

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к контрольным (расчетно-графическим) работам  
по теории упругости и пластичности  
для студентов специальностей 1-70 03 01 «Автомобильные дороги»  
и 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

М и н с к 2 0 0 3

УДК 539.3(075.8)

ББК 22.251 я7

Ш 37

Методические указания содержат краткие сведения по некоторым разделам теории упругости - исследование напряженно-деформированного состояния в точке, изгиб пластинок на упругом основании, численные методы (МКЭ) решения задач теории упругости, а также контрольные задания, план решения и пример выполнения задания.

Методические указания предназначены для студентов специальностей «Дорожное строительство» и «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены» очной и заочной форм обучения с целью восполнить недостаток этих сведений в учебной литературе по теории упругости и пластичности.

Составители:

Л.И.Шевчук, О.Л.Вербицкая, А.Е.Кончиц

Рецензенты:

Л.Р.Мытько, П.В.Шишлаков

© Шевчук Л.И., Вербицкая О.Л.,  
Кончиц А.Е., составление 2003

## **В в е д е н и е**

Теория упругости и пластичности является одним из разделов механики твердого деформируемого тела и рассматривает задачи о действии сил (температуры) на упругое тело с целью определения возникающих при этом напряжений и деформаций. В отличие от сопротивления материалов, в теории упругости используется более строгая постановка задач и применяются более точные методы их решения. Однако, точная постановка задач и использование сложного математического аппарата не всегда позволяют получить решение в виде аналитического выражения (формулы), как это удается сделать в сопротивлении материалов. Поэтому в последнее время для решения задач теории упругости все чаще стали использоваться численные методы, позволяющие получать решения для многих задач, имеющих большое практическое значение. Это задачи на контактные напряжения, расчет балки-стенки, пластинок и оболочек различных геометрических форм, пространственных тел и др.

В методических указаниях предлагается задача по расчету прямоугольной пластинки (плиты) на упругом основании методом конечных элементов.

Даны краткие пояснения по исследованию напряженно-деформированного состояния в точке тела, по теории изгиба тонких пластин, по технологии метода конечных элементов, приведены данные к заданию и пример.

Методические указания составлены в соответствии с учебной программой дисциплины «Теория упругости и пластичности», утвержденной Советом Белорусского национального технического университета (протокол № 5 от 26 апреля 2002 г).

### **1. УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ (РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ) РАБОТЫ**

Для студентов очной формы обучения числовые данные к расчетно-графической работе задаются преподавателем. Числовые данные задания к контрольной работе студента заочной формы обучения определяются тремя последними цифрами личного номера (шифра) студента и первыми тремя буквами русского алфавита, которые располагаются под шифром. Цифры, обозначающие год



## 2. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

В механике твердого деформируемого тела различают внешние и внутренние силы. Внешние силы – это силы взаимодействия между отдельными телами. Внутренние силы – это силы взаимодействия между частями одного тела (элемента конструкции). Интенсивность внутренних сил измеряется напряжениями: полным, нормальным и касательным. В методических указаниях приняты следующие обозначения и знаки напряжений.

Нормальное напряжение обозначается буквой  $\sigma$  и имеет один индекс, совпадающий с обозначением той оси, параллельно которой направлено напряжение ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) (рис. 1). Нормальное напряжение считается положительным, если оно вызывает растяжение.

Касательное напряжение обозначается буквой  $\tau$  и имеет два индекса. Первый индекс совпадает с обозначением оси, параллельно которой направлено напряжение, а второй – совпадает с обозначением оси, которая является нормалью к площадке, где действует напряжение ( $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ) (см. рис. 1). Касательное напряжение считается положительным, если его направление и направление внешней нормали площадки, к которой оно приложено, одновременно совпадают или одновременно не совпадают с положительными направлениями соответствующих координатных осей.

Напряженное состояние в точке тела полностью определяется тензором напряжений  $T_\sigma$ , представляющим собой квадратную матрицу, содержащую напряжения, расположенные в строго определенном порядке:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В соответствии с законом парности касательных напряжений  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ;  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ;  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  тензор напряжений всегда симметричная матрица.

Через элементарную площадку, проведенную вблизи точки тела, передается внутренняя сила, характеризуемая полным напряжением  $\rho_v$ , которое может быть разложено на нормальную  $\sigma_v$  и касательную

$\tau_v$  составляющие (рис. 2). Положение наклонной площадки определяется направляющими косинусами ее внешней нормали  $v$

$$l = \cos(x, v); m = \cos(y, v); n = \cos(z, v). \quad (2)$$

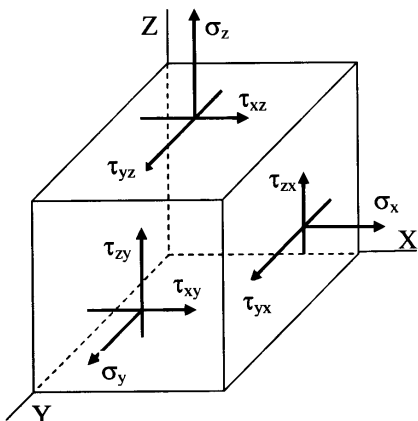


Рис. 1. Элементарный объем и напряжения на его площадках

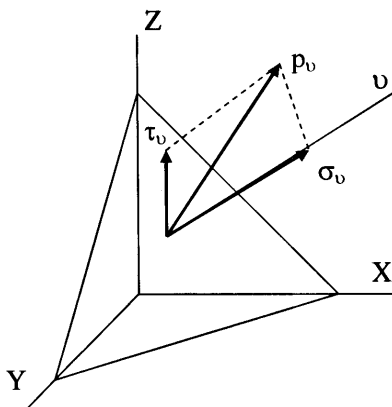


Рис. 2. Наклонная площадка и напряжения на ней

Из условия равновесия элементарного объема в форме тетраэдра (рис.2), можно получить зависимость проекций полного напряжения и напряжений, действующих на координатных площадках:

$$\begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти уравнения называют граничными условиями или условиями на поверхности тела, так как их левые части могут рассматриваться и как проекции интенсивности нагрузки, приложенной к поверхности тела. Из курса сопротивления материалов известно, что всегда около некоторой точки тела можно найти три взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, а нормальные принимают экстремальные значения. Такие площадки и нормальные напряжения, действующие на них, называются

главными. Если наклонная площадка (рис.2) главная, то  $\tau_v = 0$ , а  $p_v = \sigma_v$ . Согласно уравнениям (3) имеем:

$$\begin{aligned} p_{xv} = p_v l &= \sigma_v l = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{yv} = p_v m &= \sigma_v m = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{zv} = p_v n &= \sigma_v n = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_v) l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0, \\ \tau_{yx} l + (\sigma_y - \sigma_v) m + \tau_{yz} n &= 0, \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma_v) n &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система однородных уравнений (5) имеет нулевое решение ( $l = 0, m = 0, n = 0, \sigma_v = 0$ ). Но условие  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  требует, чтобы система имела и ненулевые решения, а это возможно, если определитель будет равен нулю:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_v) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_v) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_v) \end{bmatrix} = 0. \quad (6)$$

Для удобства записи опустим индекс  $v$ . Развернем определитель (6) и получим кубическое уравнение следующего вида:

$$\sigma^3 - \sigma^I \sigma^2 + \sigma^{II} \sigma - \sigma^{III} = 0. \quad (7)$$

Корни кубического уравнения (7) и являются значениями главных напряжений, которые подчиняются по следующему условию:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Положение главных площадок, то есть их направляющие косинусы, определяются решением системы уравнений (5).

Коэффициенты  $\sigma^I$ ,  $\sigma^II$ ,  $\sigma^III$  кубического уравнения (7) не зависят от выбранной системы координатных осей и называются инвариантами тензора напряжений. Они могут быть выражены через элементы тензора напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma^I &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ \sigma^{II} &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}\tau_{yx} - \tau_{yz}\tau_{zy} - \tau_{zx}\tau_{xz}; \\ \sigma^{III} &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{yx}\sigma_z\tau_{xy} - \tau_{zy}\sigma_x\tau_{yz} - \tau_{xz}\sigma_y\tau_{zx}.\end{aligned}\quad (8)$$

В теории упругости выделяются еще и другие особенные площадки и напряжения. Площадки, равно наклоненные к направлениям главных напряжений, называются октаэдрическими площадками. Около точки тела можно провести восемь октаэдрических площадок, которые вместе образуют октаэдр. Нормальные и касательные напряжения, действующие на этих площадках, являются также инвариантами и называются октаэдрическими напряжениями. Они могут быть выражены через главные напряжения.

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma_m, \quad (9)$$

где  $\sigma_m$  – среднее напряжение,

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (10)$$

В некоторых случаях, при проверке наступления предельного состояния, в опасной точке конструкции используется так называемая «интенсивность напряжения», которая является инвариантой и выражается через октаэдрическое напряжение следующим образом:

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{oct}. \quad (11)$$

Л и т е р а т у р а: [1, §1.1, 1.2, 6.1-6.6], [2, §1.1, 1.2, 1.4-1.6, 11.2], [3, §2.01, 2.04-2.07, 2.09], [4, §1.1, 1.3, 1.4].



### 3. РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Тонкой пластинкой принято называть упругое тело призматической или цилиндрической формы с малой, по сравнению с ее генеральными размерами, толщиной. Отношение толщины пластинки к ее любому другому размеру должно быть не более  $1/10$ , а ожидаемые прогибы не превышать  $1/5$  ее толщины (рис. 3).

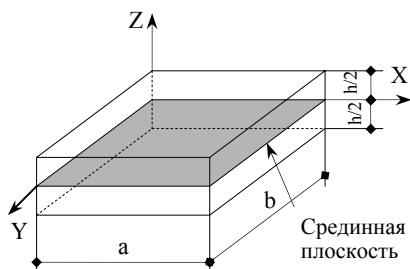


Рис. 3. Прямоугольная пластинка и ее срединная плоскость

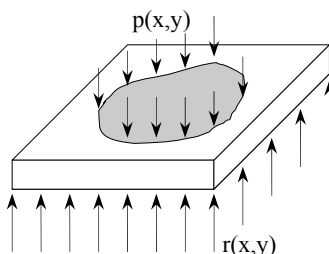


Рис. 4. Силы, приложенные к пластинке на упругом основании

Плоскость, параллельная поверхности пластинки и разделяющая ее толщину пополам, называется срединной плоскостью. В теории тонких пластин приняты следующие две гипотезы.

**Гипотеза прямолинейного элемента.** Совокупность точек, лежащих до деформации пластинки на какой-либо прямой, нормальной к срединной поверхности, остается на прямой, нормальной к упругой поверхности деформируемой пластинки.

**Статическая гипотеза.** Давление слоев пластинки, параллельных ее срединной поверхности, не учитывается.

Отметим, что эти гипотезы аналогичны гипотезам, принимаемым в курсе сопротивления материалов для балок – гипотеза плоских сечений и гипотеза об отсутствии давлений между слоями балки.

Координатные оси в плоскости срединной поверхности обозначаются буквами  $X$  и  $Y$ , а перемещения по их направлениям  $U$  и  $V$ . Ось, перпендикулярная к срединной поверхности пластинки обозначена буквой  $Z$ , а перемещения по ее направлению (прогиб) буквой  $W$ .

При расчете пластинки разрешающей функцией является функция, описывающая прогиб пластинки  $W(x, y)$ . Эта функция должна

удовлетворять уравнению Софи Жермен и граничным условиям по краям пластинки.

Различают три основных модели грунтового основания: модель Фусса-Винклера, модель в виде упругого полупространства и упругого слоя конечной толщины. Учитывая большую площадь опирания пластинки, используем модель Фусса-Винклера, которая отличается двумя признаками - осадка основания прямо пропорциональна нагрузке и осадка происходит только под нагрузкой. В этом случае для прямоугольной пластинки на упругом основании уравнение Софи Жермен имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{p(x, y) - r(x, y)}{D}, \quad (12)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластинки;

$p(x, y)$ ,  $r(x, y)$  – нагрузка и реактивное давление со стороны упругого основания, приложенные к пластинке.

Различают три вида закрепления пластинки: защемление, шарнирное закрепление и случай, когда край пластинки свободен. Рассмотрим граничные условия для всех трех случаев закрепления левого края пластинки  $x = 0$  (рис. 3).

Если край пластинки защемлен, то прогиб и угол поворота сечения равны нулю.

$$(W)_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=0} = 0. \quad (13)$$

При шарнирном опирании края пластинки ставится условие

$$(W)_{x=0} = 0, \quad (M_x)_{x=0} = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0. \quad (14)$$

Для свободного края пластинки условия имеют вид

$$(M_x)_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (15)$$

Если пластинка опирается на упругое основание, то контур пластинки свободен и условия на краях пластинки выражаются формулами (15).

В поперечном сечении пластинки появляется пять внутренних сил: изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$ , крутящий момент  $M_{xy}$  и поперечные силы  $Q_{zx}$ ,  $Q_{zy}$ . Изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  вызывают в поперечных сечениях пластинки нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , а скручивающий момент  $M_{xy}$  – касательные напряжения  $\tau_{xy}$ , направленные параллельно срединной плоскости (рис. 5):

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{J} z, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{J} z, \quad (16)$$

где  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  – изгибающие и крутящий моменты, приходящиеся на единицу ширины сечения;

$z$  – расстояние от срединной поверхности пластинки до точки, в которой вычисляются напряжения;

$J$  – момент инерции части сечения пластинки с шириной, равной единице,  $J = \frac{h^3}{12}$ .

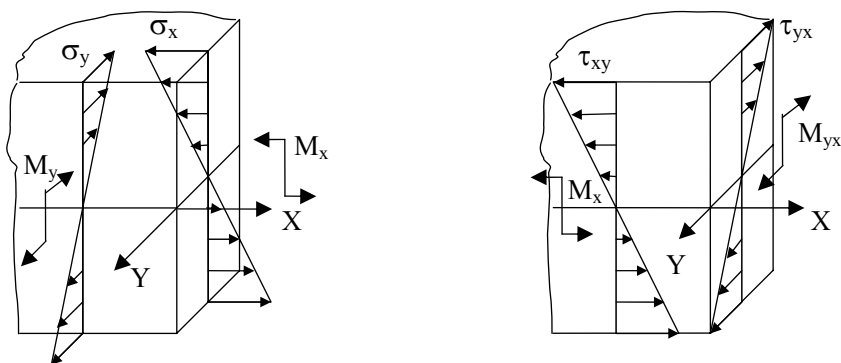


Рис. 5. Нормальные и касательные напряжения в поперечных сечениях пластинки от изгибающих и скручивающего моментов

Поперечные силы  $Q_{zx}$  и  $Q_{zy}$  вызывают касательные напряжения, действующие в сечениях с нормальными, соответственно,  $X$  и  $Y$  (рис. 6).

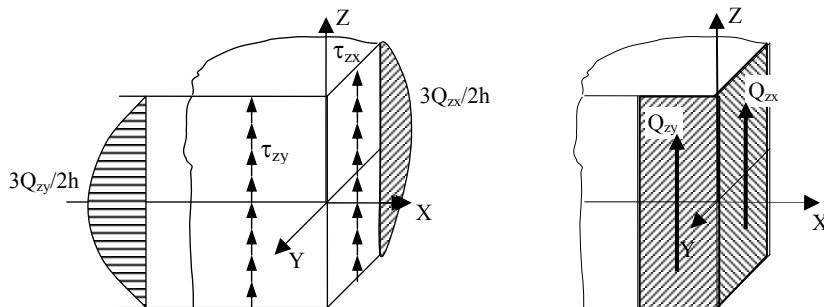


Рис. 6. Касательные напряжения в поперечных сечениях пластинки, вызванные поперечными силами

$$\tau_{zx} = \frac{Q_{zx} S_x}{J}; \quad \tau_{zy} = \frac{Q_{zy} S_y}{J}, \quad (17)$$

где  $S_x$  и  $S_y$  – статические моменты относительно осей  $X$  и  $Y$  части площади сечения пластинки с шириной равной единице, расположенной выше точки, в которой вычисляется касательное напряжение;

$Q_{zx}$  и  $Q_{zy}$  – поперечные силы, приходящиеся на ширину сечения, равную единице.

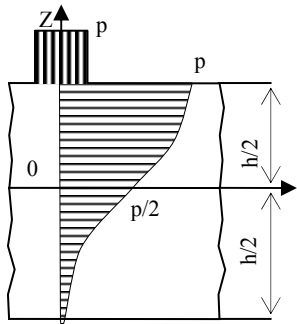


Рис. 7. Вертикальные нормальные напряжения от местной нагрузки

Кроме указанных выше напряжений в пластинке появляются нормальные напряжения  $\sigma_z$  от местной нагрузки, приложенной к ее верхней поверхности (рис. 7). Учитывая, что напряжение  $\sigma_z$  изменяется по закону кубической параболы, его значение можно вычислить по формуле (18)

$$\sigma_z = -p \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^2 \left( 3 - \frac{2z+h}{h} \right), \quad (18)$$

где  $p$  – интенсивность местной нагрузки;  
 $h$  – толщина пластинки;

$z$  – удаленность точки, в которой вычисляется напряжение, от срединной поверхности пластинки.

На нижнюю поверхность пластинки действует еще и реактивное давление со стороны основания, которое также вызывает напряжения. Эти напряжения могут быть вычислены по формуле (18), если ось  $Z$  направить вниз (рис. 7). Таким образом, формулы (16), (17) и (18) позволяют установить все напряжения в окрестности любой точки пластинки.

Л и т е р а т у р а: [1, §6.13], [2, §7.1-7.7, 10], [3, 15.01-15.05, 15.08], [4, §3.2.1-3.2.7], [6, §4.1-4.3]

#### 4. РАСЧЕТ ПЛАСТИНКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для многих задач теории упругости аналитических решений найти не удастся. К таким задачам относится и расчет пластинки на упругом основании. Поэтому в последнее время широко используются численные методы, среди которых самым распространенным является метод конечных элементов – МКЭ.

Метод конечных элементов обычно используется для варианта перемещений, так как это упрощает алгоритмизацию, что очень важно при составлении прикладных программ. Метод конечных элементов реализуется в вариационной постановке.

$$I(V) = \Pi - W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{f}^T \bar{V} d\Omega = 0 \quad (19)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия деформации;

$W$  – работа внешних сил;

$\bar{\sigma}$  – вектор напряжений;

$\bar{\varepsilon}$  – вектор деформаций;

$\bar{f}^T$  – вектор узловых сил;

$\bar{V}^T$  – вектор узловых перемещений.

То есть, МКЭ является методом нахождения минимума функционала (19). Основная концепция МКЭ заключается в дискретизации пластинки, которая расчленяется сеткой на конечные элементы (рис. 8). На полученной дискретной модели вводятся кусочно-

линейные функции  $\{\varphi_i(\bar{X})\}$ , определенные на каждом конечном элементе. Такие функции  $\varphi_i(\bar{X})$  называются координатными или аппроксимирующими. Искомая функция по области  $\Omega$ , то есть в пределах одного конечного элемента, может быть записана для прямоугольного элемента в следующем виде:

$$u(\bar{X}) = \sum_{i=1}^L \bar{V}_i \varphi_i(\bar{X}), \quad (20)$$

где  $L$  – общее количество степеней свободы, равное утроенному количеству узлов (равное 12 для прямоугольного КЭ);

$\bar{V}$  – вектор узловых перемещений, который формируется из перемещений узлов конечного элемента (рис. 9)

Таким образом, задача определения непрерывной функции  $u_i(\bar{X})$  сводится к определению значений конечного числа перемещений узлов модели, которые находятся из условия минимума функционала (19), то есть из системы линейных алгебраических уравнений

$$K\bar{V} = \bar{F}, \quad (21)$$

где  $\bar{V}$ ,  $\bar{F}$ ,  $K$  – векторы узловых перемещений, вектор узловых сил и матрица жесткости конечно-элементной модели.

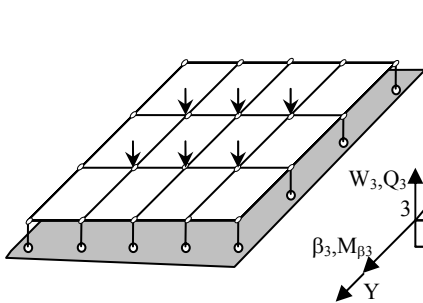


Рис. 8. Конечно-элементная модель прямоугольной пластинки на упругом основании

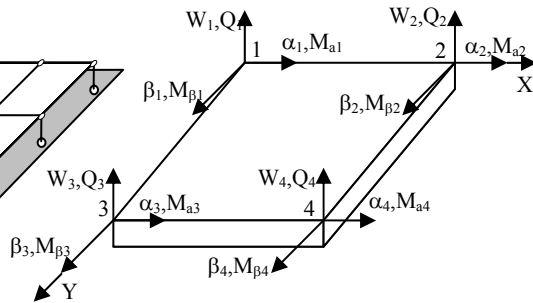


Рис. 9. Узловые перемещения и силы несовместного прямоугольного конечного элемента

Для расчета прямоугольной плиты на упругом основании используется прямоугольный несовместный конечный элемент, имеющий четыре узла и двенадцать степеней свободы (рис. 9). Основание Фусса-Винклера моделируется упругими вертикальными стержнями, которые одним концом шарнирно прикрепляются к узлам модели плиты, а другим - к неподвижной опоре (рис. 8). Жесткость этих стержней учитывается при формировании объединенной матрицы жесткости конечно-элементной системы.

Матрица жесткости  $K$  получается путем объединения матриц жесткости всех конечных элементов, составляющих численную модель. Для автоматизации объединения матриц жесткостей и векторов узловых сил в МКЭ используются три системы нумераций: нумерация конечных элементов; глобальная и местная нумерация узлов (рис. 10).

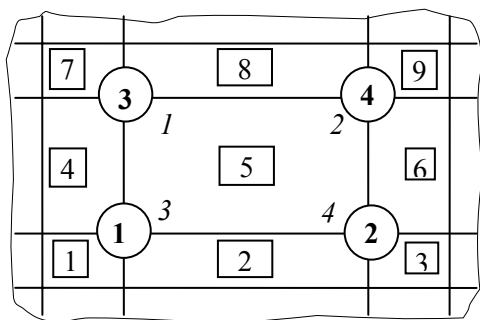


Рис. 10. Нумерация конечных элементов и узлов численной модели:  
 1, 2, 3, 4 – местные номера узлов пятого конечного элемента;  
 1, 2, 3, 4 – глобальные номера узлов, проставленные в кружках;  
 1, 2, ..., 9 – номера конечных элементов, проставленные в квадратах

Матрица жесткости прямоугольного конечного элемента является квадратной и содержит 12 строк и 12 столбцов. При ее формировании для каждого конечного элемента предварительно строят геометрическую матрицу и матрицу физических коэффициентов, а затем их перемножают.

$$K_i = B_i^T D_i B_i, \quad (22)$$

где  $B$  – матрица геометрических параметров;  
 $D$  – матрица физических коэффициентов

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix},$$

где  $h$  – толщина пластинки;

$E$  – модуль упругости тела;

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$W$  – геометрическая функция, принятая для пластинки в виде (23):

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^4 (\varphi_{jw} W_j + \varphi_{j\alpha} \alpha_j + \varphi_{j\beta} \beta_j), \quad (23)$$

где  $\varphi_{jw}$ ,  $\varphi_{j\alpha}$ ,  $\varphi_{j\beta}$  – функции, подбираемые в каждом отдельном случае по предполагаемой форме изгиба конечного элемента.

Матрица жесткости  $K$  в МКЭ является сильно разреженной, так как в каждой ее строке число ненулевых элементов очень мало и составляет менее одного процента от всех элементов строки. Поэтому в прикладных программах, реализующих метод конечных элементов, применяется специальная технология операций над такими сильно разреженными матрицами: хранение, сложение, умножение на вектор, вычеркивание строк и столбцов, факторизация (приведение к треугольному виду). Применение такой технологии позволяет уменьшить требуемые затраты памяти и сократить время решения задачи. Решение системы уравнений (21) дает вектор узловых перемещений  $\bar{V}$ . Используя принятые системы нумерации (рис. 10), из вектора  $\bar{V}$  выделяют вектора узловых перемещений для каждого конечного элемента, содержащегося в численной модели  $\bar{V}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Вектор напряжений в каждом конечном элементе вычисляется по формуле

$$\bar{\sigma}_i = DB_i \bar{V}_i. \quad (24)$$



На кафедре «Сопrotивление материалов и теория упругости» БНТУ разработана программа *CROSS* на ПЭВМ для расчета пластинки на упругом основании. Результаты расчета, полученные с помощью этой программы (табл. ПЗ), использованы в качестве заданий для контрольной (расчетно-графической) работы по теории упругости.

Л и т е р а т у р а: [1, §8.1, §8.8- 8.10], [5, §2.1-2.3].

## 5. КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ ГУБЕРА-МИЗЕСА-ГЕНКИ

Оценка прочности деталей машин, элементов строительных и дорожных объектов осуществляется по критериям прочности (критериям предельного напряженно-деформированного состояния). Для этого вводятся гипотезы о преимущественном влиянии на прочность материалов того или иного фактора. Такие гипотезы называются механическими теориями прочности.

Критерий Губера-Мизеса-Генки предполагает, что опасное (предельное) состояние нагруженного тела определяется предельной величиной накопленной удельной энергии формoизменения. При этом полагается, что материал следует закону Гука вплоть до наступления предельного состояния.

Удельная потенциальная энергия изменения формы при простом растяжении равна

$$U_{fy} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_y^2, \quad (25)$$

а при сложном напряженном состоянии

$$U_{fy} = \frac{1+\nu}{3E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (26)$$

Приравнивая правые части выражения (25) и (26), получим условие наступления предельного состояния в опасной точке

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (27)$$

Это же условие можно получить также исходя из критерия постоянства октаэдрического касательного напряжения. Такая трактовка освобождает рассматриваемую теорию прочности от ограничений, связанных с областью применения закона Гука, и дает возможность устанавливать начало не только пластической деформации, но и разрушения.

Л и т е р а т у р а: [1, §10.1, 10.2], [3, §4.7], [7, §6.1, 6.2].

## 6. ДАННЫЕ И СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ (РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ) РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

На квадратную пластинку, опирающуюся на упругое основание Фусса-Винклера, действуют четыре вертикальные силы  $F$ , приложенные к расчетным точкам (рис. 11), в соответствии с табл. П2.

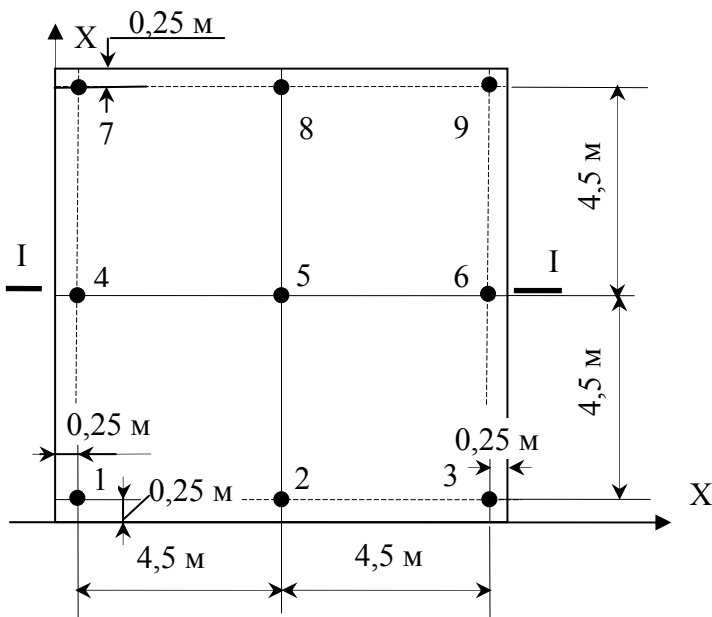


Рис. 11. Расчетные точки приложения нагрузки к пластинке

Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,25$ , размеры пластинки  $9,5 \times 9,5$  м, коэффициент жесткости основания  $k_0 = 10$  МН/м коэффициент запаса  $n_0 = 1,5$ , опасное напряжение  $\sigma_y = 20$  МПа, размеры площадки нагружения  $25 \times 25$  см принимаются одинаковыми для всех вариантов. Другие данные выбираются из табл. П1 и П2 по шифру студента (заочная форма обучения) или по указанию преподавателя.

**Требуется:**

1. Изобразить конечно-элементную модель пластинки и все расчетные точки.

2. Подготовить исходные данные и выполнить расчет пластинки по программе *CROSS*, получить карты изолиний  $V$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{xy}$ , сделать их анализ и выводы о деформации пластинки и характере распределения в ней внутренних сил (*только для студентов очной формы обучения*).

3. Используя результаты расчета пластинки, полученные программой *CROSS* (табл. 3), построить ее упругую поверхность, эпюры изгибающих и крутящего моментов в сечении I - I (рис. П1) и охарактеризовать их.

4. В окрестности одной из точек приложения сил  $F$  (на усмотрение студента) определить изгибающие и крутящие моменты, интенсивность давления и поперечные силы от местной нагрузки; вычислить нормальные и касательные напряжения и изобразить их эпюры.

5. В окрестности выбранной точки (п. 4) вблизи верхней поверхности пластинки вырезать элементарный объем, показать все напряжения на его площадках, установить вид напряженного состояния, найти главные напряжения и положение главных площадок.

6. Используя теорию прочности Губера-Мизеса-Генки, определить допустимое значение нагрузки  $F_{adm}$ .

ПРИЛОЖЕНИЯ  
Т а б л и ц а П I

Данные к контрольной (расчетно-графической) работе

Ва- ри- ант	Мо- дуль упру- гости пла- стинки $E$ , ГПа	Тол- щина пласт- тинки $t$ , см	Ва- ри- ант	Координаты расчетных точек									
				№ точ- ки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
				X, м	0,25	4,75	9,25	0,25	4,75	9,25	0,25	4,75	9,25
Y, м	0,25	0,25	0,25	4,75	4,75	4,75	9,25	9,25	9,25				
1	80	18	1		F	-	F	F	F	-	-	-	-
2	58	20	2		-	F	F	F	F	-	-	-	-
3	44	22	3		F	F	-	-	F	-	F	-	-
4	34	24	4		F	-	-	F	F	-	-	-	F
5	27	26	5		-	-	F	F	F	F	-	-	-
6	21	28	6		-	-	F	F	F	-	F	-	-
7	17	30	7		-	F	-	F	-	-	F	-	F
8	14	32	8		-	-	F	-	F	-	F	-	F
9	12	34	9		-	F	-	-	F	-	F	-	F
0	10	36	0		-	F	-	-	F	-	-	F	F
а			б										

Т а б л и ц а П 2

Значение силы  $F$ , приложенной к пластинке

Ва- риант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Сила $F$ , кН	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
в										

Прогибы, изгибающие и крутящий моменты в расчетных точках пластинки, полученные в результате расчета по программе *CROSS* на конечно-элементной сетке 20 x 20

Координаты точки приложения силы F		Величины	Координаты расчетных точек							
			X, м	0,25	1,75	3,25	4,75	6,25	7,75	9,25
$X_F, м$	$Y_F, м$		Y, м							
0,25	0,25	W, мм	0,25	40,09	18,48	5,67	0,73	-0,40	-0,30	0,03
		$M_x, кНм$		9,17	-94,48	-71,42	-32,26	-9,61	-1,49	-0,07
		$M_y, кНм$		9,17	-13,64	-7,86	-3,31	-1,12	-0,33	-0,17
		$M_{xy}, кНм$		70,58	69,98	31,75	11,66	3,63	0,39	0,17
		W, мм	4,75	0,73	-0,62	-1,19	-1,02	-0,59	-0,21	0,08
		$M_x, кНм$		-3,31	-12,96	-8,98	-2,71	0,62	0,92	0,10
		$M_y, кНм$		-32,26	-19,79	-8,91	-2,71	-0,25	0,27	0,24
		$M_{xy}, кНм$		11,34	9,37	3,70	0,10	-0,99	-0,88	-0,64
		W, мм	9,25	0,03	0,00	0,03	0,08	0,12	0,14	0,14
		$M_x, кНм$		-0,17	-0,60	-0,18	0,24	0,17	-0,21	-0,12
		$M_y, кНм$		-0,07	0,10	0,16	0,11	0,02	-0,05	-0,12
		$M_{xy}, кНм$		0,16	0,04	-0,35	-0,63	-0,64	-0,46	-0,18
4,75	0,25	W, мм	0,25	0,73	5,09	11,58	16,71	11,58	5,09	0,73
		$M_x, кНм$		-4,04	-22,62	-4,52	140,00	-4,51	-22,63	-4,04
		$M_y, кНм$		-3,78	-4,82	-6,36	6,67	-6,36	-4,82	-3,78
		$M_{xy}, кНм$		-4,89	-18,20	-36,79	-0,00	36,79	18,20	4,89
		W, мм	4,75	-1,22	-0,61	-0,24	-0,10	-0,24	-0,61	-1,22
		$M_x, кНм$		0,63	0,94	-0,30	-0,44	-0,30	0,94	0,63
		$M_y, кНм$		-1,24	-4,74	-9,19	-11,43	-9,19	-4,74	-1,24
		$M_{xy}, кНм$		-4,22	-3,40	-2,45	0,00	2,45	3,40	4,23
		W, мм	9,25	0,08	0,11	0,11	0,10	0,11	0,11	0,08
		$M_x, кНм$		0,11	0,35	0,03	-0,17	0,03	0,36	0,11
		$M_y, кНм$		0,16	0,05	0,00	-0,01	0,00	0,05	0,16
		$M_{xy}, кНм$		-0,13	-0,21	-0,12	0,00	0,12	0,21	0,13

Продолжение табл. ПЗ

Координаты точки приложения силы F		Величины	Координаты расчетных точек							
			X, м	0,25	1,75	3,25	4,75	6,25	7,75	9,25
$X_F, м$	$Y_F, м$		Y, м							
9,25	0,25	W, мм	0,25	0,03	-0,30	-0,40	0,73	5,67	18,48	40,09
		$M_x, кНм$		-0,07	-1,49	-9,61	-32,27	-71,42	-94,49	9,17
		$M_y, кНм$		-0,17	-0,33	-1,12	-3,31	-7,86	-13,64	9,17
		$M_{xy}, кНм$		-0,17	-0,99	-3,64	-11,66	-31,75	-69,98	-70,58
		W, мм	4,75	0,08	-0,21	-0,59	-1,02	-1,19	-0,62	0,73
		$M_x, кНм$		0,11	0,92	0,62	-2,71	-8,98	-12,96	-3,31
		$M_y, кНм$		0,24	0,27	-0,25	-2,71	-8,91	-19,79	-32,27
		$M_{xy}, кНм$		0,64	0,88	0,99	-0,10	-3,70	-9,37	-11,34
		W, мм	9,25	0,17	0,14	0,12	0,08	0,03	0,00	0,03
		$M_x, кНм$		-0,12	-0,20	0,17	0,24	-0,18	-0,60	-0,17
		$M_y, кНм$		-0,12	-0,05	0,02	0,10	0,16	0,10	-0,07
		$M_{xy}, кНм$		0,18	0,46	0,64	0,63	0,35	-0,04	-0,16
0,25	4,75	W, мм	0,25	0,73	-1,07	-1,58	-1,21	-0,65	-0,22	0,08
		$M_x, кНм$		-3,78	-12,85	-1,50	-1,24	1,50	1,28	0,16
		$M_y, кНм$		-4,04	-1,08	0,33	0,63	0,46	0,23	0,11
		$M_{xy}, кНм$		-4,08	-8,53	-7,13	-4,24	-1,96	-0,68	-0,14
		W, мм	4,75	16,71	6,52	1,49	-0,10	-0,29	-0,11	0,10
		$M_x, кНм$		6,67	-42,72	-28,73	-11,42	-2,61	-0,13	-0,01
		$M_y, кНм$		139,99	28,26	3,11	-0,44	-0,28	-0,06	-0,17
		$M_{xy}, кНм$		-0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		W, мм	9,25	0,73	-1,07	-1,58	-1,22	-0,65	-0,22	0,09
		$M_x, кНм$		-3,78	-12,85	-7,50	-1,24	1,50	1,28	0,16
		$M_y, кНм$		-4,04	-1,08	0,33	0,63	0,46	0,23	0,11
		$M_{xy}, кНм$		4,68	8,55	7,13	4,24	1,96	0,68	0,14
4,75	4,75	W, мм	0,25	-1,02	-0,53	-0,22	-0,10	-0,22	-0,33	-1,02
		$M_x, кНм$		0,66	1,56	1,47	1,92	1,47	1,56	0,66
		$M_y, кНм$		0,66	0,10	-0,60	-1,02	-0,60	0,10	0,66
		$M_{xy}, кНм$		1,01	2,44	2,30	0,00	-2,30	-2,44	-1,01
		W, мм	4,75	-0,10	1,50	3,90	5,94	3,90	1,50	-0,10
		$M_x, кНм$		-1,02	-6,36	3,00	78,03	3,00	-6,36	-1,02
		$M_y, кНм$		1,92	6,17	24,87	78,03	24,86	6,17	1,92
		$M_{xy}, кНм$		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		W, мм	9,25	-1,02	-0,53	-0,22	-0,10	-0,22	-0,53	-1,01
		$M_x, кНм$		0,66	1,56	1,47	1,92	1,47	1,56	0,66
		$M_y, кНм$		0,66	0,10	-0,60	-1,02	-0,60	0,10	0,66
		$M_{xy}, кНм$		-1,01	-2,44	-2,30	0,00	2,30	2,44	1,01

Продолжение табл. ПЗ

Координаты точки приложения силы F		Величины	Координаты расчетных точек							
			X, м	0,25	1,75	3,25	4,75	6,25	7,75	9,25
$X_{F_i}$ , м	$Y_{F_i}$ , м		Y, м							
9,25	4,75	W, мм M <sub>x</sub> , кНм M <sub>y</sub> , кНм M <sub>xy</sub> , кНм	0,25	0,08	-0,22	-0,65	-1,22	-1,58	-1,04	0,73
				0,16	1,28	1,50	-1,24	-7,50	-12,83	-3,78
				0,11	0,23	0,46	0,63	0,33	-1,08	-4,04
				0,14	0,69	1,96	4,24	7,14	8,53	4,68
		W, мм M <sub>x</sub> , кНм M <sub>y</sub> , кНм M <sub>xy</sub> , кНм	4,75	0,10	-0,11	-0,29	-0,10	1,49	6,52	16,71
				-0,01	-0,13	-2,61	-11,43	-28,73	-42,72	6,67
				-0,17	-0,06	-2,25	-0,44	3,12	28,27	140,00
				0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		W, мм M <sub>x</sub> , кНм M <sub>y</sub> , кНм M <sub>xy</sub> , кНм	9,25	0,08	-0,22	-0,65	-1,22	-1,58	-1,07	0,73
				0,16	1,28	1,50	-1,24	-7,50	-12,85	-3,78
				0,11	0,23	0,46	0,63	0,33	-1,08	-4,04
				-0,15	-0,68	-1,96	-4,24	-7,14	-8,53	-4,88
0,25	9,25	W, мм M <sub>x</sub> , кНм M <sub>y</sub> , кНм M <sub>xy</sub> , кНм	0,25	0,03	-0,00	0,03	0,08	0,12	0,14	0,17
				-0,17	-0,60	-0,18	0,24	0,17	-0,21	-0,12
				-0,07	0,10	0,16	0,10	0,02	-0,05	-0,12
				-0,16	-0,04	0,35	0,63	0,64	0,46	0,18
		W, мм M <sub>x</sub> , кНм M <sub>y</sub> , кНм M <sub>xy</sub> , кНм	4,75	0,73	-0,61	-1,19	-1,02	-0,59	-0,21	0,08
				-3,31	-12,96	-8,98	-2,71	0,62	0,92	0,10
				-32,26	-19,78	-8,90	-2,71	-0,25	0,27	0,24
				-11,34	-9,37	-3,70	-0,10	0,99	0,88	0,64
		W, мм M <sub>x</sub> , кНм M <sub>y</sub> , кНм M <sub>xy</sub> , кНм	9,25	40,08	18,47	5,66	0,73	-0,40	-0,30	0,03
				9,16	-94,50	-71,42	-32,26	-9,61	-1,50	-0,07
				9,16	-13,64	-7,66	-3,31	-1,12	-0,33	-0,17
				-70,58	-69,97	-31,74	-11,65	-3,63	-0,99	-0,17
4,75	9,25	W, мм M <sub>x</sub> , кНм M <sub>y</sub> , кНм M <sub>xy</sub> , кНм	0,25	0,08	0,11	0,11	0,10	0,11	0,11	0,08
				0,11	0,35	0,03	-0,17	0,03	0,36	0,11
				0,16	0,05	0,00	-0,01	0,00	0,05	0,16
				0,13	0,21	0,11	0,00	-0,12	-0,21	-0,13
		W, мм M <sub>x</sub> , кНм M <sub>y</sub> , кНм M <sub>xy</sub> , кНм	4,75	-1,22	-0,61	-0,24	-0,10	-0,24	-0,61	-1,22
				0,63	0,94	-0,30	-0,44	-0,30	0,94	0,63
				-1,24	-4,74	-9,18	-11,43	-9,18	-4,74	-1,24
				4,22	3,40	2,45	0,00	-2,45	-3,40	-4,22
		W, мм M <sub>x</sub> , кНм M <sub>y</sub> , кНм M <sub>xy</sub> , кНм	9,25	0,73	5,09	11,57	16,71	11,57	5,09	0,73
				-4,04	-22,63	-4,53	140,00	-4,52	-22,63	-4,04
				-3,78	-4,82	-6,36	6,67	-6,36	-4,82	-3,78
				4,89	18,20	36,79	0,00	-36,79	-18,20	-4,89

Координаты точки приложения силы F		Величины	Координаты расчетных точек							
			X, м	0,25	1,75	3,25	4,75	6,25	7,75	9,25
$X_F, м$	$Y_F, м$		Y, м							
9,25	9,25	W, мм	0,25	0,17	0,14	0,12	0,08	0,03	-0,00	0,03
		M <sub>x</sub> , кНм		-0,12	-0,20	0,17	0,24	-0,18	-0,61	-0,17
		M <sub>y</sub> , кНм		-0,12	-0,05	0,02	0,11	0,16	0,10	-0,07
		M <sub>xy</sub> , кНм		-0,18	-0,46	-0,64	-0,63	-0,35	0,04	0,16
		W, мм	4,75	0,08	-0,21	-0,59	-1,02	-1,19	-0,62	0,73
		M <sub>x</sub> , кНм		0,10	0,92	0,62	-2,71	-8,99	-12,96	-3,31
		M <sub>y</sub> , кНм		0,24	0,27	-0,25	-2,71	-8,91	-19,79	-12,27
		M <sub>xy</sub> , кНм		-0,64	-0,88	-0,99	0,10	3,700	9,37	11,24
		W, мм	9,25	0,03	-0,30	-0,40	0,73	5,87	18,48	40,09
		M <sub>x</sub> , кНм		-0,07	-1,49	-9,61	-32,27	-71,43	-94,49	9,17
		M <sub>y</sub> , кНм		-0,17	-0,33	-1,12	-3,31	-7,86	-13,64	9,17
		M <sub>xy</sub> , кНм		0,17	0,99	3,63	11,65	31,74	69,97	70,57



*(Пример оформления и выполнения задания)*

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА  
(расчетно-графическая работа)  
по теории упругости

«Расчет пластинки на упругом основании  
методом конечных элементов»

Шифр 832

Исполнитель  
Студент (ка)  
группы \_\_\_\_\_  
Ф. И. О. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Руководитель  
Ф.И.О. \_\_\_\_\_

Минск 200\_\_

Согласно шифру (заданию) дано.

На квадратную пластинку  $9,5 \times 9,5$  м, опирающуюся на упругое основание с коэффициентом жесткости  $k_0 = 10$  МН/м, действуют четыре силы  $F = 550$  кН (табл. П2), приложенные в расчетных точках 1, 2, 5, 7 (табл. П1).

Принимаем коэффициент Пуассона  $\nu = 0,25$ , опасное напряжение  $\sigma_{dan} = \sigma_y = 20$  МПа, площадку приложения нагрузки  $F$  квадратной со стороной 25 см. Модуль упругости и толщина пластинки соответственно равны  $E = 14$  ГПа и  $t = 32$  см (табл. П1).

### Р е ш е н и е

1. Изобразим конечно-элементную модель пластинки, все ее расчетные точки и нагрузку (рис. П1).

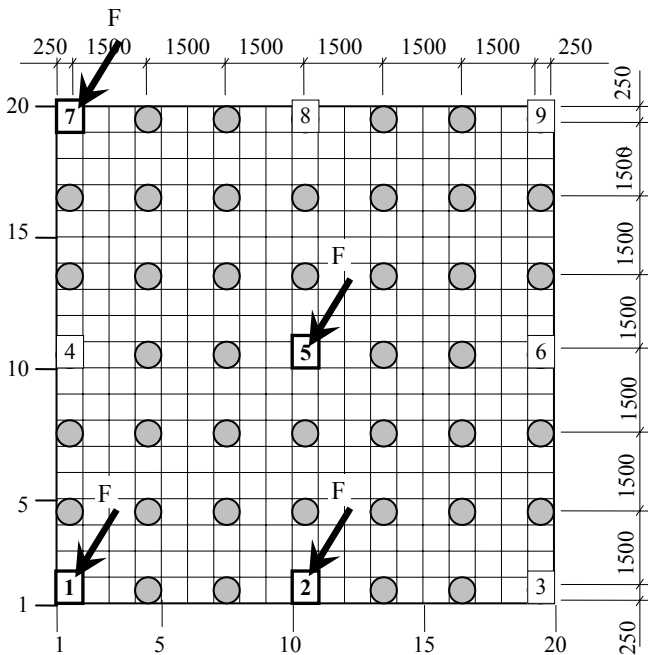


Рис. П1. Конечно-элементная модель пластинки, расчетные точки и нагрузка (жирно напечатанные номера расчетных точек, соответствуют местам приложения сил  $F$ )

2. Подготовим исходные данные для расчета пластинки по программе *CROSS* (только для студентов очной формы обучения).

Длина пластинки	9,5 м
Ширина пластинки	9,5 м
Количество узлов вдоль пластинки	20
Количество узлов поперек пластинки	20
Модуль упругости материала пластинки	14 ГПа
Коэффициент Пуассона материала пластинки	0,25
Толщина пластинки	32 см
Коэффициент жесткости основания	10 МН/м

Нагрузка  $F$ , приложенная к ячейке, распределяется по четырем соседним узлам, примыкающим к этой ячейке в виде сил, равных  $F/4 = 550/4 = 137,5$  кН.

Т а б л и ц а П4

Значения сил и их место приложения

Нагрузка, кН	Номер вертикали	Номер горизонтали	Нагрузка, кН	Номер вертикали	Номер горизонтали
137,5	1	1	137,5	10	10
137,5	2	1	137,5	11	10
137,5	1	2	137,5	10	11
137,5	2	2	137,5	11	11
137,5	10	1	137,5	1	19
137,5	11	1	137,5	2	19
137,5	10	2	137,5	1	20
137,5	11	2	137,5	2	20

В результате расчета пластинки на упругом основании по программе *CROSS* получены карты изолиний для прогибов пластинки, изгибающих и крутящих моментов в ее сечениях (рис. П2).

На основе анализа карт изолиний установлено:

- точки пластинки, расположенные в ее левой части, перемеща-

ются вниз, а расположенные в правой части – вверх; максимальный прогиб достигает 15 мм;

- наибольшие изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$  и скручивающие моменты  $M_{xy}$  появляются на верхнем и нижнем углах левой части пластинки и достигают 40 кНм.

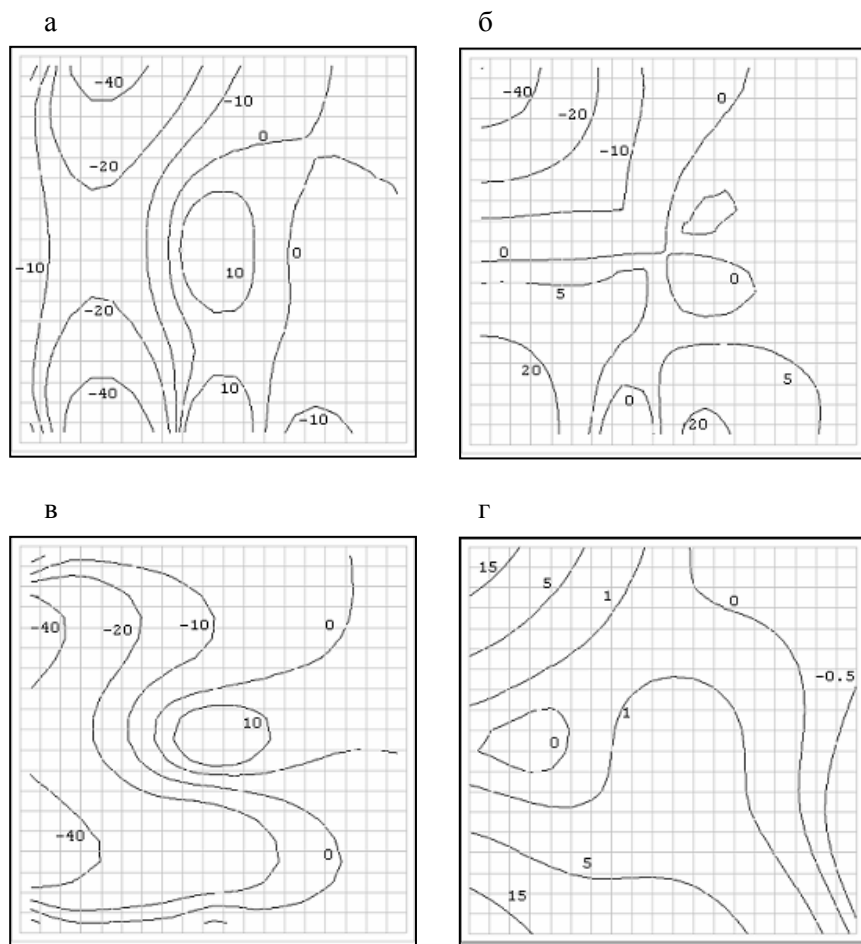


Рис. П2. Карты изолиний изгибающих моментов  $M_x$  – а, крутящих моментов  $M_{xy}$  – б, изгибающих моментов  $M_y$  – в, прогибов  $W$  – г

3. По результатам расчета пластинки, полученной программой CROSS (табл. ПЗ), построим ее упругую ось, эпюры изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и скручивающих моментов  $M_{xy}$  в сечении I – I (рис. ПЗ).

Учитывая принцип независимости действия сил и пользуясь данными табл. ПЗ, вычислим прогибы и моменты в расчетных точках сечения I – I, вызванные силами  $F = 550$  кН.

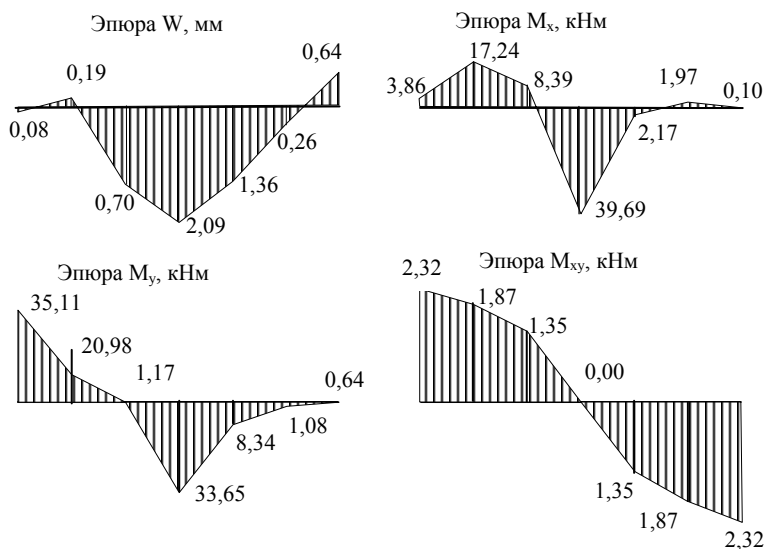


Рис. ПЗ. Эпюры прогибов  $W$ , изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и крутящих моментов  $M_{xy}$  в сечении I-I

$$W = \sum_{i=1}^4 \bar{W}_i \frac{F}{1000}; \quad M_x = \sum_{i=1}^4 \bar{M}_{xi} \frac{F}{1000}; \quad M_y = \sum_{i=1}^4 \bar{M}_{yi} \frac{F}{1000};$$

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^4 \bar{M}_{xyi} \frac{F}{1000},$$

где  $\bar{W}_i$ ,  $\bar{M}_{xi}$ ,  $\bar{M}_{yi}$ ,  $\bar{M}_{xyi}$  – данные из табл. ПЗ.

В точке  $x = 0,25$  м,  $y = 4,75$  м

$$W = (0,73 - 1,22 - 0,10 + 0,73) \times \frac{550}{1000} = 0,08 \text{ мм};$$

$$M_x = (-3,31 + 0,63 - 1,02 - 3,31) \times \frac{550}{1000} = -3,86 \text{ кНм};$$

$$M_y = (-32,26 - 1,24 + 1,92 - 32,26) \times \frac{550}{1000} = -35,11 \text{ кНм};$$

$$M_{xy} = (11,34 - 4,22 + 0,00 - 11,34) \times \frac{550}{1000} = -2,32 \text{ кНм}.$$

В точке ( $x = 1,75 \text{ м}$ ,  $y = 4,75 \text{ м}$ )

$$W = (-0,62 - 0,61 + 1,50 - 0,61) \times \frac{550}{1000} = 0,19 \text{ мм};$$

$$M_x = (-12,96 + 0,94 - 6,36 - 12,96) \times \frac{550}{1000} = -17,24 \text{ кНм};$$

$$M_y = (-19,79 - 4,74 + 6,17 - 19,78) \times \frac{550}{1000} = -10,04 \text{ кНм};$$

$$M_{xy} = (9,37 - 3,40 + 0,00 - 9,37) \times \frac{550}{1000} = -1,87 \text{ кНм}.$$

В точке ( $x = 3,25 \text{ м}$ ,  $y = 4,75 \text{ м}$ )

$$W = (-1,19 - 0,24 + 3,90 - 1,19) \times \frac{550}{1000} = 0,70 \text{ мм};$$

$$M_x = (-8,98 - 0,30 + 3,00 - 8,98) \times \frac{550}{1000} = -8,39 \text{ кНм};$$

$$M_y = (-8,91 - 9,19 + 24,87 - 8,90) \times \frac{550}{1000} = -1,17 \text{ кНм};$$

$$M_{xy} = (3,70 - 2,45 + 0,00 - 3,70) \times \frac{550}{1000} = -1,35 \text{ кНм}.$$

В точке ( $x = 4,75 \text{ м}$ ,  $y = 4,75 \text{ м}$ )

$$W = (-1,02 - 0,10 + 5,94 - 1,02) \times \frac{550}{1000} = 2,09 \text{ мм};$$

$$M_x = (-2,71 - 0,44 + 78,03 - 2,71) \times \frac{550}{1000} = 39,69 \text{ кНм};$$

$$M_y = (-2,71 - 11,43 + 78,03 - 2,71) \times \frac{550}{1000} = 33,65 \text{ кНм};$$

$$M_{xy} = (0,10 + 0,00 + 0,00 - 0,10) \times \frac{550}{1000} = 0 \text{ кНм.}$$

В точке ( $x = 6,25$  м,  $y = 4,75$  м)

$$W = (-0,59 - 0,24 + 3,90 - 0,59) \times \frac{550}{1000} = 1,36 \text{ мм;}$$

$$M_x = (0,62 - 0,30 + 3,00 + 0,62) \times \frac{550}{1000} = 2,17 \text{ кНм;}$$

$$M_y = (-0,25 - 9,19 + 24,86 - 0,25) \times \frac{550}{1000} = 8,34 \text{ кНм;}$$

$$M_{xy} = (-0,99 + 2,45 + 0,00 + 0,99) \times \frac{550}{1000} = 1,35 \text{ кНм.}$$

В точке ( $x = 7,75$  м,  $y = 4,75$  м)

$$W = (-0,21 - 0,61 + 1,50 - 0,21) \times \frac{550}{1000} = 0,26 \text{ мм;}$$

$$M_x = (0,92 + 0,94 - 6,36 + 0,92) \times \frac{550}{1000} = -1,97 \text{ кНм;}$$

$$M_y = (0,27 - 4,74 + 6,17 + 0,27) \times \frac{550}{1000} = 1,08 \text{ кНм;}$$

$$M_{xy} = (-0,88 + 3,40 + 0,00 + 0,88) \times \frac{550}{1000} = 1,87 \text{ кНм.}$$

В точке ( $x = 9,25$  м,  $y = 4,75$  м)

$$W = (0,08 - 1,22 - 0,10 + 0,08) \times \frac{550}{1000} = -0,64 \text{ мм;}$$

$$M_x = (0,10 + 0,63 - 1,02 + 0,10) \times \frac{550}{1000} = -0,10 \text{ кНм;}$$

$$M_y = (0,24 - 1,24 + 1,92 + 0,24) \times \frac{550}{1000} = 0,64 \text{ кНм;}$$

$$M_{xy} = (-0,64 + 4,23 + 0,00 + 0,64) \times \frac{550}{1000} = 2,33 \text{ кНм.}$$

По эпюрам (рис. П3) видно, что в сечении I-I наибольший прогиб  $W$  появляется в средней части пластинки и достигает 2,09 мм. Вблизи левого и правого краев наблюдается прогиб пластинки вверх, что указывает на возможный отрыв пластинки от основания. Большие изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  появляются в средней части пластинки, которые вызывают растяжение ее нижних слоев. Наибольшие крутящие моменты наблюдаются вблизи левого и правого краев пластинки, а в ее средней части они равны нулю.

4. К пластинке приложены четыре силы  $F = 550$  кН в расчетных точках:

$$1 - x_F = 0,25 \text{ м}, y_F = 0,25 \text{ м}; \quad 2 - x_F = 4,75 \text{ м}, y_F = 0,25 \text{ м};$$

$$5 - x_F = 4,25 \text{ м}, y_F = 4,25 \text{ м}; \quad 7 - x_F = 0,25 \text{ м}, y_F = 9,25 \text{ м}.$$

Вычислим изгибающие и крутящие моменты в этих точках от совместного действия всех четырех сил. Для этого используем результаты расчета пластинки по программе CROSS, приведенные в табл. П3.

В точке 1

$$M_x = (9,17 - 4,04 + 0,66 - 0,17) \cdot 550/1000 = 3,09 \text{ кНм/м};$$

$$M_y = (9,17 - 3,78 + 0,66 - 0,07) \cdot 550/1000 = 3,29 \text{ кНм/м};$$

$$M_{xy} = (70,58 - 4,89 + 1,01 - 0,16) \cdot 550/1000 = 36,60 \text{ кНм/м}.$$

В точке 2

$$M_x = (-32,26 + 140,00 + 1,92 + 0,24) \cdot 550/1000 = 60,44 \text{ кНм/м};$$

$$M_y = (-3,31 + 6,67 - 1,02 + 0,10) \cdot 550/1000 = 1,34 \text{ кНм/м};$$

$$M_{xy} = (11,66 + 0 + 0 + 0,63) \cdot 550/1000 = 6,76 \text{ кНм/м}.$$

В точке 3

$$M_x = (-2,71 - 0,44 + 78,03 - 2,71) \cdot 550/1000 = 39,70 \text{ кНм/м};$$

$$M_y = (-2,71 - 11,43 + 78,03 - 2,71) \cdot 550/1000 = 33,65 \text{ кНм/м};$$

$$M_{xy} = (0,10 + 0 + 0 - 0,10) \cdot 550/1000 = 0 \text{ кНм/м}.$$

В точке 4

$$M_x = (-0,17 + 0,11 + 0,66 + 9,16) \cdot 550/1000 = 5,37 \text{ кНм/м};$$



$$M_y = (-0,07 + 0,16 + 0,66 + 9,16) \cdot 550/1000 = 5,45 \text{ кНм/м};$$

$$M_{xy} = (0,16 - 0,13 - 1,01 - 70,38) \cdot 550/1000 = -39,25 \text{ кНм/м}.$$

Выберем точку 2 и проведем исследование в ней напряженно-деформированного состояния. Определим давление местной нагрузки на поверхность пластинки, принимая площадку приложения нагрузки квадратной со стороной равной 0,25 см.

$$p = \frac{F}{a^2} = \frac{550 \cdot 10^3}{0,25 \cdot 0,25} = 8,80 \text{ МПа}.$$

Определим поперечные силы от местной нагрузки  $F$ :

$$Q_{zx} = Q_{zy} = \frac{F}{4a} = \frac{550 \cdot 10^3}{4 \cdot 0,25} = 550 \text{ кН/м}.$$

Найдем момент инерции сечения шириной в один метр:

$$J = \frac{t^3}{12} = \frac{32^3}{12} = 2731 \text{ см}^3.$$

Вычислим максимальные нормальные напряжения от изгибающих моментов, которые появляются в точке 2  $M_x = 60,44 \text{ кНм}$  и  $M_y = 1,34 \text{ кНм}$ .

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_x}{J} z_{\max} = \frac{M_x}{J} \frac{t}{2} = \frac{60,44 \cdot 10^3}{2731 \cdot 10^{-6}} \left( \frac{0,32}{2} \right) = 3,541 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{y \max} = \frac{M_y}{J} z_{\max} = \frac{M_y}{J} \frac{t}{2} = \frac{1,34 \cdot 10^3}{2731 \cdot 10^{-6}} \left( \frac{0,32}{2} \right) = 0,078 \text{ МПа}.$$

Вычислим касательные напряжения от крутящего момента в точке 2  $M_{xy} = 6,67 \text{ кНм}$ :

$$\tau_{xy \max} = \frac{M_{xy}}{J} z_{\max} = \frac{M_{xy}}{J} \frac{t}{2} = \frac{6,67 \cdot 10^3}{2731 \cdot 10^{-6}} \left( \frac{0,32}{2} \right) = 0,396 \text{ МПа}.$$

Определим максимальное нормальное напряжение от местной нагрузки

$$p = 8,80 \text{ МПа}, \quad \sigma_z = -p = -8,800 \text{ МПа}.$$

Вычислим максимальное касательное напряжение, вызванное поперечными силами  $Q_{zx}$  и  $Q_{zy}$ :

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \frac{Q_{zx} S_y}{J} = \frac{3Q_{zx}}{2t} = \frac{3 \cdot 550 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,32} = 2,578 \text{ МПа}.$$

Построим эпюры нормальных и касательных напряжений, вызванных внутренними силами в рассматриваемой расчетной точке 2.

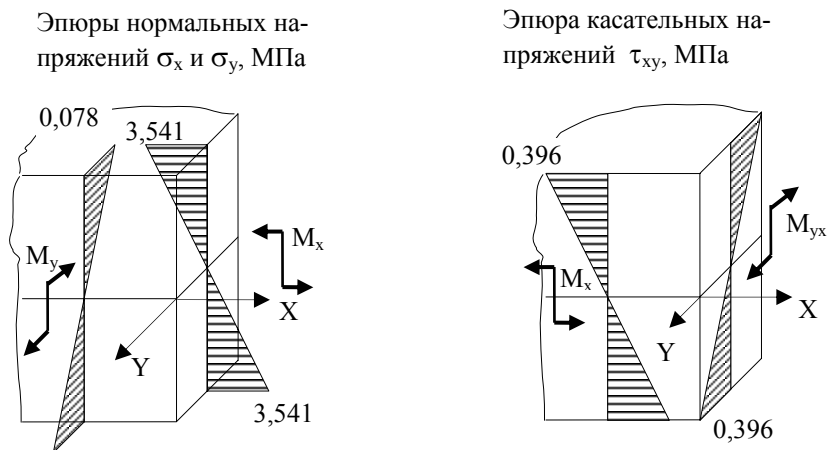


Рис. П4. Нормальные и касательные напряжения в поперечных сечениях пластинки от изгибающих и скручивающего моментов

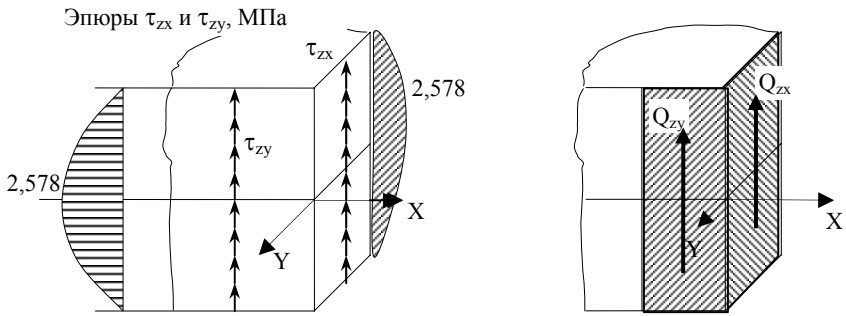


Рис. П5. Касательные напряжения  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zy}$  в поперечных сечениях пластинки в окрестности точки 2

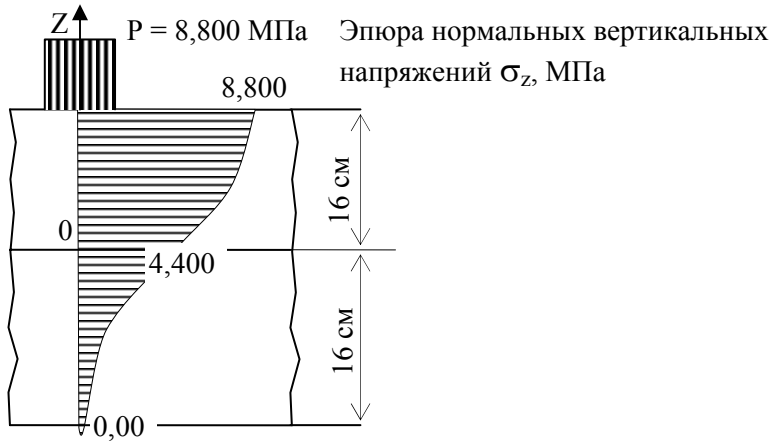


Рис. П6. Вертикальные нормальные напряжения от местной нагрузки

5. В окрестности выбранной точки 2 на верхней поверхности пластинки вырежем элементарный объем в форме кубика, покажем все напряжения, действующие на его площадках, и запишем тензор напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,541 & 0,396 & 0 \\ 0,396 & 0,078 & 0 \\ 0 & 0 & -8,800 \end{pmatrix}, \text{ МПа.}$$

На всех площадках элементарного объема действуют напряжения (рис. П7). Поэтому материал в окрестности исследуемой точки испытывает объемное напряженное состояние.

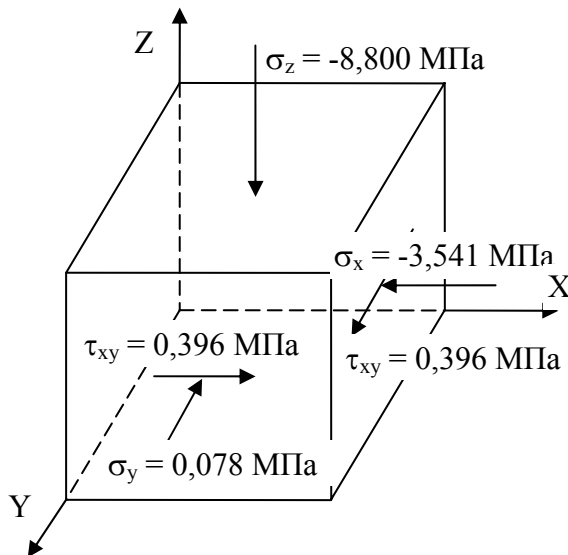


Рис. П7. Элементарный объем и напряжения на его площадках

Вычислим инварианты тензора напряжений:

$$\sigma^I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3,541 - 0,078 - 8,800 = -12,420;$$

$$\begin{aligned} \sigma^{II} &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy} \tau_{yx} - \tau_{yz} \tau_{zy} - \tau_{zx} \tau_{xz} = \\ &= -0,541 \cdot (-0,078) - 0,078 \cdot (-8,800) - 8,800 \cdot (-3,541) - \\ &\quad - 0,396^2 - 0 - 0 = 31,977; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{III} &= \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 = \\ &= -3,541 \cdot (-0,078) \cdot (-8,800) + 2 \cdot 0,396 \cdot 0 \cdot 0 + 3,541 \cdot 0^2 + \\ &\quad + 0,078 \cdot 0^2 + 8,800 \cdot 0,396^2 = -1,066. \end{aligned}$$

Решим кубическое уравнение (7)

$$\sigma^3 + 12,420\sigma^2 + 31,977\sigma - 1,066 = 0.$$

Сделаем подстановку  $\sigma = y + \frac{\sigma^3}{3}$  и приведем уравнение к виду

$$y^3 + 3py + 2q = 0.$$

Здесь новые коэффициенты равны:

$$p = \frac{1}{3} \left( \sigma^{\text{II}} - \frac{(\sigma^{\text{I}})^2}{3} \right) = \frac{1}{3} \left( 31,977 - \frac{12,420^2}{3} \right) = -6,481;$$

$$q = \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{27} (\sigma^{\text{I}})^3 + \frac{1}{3} \sigma^{\text{I}} \sigma^{\text{II}} - \sigma^{\text{III}} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left( -\frac{2}{27} (-12,420)^3 + \frac{1}{3} (-12,420) \cdot 31,977 + 1,066 \right) = 5,299.$$

Определим параметр  $r = \pm \sqrt[3]{|p|}$ , знак которого должен совпадать со знаком  $q$ :

$$r = +\sqrt[3]{6,481} = 2,5457.$$

Вычислим вспомогательный угол  $\varphi$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{q}{r^3}\right) = \arccos\left(\frac{5,299}{2,5457^3}\right) = 1,244.$$

Корни промежуточного уравнения равны

$$y_1 = -2r \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = -2 \cdot 2,5457 \cdot \cos\left(\frac{1,244}{3}\right) = -4,660;$$

$$y_2 = 2r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right) = 2 \cdot 2,5457 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1,244}{3}\right) = 4,106;$$

$$y_3 = 2r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right) = 2 \cdot 2,5457 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1,244}{3}\right) = 0,554.$$

Проверим решение промежуточного уравнения

$$y_1 + y_2 + y_3 = -4,660 + 4,106 + 0,554 = 0,000.$$

Вычислим значения главных напряжений

$$\sigma_{(1)} = y_1 + \frac{\sigma^1}{3} = -4,660 + \frac{-12,420}{3} = -8,800 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = y_2 + \frac{\sigma^1}{3} = 4,106 + \frac{-12,420}{3} = -0,034 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = y_3 + \frac{\sigma^1}{3} = 0,554 + \frac{-12,420}{3} = -3,586 \text{ МПа}.$$

Расставим индексы главных напряжений в соответствии с условием

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3; \sigma_1 = -0,034 \text{ МПа}; \sigma_2 = -3,586 \text{ МПа}; \sigma_3 = -8,800 \text{ МПа}.$$

Проверим полученные значения главных напряжений

$$\sigma^I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -0,034 - 3,586 - 8,800 = -12,420;$$

$$\begin{aligned} \sigma^{II} &= \sigma_1 \cdot \sigma_1 + \sigma_2 \cdot \sigma_2 + \sigma_3 \cdot \sigma_3 = \\ &= -0,034 \cdot (-3,586) - 3,586 \cdot (-8,800) - 8,800 \cdot (-0,034) = 31,978; \end{aligned}$$

$$\sigma^{III} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = -0,034 \cdot (-3,586) \cdot (-8,800) = -1,072 \cong -1,066.$$

Определим положение главных площадок. Так как на верхней (нижней) площадке касательные напряжения отсутствуют, то эта площадка и нормальное напряжение  $\sigma_3 = \sigma_z = -8,800$  МПа, действующее на ней, являются главными. Следовательно,  $l_3 = 0$ ,  $m_3 = 0$ ,  $n_3 = 1$ .

Найдем положение главной площадки, на которой действует  $\sigma_1 = -0,034$  МПа. Для этого воспользуемся первым уравнением системы (5), разделив его на  $m_1$ , и учтем, что  $n_1 = 0$  получим:

$$(\sigma_x - \sigma_1) \frac{l_1}{m_1} + \tau_{xy} = 0 \text{ или } (-3,541 + 0,034) \frac{l_1}{m_1} + 0,396 = 0.$$

Отсюда имеем  $\frac{l_1}{m_1} = 0,113$ . Учитывая, что  $l_1^2 + m_1^2 = 1$ , найдем направляющие косинусы:

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l_1}{m_1}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,113^2}} = 0,994;$$

$$l_1 = \left(\frac{l_1}{m_1}\right) \cdot m_1 = 0,113 \cdot 0,994 = 0,112.$$

Аналогично определим направляющие косинусы для площадки, где действует главное напряжение  $\sigma_2 = -3,586$  МПа:

$$l_2 = -0,994; \quad m_2 = 0,112; \quad n_2 = 0.$$

Проверим ортогональность (взаимноперпендикулярность) главных площадок.

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0,112 \cdot (-0,994) + 0,994 \cdot 0,112 + 0 \cdot 0 = 0;$$

$$l_2 \cdot l_3 + m_2 \cdot m_3 + n_2 \cdot n_3 = -0,994 \cdot 0,000 + 0,112 \cdot 0,000 + 0 \cdot 1 = 0;$$

$$l_3 \cdot l_1 + m_3 \cdot m_1 + n_3 \cdot n_1 = 0,000 \cdot (-0,112) + 0,000 \cdot 0,994 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Ортогональность соблюдается.

Покажем положение главных площадок в окрестности точки 2 (рис. П8).

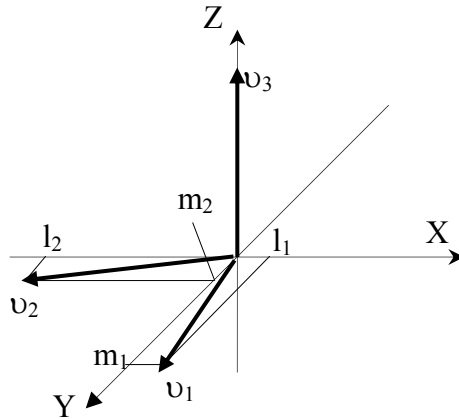


Рис. П8. Ориентация главных площадок в пространстве в окрестности точки 2

6. Используя теорию прочности Губера-Мизеса-Генки, определим допускаемую нагрузку  $F_{adm}$  из условия наступления предельного состояния в окрестности расчетной точки 2.

$$\sigma_{eqw} = \sigma_i = \sigma_{dan},$$

где  $\sigma_{dan}$  – опасное напряжение, соответствующее предельному состоянию материала, полученное при испытании на осевое растяжение  $\sigma_{dan} = \sigma_y = 20$  МПа;

$\sigma_i$  – интенсивность напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt[2]{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \\ &= \sqrt[2]{\frac{1}{2}[(-0,034 + 3,586)^2 + (-3,586 + 8,800)^2 + (-8,800 + 0,034)^2]} = \\ &= 7,637 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Вычислим допускаемую нагрузку:

$$F_{adm} = \frac{\sigma_{dan} \cdot F}{\sigma_i \cdot n_o} = \frac{20 \cdot 550}{7,637 \cdot 1,5} = 960 \text{ кН.}$$



## Л и т е р а т у р а

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. школа, 1990. – 400 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. школа, 1982.
3. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высш. школа, 1965. – 320 с.
4. Рочняк О.А., Федоров В.Г., Хвисевич В.М. Основы теории упругости: Учебное пособие для студентов строительных специальностей вузов. – Брест: Изд-во БГТУ, 2001. – 150 с.
5. Винокуров Е.Ф., Алявдин П.В., Шевчук Л.И. Метод конечных элементов: Методическое пособие к расчетно-проектировочной работе с использованием ЭВМ. – Мн.: БГПА, 1992. – 52 с.
6. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 818 с.
7. Писаренко Г.С., Яковлев А.Г., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 734 с.

## С о д е р ж а н и е

В в е д е н и е .....	3
1. Указания по выполнению контрольной (расчетно-графической) работы .....	3
2. Напряженное состояние в точке .....	5
3. Расчет тонких пластин на упругом основании. ....	9
4. Расчет пластинки методом конечных элементов. ....	13
5. Критерий прочности Губера-Мизеса-Генки. ....	17
6. Данные и содержание контрольной (расчетно-графической) работы по теории упругости. .	18
ПРИЛОЖЕНИЯ. ....	20
Л и т е р а т у р а. ....	41

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к контрольным (расчетно-графическим) работам  
по теории упругости и пластичности  
для студентов специальностей 1-70 03 01 «Автомобильные дороги»  
и 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

Составители: ШЕВЧУК Леонид Иванович  
ВЕРБИЦКАЯ Ольга Леонидовна  
КОНЧИЦ Анатолий Евгеньевич

Редактор В.В.Мохнач  
Компьютерная верстка Л.М.Чернышевич

---

Подписано в печать 06.06.2003.

Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.

Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 2,6. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 200. Заказ 270.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

Лицензия ЛВ №155 от 30.01.2003. 220013, Минск, проспект Ф.Скорины, 65.