УДК 539.3

В.А. АКИМОВ, канд. физ.-мат. наук; С.В. ГОНЧАРОВА
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

МЕТОД ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ ФОРМЫ РЕШЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Формальное решение задачи об упругом параллелепипеде, когда на границе отсутствуют касательные нагрузки и заданы равные на параллельных гранях нормальные нагрузки, впервые предложено Ламе[1]. Решение указанной задачи Ламе свел, пользуясь методом Фурье, к решению бесконечной алгебраической системы уравнений, которая, однако, не была исследована. Таким образом, при использовании метода Ламе является обязательным специальное исследование решения. В частности, одно из таких исследований, проведенных Э.Н. Байдой[2], было основано на двухстороннем преобразовании Лапласа. В этой же статье впервые сделана попытка на конкретном примере показать возможность успешного использования метода обратного оператора к построению замкнутой формы решения одной частной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Таким образом, операторный метод решения задач теории упругости[3] получил еще одно свое новое применение.

Ключевые слова: *теория упругости, упругий параллелепипед, бесконечная СЛАУ, обратный оператор, замкнутая форма решения*

Введение. Для построения аналитических решений задач деформирования упругих тел, конечных размеров канонической формы в различных системах координат с успехом используется метод суперпозиции. В его основе лежит предложенный Ламе в 1952 году подход к построению общего решения граничной задачи линейной теории упругости в виде суммы ее частных решений, каждое из которых обладает достаточным функциональным произволом для полного удовлетворения граничным условиям на двух противоположных гранях упругого тела [1]. Для плоских и пространственных задач в прямоугольных системах координат частные решения могут быть взяты в виде тригонометрических рядов с неизвестными коэффициентами. В этом случае метод суперпозиции сводит решение граничной задачи теории упругости к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов рядов.

Достаточно простой с идейной стороны метод не получил широкого распространения в связи с трудоемкой процедурой построения и решения бесконечной СЛАУ. Но по прошествии полувека он с успехом был использован русскими учеными Б.М. Кояловичем (1902) и И.Г. Бубновым (1914) для решения задачи изгиба защемленной по контуру прямоугольной пластины. Более того, Кояловичем в 1930 году были проведены исследования по теории бесконечных СЛАУ [4], которые позволили даже в условиях ручного счета получить полное решение некоторых задач теории упругости.

С начала 50-х годов XX столетия интерес к использованию и развитию метода суперпозиций снова возрастает. Б.Л. Абрамян впервые устанавливает регулярность бесконечных систем для задач с заданными на границе напряжениями [5], что можно рассматривать как обоснование использования методов простой редукции и последовательных приближений для решения бесконечных СЛАУ при любых типах граничных условий (с учетом исследований Кояловича).

В настоящее время метод суперпозиции продолжает усиленно разрабатываться и интенсивно применяться при решении задач теории упругости для тел прямоугольной формы, о чем свидетельствуют публикации последних лет [6, 7] и другие. Хорошо известны также работы представителей украинской школы ученых В.Т. Гринченко и А.Ф. Улитко, на которых в научной литературе по теории упругости имеются многочисленные ссылки и о которых, кстати, упоминается в [6, 7]. Традиционно пристального внимания заслуживают и работы ленинградских (ныне санкт-петербургских) ученых. Данная работа самым тесным образом пересекается с работой одного из них, а именно Э.Н. Байдой [2], и по существу является сближением различных научных подходов [3].

Обратимся к бесконечной системе вида

$$a_n - \frac{2n}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{th\frac{k\pi}{2}}{n^2-k^2}\left[1-(1)^{k+n}\right] = b_n. \tag{1}$$

Заменим (1) функциональным соотношением от аргумента с непрерывным спектром значений. Запишем разложение

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx - \sum_{k=1}^{\infty} a_k th\frac{k\pi}{2}\cos kx. \tag{2}$$

После сравнения коэффициентов Фурье левой и правой частей равенства (2) придем к уравнению (1), устанавливая тем самым равноценность (1) и (2).

Множитель $th\frac{k\pi}{2}\cos kx$ во втором слагаемом равенства (2) представим так:

$$th\frac{k\pi}{2}\cos kx = tg\frac{\pi d_x}{2}\sin kx, \tag{3}$$

где символ d_x имеет смысл производной по x т. е. $d_x \equiv \frac{d}{dx}$.

Чисто формально результат (3) можно получить, пользуясь разложением $tg\frac{\pi d_x}{2}$ в ряд Маклорена:

$$tg\frac{\pi d_x}{2}=\frac{\pi}{2}\frac{d}{dx}+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\frac{d^3}{dx^3}+\frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5\frac{d^5}{dx^5}+\cdots.$$

После чего найдем

$$tg\frac{\pi d_x}{2}\sin kx=\cos kx[\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{k\pi}{2}\right)^3+$$
$$+\frac{2}{15}\left(\frac{k\pi}{2}\right)^5-\cdots]=th\frac{k\pi}{2}\cos kx.$$

Принимая во внимание соотношение (3), разложение (2) запишем таким образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx=\left(1-tg\frac{\pi d_x}{2}\right)\sum_{r=1}^{\infty}a_k\sin kx.$$

Тогда

$$\left(1-tg\frac{\pi d_x}{2}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kx.$$

Запишем известное соотношение

$$\frac{1}{1-tg\frac{\pi d_x}{2}}=1+tg\frac{\pi d_x}{2}+tg^2\frac{\pi d_x}{2}+tg^3\frac{\pi d_x}{2}=$$
$$=\left(1+tg^2\frac{\pi d_x}{2}+tg^4\frac{\pi d_x}{2}+\ldots\right)+$$
$$+tg\frac{\pi d_x}{2}\left(1+tg^2\frac{\pi d_x}{2}+tg^4\frac{\pi d_x}{2}+\ldots\right).$$

На основании тождеств

$$tg\frac{\pi d_x}{2}\sin kx=th\frac{k\pi}{2}\cos kx;$$
$$tg\frac{\pi d_x}{2}\cos kx=-th\frac{k\pi}{2}\sin kx \qquad (4)$$

выведем формулы

$$tg^2\frac{\pi d_x}{2}[\sin kx]=-th^2\frac{k\pi}{2}\sin kx;$$
$$tg^4\frac{\pi d_x}{2}[\sin kx]=th^4\frac{k\pi}{2}\sin kx,$$

используя которые, нетрудно установить:

$$(1+tg^2\frac{\pi d_x}{2}+tg^4\frac{\pi d_x}{2}+\cdots)[\sin kx]=$$
$$=(1-th^2\frac{k\pi}{2}+th^4\frac{k\pi}{2}-\cdots)\sin kx=\frac{1}{1+th^2\frac{k\pi}{2}};$$

$$tg\frac{\pi d_x}{2}(1+tg^2\frac{\pi d_x}{2}+tg^4\frac{\pi d_x}{2}+\cdots)[\sin kx]=$$
$$=th\frac{k\pi}{2}(1-th^2\frac{k\pi}{2}+th^4\frac{k\pi}{2}-\cdots)\cos kx=\frac{th\frac{k\pi}{2}}{1+th^2\frac{k\pi}{2}}\cos kx.$$

В результате получим:

$$\left(1-tg\frac{\pi d_x}{2}\right)^{-1}[\sin kx]=$$
$$=\frac{th\frac{k\pi}{2}}{1+th^2\frac{k\pi}{2}}\cos kx+\frac{1}{1+th^2\frac{k\pi}{2}}\sin kx.$$

Преобразовывая коэффициенты при $\cos kx$ и $\sin kx$, будем иметь:

$$\frac{th\frac{k\pi}{2}}{1+th^2\frac{k\pi}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2th\frac{k\pi}{2}}{1+th^2\frac{k\pi}{2}}=\frac{1}{2}th\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}thk\pi;$$

$$\frac{1}{1+th^2\frac{k\pi}{2}}=\frac{\left(1+th^2\frac{k\pi}{2}\right)-th^2\frac{k\pi}{2}}{1+th^2\frac{k\pi}{2}}=1-\frac{th^2\frac{k\pi}{2}}{1+th^2\frac{k\pi}{2}}=$$
$$=1-\frac{1}{2}thk\pi th\frac{k\pi}{2}=\frac{2chk\pi ch\frac{k\pi}{2}-shk\pi sh\frac{k\pi}{2}}{2chk\pi ch\frac{k\pi}{2}}= \qquad (5)$$
$$=\frac{2chk\pi ch\frac{k\pi}{2}+chk\pi ch\frac{k\pi}{2}-shk\pi sh\frac{k\pi}{2}}{2chk\pi ch\frac{k\pi}{2}}=$$
$$=\frac{2chk\pi ch\frac{k\pi}{2}+chk\pi ch\frac{k\pi}{2}}{2chk\pi ch\frac{k\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{chk\pi}\right),$$

В результате получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kx=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\left(1+\frac{1}{chk\pi}\right)\sin kx+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}b_k thk\pi\cos kx.$$

Если левую и правую часть равенства (5) умножить на $\sin kx$ и проинтегрировать от 0 до π, то окончательно находим:

$$a_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{chk\pi}\right)b_n+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{thk\pi}{n^2-k^2}[1-(1)^{n+k}]. \qquad (6)$$

Построенное решение необходимо проверить.

Подействуем оператором $\left(1-tg\frac{\pi d_x}{2}\right)$ на левую и правую часть решения (5), учитывая при этом (3), (4). После выполнения несложных операций придем к исходной форме разложения (2), эквивалентной системе (1), при этом нужно учесть тождества

$$1+\frac{1}{chk\pi}+thk\pi th\frac{k\pi}{2}\equiv 2;$$
$$thk\pi-th\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{chk\pi}th\frac{k\pi}{2}\equiv 0.$$

Таким образом, решение (6) тождественно удовлетворяет системе (1).

Отметим, что рассматриваемая бесконечная система (1) имеет отношение не только к теории упругости, но также и к одной задаче теории фильтрации. Поэтому справедливо указать на прикладное значение полученного результата. Кроме того, в этой статье впервые был найден и применен в теории упругости обратный оператор $\left(1-tg\frac{\pi d_x}{2}\right)^{-1}$, расширяющий возможности операторного метода [3].

В заключении можно отметить тот факт, что исследования в данной области еще далеки от своего завершения и, возможно, появятся новые идеи и будут разработаны новые математические методы применения принципа суперпозиций с использованием бесконечных СЛАУ. Математическая теория упругости является своего рода научной платформой для обсуждения различных подходов к решению актуальных теоретических и практических задач прикладной теории упругости.

Список литературы

1. Lame, G. Lecons sur la théorie mathématique de l'élasticite des corps solides / G. Lame. — Paris: Bachelier, 1852. — 335 p.
2. Байда, Э.Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. — 232 с.
3. Акимов, В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. — Минск: Технопринт, 2003. — 101 с.
4. Коялович, Б.М. Исследования о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений / Б.М. Коялович // Изв. Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1930. — № 3. — С. 41–167.
5. Абрамян, Б.Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра / Б.Л. Абрамян // Докл. АН АрмССР. — 1954. — Т. 19, № 1. — С. 3–12.
6. Папков, С.О. Бесконечные системы линейных уравнений в случае первой основной граничной задачи для прямоугольной призмы / С.О. Папков // Динамические системы. — 2010. — Вып. 28. — С. 89–98.
7. Матросов, А.М. Численно-аналитическое решение граничной задачи деформирования линейно-упругого анизотропного прямоугольника / А.М. Матросов // Вестн. СПбГУ. Сер.10. — 2007. — Вып. 2. — С. 55–65.

Akimov V.A., Goncharova S.V.

The inverse operator method to construct a closed form solution of an infinite system of linear algebraic equations

The formal solution of the problem of elastic parallelepiped, when there are no boundary shear stress, and the normal load set equal to the parallel edges , first was proposed in 1852 by Lama. Lama reduced this task using the method of Fourier to solve an infinite system of algebraic equations, which, however, was not been investigated. Thus, using the Lame method requires a special study solutions. In particular, one of such studies, conducted by E.N. Biden was based on a bilateral Laplace transform. In this article, there was the first attempt to show the possibility of successful use of the method of the inverse operator to the construction of closed form solutions of a private infinite system of linear algebraic equations (SLAE) on a specific example.

Поступил в редакцию 01.08.2016.