), сильно затрудняет или исключает испытания ИИС и проверку ее функционирования в предельных условиях путем использования тестовых программ.

Полная проверка поведения ИИС в критических ситуациях возможна при частичном натурном моделировании физико-химических процессов в контролируемых объектах.

Натурные испытания ИИС являются дорогостоящими из-за больших объемов и расхода контролируемых технологических сред и энергоресурсов. Испытания ИИС в реальном технологическом процессе затруднены из-за недопустимости доведения ряда контролируемых параметров до критических. С одной стороны, их преднамеренное изменение во всем возможном диапазоне всего множества параметров технологического процесса может привести к аварии, с другой стороны необходимо знать реакцию ИИС на все совокупности изменения характеристик технологического процесса и иметь уверенность в ее устойчивости.

Наконец, анализ показывает, что при полном доукомплектовании даже тех 26 предприятий, которые к настоящему времени оснащены частично или полностью, ежегодная поверка комплекта с использованием натуральных испытаний при штатных технологических процессах будет нереализуема по чисто временным и физическим причинам.

Вышеуказанные причины и привели к необходимости разработки автоматизированной системы стендового контроля и поверки комплекта средств технологического контроля параметров жидких сред ИКР, ИКР-2Д, АТР, ИИС СН и ИИС ИТС. Разработанная информационно-измерительная система получила условное обозначение ИИС ДКСКП.

ИИС ДКСКП выполняет следующие основные функции:

- определение основной абсолютной погрешности измерения приборов ИКР (модификации ИКР, ИКР-2д, ИКР-М);
- определение абсолютной погрешности срабатывания пороговой сигнализации поверяемого прибора;

- измерение электрической мощности, потребляемой поверяемым прибором;
- выдача управляющих сигналов и проверка цепей внешнего управления поверяемого прибора;
- проверка блока индикации поверяемого прибора;
- настройка в полуавтоматическом режиме измерительных блоков поверяемого прибора.

Структурная схема ИИС ДКСКП (рисунок 1) представляет собой совокупность функционально объединенных блоков, соединенных каналами связи:

а) измерительных:

- измеритель мощности;
- блок формирования и контроля управляющих сигналов;
- блок коммутации и контроля токов, АЦП;
- электронный эквивалент концентрации.

б) вспомогательных технических средств для получения измерительной информации:

- коммутационная панель;
- датчики тока и напряжения;
- блок контроля управляющих сигналов;
- датчик ИКР.

в) вспомогательных технических средств для преобразования и обработки информации:

- АЦП;
- арифметический блок;
- блок управления.

г) технических средств обработки информации с целью предоставления потребителю в требуемом виде в соответствии с техническим заданием на разработку ИИС ДКСКП:

- панель цифровых индикаторов;
- панель индикации прохождения операций диагностики;
- панель управления и индикации режима;
- блок согласования.

ИИС ДКСКП автоматически осуществляет логические функции контроля и измерения по нескольким информационно-измерительным каналам, вычисление, хранение, диагностику кодов раствора и концентрации. ИИС ДКСКП имеет следующие информационно-измерительные каналы:

- а) канал определения основной абсолютной погрешности прибора ИКР;
- б) канал определения погрешности срабатывания пороговой сигнализации прибора ИКР;

в) канал контроля соответствия управляющих и измерительных сигналов «Упр.», «Ключи», «Контроль», «Данные»;

г) канал контроля потребляемой мощности прибора ИКР;

д) канал диагностики блока индикации прибора ИКР.

По всем каналам осуществляется допусковый контроль соответствия текущего параметра диапазону допустимых значений ТУ контролируемого типа прибора.

Результатом цикла работы ИИС ДКСКП является техническая диагностика приборов ИКР и автоматическая выработка информации (в наглядном виде — на панели индикации, и в цифровом виде для передачи на внешние устройства) о соответствии его внешних электрических характеристик характеристикам, хранящимся в электронном виде в памяти ИИС ДКСКП.

Электронные эквиваленты поверочных растворов представляют собой управляемые преобразователи напряжение-ток, подключаемые к датчику поверяемого прибора и замещающие, таким образом, поверочный раствор. Использование преобразователей напряжение-ток-напряжение позволяет исключить влияние переходного сопротивления контактов электродной системы датчика поверяемого прибора. Закон преобразования заносится в память ИИС ДКСКП в виде программы при первичной настройке эквивалентов таким образом, чтобы отклик поверяемого прибора на электронный эквивалент соответствовал отклику этого же прибора на поверочный раствор, концентрация которого определена с высокой точностью. Поскольку характеристика эквивалента поверочного раствора хранится в постоянном запоминающем устройстве в цифровом виде, эквиваленты не подвержены временным изменениям, что позволяет эксплуатировать ИИС ДКСКП длительное время без дополнительной настройки эквивалентов поверочных растворов.

Все этапы проектирования и изготовления ИИС ДКСКП осуществлялись с участием студентов специальности «Приборостроение». Привлечение студентов к разработке ИИС ДКСКП, процессу подготовки ее к государственными приемочным испытаниям, их проведению, эксплуатации ИИС позволило повысить качество подготовки специалистов и заинтересованность студентов в проведении исследовательско-конструкторских работ, согласовать направление их интересов при распределении, придать практическую ценность дипломным проектам.



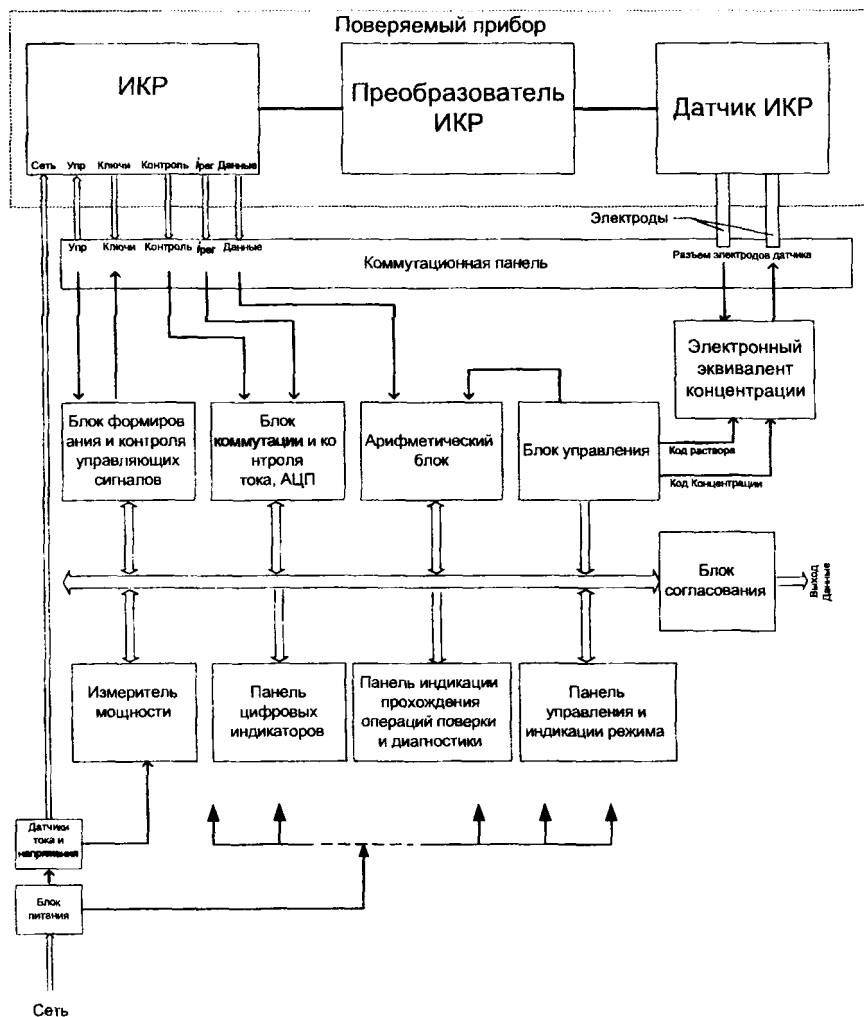


Рис. 1. Структурная схема ИИС ДКСКП

**Расшифровка условных обозначений структурной схемы**

АЦП — аналого-цифровой преобразователь

ИКР — измерительный блок прибора контроля технологических сред ИКР

## **РАСЧЕТ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ КИСЛОТ И ЩЕЛОЧЕЙ**

***Р.И. Воробей, О.К. Гусев, В.П. Киреенко,  
А.К. Тявловский, К.Л. Тявловский, В.Б. Яржембицкий***

Особое внимание при подготовке специалистов в области метрологии должно уделяться вопросам разработки системы метрологического обеспечения производства и эксплуатации средств измерений.

Целью настоящей работы являлась разработка основ метрологического обеспечения производства и эксплуатации приборов ИКР, предназначенных для технологического контроля кислотных и щелочных сред в трубопроводах молокоперерабатывающих предприятий. Для решения этой задачи были проведены теоретические и экспериментальные исследования приборов ИКР, позволившие рассчитать их точностные характеристики.

Исследование метрологических характеристик прибора ИКР целесообразно производить на основании его структурной схемы. Измерительная часть прибора построена по линейной последовательной схеме и функционально делится на 3 блока:

A1 — преобразователь (ПР);

A2 — входной усилитель (ВУ);

A3 — аналого-цифровой преобразователь (АЦП).

В состав ПР входит вспомогательный блок А11 — блок термокомпенсации (ТК).

Очевидно, что характеристики блока А1 (ПР), стоящего первым в цепи преобразования измерительной информации, являются определяющими для формирования метрологических характеристик прибора в целом. В то же время теоретический расчет характеристик преобразователя, в том числе и функции преобразования входной величины, крайне затруднен и практически не может быть реализован с достаточной степенью точности и достоверности получаемого результата. Это связано с тем, что при таком расчете возникает необходимость учета большого количества влияющих величин, как внешнего, так и внутреннего порядка: температуры раствора, в котором проводятся измерения, характеристик температурного дрейфа электрических параметров элементов электронной схемы, нелинейных искажений сигнала, связанных с неидеальностью элементов схемы и т. д. Кроме того, в настоящее время отсутствует математический аппарат, описывающий в приемлемом приближении

динамическое поведение кондуктометрической ячейки при малых амплитудах напряжения возбуждения (50...150 мВ). Таким образом, наиболее целесообразным представляется исследование ПР как «черного ящика» экспериментальным методом с накоплением возможно большего объема фактических данных для их последующей обработки с применением методов математической статистики.

Была разработана соответствующая методика исследования точностных характеристик преобразователя, ключевым моментом которой явилась методика приготовления растворов щелочи (NaOH) и кислоты ( $\text{HNO}_3$ ) с малой относительной погрешностью концентрации (не более 0,2...0,4 %). Исследования проводились на семи экземплярах прибора ИКР, диапазон концентраций растворов, в соответствии с диапазоном измерения прибора, составлял от 0 до 3,20 % массовой доли щелочи или кислоты. Определялся выходной ток преобразователя как функция концентрации измеряемого раствора. По результатам многократных измерений были получены семейства градуировочных кривых для водных растворов щелочи и кислоты. С учетом того, что настройка коэффициента усиления ВУ осуществляется по раствору с максимальной измеряемой концентрацией, т. е. ВУ фактически осуществляет нормирование сигнала на максимальное значение, градуировочные кривые также были нормированы на максимальное значение, условно принятое за 1,0.

Блок АЦП (А3) выполняет функцию линеаризации нормированного сигнала, с переводом его в цифровую форму, на основе некоторой усредненной градуировочной характеристики (индивидуальной для каждого типа раствора, но общей для всех приборов). Такое усреднение было выполнено для полученных в ходе исследования 14 кривых. Результирующие градуировочные кривые для растворов щелочи и кислоты были занесены в постоянное запоминающее устройство (ПЗУ) АЦП и в дальнейшем использовались как базовые (образцовые) характеристики. Вычтя из реальной (определенной в ходе исследований) градуировочной характеристики конкретного экземпляра прибора базовую характеристику, мы получим график зависимости систематической погрешности данного экземпляра преобразователя от концентрации измеряемого раствора. Из результатов проведенных исследований следует, что систематическая погрешность преобразователя существенно (приблизительно в 3 раза) превышает случайную погрешность, определяемую по разбросу результатов многократных измерений. Максимальные значения относительной систематической погрешности для разных экземпляров преобразователя составили от 0,6 до 2,8 % при измерении концентрации водных растворов щелочи и от 0,4 до 2,9 % при измерении концентрации кислоты, причем большие значения погрешности относятся к растворам с меньшей концентрацией.

Точностные характеристики функциональных блоков ВУ и АЦП могут быть определены расчетным путем. В схемотехническом плане измерительный тракт блоков А2 и А3 включает в себя 2 последовательно включенных операционных усилителя (ОУ) типа К140УД6Б и узел аналого-цифрового преобразователя. Поскольку все эти элементы являются независимыми (их погрешности взаимно не коррелированы), то суммарная погрешность  $\Theta$  измерительного тракта будет представлять собой случайную величину (на множестве всех приборов ИКР) и определяться формулой:

$$\Theta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Theta_i^2} \quad (1)$$

где  $\Theta_i$  — паспортные погрешности элементов электронной схемы.

Погрешность операционного усилителя (ОУ)  $\Theta_1$  включает в себя следующие составляющие:

- погрешность смещения нуля ОУ  $\Theta_{11} = \pm 0,1 \%$ .
- погрешность разности входных токов  $\Theta_{12} = \pm 0,6 \%$ .

Значимыми составляющими погрешности аналого-цифрового преобразователя  $I_2$  являются следующие:

- ошибка квантования  $\Theta_{21}$ . Эта ошибка равна половине значения младшего значащего разряда цифрового кода. Для используемого восьмиразрядного двоичного кода ошибка квантования составляет

$$\Theta_{21} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^8 - 1} \cdot 100\% = 0,2\% \quad (2)$$

- погрешность смещения нуля компаратора  $\Theta_{22} = \pm 0,06 \%$ .
- погрешность смещения нуля  $\Theta_{23} = I_{11}$  и погрешность разности входных токов  $\Theta_{24} = I_{12}$  операционного усилителя
- погрешность, вызванная нелинейностью работы ЦАП,  $\Theta_{25} = \pm 0,1 \%$

Погрешности пассивных элементов схемы не учитываются, поскольку они сводятся к пренебрежимо малой величине путем настройки схемы.

Таким образом, оценка основной относительной погрешности измерительного тракта блоков ВУ и АЦП составит, согласно (1),

$$\Theta_{\text{н.м.}} = \sqrt{2 \cdot (\Theta_{11}^2 + \Theta_{12}^2) + \Theta_{21}^2 + \Theta_{22}^2 + \Theta_{23}^2 + \Theta_{24}^2 + \Theta_{25}^2} = 1,078\% \approx 1,1\%.$$

Поскольку систематическая погрешность преобразователя является случайной величиной на множестве приборов ИКР, то суммарная относительная погрешность прибора также будет определяться формулой (1) и составит, для исследованных экземпляров прибора, от  $\Theta_{\text{ИКР}} = 1,2 \%$  до  $\Theta_{\text{ИКР}} = 3,12 \%$ , что соответствует абсолютной погрешности измерения концентрации  $\Delta C = 0,04 \dots 0,1 \%$ .

Значительный разброс вычисленных значений погрешности прибора ИКР указывает на возможность улучшения его точностных характеристик как путем конструктивной доработки преобразователя, так и за счет оптимизации методики настройки прибора. Снижения модуля максимальной систематической погрешности можно добиться, изменив настройку прибора таким образом, чтобы максимальное положительное отклонение реальной характеристики прибора от базовой совпадало по абсолютной величине с максимальным отрицательным отклонением. В точке настройки (калибровки) прибора систематическая погрешность приводится к нулю. Графически это выражается в соответствующем смещении оси абсцисс на графике относительной систематической погрешности (рис. 1). При этом точка (0; 0) остается обязательной калибровочной точкой по соображениям удобства использования прибора в системах технологического контроля.

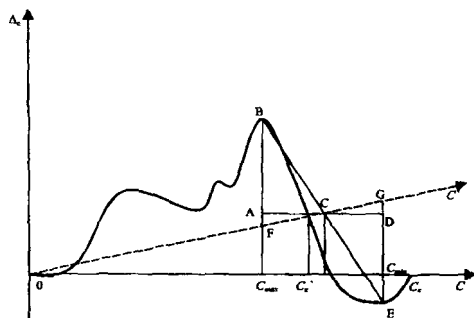


Рис. 1. Выбор калибровочной точки при настройке прибора.

Обозначим абсциссу точки максимума функции систематической погрешности (B) как  $C_{max}$ , а абсциссу точки минимума (E) — как  $C_{min}$ . Ординаты точек максимума и минимума обозначим, соответственно, как  $\Delta_{c\ max}$  и  $\Delta_{c\ min}$ . Новая калибровочная точка  $C'_k$  выбирается таким образом, чтобы максимальное положительное отклонение графика систематической погрешности (BF) от новой оси абсцисс  $C'$  равнялось по абсолютной величине максимальному отрицательному отклонению (GE). Очевидно, что при выполнении этого условия, учитывая, что  $BF \parallel GE$ , будут выполняться равенства треугольников  $\Delta BCF = \Delta ECG$  и  $\Delta BCA = \Delta ECD$ . Из этого равенства можно найти координаты точки C, через которую должна пройти новая ось абсцисс. Абсцисса точки C в первоначальной системе координат будет равна

$$x_c = C_{max} + AD/2 = (C_{max} + C_{min})/2, \quad (2)$$

а ордината, соответственно,

$$y_c = (\Delta_{c_{max}} + \Delta_{c_{min}})/2. \quad (3)$$

Теперь, проведя прямую через точки (0; 0) и (хс; ус), можно найти новую точку калибровки прибора ИКР, обеспечивающую минимизацию максимального значения систематической погрешности измерения, как абсциссу точки пересечения графика систематической погрешности с построенной прямой Ск». Поскольку индивидуальное определение калибровочной точки для каждого прибора в отдельности нецелесообразно из-за высокой трудоемкости, были рассчитаны средние концентрации калибровочных растворов, учитывающие также и оптимальность методики их приготовления. В результате было получено, что максимальная систематическая погрешность измерения концентрации щелочи достигает 2,86 % при настройке по верхнему пределу измерения, 2,17 % при оптимальной настройке и 2,63 % при настройке по среднему калибровочному раствору (относительное уменьшение погрешности на 24 % и 8 % соответственно). Для кислоты соответствующие цифры составляют 2,90 %, 2,44 % и 2,55% (относительное уменьшение погрешности на 26 % и 12 %). Таким образом, настройка по среднему калибровочному раствору обеспечивает вдвое меньшее снижение систематической погрешности по сравнению с тем, которое может быть достигнуто при оптимальной калибровке. Тем не менее, этот метод не связан с дополнительными трудозатратами и может обеспечить некоторое повышение точности прибора ИКР при той же трудоемкости настройки.

Сложный ход графика зависимости систематической погрешности преобразователя от концентрации измеряемого раствора указывает на необходимость использования при поверке нескольких поверочных растворов, т. е. необходим контроль погрешности прибора в точках  $(x_1, x_2, \dots, x_L, \dots, x_m)$ . Если исходить из того, что функция погрешности  $\Delta_c(x)$  обладает свойством

$$\max_x |\Delta_c(x) - \max\{\Delta_c(x_L), \Delta_c(x_{L+1})\}| \leq \Delta_B; \quad x \in (x_L, x_{L+1}) \quad (4)$$

то, задаваясь значениями  $\Delta_B$ , можно найти максимально допустимое расстояние между  $x_L$  и  $x_{L+1}$ . Поскольку  $\Delta_B$  в данном случае представляет собой оценку сверху максимального превышения погрешности поверяемого прибора в пределах интервала  $(x_L, x_{L+1})$  над максимальным значением его погрешности на границах интервала, то целесообразно ввести следующий критерий пригодности прибора:

$$\max_L |\Delta_c(x_L)| < \Delta_{cn} - \Delta_B \quad (5)$$

где  $\Delta_{cn}$  — предел допускаемой погрешности.

Обратим внимание на то, что  $\Delta_p$  фактически представляет собой амплитуду (полуразмах) колебаний с периодом  $(x_{L+i} - x_L)$ , накладывающихся на кривую, представленную более низкочастотными составляющими. В таком случае можно воспользоваться разложением функции систематической составляющей погрешности  $\Delta_c(x)$  в ряд Фурье на интервале от 0 до  $x_m$  с тем, чтобы численно определить амплитуды дополнительных гармоник. При разложении функции в ряд Фурье она представляется в виде

$$\Delta_c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \cos(i\omega_1 x - \varphi_i) \quad (6)$$

где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{x_m}$  — основная частота последовательности;  $A_i$  — амплитуда  $i$ -й гармоники;  $\varphi_i$  — начальная фаза  $i$ -й гармоники.

$$a_0 = \frac{2}{x_m} \int_0^{x_m} \Delta_c(x) dx \quad (7)$$

Таким образом, в составе функции погрешности выделяется не зависящая от концентрации постоянная составляющая и бесконечный набор гармонических колебаний (гармоник) с условными частотами  $\omega_i = i\omega_1$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ).

Амплитуды гармоник рассчитываются по формуле

$$A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad (8)$$

где

$$a_i = \frac{2}{x_m} \int_0^{x_m} \Delta_c(x) \cdot \cos i\omega_1 x \cdot dx \quad (9)$$

$$b_i = \frac{2}{x_m} \int_0^{x_m} \Delta_c(x) \cdot \sin i\omega_1 x \cdot dx$$

Начальную фазу  $i$ -й гармоники вычисляют исходя из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{b_i}{a_i} \quad (10)$$

Для того, чтобы определить число проверяемых точек, необходимо вычислить амплитуды гармоник по формулам (8) и (9), начиная с первой гармоники. Тогда, найдя номер  $r$  высшей гармоники, для которой будет выполняться условие  $A_r < \Delta_{cn} - \Delta_p$ , можно будет задать необходимое число проверяемых точек

$$M^* = 2r. \quad (11)$$

Задавшись значением  $\Delta_g = 0,1\Delta_{сн}$ , получаем  $M^* = 6$ . При этом две точки из числа проверяемых являются крайними точками, соответствующими верхнему и нижнему пределам измерения. Поскольку графики функции систематической погрешности представляют собой частные случаи реализации случайного процесса, т. е. имеют произвольную форму, интервалы между проверяемыми точками следует устанавливать приблизительно равными. При выборе конкретных значений концентрации поверочных растворов следует учитывать как требование равномерности их распределения по диапазону измерения, так и особенности методики приготовления поверочных растворов. Необходимо выбирать такие значения концентрации, для получения которых требуется минимальная номенклатура лабораторной химической посуды. Это позволит не только снизить трудоемкость приготовления поверочных растворов, но и повысить точность значений их концентрации.

Результаты проведенных расчетов использованы при разработке нормативно-технической и эксплуатационной документации на приборы технологического контроля ИКР, методики поверки данных приборов, а также использованы в учебном процессе при подготовке курса лекций по дисциплине «Основы проектирования средств измерений и информационно-измерительных систем».

УДК

## **КОМБИНИРОВАННЫЕ АГРЕГАТЫ В СИСТЕМЕ ПРЕДПОСЕВНОЙ ПОДГОТОВКИ ПОЧВЫ**

*Э. Камински, Я. Р. Камински, Ю. В. Чигарев, И. С. Крук,  
Д. Г. Zubович,*

Для получения стабильно высоких урожаев сельскохозяйственных культур необходимым условием является качественное и своевременное проведение комплекса предпосевных почвообрабатывающих технологических операций, позволяющего подготовить хорошо проницаемую для влаги, кислорода и тепла почву — создать благоприятные условия для прорастания и развития растений.

Механические обработки почвы являются важнейшим технологическим процессом в земледелии и проводятся для создания рыхлого верхнего слоя и разуплотнения нижнего подпахотного горизонта, а также уничтожения сорной растительности.

В системе подготовки почвы возможны варианты раздельного проведения семи и более взаимосвязанных технологических операций. Многократ-



ные проходы агрегатов по полю ведут к накоплению остаточных деформаций в пахатном и подпахатном слоях, к переуплотнению почвы ходовыми системами, созданию, так называемой, плужной подошвы, которая препятствует развитию корневой системы и подводу грунтовых вод. Все это отрицательно сказывается на урожайности культур и экологии агроландшафтов.

Сокращение числа проходов агрегатов по полю возможно за счет применения комбинированных сельскохозяйственных машин, позволяющих совместить две и более технологических операций, рационально загрузить энергетическое средство и, тем самым, снизить эксплуатационные издержки и себестоимость продукции растениеводства.

Отечественные и зарубежные заводы-изготовители предлагают широкий спектр комбинированных почвообрабатывающих агрегатов, которые можно условно разделить на две группы: для подготовки почвы под пропашные культуры и сплошной обработки. При подготовке почвы под пропашные культуры основное внимание уделяется обработке корнеобитаемого слоя, а при сплошной — объемной обработке всего пахатного горизонта.

При проведении операций основной обработки почвы предпочтение отдается оборотным плугам (рис. 1), позволяющим производить вспашку челночным способом. Основными узлами сельскохозяйственных машин данного типа являются: рама (1), опорное колесо (2), лево- и правоборачивающие корпуса (3) и механизм поворота (4). За рубежом, в частности фирмой John Deere, выпускаются плуги, которые комплектуются секциями дисковых борон и агрегат за один проход по полю выполняет технологические операции глубокой вспашки и поверхностного рыхления.

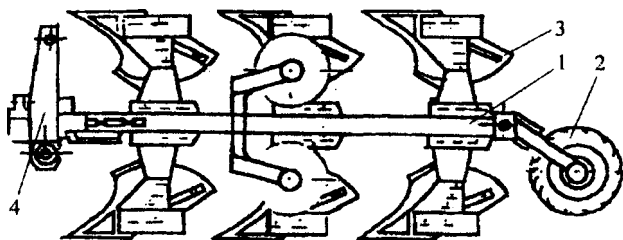


Рис. 1. Плуг оборотный ПГПО-3-35.

Из комбинированных агрегатов для сплошной обработки почвы, производимых в Республике Беларусь, являются АКШ-6, АК-3,6 (рис. 2) и АРК-4 (рис. 3), разработанные Белорусским научно-исследовательским институтом механизации сельского хозяйства. Агрегаты АКШ-6 и АК-3,6 за один проход по

полю выполняют четыре технологические операции: рыхление, боронование, выравнивание и прикатывание почвы, — что важно при возделывании зерновых культур [1]. АРК-4 предназначен для глубокого рыхления подпахатного горизонта и обработки верхнего слоя. В общем случае данные агрегаты состоят из рамы (1), опорных колес (2), рыхлителей (3,4).

Полученные положительные результаты применения локального внутривспашечного метода внесения минеральных удобрений при подготовке почвы под посадку пропашных культур определили новые направления в развитии сельскохозяйственной техники. Данный метод был взят за основу при разработке комбинированных агрегатов, совмещающих технологические операции глубокого рыхления подпахатного горизонта зоны развития корневой системы, локального внесения минеральных удобрений и нарезки гребней УПГ-2,8Г (БГАТУ) [2] (рис. 4) и МВВ-3,6 (БелНИИМСХ) [3].

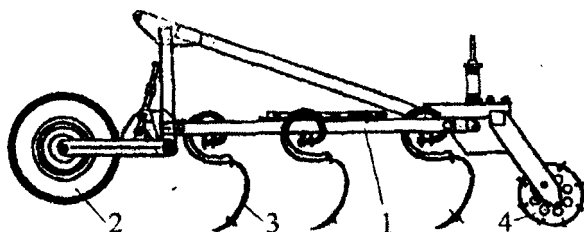


Рис. 2. Агрегат комбинированный АК-3,6.

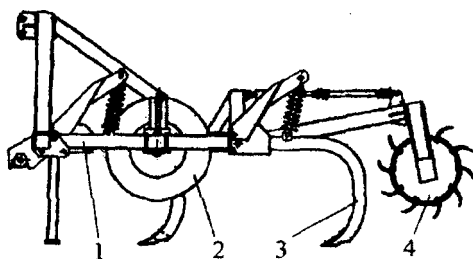


Рис. 3. Агрегат комбинированный АРК-4.

Основу конструкции данных агрегатов составляет почвообрабатывающая машина, состоящая из рамы (1) опорных колес (2), рабочих органов (3, 4), на которой монтируется вспомогательное оборудование для локального внесения минеральных удобрений, включающее емкость (5), туковывсевающий аппарат с направляющими (6) и приводам (7) (рис. 4).

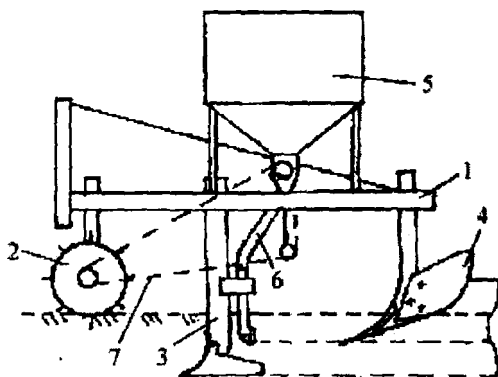


Рис. 4. Универсальная почвообрабатывающая машина-гребнеобразователь УПГ-2,8Г.

Фирмой John Deere выпускается агрегат для внутрипочвенного внесения жидких минеральных удобрений сплошным методом. Данный агрегат состоит из сельскохозяйственной машины для транспортировки, распределения и подачи удобрений и присоединенных сзади нее секций дисковой бороны для заделки их в почву [4].

**Заключение.** В настоящее время отечественными и зарубежными заводами предпочтение отдается выпуску комбинированных почвообрабатывающих агрегатов, позволяющих совместить две и более технологических операций, что позволяет рационально загрузить энергетическое средство, снизить себестоимость продукции растениеводства, уменьшить опасность переуплотнения почвы и улучшить экологию агроландшафтов.

### Литература:

1. *Сельскохозяйственная техника (каталог). Минсельхозпрод Республики Беларусь, — Мн., 1996. — 217 с.*
2. *Лахмаков В.С., Зубович Д.Г. Роль комбинированного агрегата в системе подготовки почвы под посадку картофеля // Современные проблемы агротехнической проходимости и экологии сельскохозяйственных ландшафтов: Материалы междунауч.-техн. конф., — Мн., 1999. — с.115.*
3. *Барановский И.В. Автореф. дисс. на тему: «Повышение эффективности применения минеральных удобрений на основе механизации внутрипочвенного их внесения». — Мн., 2001. — 22 с.*
4. *8000/8000T ten series tractors /John Deere/, — USA.*

## **ПЕРСПЕКТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ В РАЗВИТИИ СРЕДСТВ МЕХАНИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАЩИТЫ ПОСЕВОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР**

**Ян Р. Камински, Ю.В. Чигарев, В.П. Кругленя, И.С. Крук**

Повышение урожайности и снижение себестоимости продукции растениеводства, наряду с другими факторами, достигается эффективной борьбой с болезнями, вредителями и сорняками.

Эффективность применения пестицидов зависит от технического состояния машины, умелой ее эксплуатации, сроков, способов и качества их внесения, характеризуемого равномерностью распределения препарата по обрабатываемому объекту, дисперсностью факела распыла, густотой покрытия поверхности, которые главным образом определяются работой применяемого средства механизации.

Перспективы развития механизации технологических процессов защиты растений определяются тенденциями производства и применения пестицидов.

В настоящее время многие зарубежные и отечественные производители уделяют особое внимание выпуску конкурентоспособной высокопроизводительной техники, позволяющей качественно и с наименьшими потерями выполнить технологические операции защиты посевов сельскохозяйственных культур от болезней, вредителей и сорняков. К таким фирмам, производящим полевые опрыскиватели, относятся зарубежные: HARDI, MOTESKA, HOLDER, RAU AGROTECHNIC, RALL, JACOBY, TECNOMA, SEGUIP, EVRARD, CARUELLE, FERTYL, AMASONE, LINDUS, TOSSELLI, CASE, PILMET, PPHU KRUKOWIAK и отечественные: АО «МЕКОСАН» и завод «ЛИФТМАШ». В общем случае производимые ими опрыскиватели состоят из следующих основных узлов: шасси, насоса, емкости, всасывающей и нагнетательной магистралей, привода насоса, системы очистки рабочей жидкости, мешалки, контрольно-регулирующего оборудования, распределительной штанги с распылителями. Данные сельскохозяйственные машины являются высокопроизводительными и позволяют обработать за один проход полосу шириной от 12 до 24 м.

В последнее время некоторые фирмы, к которым относятся HARDI, AMASONE, LINDUS, TOSSELLI, CASE, RAU AGROTECHNIC и другие, выпускают опрыскиватели, оснащенные пневматическими рукавами из полихлорвиниловой пленки, в которые воздух нагнетается вентилятором. Направленный воздушный поток движется по рукавам, в нижней части которых, над гидравлическими распылителями, имеются отверстия. Струя воздуха, выходящая из отверстия, захватывает капли диспергированного рабочего раствора,

подается на обрабатываемые растения, и обеспечивает всестороннюю обработку растения (рис.1). Кроме того, воздушный поток, увеличивая скорость полета капель, снижает потери препарата от сноса ветром.

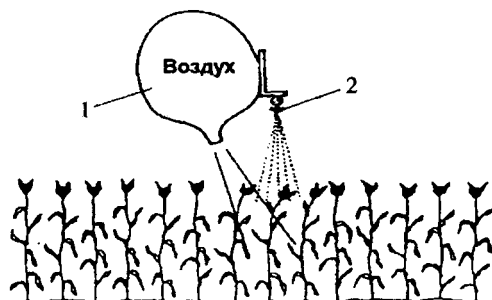


Рис. 1. Схема химического метода защиты растений с дополнительной подачей струи воздуха: 1 — воздушный рукав, 2 — распылитель.

По данным фирмы RAU, проведение обработок с использованием воздушного потока позволяет снизить нормы внесения рабочей жидкости в 2 раза, осуществлять обработки при скорости ветра 6 м/с и, за счет нанесения препаратов по всему растению, сократить дозы внесения на 15%. Для эффективного применения опрыскивателей данных типов необходимо выполнение следующих требований: скорость воздуха должна быть равна 30–40 м/с (RAU), 25 м/с (HARDI) на выходе из отверстия, и 5–9 м/с — у поверхности почвы. При этом массовый расход составит 1600–2500 м<sup>3</sup>/ч на каждый метр ширины захвата [1].

Некоторые типы опрыскивателей позволяют также вносить жидкие удобрения и выполнять технологические операции внекорневой подкормки. Они снабжены автоматической системой контроля и управления из кабины тракториста.

Задачи уменьшения экологического давления на окружающую среду, снижения расхода пестицидов и накопления их остаточных веществ в продуктах питания достигаются применением ленточного способа внесения гербицидов на полях пропашных культур и локальных методов борьбы с вредителями и болезнями, позволяющими эффективно локализовать очаги их распространения.

Фирма HARDI, кроме вышеуказанных машин, предлагает систему локальной (местной) дозировки пестицидов DGPS (Differential Global Positioning System), которая использует возможности спутников. Данная система включает следующее оборудование, необходимое для местной дозировки средств защиты растений: трактор или опрыскиватель с системой DGPS, компьютерная программа для разработки карты поля, преобразователь данных из карты

поля на сигнал для оборудования, управляющего работой трактора с опрыскивателем, и регулятора дозировки средств защиты растений.

Снижение дозы пестицидов во время выполнения операции защиты растений достигается изменением давления в системе, рабочей скорости агрегата, расхода и концентрации рабочего раствора пестицида. Вышеуказанные методы имеют свои преимущества и недостатки. Предел дозировки, который можно достичь методом изменения давления в традиционных опрыскивателях составляет  $\pm 30\%$ , его можно увеличить до 50% применяя опрыскиватель с вспомогательным потоком воздуха.

Фирмами RAU AGROTECHNIC и МЕКОСАН производятся комбинированные машины, позволяющие производить защиту пропашных культур от сорняков ленточным методом, суть которого состоит в том, что гербициды вносятся одновременно с междурядной обработкой в защитные зоны, не подверженные воздействию почвообрабатывающих орудий (рис. 2). Это позволяет сократить в 2–3 раза расход препаратов и количество проходов агрегатов по полю.

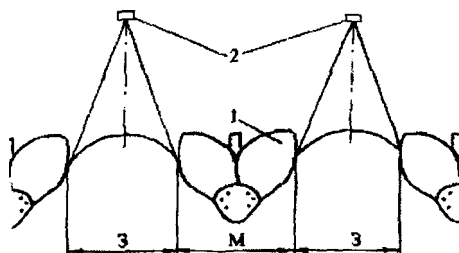


Рис. 2. Технологическая схема ленточного способа внесения гербицидов:  
М — зона механической обработки, З — защитная зона гребня,  
1 — окучник, 2 — распылитель.

Последние достижения в области механизации химической защиты растений позволяют снизить расход и потери рабочей жидкости, сократить число технологических операций и повысить эффективность химической защиты культур от болезней, вредителей и сорняков.

### Литература

1. 1. Механизация защиты растений. /А.В.Клочков, А.Р.Цыганов, З.В.Ловкис, А.Е.Маркевич/ — Горки: БСХА. — 1999. — 44 с.

## СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ МАШИНЫ ПОКАЗАННЫЕ НА ВЫСТАВКЕ АГРОМЕК '98 В Г. ХЕРНИНГ–ДАНИЯ

*Э. Камински, Ян Р. Камински*

В датском городе Хернинг с 27 по 31 января состоялась Международная Ярмарка Агромеки'98. Ярмарка организуется ежегодно а количество посетителей оценивается на около 15 тыс. датчан и около 3 тыс. зарубежных гостей. Очередные Ярмарки Агромеки предусматриваются на период с 19 по 23 января 1999 г. и с 18 по 22 января 2000 г. Основную группу экспонентов составляли фирмы занимающиеся торговлей сельскохозяйственной техникой, остальные это производители сельхозмашин.

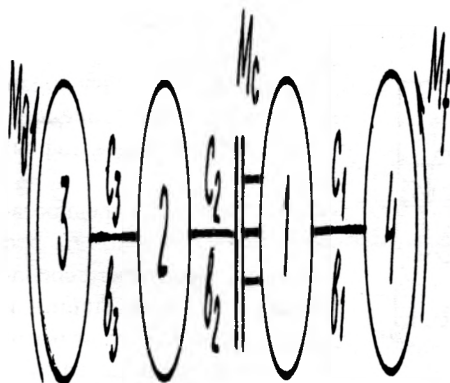
Вся экспозиция была помещена в зданиях, закрытых и отапливаемых помещениях. Экспоненты показали машины пригодные в технологиях растениеводства, животноводства, лесоводства, сельскохозяйственном строительстве (строительные элементы), хозяйственных работах, а также средства чистоты и защитную одежду. Кроме сельскохозяйственной техники в одном из павильонов организовано выставку животноводства главным образом молочных коров и телят.

Выставку машин для растениеводства можно разделить на следующие группы:

- сельскохозяйственные тракторы и погрузчики,
- машины для основной обработки почвы,
- протравливающие машины,
- сеялки, посадочные машины и агрегаты для обработки и посева,
- машины для внесения минеральных и органических удобрений,
- машины для ухода за посевами и для защиты растений,
- машины для уборки зеленых кормов, зерновых, корнеклубнеплодов и других растений,
- оборудование для хозяйственных работ и кормоприготовления.

В ярмарке принимали участие многие экспоненты, которые показали широкий ассортимент двухосных тракторов, начиная с очень малых, простых по конструкции и небольшим оснащением до очень тяжелых, большой мощности оборудованных передней и задней навесками, ВОМ а также бортовыми компьютерами. У тракторов большой мощности существовала возможность соединения задних колес и работы по принципу сдвоенных колес. Кроме польских тракторов Урсус на выставке показано тракторы следующих фирм: Massey Ferguson, Ford, Jon Deer, Deutz, Renault, Case.

Основной группой погрузчиков показанной на ярмарке была группа фронтальных погрузчиков монтированных на тракторах грузоподъемность



*Рис. 1. Самоходный погрузчик типа Bobcat 751 с двигателем 29,8 кВт оборудован ковшем для сыпучих материалов.*

которых колебалась от нескольких сот килограмм до нескольких тонн. Ковшовые погрузчики и экскаваторы экспонированные фирмами это главным образом машины прицепные и самоходные. Существенной группой машин показанной экспонентами являлись самоходные погрузчики, фронтальные, для сыпучих материалов предназначенные для применения в складских помещениях и на открытых площадках. Типичными представителями этой группы были погрузчики „Bobcat», рис. 1 обладающие двухосным шасси, безопасной кабиной а также возможность монтирования фронтального ковша (для

сыпучих материалов), вилки (для подъема поддонов и скидов, тюков и т.п.), ковшо-экскаватора, а также других устройств таких как: щетки для подметания, разные элементы для очистки от снега, орудия для обработки почвы и т.п. В погрузчиках монтируется главным образом дизельные двигатели мощностью от 13 до 61 кВт.

Машины для основной обработки почвы подразделяются на плуги и орудия для безотвальной обработки. Плуги для загонной вспашки обладающие от 2 до 10 корпусами изготавливаются как навесные и полунавесные и как правило имеют возможность агрегатирования орудия для доделки почвы. На ярмарке показано тоже большую группу оборотных плугов для беззагонной вспашки. Плуги фирмы Kverneland тоже имели возможность прицепки орудия для доделки почвы. Плуги обладали полными или ажурными отвалами. Некоторые фирмы предлагали основные рабочие элементы корпуса плуга (лемех, отвал, полозья) исполненные из пластмасс, рис. 2.

Орудия для безотвальной обработки почвы это главным образом



*Рис. 2. Обратный плуг с отвалами из пластмасс.*



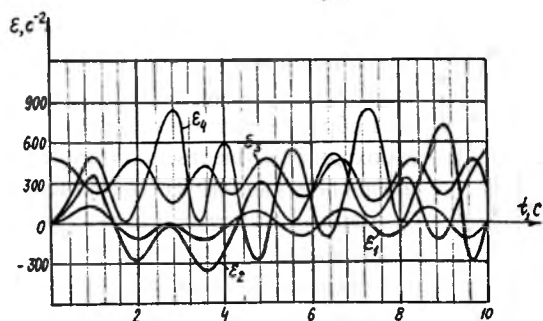


Рис 3. Глубокорыхлители с плоскими пружинами предохраняющими от перегрузки.

глубокорыхлители с рабочими органами разной формы обладающие предохранением от перегрузки (плоские пружины, срезывающие штифты) рис. 3.

Агрегаты для предпосевной обработки почвы это широкий ассортимент соединенных простых машин и орудий (бороны, культиваторы, прутковые валы, катки и т.п.). Примерный агрегат со-

стоящий из рыхлителей, дисков дисковой бороны и пруткового вала показан на рисунке 4.

Показанные на выставке сеялки это главным образом навесные с ящиками для семян на рабочую ширину машины (А m a z o n e , Norsted-Stegsted) а также сеялки рабо-

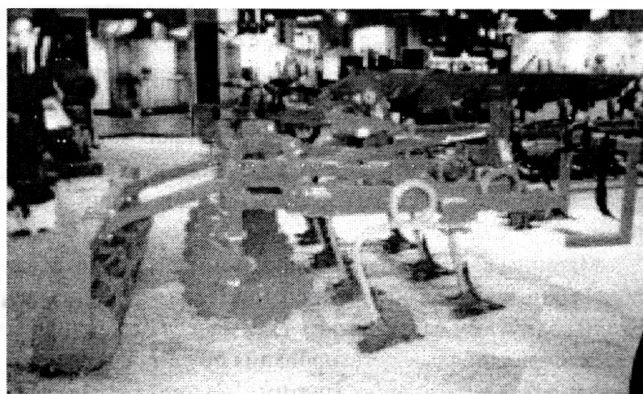
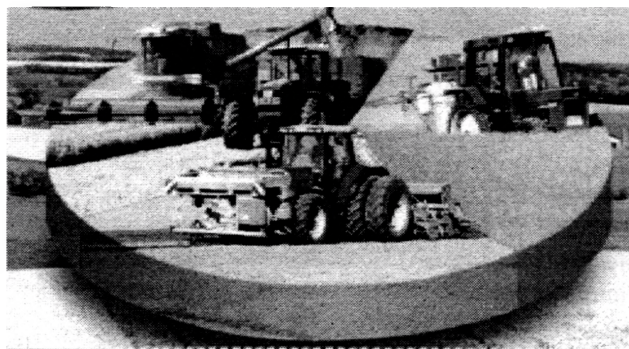


Рис. 4. Агрегат состоящий из рыхлителей, дисков, дисковой бороны и пруткового вала.

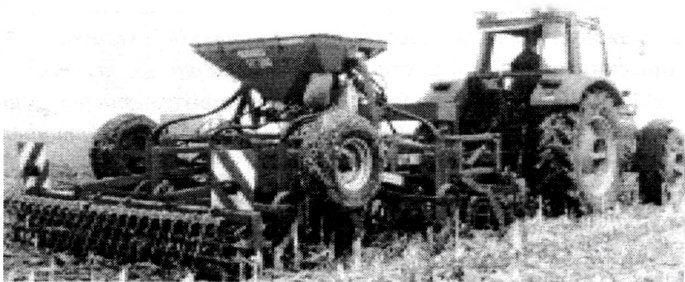
чей шириной (до 9 м) оборудованные вентилятором и пневматической системой транспорта семян в сошник (Kvemeland). Большую группу машин составляли комбинированные агрегаты для обработки почвы и посева, а также для внесения удобрений обработки и посева. На рис. 5 представлено комплект машин для технологии производства зерновых (с 3-мя основными операциями) состоящий из: навешенного спереди трактора разбрасывателя удобрений, навешенного сзади агрегата для обработки и посева; трактора с опрыскивателем; зернового комбайна совместно работающего с трактором и прицепом предназначенными для приема зерна. Этот комплект машин рекламирован



*Рис. 5. Комплект машин предназначенный для возделывания зерновых: агрегат для внесения удобрений, обработки почвы и посева, агрегат для защиты растений, зерновой комбайн а также трактор с прицепом*

трав (рабочей шириной 2; 2,5; 2,67; 3 м) оборудованные специальными сошниками для посева в растущую траву.

На выставке показано 2, 4 и 6-рядные посадочные машины, которые в случае фирмы Kvemeland типа UN 3000, UN 3100, UN 3200, UN 3300 обладали резервуаром на посадочный материал вместимостью соответственно 1000, 1250, 2500 и 5000 кг, с возможностью гидравлического наклона с целью дополнения посадочного материала. Фирма Trejon предложила комплект малых машин, рис 7 для возделывания картофеля, а именно: посадочная машина двухрядная, орудие двухрядное, швырялка картофельная, картофелекопатель с встряхивающей решеткой, элеваторный картофелекопатель. Продавец из Дании предлагал тоже польские машины для возделывания картофеля выпускаемые заводом в г. Стшельце Опольске а в



*Рис. 6. Машины фирмы Kuckerling для посева семян в необработанную почву.*

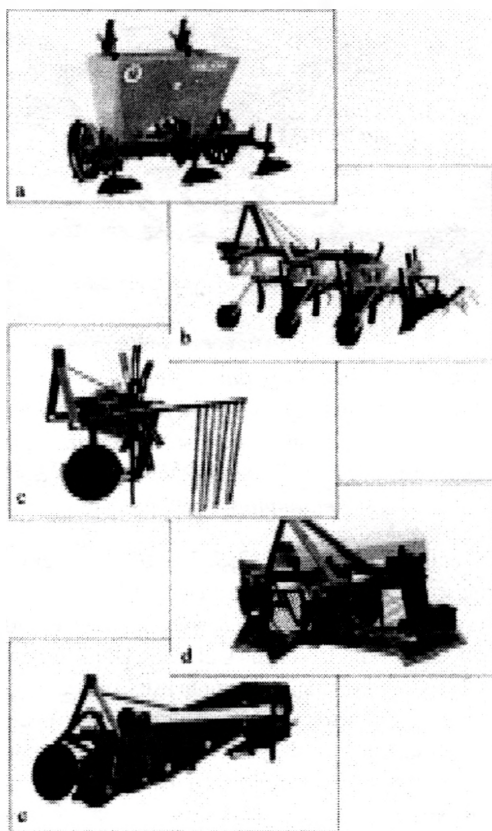
как отличающийся малыми производственными расходами. Показано тоже интересные машины для посева в т. наз. необрабатываемую почву. Примером такой машины является выполняющая ленточный посев машина показанная на рис. 6.

Датская фирма Herbatat продемонстрировала сеялки для подсева

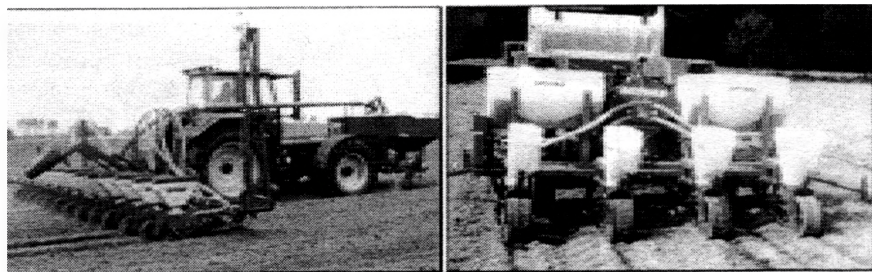
том: посадочные машины, измельчители ботвы, элеваторные картофелекопатели тракторные одно и двухрядные.

Экспозиция фирмы Kvemeland охватывала тоже точные сеялки для посева свеклы и кукурузы типа Accord DF 1/DF 2 с пневмосистемой и рабочей шириной 2,5 до 4 м и 4,5 до 6,6 м, Accord Optima для посева кукурузы с одновременным подсевом удобрения, рабочей шириной 3 м (четырёхрядный) до 9 м (18-рядный). Вакуумная пунктирная сеялка для посева свеклы и кукурузы типа Monosem PNU, механическая пунктирная сеялка типа MECA 2000 могут быть оснащены аппликаторами для внесения гранулированных удобрений и пестицидов. Предлагаемые полольники типа Super Stop для междурядной обработки со стабилизационными рабочими органами обладают возможностью полосового опрыскивания или с системой FERTICROP для рядового внесения удобрений непосредственно в почву. Показано тоже активные полольники фирмы Breviglieri обладающие от 2 до 12 секций тоже с возможностью непосредственного внесения удобрений в почву.

На выставке широко были экспонированы машины для внесения минеральных и органических удобрений. Машины для внесения жидких минеральных удобрений это прежде всего опрыскиватели оснащенные дырчатыми рас-



*Рис. 7. Комплект машин фирмы Trejon для возделывания картофеля: а – картофелекопатель, б – окучник, с – швырялка, d – картофелекопатель с встряхивающейся решеткой, e – элеваторный картофелекопатель.*

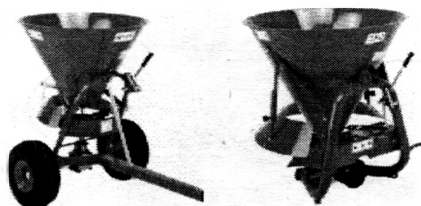


*Рис. 8. Сеялки фирмы Kverneland для высевания свеклы и кукурузы: Accord DF1/DF2, Accord Optima.*

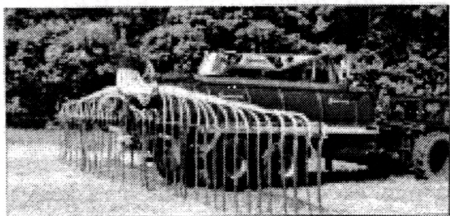
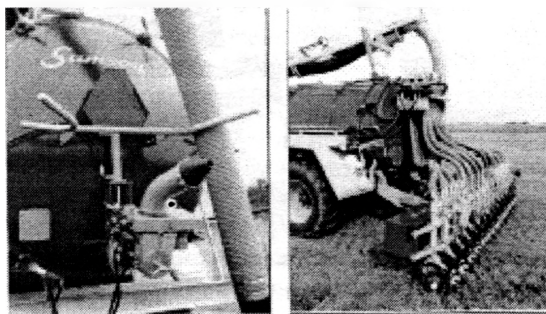
пылителем и разливными шлангами предлагались фирмами: Tee Jet, Hardi, Case, Amazone, Lechler, Lurmark. Для внесения твердых минеральных удобрений предлагается разбрасыватели с аппаратами одно и двухдисковыми, пневматические. Вместимость бункеров разбрасывателей составляла от 50 кг до нескольких тонн. Предлагаемые разбрасыватели типа Vogbaalle EX и EXW были двухдисковыми емкостью резервуара от 500 до 3000 литров. Датская фирма Jola показала разбрасыватель однодисковый типа 60 S емкостью резервуара которого составляла 600 литров (с надставкой 800 литров) а также двухдисковый разбрасыватель типа 110' с резервуаром емкостью 950 литров (или 1350 литров). Фирма Flex показала два типа рассеивателей, рис. 9, однодисковые прицепные SP-50 и SP-100 (оборудованные резервуарами 501 и 1001), а также навесные ХА-150 и ХА-250 (обладающие резервуарами 1501 и 2501).

Машины для внесения органических удобрений это главным образом разбрасыватели навоза с горизонтально расположенными разбрасывающими барабанами (чаще всего двухбарабанные) или вертикально расположенными (чаще всего четырехбарабанные). В разбрасывателях компостов под измельчающими барабанами монтируется разбрасывающие диски с лопастями, подоб-

ным образом как в разбрасывателях удобрений. Вместимость показанных разбрасывателей находилась в пределах от 5 до 25 м<sup>3</sup>. Разбрасыватели выпускаются в основном как машины одноосные двухколесные, четырехколесные, шестиколесные и требуют тракторов с автоматической сцепкой для одноосных прицеп. Фирма Kverneland показала тоже разбрасыватели навоза с боковым выбросом.



*Рис. 9 Разбрасыватели удобрений фирмы Flex, прицепной SP-50 и навесной ХА-150*

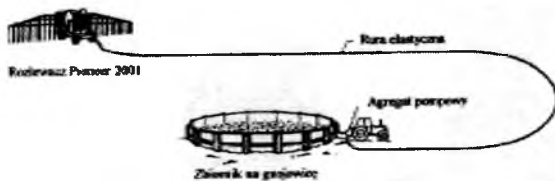


*Рис. 10 Устройства для внесения жидкого навоза монтированные на бочковозах фирмы Samson:  
а - разливочное сопло, б-устройство для внесения жидкого навоза в почву, с-шланга с разливными шлангами*

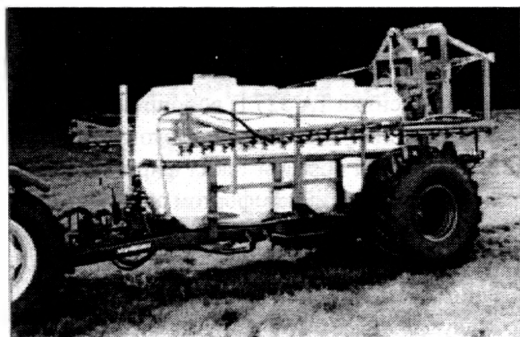
Для удобрения почвы жидким навозом применяются главным образом бочковозы большой емкости. Разделяются они на две группы для поверхностного удобрения и для внесения удобрений непосредственно в почву. В случае поверхностного удобрения на бочковозах монтируют специальные рамы с разливными шлангами, а при глубоком внесении удобрений в почву специальные устройства. Экспонентами бочковозов были фирмы: JOS (емкость резервуара 20 м<sup>3</sup>), Samson (емкость резервуара 10 и 12 м<sup>3</sup>), рис. 10, Joskin (емкость резервуара от 5 до 24 м<sup>3</sup>). Фирма Jom Larsen выпускает разбрасыватель типа Combi 840 оснащенный устройством для

глубокого внесения жидкого навоза в почву. Фирма Agrometer была экспонентом самоходного устройства Pioneer 2001 состоящего из самоходного шасси на котором монтируется катушка с эластичным шлангами и балка с комплектом поливных шлангов. Технологический процесс полива показано на рис. 11.

Показанные на выставке машины для защиты растений это главным образом тракторные опрыскиватели прицепные и навесные. Экспонентами опрыскивателей были фирмы: Hardi, Amazone, Lindus, Tosselli, Case. Харак-



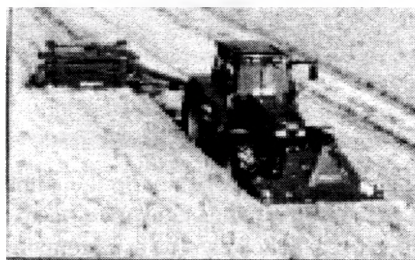
*Рис. 11 Технологическая схема удобрения жидким навозом с применением самоходной машины Pioneer 2001 фирмы Agometer*



*Рис. 12. Опрыскиватель  
AGRODAN FGT 6-S20 с резервуаром  
емкостью 6000 л и штангой для  
опрыскивания рабочей шириной 12–24 м.*

терной чертой показанных опрыскивателей было их оснащение воздушными рукавами предназначенными для направления воздушного потока на струю жидкости выходящей из распылителей, которая разбивается на мелкие капли и вдавливаются в опрыскиваемую ниву зерновых. На штангах опрыскивателей монтируется головки с 3 до 5 соплами для облегчения обслуживания. Опрыскиватели оснащены резервуаром только один из них типа AGRDAN FGT 6-S20

обладает двумя резервуарами общей вместимости 6000 литров и оборудован штангами для опрыскивания рабочей шириной от 12 до 24 м, рис. 12.



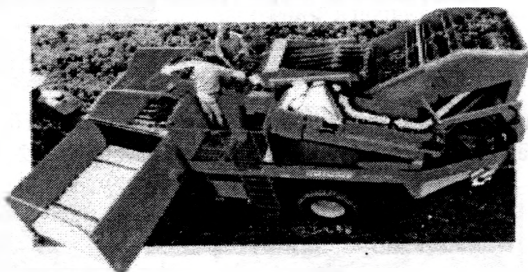
*Рис. 13 Опрыскиватели фирмы Kveteland: косилка TA 327 F, борошылка TA 725/TA 730 C/CH, прицеп TA 622, машина для обвивки тюков сена UN 7554/7556/7558*

Машины для уборки зеленых кормов это: косилки, ворошилки, прессы, объемные прицепы, погрузчики тюков и другие. Большое количество наименований этих машин показала фирма Kvereland. Рис. 13 показывает примерные машины показанные этой фирмой: косилка TA 327 F, ворошилка TA 725/ta730C/CH, прицеп-подборщик TA 622, машину для обвивки тюков пленкой.

Зерновые комбайны это машины главным образом таких фирм как: Case, Deutz Fahr, Class, Bizon. Все они отличаются высоким комфортом обслуживания, полной автоматикой контроля и управления, оборудованы бортовыми компьютерами. Для уборки картофеля показано много машин от однорядных тракторных копателей до высокоавтоматизированных картофелеуборочных комбайнов.

Заслуживает внимания одно и двухрядные комбайны фирмы Grimme показанные на рис. 14. Все они оснащены устройствами для тщательной очистки картофеля и обладают автоматической системой контроля и управления.

Для уборки сахарной свеклы предложено многорядные машины для двухэтапной уборки а также свеклоуборочные комбайны. Фирма Stoll предложила: однорядные комбайны с укладкой ботвы в поперечные валки и собиранием корней в бункер, трехрядный ботво-резный комбайн оставляющий ботву на поле и собиранием корней на движущийся рядом прицеп,



*Рис.14 Картофелеуборочный комбайн фирмы Grimme SE 150-60*

прицепной комбайн с собиранием корней в резервуар и опораживанием на крае поля. Фирма MOREAU предлагает для уборки сахарной свеклы высокопроизводительные шестирядные комбайны: LECTRA 4005 с промежуточным резервуаром и транспортером подающим корни на прицеп, VOLTRA с резервуаром на корни вместимостью 24 м<sup>3</sup>, а также машины навешенные на тракторах для уборки сахарной свеклы в технологиях уборки двух и трехэтапных.

В области механизации хозяйственных работ и в животноводческих помещениях на внимание заслуживают следующие машины: кормораздатчики FRASTO вместимостью от 4 до 13 м<sup>3</sup> со скребковым транспортером, смесителем а также системой дозирования кормов в коровниках, фронтальные погрузчики фирмы ALO с оборудованием для перегрузки сыпучих материалов, грубых кормов и устройством вырезающим силосованный корм из силоса а также погрузчиком для цилиндрических тюков, тоже завернутых пленкой. Перечисленные рабочие элементы машин можно монтировать на отечественных погрузчиках типа Тит 5 и 6.

## МАШИНЫ ДЛЯ ВНЕСЕНИЯ УДОБРЕНИЙ И ЗАЩИТЫ РАСТЕНИЙ ПОКАЗАННЫЕ НА ВЫСТАВКЕ В ТОРГОВОМ ЦЕНТРЕ г. КЕЛЬНЕ 1998 г.

Ян Р. Камински, Валентина П. Круглена

В период с 5 по 8 марта 1998 г. в Торговом Центре в г. Кельце-Польша состоялась выставка сельскохозяйственных машин на которой показано, между другими, машины и оборудование для внесения минеральных удобрений и защиты растений. Основную группу составляли:

– навесные разбрасыватели удобрений итальянской фирмы Nordagri импортируемые в Польшу центральным управлением внешней торговли AGROMET MOTOIMPORT

– тракторные опрыскиватели выпускаемые заводом сельхозмашин Агромет Пильмет, тракторные опрыскиватели производителем которых является Производственно-торговое Предприятие KRUKWIAK, опрыскиватели фирмы Haldi которые продаются в Польше обществом Данагри-Пол,

– протравливающие машины для семян выпускаемые предприятием AGRALEX Redto,

– мазатели для выполнения приема защиты растений выпускаемые Обществом Польш Свед Агротехника Редла,

Навесные разбрасыватели удобрений фирмы Нордагри предназначенные для полевых работ выпускаются в трех основных типах CN, QN, и QN 2. Два первые это разбрасыватели однодисковые, а третий тип оборудован двумя разбрасывающими дисками.

Основные эксплуатационно-технические данные помещено в таблице 1. Разбрасыватели удобрений типа CN, рис.1, обладают коническим резервуаром с помещенными в его нижней части двумя отверстиями дозирующими удобрения на разбрасывающий диск и мешалкой направляющей удобрения в дозирующие отверстия. Под резервуаром помещена угловая передача и разбрасывающий диск. В дозирующих отвер-

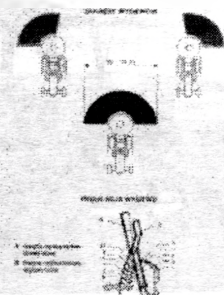


Рис. 1. Разбрасыватель удобрений типа Nordagri CN, а также схема разброса удобрения и способа регулировки высева.



стях находятся независимые рычаги с помощью которых отсекается подача удобрения на разбрасывающий -диск и регулируется доза, симметричность и ассиметричность разбрасывания. К стандартному оборудованию принадлежат тоже: резервуар, рама, угловая передача, разбрасывающий диск, комплект рычагов, мешалка. По специальному заказу поставляются узлы: шарнирно-телескопический вал, сито.

Разбрасыватели удобрений типа QN, рис. 2 обладают резервуаром в форме пирамиды с помещенными в нижней части двумя отверстиями дозирующими удобрения на разбрасывающий диск и мешалкой направляющей удобрения в дозирующие отверстия. Под резервуаром помещена угловая передача и разбрасывающий диск. Доза удобрения и симметричность посева регулируются через соответственное открытие отверстий дозирующих удобрения на разбрасывающий диск. В стандартном оборудовании машины находятся: резервуар, рама, угловая передача, узел регулирующих рычагов и мешалка. По специальному заказу поставляются: шарнирно-телескопический вал и система гидравлического управления разбрасыванием из кабины тракториста.

Разбрасыватели удобрений типа QN 2 обладают резервуаром похожей формы как для типа QN. Конструкция резервуара наклонена под углом 39 градусов в направлении противоположном направлению езды агрегата. В нижней части резервуара находятся дозирующие отверстия и мешалка. Под резер-

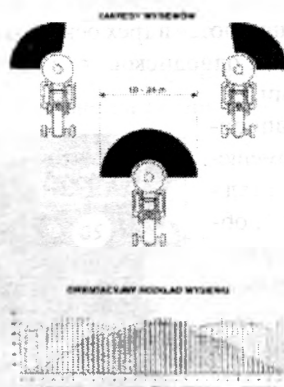


Рис. 2. Разбрасыватель удобрений типа Nordagri CN, а также схемы разброса удобрения и ориентировочное поперечное распределение массы удобрения

вуаром помещен силовой агрегат и два разбрасывающих диска. Доза а также внесение удобрений на левую или правую сторону регулируются рычагами которые открывают или закрывают отверстия дозирующие удобрения на разбрасывающие диски. В состав стандартного оборудования входят: резервуар, рама, силовая пе-

редача дисков, комплект рычагов и мешалка. По специальному заказу поставляются следующие узлы и части: шарнирно-телескопический вал, гидравлическая система открывания и закрывания задвижек, сито (не касается модели QN 2-2000).

Таблица 1.

Основные эксплуатационно-технические данные разбрасывателей фирмы Нардагри (по заводским данным)

Тип разбрасывателя	CN25	CN40	CN50	QN 800	QN 1000	QN2-900	QN2-1200	QN2-1500	QN2-2000
Емкость резервуара (л)	300	400	500	800	1000	900	1200	1500	2000
Вместимость резервуара (кг)	250	330	415	660	860	750	990	1245	1720
Количество разбрасывающих дисков (шт)	1	1	1	1	1	2	2	2	2
Ширина разбрасывания (м)	12-14	12-14	12-14	18-24	18-24	24	24	24	24
Высота установки разбрасывающих дисков над землей (м)	0,95-1,1	0,95-1,1	0,95-1,1	0,7-0,8	0,7-0,8	0,6-0,75	0,6-0,75	0,6-0,75	0,6-0,75
Скорость вращения ВОМ скорость вращения диска (об/мин)	540/-	540/-	540/-	540/-	540/-	540/685	540/685	540/685	540/685
Габаритные размеры - длина (м) - ширина (м) - высота (м)	1,0 1,0 0,9	1,06 1,14 1,01	1,25 1,20 1,09	1,3 1,5 1,1	1,3 1,5 1,2	1,20 1,85 1,02	1,20 1,85 1,14	1,20 1,85 1,27	1,30 2,5 1,40
Масса машины (кг)	60	63	65	160	170	225	255	270	285
Рабочая скорость (км/ч)	2,5-8	2,5-8	2,5-8	2,5-8	2,5-8	2,5-8	2,5-8	2,5-8	2,5-8
Требуемая мощность трактора совместно работающего с разбрасывателем (кВт)	6-18	6-18	6-18	20-30	30-36	40-60	55-70	70-90	90-110

Показанные на выставке разбрасыватели агрегируются с тракторами оборудованными стандартной трехточечной подвеской а также валом отбора мощности с 540 об/мин. Емкости резервуаров (300 до 2000 литров) а также их грузоместимость (250 до 1720 кг) охватывают широкий ассортимент машин и дают возможность подбора разбрасывателя до находящегося трактора в хозяйстве. Масса разбрасывателя относительно небольшая и составляет от 60 до 285 кг а коэффициент веса к массе машины колеблется от 5 до 6. Машинами можно работать в большом диапазоне рабочих скоростей от 2,5 до 8 км/ч, что

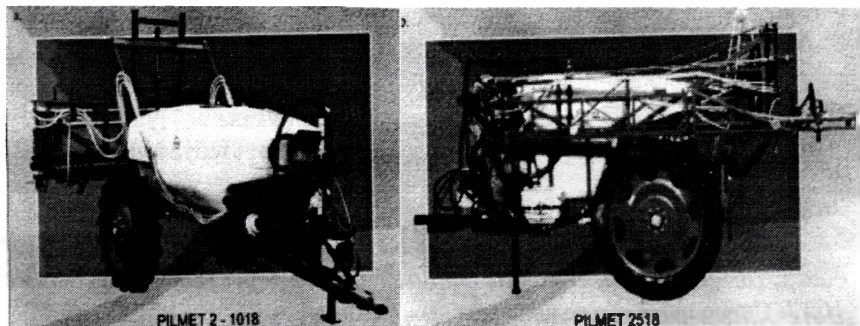
можно использовать для расширения применяемых доз удобрений на один гектар. Существенным параметром является высота установки разбрасывающих дисков над землей. Для самых маленьких разбрасывателей рекомендуется применять высоту в пределах от 0,95 до 1,1 м, для разбрасывателей со средней вместимостью резервуара в пределах от 0,7 до 0,8 м, а для разбрасывателей двухдисковых в пределах от 0,6 до 0,75. Высота установки разбрасывающих дисков над землей имеет существенное влияние на ширину разброса удобрения и рабочую ширину разбрасывателя (чем выше расположены диски над землей тем больше ширина разброса удобрений). Однако высота установки дисков над землей ограничена конструктивно-технологическими параметрами. Сравнивая однодисковый разбрасывающий аппарат с двухдисковым можно прийти к следующим выводам:

- однодисковый разбрасывающий аппарат характеризуется простой и легкой конструкцией, рабочая ширина у него меньше по сравнению с другими аппаратами, труднее получит симметричность рассеивания, требует точной регулировки (установки) дозирования удобрения на диск, точного подбора угла установки лопастей на доске, определенных оборотов разбрасывающего диска.

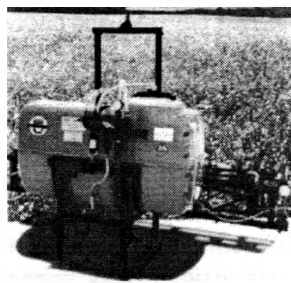
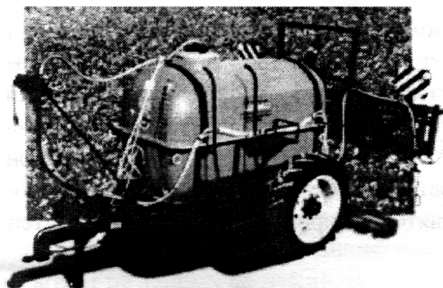
- отличающимися чертами двухдискового разбрасывающего аппарата являются: большая масса, сложная конструкция привода дисков, большая рабочая ширина, малая чувствительность на неточность дозировки удобрения на диск, незатруднительное получение симметричного разбрасывания, меньшая чувствительность на точность установки лопастей и оборотов разбрасывающих дисков.

Завод сельскохозяйственных машин Пильмет традиционно показал широкий ассортимент выпускаемых навесных и прицепных опрыскивателей применяемых в полеводстве и садоводстве. Навесные опрыскиватели вместимостью резервуаров от 300 до 800 литров снабжены опрыскивающими брусами рабочей шириной от 10 до 18 м. Опрыскиватели прицепные с резервуарами вместимостью 1000, 2000 и 2500 литров, рис. 3 оборудованы брусами шириной от 12 до 18 м. Эти опрыскиватели приспособлены для выполнения приемов внекорневой подкормки. Опрыскиватели вместимостью 2000 и 2500 литров снабжены автоматической системой контроля и управления из кабины тракториста. Заслуживает внимания специальное оборудование. К нему относятся специальной формы шланги с распылителями монтированными на головках опрыскиваемого бруса. Дают они возможность бокового опрыскивания растений в междурядья, а также полива удобрения на почву в случае применения концентрированных азотных растворов.

Производственно-торговое предприятие (РРНУ) Круковяк предлагало навесные опрыскиватели емкостью резервуаров 1000 и 2500 литров, рис. 4.



*Рис. 3. Прицепные опрыскиватели выпускаемые заводом FMR Agomet Pilmtn: а – опрыскиватель PILMET2-1018 емкостью резервуара 1000 л  
б – опрыскиватель PILMET2-2518 емкостью резервуара 2500 л*



*Рис. 4. Полевые опрыскиватели фирмы PPNУ Krukowiak:  
а – опрыскиватель навесной типа 400/12/Е емкостью резервуара 400 л  
б – прыскиватель прицепной типа 2500/18/Н/ST емкостью резервуара 2500 л*

Опрыскиватели большой вместимости оснащены компьютерной системой контроля и управления. На навесных опрыскивателях монтируется брус для опрыскивания рабочей шириной 12 м, на прицепных опрыскивателях 16 и 18 м, подготавливаются для внедрения в производство опрыскивающие бруссы рабочей шириной 24 и 27 м.

– Общество Данагри-Пол предлагает полевые опрыскиватели навесные и прицепные датской фирмы Hardi особенно подчеркивая версии с так называемым воздушным рукавом, рис. 5. Навесные и прицепные опрыскиватели оборудованы вентилятором который нагнетает воздух в специальный рукав помещенный вдоль опрыскивающего бруса. В рукаве находятся отверстия



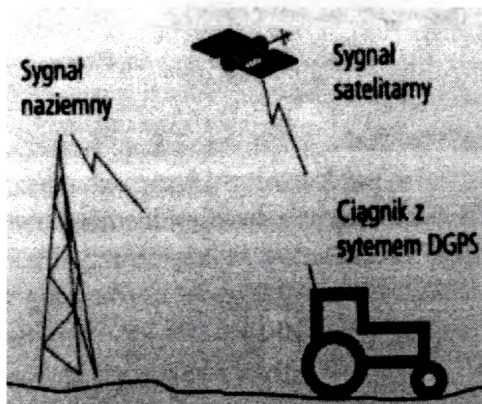
*Рис. 5. Полевой опрыскиватель фирмы Hardi Commander с вспомогательным потоком воздуха, с резервуаром емкостью 4200 л, с резервуаром на воду для полоскания и полевым брусом HAZ 24 м*

расположенные напротив распылителей под определенным углом. Вытекающий из отверстий рукава воздушный поток разделяет стебли зерновых, ударяет в распыленную распылителем рабочую жидкость вызывает более тщательное опрыскивание растений растущих на поле.

Фирма Hardi кроме вышеуказанных машин предлагает систему локальной (местной) дозировки пестицидов DGPS

(Differential Global Positioning System) которая для локализации объектов использует спутниковую систему при помощи сигналов из спутника и наземной станции являющейся точкой отнесения, рис. 6. Оборудование необходимое для местной дозировки средств защиты растений это: трактор или опрыскиватель с системой DGPS, компьютерная программа для разработки карты поля, преобразователь данных из карты поля на сигнал для оборудования управляющего работой трактора с опрыскивателем, оборудования управляющего работой трактора-опрыскивателя-регулятор дозировки средств защита растений.

Изменение дозы удобрения во время выполнения операции защиты растений получить можно через: изменение давления, рабочей скорости или концентрации средства в рабочей жидкостью. Вышеуказанные методы имеют свои преимущества и недостатки. Предел дозировки, который можно достичь методом изменения давления или рабочей жидкости в традиционных опрыскивателях составляет  $\pm 30\%$ , его можно увеличить до  $50\%$  применяя опрыскиватель с вспомогательным потоком воздуха. Способы



*Рис. 6. Схема передачи информации с использованием наземной станции и спутника*

смешивания жидкостей из разных резервуаров (вода, средство защиты растений) или смешивание чистого химического средства с водой в жидкостной системе опрыскивателя является сложным методом но пределы дозировки практически неограничены.

Условием практического применения локальной дозировки пестицидов является разработка простых методов быстрого и рационального мониторинга сортов и загущения сорняков на поле, концентрации выступления вредителей или заболеваний растений, которые служат для составления карт поля. Основными факторами которые надо учитывать при локальной дозировке пестицидов являются:

- выступающие сорта сорняков, заболеваний и вредителей растений,
- степень увеличения (сгущения) в отдельных местах поля (предел изменемости),
- предусматриваемый урожай возделываемой культуры,
- предусматриваемая продажная цена сельскохозяйственных продуктов,
- цена средства защиты растений.

На основании вышеуказанного подбирается дозу средства защиты растений. Существуют предпосылки касающиеся пользы местного применения пестицидов. Появление заболеваний, вредителей и сорняков выступает неравномерно по всей плантации возделываемой культуры и зависит от многих факторов (плотности растений растущих на поле, климатических условий выступающих во время возделывания растений). Использование локальной дозировки агрохимикатов ведет к: рациональному применению пестицидов, снижению затрат на защиту растений, повышению урожая и окупаемости производства, при одновременном ограничении отрицательного влияния приема на естественную среду.

Предприятие AGRALEX из Реяла предложило два основных типа протравливающих машин для семян, (рис. 7) а именно тип Агата о непрерывной работе а также универсальный порционный протравливатель с пылеуловителем типа REDLO AL 50 P. Протравливатель Агата обладает электрическим приводом и состоит из рамы на которой помещены: резервуар для семян, емкость для рабочей жидкости, шнековый транспортер и мешконакопитель. Пылеуловитель монтируется на отдельной раме. В пылеуловителе можно тоже применять покрытие семян досеменным удобрением напр. BIONAL. Производительность протравливания составляет до 1,0 т/ч.

Общество Пол-Свед Агротехника из Редла предлагает машины так наз. „мазатели» предназначенные для непосредственного нанесения гербицидного средства уничтожающего сорняки. Машины используются на полях, в огородах и садах а также в лесоводстве. Примерные технические решения „маза-

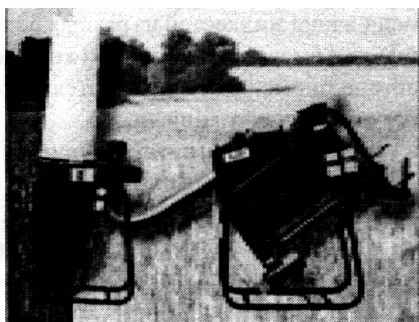
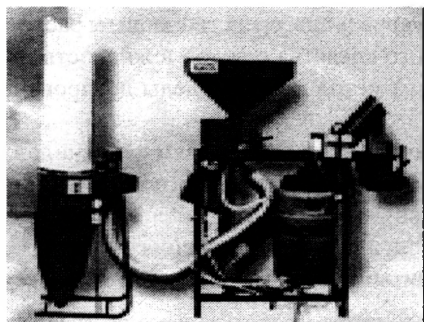


Рис. 7. Протравители для семян Agata с непрерывной работой и порционная типа RELO AL 50P

телей» монтированные на машинах и сельскохозяйственных орудиях показано на рис. 8. «Мазатель» типа Гром предназначен для использования в полеводстве и лесоводстве, ручной типа Снайпер применяется в огородах и приусадебных участках, тракторный типа Пиорун предназначен для выполнения определенных приемов в садоводстве, на зерновом комбайне монтируется Циклон а типа Тайфун применяется при возделывании полевых культур также в междурядьях.

Показанные на выставке машины охватывают лишь узкую группу машин переназначенных для выполнения химизационных приемов в полеводстве. Тем не менее позволяют ориентировать посетителей в предлагаемых конструкционных решениях

промышленности и рынка, направлениях развития сельскохозяйственного машиностроения а также оказаться на высоте требований потребителя касающихся качества работы и охраны естественной среды.

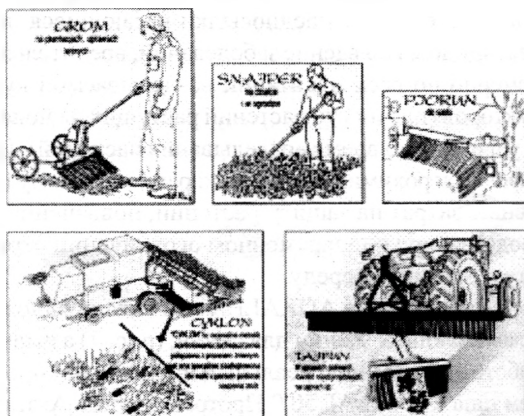


Рис. 8. Мазатели для нанесения гибридного средства на растения

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Г. Я. Беляев, Н. И. Горбач.</i> Страницы жизни ученого, педагога, учителя .....	4
<i>В. Б. Немцов, Э. Г. Гецевич, Г. К. Татур</i> — ученый, педагог, учитель .....	7
<i>Н. И. Горбач.</i> О жизненном и творческом пути профессора Г. К. Татура. ..	10
<i>А. В. Чигарев, Ю. В. Василевич, Ю. В. Чигарев.</i> Что такое МТГ? (вариант тезисов вводной лекции по теоретической механике) .....	14
<i>Р. М. Игнатищев.</i> О строении экспериментального варианта курса теоретической механики для студентов машиностроительных специальностей технических университетов .....	17
<i>Р. М. Игнатищев.</i> О трёх существенных резервах повышения качества учебников по теоретической механике .....	23
<i>Д. М. Макаревич, М. Е. Лустенков.</i> Рейтинг-контроль на кафедре «Теоретическая механика» .....	28
<i>Р. М. Игнатищев.</i> О теоремрейтинге .....	31
<i>А. В. Локтионов.</i> Технология самостоятельной работы студентов на кафедре ТМ и ТММ ВГТУ .....	36
<i>П. П. Анципорович, И. И. Лобач.</i> Некоторые пути активизации познавательной деятельности студентов .....	38
<i>С. С. Шапилевич, Е. И. Хижняк.</i> Создание проблемных ситуаций в курсе теоретической механики .....	42
<i>Ю. А. Гурвич.</i> Практические, научные и методические предпосылки введения многокритериального синтеза и других прогрессивных технологий обучения в статику, кинематику и динамику .....	45
<i>Ю. А. Гурвич, Д. А. Копелев.</i> Синтез статики составных конструкций .....	54
<i>Ю. А. Гурвич.</i> Синтез кинематики и динамики сложного движения точки .....	57
<i>Ю. А. Гурвич.</i> Обучающий и контролирующий комплекс программ для ЭВМ с использованием «MATHCAD 2000 pro» выбора параметров управляемой оси автомобиля и автобуса .....	61
<i>Ю. А. Гурвич.</i> Обучающий и контролирующий комплекс программ на «MATHCAD 2000 pro» для исследования влияния значений геометрических параметров различных конструкций рулевых трапеций на износ шин .....	65
<i>В. Б. Немцов, А. В. Кондратенко.</i> Разработка курса электромеханики для механиков полиграфической промышленности .....	72
<i>В. Э. Завистовский.</i> «Техническая механика» для немашиностроительных специальностей: содержание и объем .....	75



<i>П. П. Анципорович, В. К. Акулич, Э. И. Астахов, В. В. Кудин.</i>	
Типовая программа нового учебного курса «Теория машин-автоматов и манипуляторов» и ее методическое обеспечение. ....	79
<i>В. Г. Буткевич.</i> Особенности преподавания курса «Теория механизмов и машин» для студентов технологических специальностей ВГТУ .....	84
<i>Э. И. Астахов, В. В. Кудин.</i> Особенности отражения вопросов резания трения в учебном курсе «Динамика станков» .....	87
<i>Ю. А. Грибков, А. М. Моисейков.</i> Особенности проведения лабораторных работ по курсу теории механизмов .....	90
<i>С. С. Шаплевич, В. В. Конттик.</i> Применение ПЭВМ в курсе сопротивления материалов .....	91
<i>Г. С. Бокун, В. С. Выхренко.</i> Использование единичных факторов при решении задач теоретической механики .....	94
<i>А. В. Локтионов.</i> К вопросу расчета кинематических параметров в цилиндрических координатах .....	98
<i>В. Б. Немцов.</i> Применение механики при описании свойств молекулы ДНК .....	104
<i>В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик.</i> К численной реализации двумерных краевых задач нестационарной термоупругости с помощью теории потенциала .....	109
<i>В. И. Зинкевич.</i> Особенности изложения раздела «Динамика гидропривода» в курсе ТММ .....	116
<i>Э. И. Астахов, А. А. Адамович, С. В. Пашкевич.</i> Анализ схем автоматических коробок передач для курсового проектирования по ТММ .....	118
<i>В. В. Кудин В.В., Э.И. Астахов.</i> Вопросы оптимизации виброизолированных фундаментов машин на объектах с кинематическим вибровозмущением .....	122
<i>В. И. Зинкевич, А. М. Белоус.</i> Некоторые вопросы исследования движения упругих звеньев передаточных механизмов автомобиля с учетом их жесткости и диссипативности .....	126
<i>Л. С. Тетерюкова, В. Л. Комар, Д. О. Тетерюков.</i> Кинематический расчет рычажных механизмов на ЭВМ методом замкнутых векторных контуров .....	131
<i>В. Ф. Коренский, Е. В. Вольнец.</i> Единый метод определения подвижности механизмов. ....	135
<i>В. Ф. Кондратюк, В. А. Цыбулько, Д. П. Сологуб.</i> К вопросу определения деформаций рам мобильных машин .....	138
<i>Е. Н. Левковский.</i> Моделирование движения автономного робота на основе уравнений Эйлера-Лагранжа .....	140

<i>С. И. Русан.</i> Структурный анализ и синтез статически определимых систем в разделе «Статика» .....	152
<i>А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев.</i> Метод разрывных возмущений в исследовании динамической устойчивости упруговязкопластических сред .....	158
<i>Ю. В. Чигарев.</i> Моделирование устойчивости сложных агроэкосистем ...	161
<i>О. В. Жихарев.</i> Инверсия и преобразование Кельвина в пространственных задачах теории упругости .....	166
<i>Т. А. Емельянова.</i> Дифференциальные уравнения свободных колебаний трехслойной оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. ....	170
<i>А. А. Хмелев, В. А. Сидоров.</i> Анализ хрупких разрушений конструкций из углеродистых сталей с помощью диаграмм хрупковязкого состояния .....	182
<i>Е. А. Мойсейчик.</i> Механизм зарождения трещин при растяжении образцов с вырезами .....	186
<i>Е. А. Белоус.</i> Влияние разбросов свойств компонентов деградирующей композиционной среды на эффективные упругие модули .....	188
<i>О. Н. Скляр.</i> Разделение переменных для уравнений с переменными коэффициентами .....	194
<i>Т.М. Мартыненко.</i> Безизгибные формы тонкостен оболочных конструкций, учитывающие их деформации по толщине .....	197
<i>С. М. Босяков.</i> Исследование динамических процессов в кубически анизотропных телах методом характеристик .....	201
<i>Е. Ю. Василевич, В. Г. Шепелевич.</i> Изменение структуры и физико-механических свойств быстрозатвердевших фольг сплавов алюминия с никелем и марганцем .....	205
<i>Д. В. Лисовский, Л.И. Шадурская, В. Б. Яржембицкий.</i> Контурный детектор на основе координатно-чувствительного фотоприемника. принципы преобразования и восстановления изображений .....	208
<i>Р. И. Воробей, О. К. Гусев, В. П. Киреенко, А. К. Тявловский, К. Л. Тявловский, В. Б. Яржембицкий.</i> Автоматическая диагностика средств измерений параметров жидких сред .....	213
<i>Р.И. Воробей, О.К. Гусев, В.П. Киреенко, А.К. Тявловский, К.Л. Тявловский, В.Б. Яржембицкий.</i> Расчет метрологических характеристик средств измерений концентрации водных растворов кислот и щелочей .....	218
<i>Э. Камински, Я. Р.Камински, Ю. В. Чигарев, И. С.Крук, Д. Г.Зубович.</i> Комбинированные агрегаты в системе предпосевной подготовки почвы .....	224

<i>Ян Р. Камински, Ю.В. Чигарев, В.П. Кругленя, И.С. Крук. Перспективные направления в развитии средств механизации для защиты посевов сельскохозяйственных культур</i> .....	228
<i>Э. Камински, Ян Р. Камински. Сельскохозяйственные машины показанные на выставке Агромек '98 в г. Хернинг–Дания</i> .....	231
<i>Ян Р. Камински, Валентина П. Кругленя. Машины для внесения удобрений и защиты растений показанные на выставке в Торговом Центре г. Кельне 1998 г.</i> .....	240

Научное издание

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
И ПРИКЛАДНАЯ  
МЕХАНИКА**

*Межведомственный сборник  
научно-методических статей*

Ответственный за выпуск А. П. Аношко

Сдано в набор 23.06.2002. Подписано в печать 15.07.2002.  
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. 14,7. Уч.-изд. л. 12,5. Тираж 300 экз. Зак. 1075.

Издательство УП «Технопринт», ЛВ № 380 от 29.04.1999  
Отпечатано на УП «Технопринт», ЛП № 203 от 26.01.1998  
220027, Минск, пр-т Ф. Скорины, 65, корп. 14, оф. 215, тел. 231-86-93