

*Козунова Оксана Васильевна, старший преподаватель кафедры строительной механики Белорусского государственного университета транспорта, г. Гомель, Беларусь, соискатель кафедры строительной механики Белорусского национального технического университета, г. Минск, Беларусь*

***Нелинейный расчет балочных плит на слоистых основаниях с биогенными включениями***

***Nonlinear calculation of beam plats in laminated foundation with biogenic inclusions***

В данной статье предлагается вариационно-разностный подход к расчету упругих балочных плит (плоская деформация), расположенных на физически нелинейном слоистом основании с биогенными включениями. Особое внимание уделяется обоснованию выбора модели упругого основания. В работе предлагается модель упругого слоя конечной толщины с модулем, изменяющимся по нелинейному закону. Нелинейная постановка краевой задачи реализуется методом упругих решений в области малых упруголастических деформаций. Численная апробация результатов расчета осуществлена для слоистых оснований с использованием программного пакета *MATHEMATICA 6.0*.

This article is about variationally differential approach to the calculation of spring beam plats (plane deformation) on physically nonlinear laminated foundation with biogenic inclusions. Special attention is paid to the choice validation of elastic foundation model. The model of finite thickness elastic layer with modulus varying under nonlinear law is represented. Nonlinear statement of boundary-value problem is realized by the method of elastic solution in the field of small plastoelastic deformation. Numerical calculation results approbation is carried out for laminated foundation with the help of *MATHEMATICA 6.0*.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Фундаменты большинства инженерных сооружений в последнее время рассчитываются как балки, плиты или рамы, лежащие на упругом основании [1]. Их работа существенным образом влияет на напряженно-деформированное состояние (НДС) связанной инженерной системы «балка (плита, рама) – основание». Рассматривая здание или сооружение как конструкцию на упругом основании, можно этот расчет приблизить к *их действительной работе*, т.е. учесть совместную работу надземной и подземной частей инженерных систем, и сделать их надежными, долговечными, экономически выгодными и технически приемлемыми.

Многие методы расчета конструкций на упругом основании, имея теоретическую ценность, иногда не вполне пригодны для практики. Поэтому велико значение усовершенствования методов расчета конструкций на упругом основании, и жизненно необходимо, имеет важность практического применения новый подход к инженерному расчету связанной системы «плита–основание», приближенный к реальным условиям. В данной работе предлагается вариационно-разностный подход для решения *контактной задачи* теории упругости (плоская деформация).

Все многообразие контактных задач расчета конструкции на упругом основании можно объединить в четыре группы: 1) *линейно упругая* конструкция на *линейно упругом* основании; 2) *нелинейно упругая* конструкция на *линейно упругом* основании; 3) *линейно упругая* конструкция на *нелинейно упругом* основании; 4) *нелинейно упругая* конструкция на *нелинейно упругом* основании [2]. Наиболее полно разработана первая группа задач для различных моделей упругого основания. Здесь эффективно работают методы степенных рядов [1, 2], Б.Н. Жемочкина [3, 4], ортогональных многочленов [5].

Значительно хуже в научных исследованиях освещен вопрос о решении второй, третьей и четвертой групп задач [2, 6]. Подобное состояние объясняется тем, что при учете нелинейности принцип независимости действия сил несправедлив, и приходится либо решать численно совокупность нелинейных дифференциальных уравнений [2], либо пользоваться итерационными подходами [7, 8].

Сложность решения поставленных задач из второй, третьей и четвертой групп предполагает использование возможностей вычис-

лительной техники. Подробная библиография по исследуемой проблеме имеется в работах [2, 5]. К сожалению, за прошедшее время сколько-либо значимых научных исследований по этой тематике в отечественной литературе не имеется.

В данной работе предлагается постановка и решение задачи из третьей группы: *линейно упругая* фундаментная плита на *нелинейно упругом* основании. Кроме физической нелинейности, основание обладает ярко выраженными неоднородными свойствами и называется *слоистым*. Неоднородность основания усиливается наличием в нем слабых полостей, которые имеют прочностные свойства на порядок ниже свойств основного грунта. Эти полости (торфяники, илистые грунты) в дальнейшем называются *биогенными включениями*. Фундаментная плита в расчете называется *балочной плитой*.

В силу природных особенностей грунтов, как неоднородных сред с возможными ослаблениями, при расчете конструкций на упругом основании, первостепенным вопросом является выбор такой модели основания, которая достаточно точно описывала НДС этого основания и приближала его к реальным условиям.

## 2. ВЫБОР МОДЕЛИ И МЕТОДА РАСЧЕТА ОСНОВАНИЯ

В настоящее время в инженерной практике используются механические модели грунтового основания: модель Фусса–Винклера, модели упругого полупространства (УПП) (Г. Вихгард, Г.Э. Проктор), модель упругого слоя (УС) конечной толщины, комбинированные модели и др. [2, 9]. Каждая модель имеет свои преимущества и недостатки.

Например, широко распространенная модель Винклера не всегда дает правильные результаты расчета, так как она не учитывает *распределительную способность* грунтового основания, и значение коэффициента постели зависит от размера испытываемого штампа. Модель УПП, наоборот, преувеличивает *распределительную способность*, и приводит к появлению под краями балки физически нереальных бесконечных давлений [2, 9, 10].

Чтобы приблизить результаты расчета к реальности, велось совершенствование моделей УПП по направлению: а) *снижения их распределительной способности*

– модель УС конечной толщины (К.Е. Егоров и др.);

– двухпараметрическая модель, описывающая основание с помощью двух коэффициентов постели, зависящих от сжатия и сдвига (М.М. Филоненко-Бородич, П.Л. Пастернак, В.З. Власов);

– модель с увеличивающимся по глубине модулем деформации (Г.К. Клейн) [11];

б) *снятия* краевых бесконечностей – комбинированная модель (винклеровский слой на УПП) (И.Я. Штаерман) [10].

Выбор модели упругого основания зависит от интуиции инженера-проектировщика и представляет довольно сложную задачу. Модель упругого основания предлагается при постановке задачи и физически обосновывается в ходе расчета. СНБ 5.01.01-99 [12] рекомендует «отклонения расчетных моделей от реальных условий учитывать коэффициентами условий работы. Указанные коэффициенты устанавливаются на основании теоретических и экспериментальных данных о действительной работе грунтов и материалов фундаментов в условиях воздействия и эксплуатации зданий и сооружений» (п.4.19).

В настоящей работе предлагается модель упругого слоя конечной толщины с модулем деформации основания, изменяющимся по нелинейному закону. Модуль деформации  $E_0$  зависит от интенсивности деформаций, изменяется функционально в неявном виде. Коэффициент Пуассона  $\nu_0$  принимается постоянным, так как его влияние на характеристику деформационных свойств грунта менее значительно.

Как уже сказано выше, существующие методы расчета балочных плит и оснований базируются на использовании теории линейно деформируемых тел. В реальных условиях для неоднородных грунтов зависимость между нагрузкой и осадкой имеет явно нелинейный характер.

В работе исследуются слоистые основания с биогенными включениями. Грунты рассматриваются послойно, как *нелинейно деформируемая* однородная среда, подчиняющаяся при нагружении общим закономерностям теории малых упругопластических деформаций, разработанной А.А. Ильюшиным, В.В. Соколовским, Г.М. Смирновым-Аляевым и др. [13].

Класс решаемых нелинейных задач может быть значительно расширен, если воспользоваться предложенным Е.В. Винокуро-

вым [7, 8] *итерационным методом* расчета оснований и фундаментов. В этом случае уравнения с частными производными заменяются системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые в дальнейшем решаются численно с помощью математических пакетов ЭВМ.

В данной работе предлагается вариационно-разностный подход для решения контактной задачи теории упругости в *нелинейной постановке* (плоская деформация). С использованием вариационного подхода ранее было получено решение контактной задачи для круглой пластинки на УПП [14], затем решение контактной задачи для стержня на УПП [15]. В книге [16] также вариационным методом решены контактные задачи, в традиционной постановке [2], т.е. в контактной зоне не учитываются касательные напряжения.

В силу нелинейности решаемой задачи используется метод упругих решений в области малых упругопластических деформаций, численная реализация которого осуществляется с помощью метода конечных разностей (МКР) и программного пакета *MATHEMATICA 6.0*.

### 3. ПОСТАНОВКА КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматривается линейно упругая балочная плита на упругом физически нелинейном двухслойном основании с биогенными включениями (рис. 1). Плита находится под действием произвольной нагрузки  $q(x)$ ,  $P$ . Параметры плиты: ширина  $2l$ , высота  $h$ , изгибная жесткость  $EJ$ .

При расчете слоистая упругая среда заменяется прямоугольной расчетной областью (рис. 2), размеры которой: по оси  $X$  – ширина  $2R_0 = 10l$ ; по оси  $Y$  – глубина  $H_0 = 4l$ , где  $H_0 = H_{01} + H_{02}$ ,  $H_{01} = H_{02} = 2l$ . Область биогенных включений размерами:  $2R_v = 3l$ ;  $H_v = 2/3l$ , расположена под плитой в верхнем слое основания.

Считаем, что на контакте плиты с упругим основанием возникают только нормальные реактивные давления, силами трения пренебрегаем. Для плиты справедливы гипотезы теории изгиба.

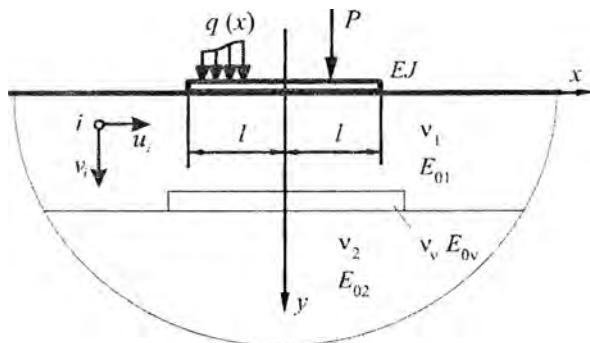


Рис. 1. Балочная плита на упругом слоистом основании с биогенными включениями

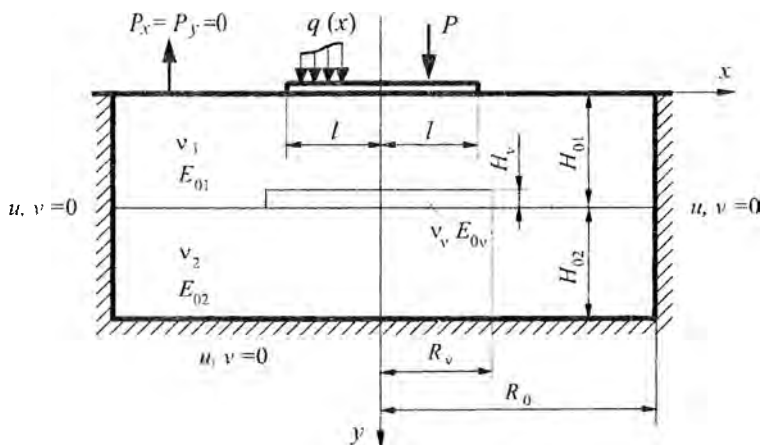


Рис. 2. Расчетная область. Граничные условия задачи

Основание аппроксимируется симметричной разбивочной сеткой (рис. 3) конечных размеров ( $29 \times 7$ ) с постоянным шагом по осям:  $X - \Delta x$ ,  $Y - \Delta y$ . В результате получено 203  $i$ -х узловых точек (135 внутренних, 41 контурная и 27 поверхностных) и 168  $j$ -х сеточных ячеек. Первые 84 ячейки (1–84) принадлежат верхнему уп-

ругому слою, вторые 84 ячейки (85–168) нижнему. Область биогенных включений соответствует 67–74 сеточным ячейкам.

В свою очередь, точки 12–18 являются контактными, то есть одновременно точками основания и плиты. В точках 14, 15, 16 внешняя нагрузка на плиту  $q(x)$  заменяется сосредоточенными силами  $P_i(x) = P_{14}, P_{15}, P_{16}$ . С учетом симметрии расчетной модели «плита-основание» в дальнейший расчет вводим значения сил  $P_{14} = P_{16} = P$ ,  $P_{15} = 2P$ .

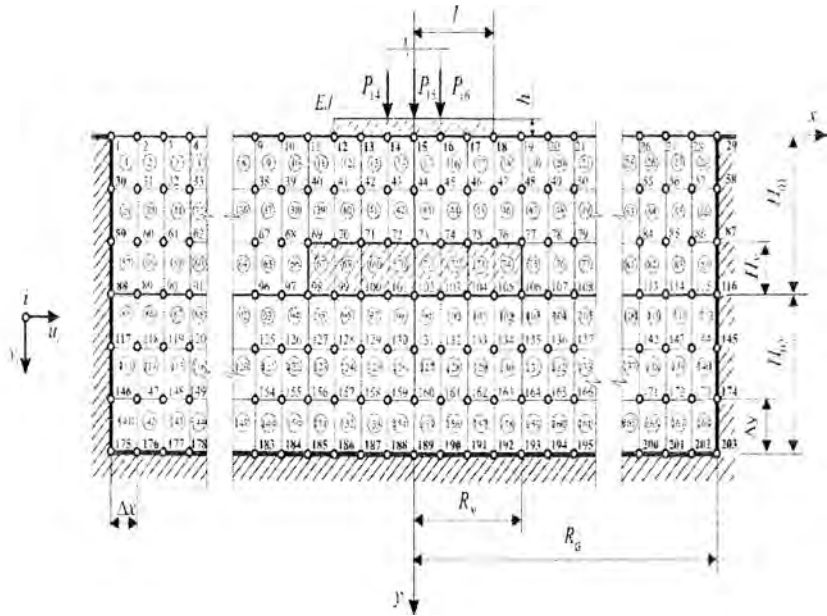


Рис. 3. Разбивочная сетка расчетной области

За *неизвестные* принимаем:  $u_i(x), v_i(y)$  – компоненты вектора перемещения  $i$ -й узловой точки основания, направленные вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно;  $p_v^{(i)}(x, y)$  – реактивные давления в зоне контакта балочной плиты с основанием.

*Граничные условия задачи:* на границах принятой расчетной области перемещения в направлениях осей  $X$  и  $Y$  принимаются рав-

ными нулю  $u = 0, v = 0$  (см. рис. 2); в контактной зоне справедливо равенство осадок основания  $v_i$  прогибам плиты

$$v_i = y_k, \quad (1)$$

где  $y_k$  – прогиб плиты в  $k$ -м сечении.

*Требуется* определить: перемещения, напряжения в упругом основании и его осадки, распределение реактивных давлений в контактной зоне балочной плиты с основанием, внутренние усилия в сечениях плиты; построить соответствующие эпюры и сравнить результаты.

#### 4. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций (рис. 4) для нелинейного упругого неоднородного основания будем определять формулой [17]

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{yk} \operatorname{th} \left( \frac{E_{0k}}{\sigma_{yk}} \varepsilon_i^{(k)} \right), \quad (2)$$

где  $\sigma_{yk}, E_{0k}$  – предел текучести и начальный модуль деформации  $k$ -того слоя основания;

$\varepsilon_i^{(k)}$  – интенсивность деформаций в точке  $K$  упругого основания; для плоской задачи имеет следующее выражение [13]:

$$\varepsilon_i^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^{(k)} - \varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_x^{(k)})^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^{(k)})^2}. \quad (3)$$

деформации  $\varepsilon_x^{(k)}, \varepsilon_y^{(k)}, \gamma_{xy}^{(k)}$  определяются из соотношений Коши [13]

$$\varepsilon_x^{(k)} = \frac{\partial u_k}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(k)} = \frac{\partial v_k}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^{(k)} = \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x}. \quad (4)$$



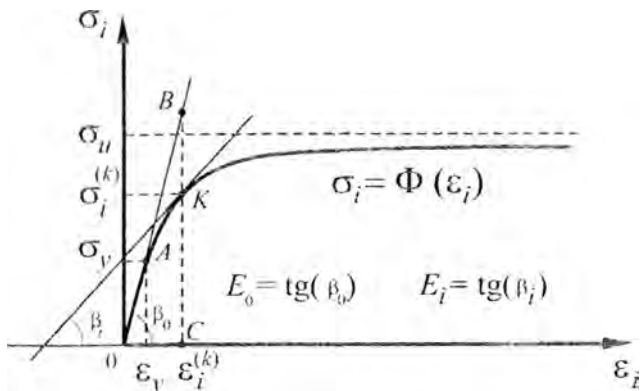


Рис. 4. Зависимость  $\sigma_i(\epsilon_i)$  для упругого слоя основания

Если основание неоднородно, то для каждого из упругих слоев зависимости (3), (4) сохраняются, но будут иметь соответствующие каждому слою значения  $\sigma_{yk}, E_{0k}$  в формуле (2). Аналогично модулю деформации  $E_{0k}$  коэффициент Пуассона  $\nu_k$  различен для упругих слоев, но в пределах одного слоя остается постоянным.

Кроме того, уже на стадии постановки краевой задачи необходимо учесть упругих параметров биогенных включений для корректного написания сеточных уравнений. Биогенные включения имеют характеристики прочности на порядок отличительные от характеристик основного грунта. В расчете они обозначены  $\sigma_{yv}, E_{0v}$ .

В ходе решения краевых задач теория малых упругопластических деформаций [13] предполагает итерационный процесс. При каждой итерации модуль деформации в  $i$ -й точке основания изменяется, поэтому при вычислениях используется *касательный модуль деформации*, который в соответствии с формулой (2) равен

$$E_i^{(n)} = \operatorname{tg} \beta_i = \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_i} = \frac{E_{0i}}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{E_{0i}}{\sigma_{yi}} \epsilon_i^{(n-1)} \right)}, \quad (5)$$

где  $n$  – номер последующей итерации, с учетом того, что в первом приближении  $n = 1$ .

То есть, зависимость  $\sigma_i(\varepsilon_i)$  и  $(\varepsilon_i)$  отождествляется аналогичной при простом сжатии, как это принято в теории малых упругопластических деформаций [13].

Согласно вариационному принципу Лагранжа [13] при нагружении плиты на упругом основании статической нагрузкой ее полная потенциальная энергия в состоянии равновесия принимает минимальное значение. Величина функционала полной потенциальной энергии плиты на упругом основании [16] состоит из трех слагаемых: функционала энергии деформаций упругого основания, функционала энергии деформаций плиты и потенциала работы внешней нагрузки. Отметим, что энергию деформаций плиты обычно отождествляют с энергией изгиба плиты, пренебрегая деформациями сдвига.

Для решения сформулированной краевой задачи в нелинейной постановке используются слагаемые функционала полной энергии в виде [13]:

а) функционала энергии деформаций упругого основания

$$U_f = \iint_S \left[ \frac{E_k \nu_k}{2(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)} (\varepsilon_x^{(k)} + \varepsilon_y^{(k)})^2 + \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} ((\varepsilon_x^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2) + \frac{E_k}{4(1 + \nu_k)} (\gamma_{xy}^{(k)})^2 \right] dS, \quad (6)$$

где  $E_k, \nu_k$  – упругие постоянные в т. К основания;

в) функционала энергии изгиба плиты

$$\Omega_b = \frac{1}{2} EJ \int_{-l}^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx; \quad (7)$$

г) потенциала работы внешней нагрузки

$$\Pi = - \int_{-l}^l q(x) y(x) dx . \quad (8)$$

Таким образом, величина функционала полной энергии расчетной модели «плита–основание» определяется формулой

$$\mathcal{E} = U_f + \Omega_b + \Pi , \quad (9)$$

где каждое из слагаемых справа определяется соотношениями (6), (7), (8).

При составлении функционала энергии деформаций (6) не учитывается работа сил собственного веса упругого основания. Дело в том, что силы собственного веса упругого основания уравновешены начальным напряженным состоянием уже в упругом основании, а работа самоуравновешенной системы сил на малых возможных перемещениях равна нулю. Это означает, что при поиске полного напряженного состояния рассматриваемой задачи необходимо на полученное решение наложить напряженное состояние от сил собственного веса основания.

Так как в состоянии статического равновесия функционал полной энергии  $\mathcal{E}$  должен иметь минимум, то неизвестные перемещения  $u_i(x)$ ,  $v_i(y)$  будут найдены из условия обращения в нуль производных от полной энергии по каждому из перемещений, то есть

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^{(k)} &= \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = \left( \frac{u_c + u_d}{2} - \frac{u_a + u_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} + \\ &\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $N$  – число узловых точек основания.

В результате получается система дифференциальных уравнений, порядок которой равен  $2N$ , т.е. числу неизвестных перемещений.

## 5. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО РАСЧЕТА

Решение контактной краевой задачи строится в перемещениях и реализуется методом конечных разностей (МКР), то есть заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными соотношениями. Энергия деформации подсчитывается для каждой ячейки МКР, а затем суммируется по объему упругого основания. Однако запись функционала полной энергии (9) отличается от традиционной и подобна принятой в пособии [16].

Рассмотрим прямоугольную ячейку метода конечных разностей (рис. 5). Запишем выражения для деформаций  $\varepsilon_x^{(k)}$ ,  $\varepsilon_y^{(k)}$ ,  $\gamma_{xy}^{(k)}$  в точке  $k$  как среднее арифметическое деформаций в вершинах прямоугольника  $abcd$ , а именно:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(k)} &= \frac{\partial u_k}{\partial x} = \left( \frac{u_b + u_d}{2} - \frac{u_a + u_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{u_b + u_d - u_a - u_c}{2\Delta x}; \\ \varepsilon_y^{(k)} &= \frac{\partial v_k}{\partial y} = \left( \frac{v_c + v_d}{2} - \frac{v_a + v_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} = \frac{v_c + v_d - v_a - v_b}{2\Delta y}; \\ \gamma_{xy}^{(k)} &= \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = \left( \frac{u_c + u_d}{2} - \frac{u_a + u_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} + \\ &\quad + \left( \frac{v_b + v_d}{2} - \frac{v_a + v_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \\ &= \frac{u_c + u_d - u_a - u_b}{2\Delta y} + \frac{v_b + v_d - v_a - v_c}{2\Delta x}. \end{aligned} \quad (11)$$

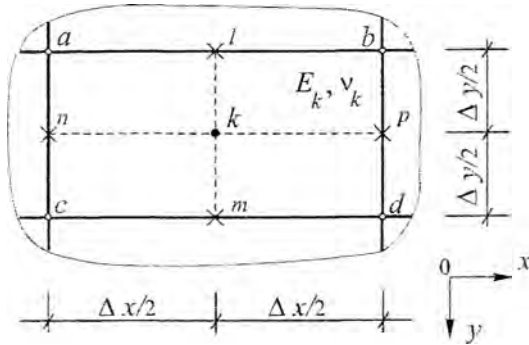


Рис. 5. Прямоугольная ячейка метода конечных разностей

Энергия деформаций прямоугольной ячейки размерами  $(\Delta x \cdot \Delta y)$  с центром в точке  $k$ , согласно формуле (6), усредненно будет равна

$$U_{i,j}^{(k)} = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} \left[ \frac{\nu_k}{1 - 2\nu_k} (\varepsilon_x^{(k)} + \varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_x^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^{(k)})^2 \right] \Delta x \Delta y, \quad (12)$$

где  $E_k, \nu_k$  – упругие постоянные в центре ячейки основания;

$i, j$  – номер узловой точки вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно.

Энергия деформаций упругого основания получается суммированием по объему основания энергий деформаций прямоугольных участков, определяемых по формуле (9), и с учетом (8) выражается в конечно-разностной форме следующим образом:

$$U_f = \sum_{j=1}^{MY-1} \left( \sum_{i=1}^{NX-1} U_{i,j}^{(k)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{MY-1} \left( \sum_{i=1}^{NX-1} \left[ \frac{E_k}{1 + \nu_k} \cdot \left[ \frac{\nu_k}{1 - 2\nu_k} \cdot x \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. x \left( \frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) + \frac{1}{2\Delta y} \cdot (v_c + v_d - v_a - v_b) \right) \right]^2 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{2\Delta x} \cdot (u_b + u_d - u_a - u_c) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\Delta y} \cdot (v_c + v_d - v_a - v_b) \right)^2 + \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\Delta y} \cdot (u_c + u_d - u_a - u_b) + \frac{1}{2\Delta x} \cdot (v_b + v_d - v_a - v_c) \right)^2 \Delta x \Delta y \Bigg), \quad (13)
\end{aligned}$$

где  $NX$  – число узлов по оси  $X$  ( $NX = 29$ );

$MY$  – число узлов по оси  $Y$  ( $MY = 7$ ).

Энергию изгиба балочной плиты в контактной зоне с основанием также запишем в конечно-разностном виде

$$\Omega_b = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=11+1}^{K1-1} EJ_{i=11+1} \cdot \left( \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2} \right)^2, \quad (14)$$

где  $EJ_{i=11+1}$  – изгибная жесткость балочной плиты;

$11$  – номер узла начала плиты ( $11 = 12$ );

$K1$  – номер узла конца плиты ( $K1 = 18$ ).

Преобразуем потенциал работы внешних сил (7) в разностную сумму

$$\Pi = - \sum_{i=11+1}^{K1-1} q_i(x) v_i \Delta x, \quad (15)$$

где  $q_i(x)$  – внешняя нагрузка, действующая на плиту в области  $i$ -й точки контакта.

После подстановки (13),(14),(15) в (9) получаем полную энергию  $\mathcal{E}$  принятой расчетной модели «плита–основание». В силу минимума функционала полной энергии в состоянии статического равновесия согласно (10) получаем СЛАУ следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_i} = 0, \quad i = 1, NX * MY. \end{cases} \quad (16)$$

После составления матрицы (16), исходя из кинематических граничных условий, делаем обнуление перемещений контурных узлов.

## 6. ВЫВОД ФОРМУЛ НАПРЯЖЕНИЙ, ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, ДАВЛЕНИЙ И ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ СИСТЕМЫ «ПЛИТА–ОСНОВАНИЕ»

Решение системы уравнений (16) позволяет найти неизвестные компоненты вектора перемещений  $u_i(x)$ ,  $v_i(y)$ . Зная перемещения, согласно условию (1), определяем прогибы балочной плиты  $y_k$ , соответствующие осадкам основания  $v_i$  под плитой; а также: вертикальные напряжения упругого основания и реактивные давления в контактной зоне «плита–основание». По прогибам балочной плиты определяем внутренние усилия в ее сечениях.

**Вертикальные напряжения упругого основания  $\sigma_y^{(k)}$**  определяем из обобщенного закона Гука для каждой ячейки основания (см. рис. 5) в предположении однородности основания в ее области

$$\sigma_y^{(k)} = \frac{E_k v_k}{(1 - 2\nu_k)(1 + \nu_k)} (\epsilon_x^{(k)} + \epsilon_y^{(k)}) + \frac{E_k}{(1 + \nu_k)} (\epsilon_y^{(k)}). \quad (17)$$

Используя выражения (11) получаем уравнения (17) в конечно-разностном виде

$$\sigma_y^{(k)} = \frac{E_k}{1 + \nu_k} \cdot \left[ \frac{\nu_k}{1 - 2\nu_k} \cdot \left( \frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) + \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\Delta y} \cdot (v_c + v_d - v_a - v_b) \right) + \frac{1}{2\Delta y} \cdot (v_c + v_d - v_a - v_b) \left. \right]. \quad (18)$$

По найденным перемещениям  $u_i(x)$ ,  $v_i(y)$  с помощью формулы (18) определяем вертикальное напряжение  $\sigma_y^{(k)}$ , возникающее в центре  $k$ -й ячейки основания. По полученным ординатам строим графики распределения напряжений в вертикальных и горизонтальных срезах основания.

**Реактивные давления в контактной зоне** балочной плиты с основанием (т. 12–18 основания) определяем по прогибам плиты  $y_k$  (рис. 6). При этом используем известную дифференциальную зависимость

$$p_y^{(i)} - q_k(x) = -EJ \frac{d^4 y_k}{dx^4}, \quad (19)$$

где  $p_y^{(i)}$  – реактивное давление в  $i$ -й контактной точке основания;

$q_k(x)$  – внешняя нагрузка, действующая на плиту в области  $k$ -го сечения плиты,  $q_k(x) = q_i(x)$ .

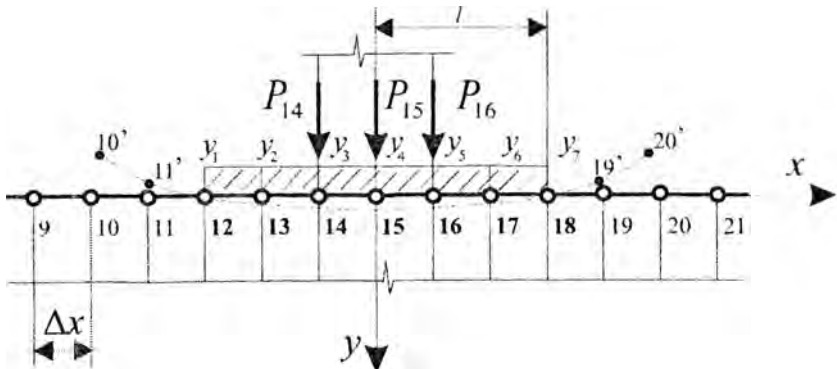


Рис. 6. К определению реактивных давлений в контактной зоне «плита-основание» и внутренних усилий в плите



Для крайних точек  $k$  балочной плиты вводятся статические граничные условия

$$Q^{(k)} \Big|_{x=\pm l} = -EJ \frac{d^3 y_k}{dx^3} = 0;$$

$$M^{(k)} \Big|_{x=\pm l} = -EJ \frac{d^2 y_k}{dx^2} = 0. \quad (20)$$

Для каждой контактной точки запишем выражение (19) в конечно-разностном виде с учетом условия (1)

точка 12 ( $q_1(x) = 0$ ):

$$p_y^{(12)} = -EJ \frac{d^4 y_1}{dx^4} = -EJ \frac{v_{10'} - 4v_{11'} + 6v_{12} - 4v_{13} + v_{14}}{\Delta x^4}, \quad (21)$$

где  $v_{10'}$ ,  $v_{11'}$  – перемещения законтурных точек 10' и 11', которые с учетом граничных условий (20) имеют следующий вид:

$$v_{11'} = 2v_{12} - v_{13}; \quad v_{10'} = 2v_{11'} - 2v_{13} + v_{14} = 4v_{12} - 4v_{13} + v_{14}. \quad (22)$$

После подстановки (22) в (21) получаем

$$p_y^{(12)} = -EJ \frac{2v_{12} - 4v_{13} + 2v_{14}}{\Delta x^4}; \quad (23)$$

точка 13 ( $q_2(x) = 0$ ):

$$p_y^{(13)} = -EJ \frac{-2v_{12} + 5v_{13} - 4v_{14} + v_{15}}{\Delta x^4}; \quad (24)$$

точка 14 ( $q_3(x) = \frac{P_{14}}{\Delta x}$ ):

$$p_y^{(14)} = q_3(x) - EJ \frac{v_{12} - 4v_{13} + 6v_{14} - 4v_{15} + v_{16}}{\Delta x^4}; \quad (25)$$

точка 15 ( $q_4(x) = \frac{P_{15}}{\Delta x}$ ):

$$p_y^{(15)} = q_4(x) - EJ \frac{v_{13} - 4v_{14} + 6v_{15} - 4v_{16} + v_{17}}{\Delta x^4}. \quad (26)$$

В силу симметрии принятой расчетной модели «плита-основание» напряжения в точках 16, 17, 18 определяются аналогично напряжениям в точках 14, 13, 12, в соответствии с формулами (25), (24) и (23). Получаем

точка 16 ( $q_5(x) = \frac{P_{16}}{\Delta x}$ )

$$p_y^{(16)} = q_5(x) - EJ \frac{v_{14} - 4v_{15} + 6v_{16} - 4v_{17} + v_{18}}{\Delta x^4};$$

точка 17 ( $q_6(x) = 0$ )

$$p_y^{(17)} = -EJ \frac{v_{15} - 4v_{16} + 5v_{17} - 2v_{18}}{\Delta x^4}; \quad (27)$$

точка 18 ( $q_7(x) = 0$ )  $p_y^{(18)} = -EJ \frac{2v_{16} - 4v_{17} + 2v_{18}}{\Delta x^4}$ .

В результате расчета формул (23–27) получаем значениям реактивных давлений  $p_y^{(i)}$ , по которым строим эпюру  $p_y^{(i)}$  в контактной зоне.

**Внутренние усилия в сечениях плиты.** По перемещениям  $v_i(y)$  с учетом условия (1) определяем поперечную силу  $Q^{(k)}$  и изгибающий момент  $M^{(k)}$  в  $k$ -м сечении плиты (т. 12–18 основания). При этом используем известные дифференциальные зависимости

$$Q^{(k)} = -EJ \frac{d^3 y_k}{dx^3} \pm q_k(x) \cdot \Delta x_k, \quad M^{(k)} = -EJ \frac{d^2 y_k}{dx^2}, \quad (28)$$

где  $\Delta x_k$  – участок плиты под действием внешней нагрузки  $q_k(x)$ ; знак «+» – для левых сечений плиты, знак «-» – для правых сечений плиты. В ненагруженных точках плиты  $q_k(x) = 0$ . В контактных точках основания нагрузка  $q_k(x)$  заменяется сосредоточенной силой  $P_i(x)$ .

В точках приложения силы  $P_i(x)$  поперечная сила  $Q^{(k)}$  имеет два значения  $Q_{left}^{(k)}$  (без учета силы) и  $Q_{right}^{(k)}$  (с учетом силы), и определяется следующим образом:

– для левых сечений плиты

$$Q_{left}^{(k)} = Q^{(k)}, \quad Q_{right}^{(k)} = Q^{(k)} - P_i(x),$$

– для правых сечений плиты

$$Q_{right}^{(k)} = Q^{(k)}, \quad Q_{left}^{(k)} = Q^{(k)} + P_i(x). \quad (29)$$

Для крайних контактных точек справедливы условия (20), поэтому в т. 12 ( $k=1$ ) и т. 18 ( $k=7$ )

$$Q^{(1)} = Q^{(7)} = 0, \quad M^{(1)} = M^{(7)} = 0. \quad (30)$$

Для внутренних контактных точек ( $i = 13-17$ ), соответствующих сечениям плиты ( $k = 2-6$ ), запишем выражения (28) в конечно-разностном виде:

$$Q^{(k)} = -EJ_{i=i-1} \frac{-v_{i-2} + 2v_{i-1} - 2v_{i+1} + v_{i+2}}{2\Delta x^3} \pm q_k(x) \cdot \Delta x_k,$$

$$M^{(k)} = -EJ_{i=i+1} \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta x^2}, \quad (31)$$

где  $EJ_{i=11+1}$  – изгибная жесткость балочной плиты;  $l_1$  – номер узла начала плиты ( $l_1 = 12$ ).

Используя (31) и с учетом (20) и (29) получаем следующие выражения:

– поперечных сил

$$Q^{(2)} = -EJ \frac{v_{13} - 2v_{14} + v_{15}}{2\Delta x^3},$$

$$Q_{left}^{(3)} = -EJ \frac{-v_{12} + 2v_{13} - 2v_{15} + v_{16}}{2\Delta x^3} + q_3(x) \cdot 0,5\Delta x,$$

$$Q_{right}^{(3)} = Q_{left}^{(3)} - P_{14},$$

$$Q_{left}^{(4)} = -EJ \frac{-v_{13} + 2v_{14} - 2v_{16} + v_{17}}{2\Delta x^3} + q_4(x) \cdot 0,5\Delta x,$$

$$Q_{right}^{(4)} = Q_{left}^{(4)} - P_{15}, \quad (32)$$

$$Q_{right}^{(5)} = -EJ \frac{-v_{14} + 2v_{15} - 2v_{17} + v_{18}}{2\Delta x^3} - q_5(x) \cdot 0,5\Delta x,$$

$$Q_{left}^{(5)} = Q_{right}^{(5)} + P_{16},$$

$$Q^{(6)} = -EJ \frac{-v_{15} + 2v_{16} - v_{17}}{2\Delta x^3};$$

– изгибающих моментов

$$M^{(2)} = -EJ \frac{v_{12} - 2v_{13} + v_{14}}{\Delta x^2}, \quad M^{(3)} = -EJ \frac{v_{13} - 2v_{14} + v_{15}}{\Delta x^2},$$

$$M^{(4)} = -EJ \frac{v_{14} - 2v_{15} + v_{16}}{\Delta x^2},$$

$$M^{(5)} = -EJ \frac{v_{15} - 2v_{16} + v_{17}}{\Delta x^2},$$

$$M^{(6)} = -EJ \frac{v_{16} - 2v_{17} + v_{18}}{\Delta x^2}. \quad (33)$$

По результатам расчетов (32), (33) и с учетом (30) строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях плиты.

## 7. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА И ИХ СРАВНЕНИЕ

Вначале решается задача в линейной постановке. По вычисленным значениям перемещений  $i$ -й узловой точки  $u_i(x), v_i(y)$ , используя геометрические уравнения (4) и конечно-разностные соотношения (11), определяется интенсивность деформаций (3) и интенсивность напряжений в центрах ячеек (2).

Имея значения напряжений и перемещений, полученных в результате решения задачи в первом приближении, определяется касательный модуль деформации (5) для каждой ячейки и задача решается во втором и последующих приближениях. Итерационный процесс заканчивается, как только разница между последующим и предыдущим приближением исследуемой функции будет соответствовать требуемой точности решения задачи.

**Критерием сходимости** служит условие, чтобы максимальная поправка  $\delta_f$  по искомой функции  $f(x, y)$  за один обход сетки не превосходила малой величины  $\xi$ , зависящей от шага сетки, полной осадки штампа и наличия ослаблений. Для рассматриваемой задачи критерий сходимости имеет следующий вид:

$$\delta_f = \frac{f_{\max}^{(n)} - f_{\max}^{(n-1)}}{f_{\max}^{(n)}} \cdot 100\% \leq \xi = 3\%, \quad (34)$$

где  $f_{\max}^{(n)} \cdot f_{\max}^{(n-1)}$  – максимальные значения исследуемой функции,  $(n)$  и  $(n-1)$  итераций.

Для реализации указанного подхода составлена программа на языке *Mathematica* 6.0 и проведена ее числовая апробация для двух-слойных оснований с учетом биогенных включений в верхнем слое. В численный счет использовались следующие исходные параметры:

1-й слой основания (песок средней плотности) –

$$\sigma_{y1} = 0,2 \text{ МПа}; \nu_1 = 0,3; E_{01} = 25 \text{ МПа};$$

2-й слой основания (суглинок) –

$$\sigma_{y2} = 0,25 \text{ МПа}; \nu_2 = 0,33; E_{02} = 30 \text{ МПа};$$

биогенные включения (торф) –

$$\sigma_{y\text{в}} = 0,05 \text{ МПа}; \nu_2 = 0,35; E_{02} = 6 \text{ МПа};$$

железобетонная плита (бетон марки В15) –

$$P = 90\,000 \text{ Н}; l = 1,2 \text{ м}; h = 0,5 \text{ м}; E_{\sigma} = 2,35 \cdot 10^{10} \text{ Па} .$$

#### Сходимость итерационного алгоритма.

На рис. 7–9 приведены результаты расчета осадок основания и плиты, распределение реактивных давлений в контактной зоне плиты и вертикальных напряжений в верхнем слое основания под плитой для *первых трех приближений*.

Из графиков следует, что при расчете напряжений итерационный процесс сходится быстро: а) результаты 1-й и 2-й итерации расчета вертикальных напряжений практически совпали,  $\delta_{\sigma} = 1,79\%$ , б) реактивные напряжения имеют самую малую поправку в критерии сходимости  $\delta_p = 1,40\%$ , практически полное совпадение результатов «линейного расчета» и последующих итераций. Это отличительно от сходимости осадок: процесс сходится, но медленно  $\delta_v = 9,19\%$ , для предыдущего шага  $\delta_v^{(n-1)} = 18,81\%$ . Критерии сходимости  $\delta_f$  вычислены по формуле (34) и результаты расчета сведены в табл. 1.

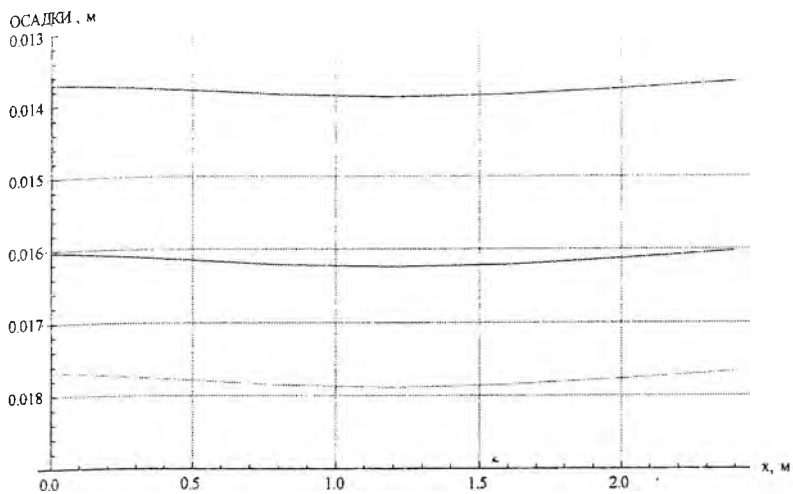


Рис. 7. Осадки основания и плиты в контактной зоне:

— «линейный расчет», - - первая итерация, - · - вторая итерация

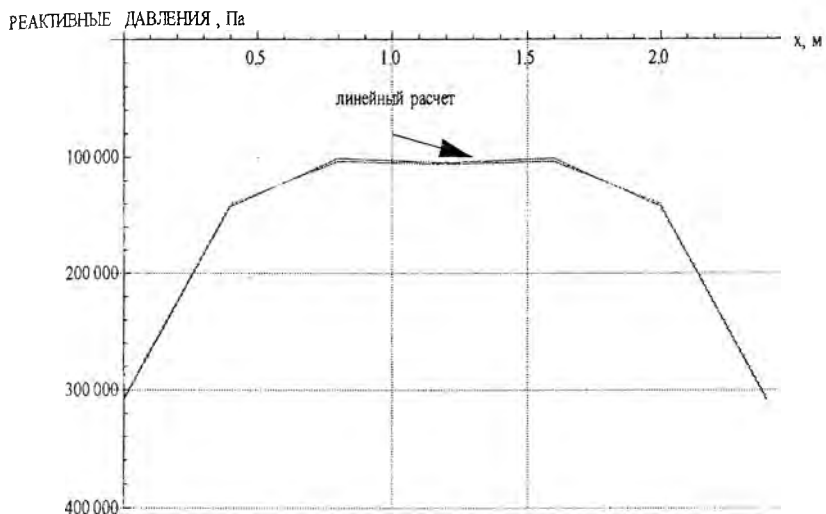


Рис. 8. Эпюра реактивных давлений в контактной зоне:

— «линейный расчет», - - первая итерация, - · - вторая итерация

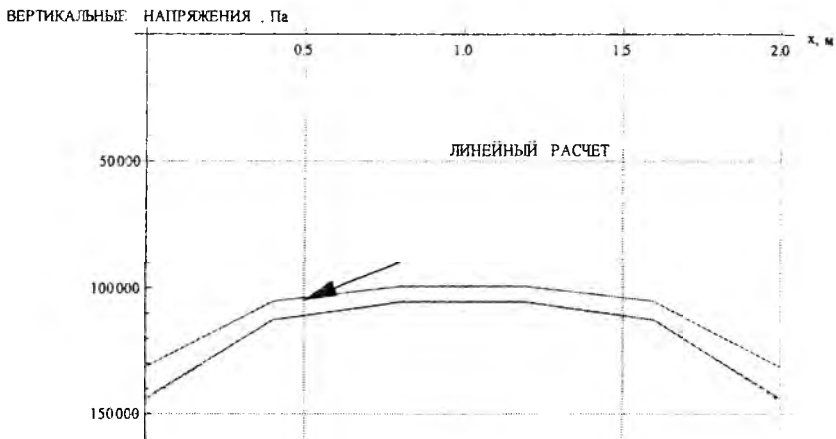


Рис. 9. Эпюра напряжений  $\sigma_y^k$  в верхнем слое основания ( $h = \Delta y / 2$ ) под подошвой плиты:  
 — «линейный расчет», - - первая итерация, — вторая итерация

Таблица 1

Результаты расчета слоистого основания с биогенными включениями

№ итерации	$v_{\max}$ , М	$\sigma_{y\max}$ , Па	$\varepsilon_{\max}$	$p_{y\max}$ , Па	Вертикальный срез $j = 15-155$	
					$E_{1\max}$ , МПа	$E_{2\max}$ , МПа
0	0,0139170	165 115	0,00317369	333 905	24,4859	29,7827
1	0,0162475	163 710	0,00358884	335 932	24,2825	29,8263
2	0,0178909	166 701	0,00378271	340 697	23,8752	29,8635
Критерий $\delta_f$	$\delta_v=9,19\%$	$\delta_\sigma=1,79\%$	$\delta_\varepsilon=5,13\%$	$\delta_p=1,40\%$	$\delta_E=1,70$	$\delta_E=0,12\%$

В табл. 1 приведены результаты расчета слоистого основания с биогенными включениями: максимальные значения осадок, вертикальных напряжений, интенсивности деформации верхнего слоя, реактивных давлений в контактной зоне и модулей деформации в слоях на линейном этапе расчета (итерация № 0) и на двух после-



дующих итерациях нелинейного расчета. Для их сравнения с результатами аналогичного расчета основания без включений, в табл. 2 приведем эти результаты, опубликованные в статье С.В. Босакова, О.В. Козуновой [19].

Таблица 2

Результаты расчета слоистого основания без биогенных включений

№ итерации	$v_{\max}$ , М	$\sigma_{v\max}$ , Па	$\epsilon_{\max}$	$p_{j\max}$ , Па	Вертикальный срез $j = 15-155$	
					$E_{1\max}$ , МПа	$E_{2\max}$ , МПа
0	0,0108713	149 742	0,00291840	309 327	23,9213	29,6925
1	0,0115134	144 865	0,00316363	307 184	23,7970	29,6909
2	0,0116203	144 029	0,00320794	306 618	23,7793	29,6913
Критерий $\delta_j$	$\delta_v=0,93\%$	$\delta_\sigma=0,58\%$	$\delta_\epsilon=1,38\%$	$\delta_p=0,18\%$	$\delta_{E_1}=0,08$	$\delta_{E_2}=0,001\%$

Из результатов расчета слоистых оснований без включений и с включениями следует, что: 1) итерационный алгоритм для оснований без включений достаточно быстро сходится, на итерациях № 1, 2 результаты имеют точность  $\delta_j < 1\%$ , что полностью соответствует критерию сходимости [19];

2) для окончательного результата расчета оснований с включениями необходимо выполнить еще одно (два) приближения, так как осадки и деформации имеют критерий сходимости  $\delta_j > 3\%$ , и нуждаются в уточнении.

В глубину расчетной области касательный модуль деформации (рис. 10) значительно уменьшает свои значения в верхнем упругом слое основания (почти в 20 раз), и незначительно, но увеличивает в нижнем слое (на 1,3 %). На границе слоев наблюдаются скачки на уменьшение и увеличение модуля. Это объясняется начальными упругими постоянными основных слоев и включений, на порядок отличительными друг от друга.

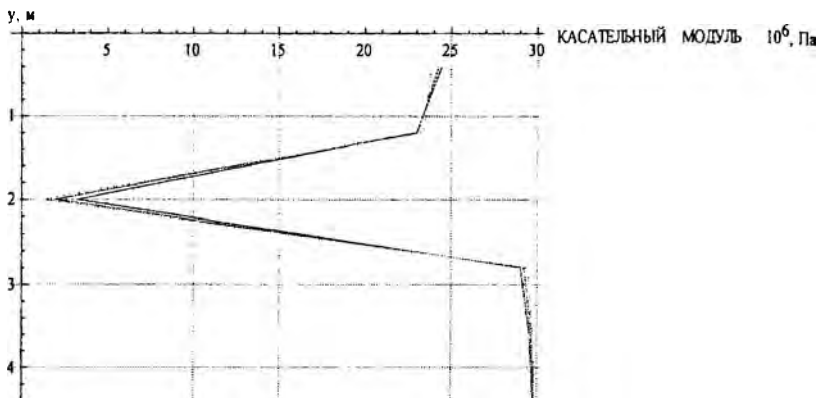


Рис. 10. Касательный модуль деформации (вертикальный срез 15–155):  
 ——— «линейный расчет», — — — первая итерация, - - - вторая итерация

Итерационный процесс в верхнем слое основания сходится медленнее ( $\delta_E = 1,70\%$ ), чем в нижнем ( $\delta_E = 0,12\%$ ), но результаты приемлемы по точности для дальнейшего расчета.

Напряженное состояние основания с биогенными включениями.

На рис. 11 в сравнении показано распределение вертикальных напряжений (вторая итерация) в верхнем слое основания *под плитой* по ее ширине на разной глубине основания. С ростом глубины основания максимальные напряжения  $\sigma_y^k$  уменьшаются, и опасные сечения в горизонтальном срезе под плитой перераспределяются.

Распределение вертикальных напряжений (рис. 12) *по глубине расчетной области* подтверждает то, что с ростом глубины основания значения напряжений уменьшаются. Но скорость изменения напряжений для различных вертикальных срезов различна: самым «спокойным» замечен внутренний срез (15–155) – в 2,4 раза уменьшаются напряжения, самым «динамичным» – срез под краем плиты (17–157) (в 5,5 раз). Несмотря на числовые различия, эпюры напряжений в этих срезах имеют похожую геометрию, что не характерно для эпюры напряжений в срезе за плитой (18–158).

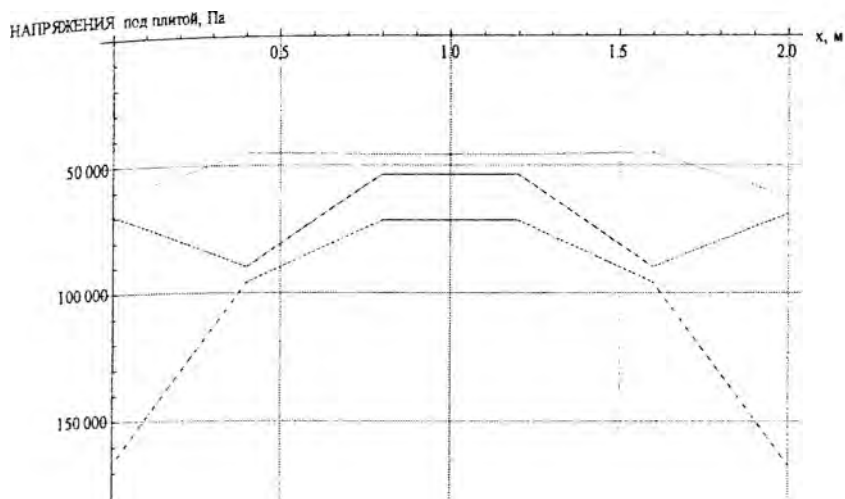


Рис. 11. Эюра напряжений  $\sigma_y^k$  под плитой (горизонтальный срез) на глубине:  
 ---  $h = \Delta y / 2$ ; —  $h = 3\Delta y / 2$ ; -·-  $h = 5\Delta y / 2$

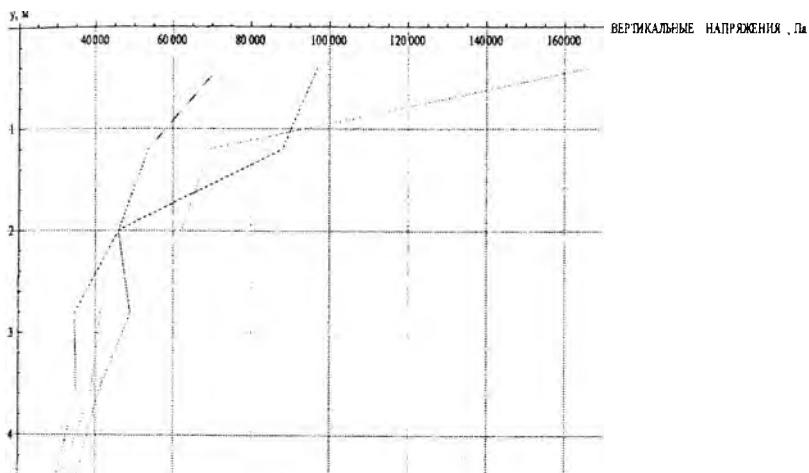


Рис. 12. Эюра напряжений  $\sigma_y^k$  по глубине расчетной области  
 (вторая итерация), вертикальные срезы:  
 --- (15-155); — (17-157); -·- (18-158)

На рис. 13 и 14 в сравнении показано распределение вертикальных напряжений в упругих слоях основания *по ширине расчетной области* (вторая итерация). С ростом глубины основания происходит трансформация эпюры вертикальных напряжений от выпуклой вверх (седлообразной) до выпуклой вниз (параболической), что подтверждается экспериментами [2, 18].

Графики на рис. 13, 14 демонстрируют наличие *распределительной способности грунта* (деформации и напряжения возникают не только под нагруженными участками, но и в соседствующих с ними участках). Эта способность полностью соответствует гипотезе упругого полупространства, подтверждается экспериментами и всем строительным опытом.

**Сравнение результатов.** Для сравнения результатов нелинейных расчетов оснований без включений и с включениями вводится показатель  $\Delta_f$ , который рассчитывается по формуле

$$\Delta_f = \frac{f_{\max}^{(s,v)} - f_{\min}^{(s,v)}}{f_{\min}^{(s,v)}} \cdot 100\%, \quad (35)$$

где  $\Delta_f$  – относительная разница в значениях величины  $f$ , вычисленной в каждом из расчетов;

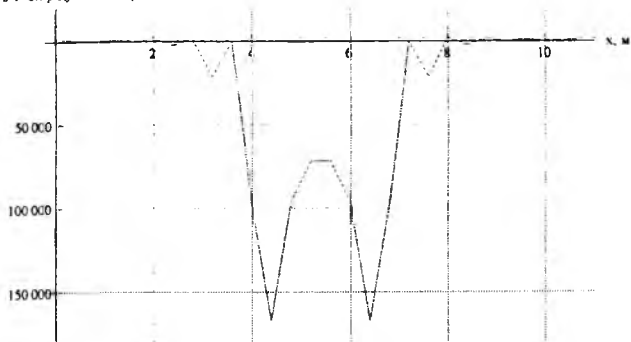
$f_{\max}^{(s,v)}, f_{\min}^{(s,v)}$  – максимальное и минимальное значения величины  $f$  соответственно;

$f_s$  – значение получено для слоистого основания без биогенных включений;

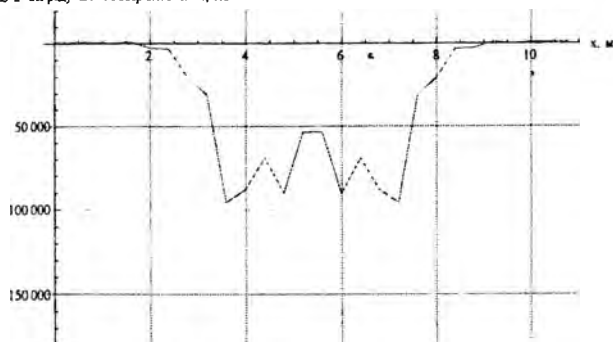
$f_v$  – значение получено для слоистого основания с биогенными включениями.

Результаты расчета формулы (35) для изменяемых величин  $f$  системы «плита–основание» сведены в табл. 3.

а НАПРЯЖЕНИЯ в 1 ом ряду 28 верхнего слоя, Па



б НАПРЯЖЕНИЯ во 2 ом ряду 56 верхнего слоя, Па



в НАПРЯЖЕНИЯ в 3 ом ряду 84 верхнего слоя, Па

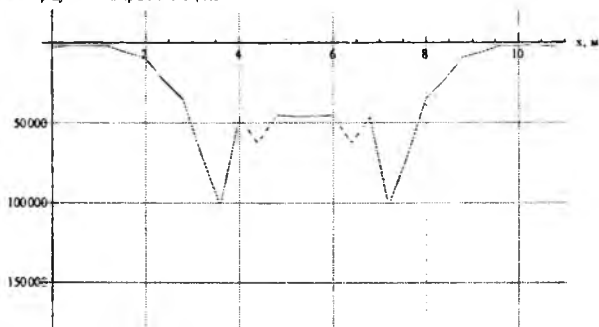
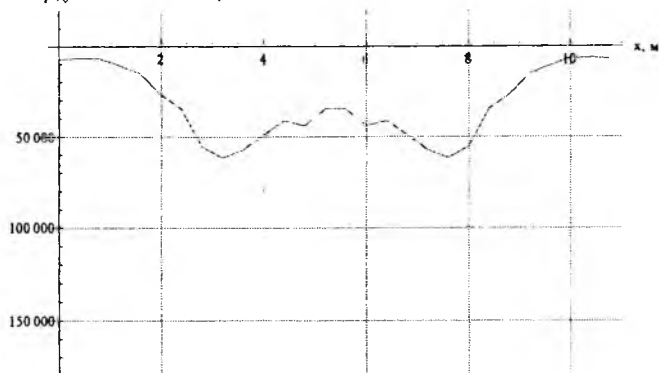
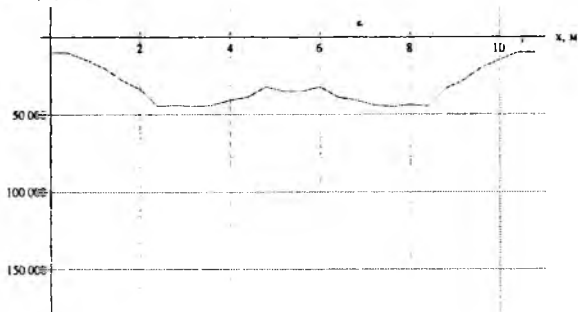


Рис. 13. Эпюры напряжений  $\sigma_y^k$  в верхнем слое основания по ширине расчетной области (горизонтальные срезы) на глубине:  
 а -  $h = \Delta y / 2$ ; б -  $h = 3\Delta y / 2$ ; в -  $h = 5\Delta y / 2$

а НАПРЯЖЕНИЯ в 1 ом ряду 165 112 нижнего слоя, Па



б НАПРЯЖЕНИЯ во 2 ом ряду 113 140 нижнего слоя, Па



в НАПРЯЖЕНИЯ в 3 ом ряду 141 168 нижнего слоя, Па

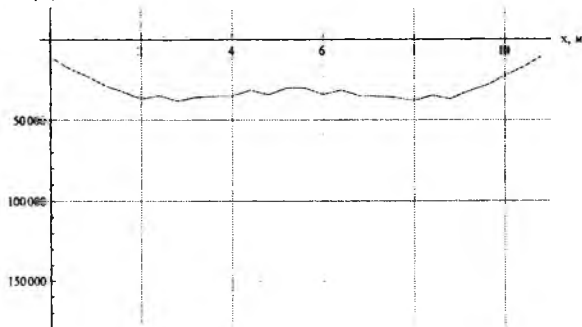


Рис. 14. Эпюры напряжений  $\sigma_y^k$  в нижнем слое основания по ширине расчетной области (горизонтальные срезы) на глубине:  
а -  $h = 7\Delta y / 2$ ; б -  $h = 9\Delta y / 2$ ; в -  $h = 11\Delta y / 2$

Сравнение результатов нелинейных расчетов  
(вторая итерация)

Вид упругого основания	$V_{\max}$ , м	$\sigma_{\text{уmax}}$ , Па	$\varepsilon_{\text{imax}}$	$P_{\text{уmax}}$ , Па	Вертикальный срез $j = 15-155$		$Q_y$ , Н	$M_{\text{ср}}$ , Нм
					$E_{1\text{max}}$ , МПа	$E_{2\text{max}}$ , МПа		
Слоистое основание без биогенных включений ( $f_s$ )	0,0116203	144 029	0,00320794	306 618	23,7793	29,6913	137 977,6	98 911,4
Слоистое основание с биогенными включениями ( $f_v$ )	0,0178909	166 701	0,00378271	340 697	23,8752	29,8635	146 546	108 492
Показатель $\Delta_f$	увеличения $\Delta_v = 53,96\%$	увеличения	увеличения	увеличения	увеличения	увеличения	увеличения	
		$\Delta_\sigma = 15,74\%$	$\Delta_\varepsilon = 17,92\%$	$\Delta_P = 11,12\%$	$\Delta_E = 9,59\%$	$\Delta_E = 17,2\%$	6,21%	9,69%

На рис. 15 наблюдается резкое изменение напряжений на границе слоев, причем в основаниях без включений оно больше (1,5

раза), чем в основаниях с включениями (1,25 раза). Это объясняется тем, что характеристики прочности биогенных включений, как слабых полостей, на порядок ниже аналогичных характеристик основного грунта. В связи с этим напряжения перераспределяются и уменьшаются в слоях, причем большее относительное изменение напряжений в верхнем слое (1,6 раза).

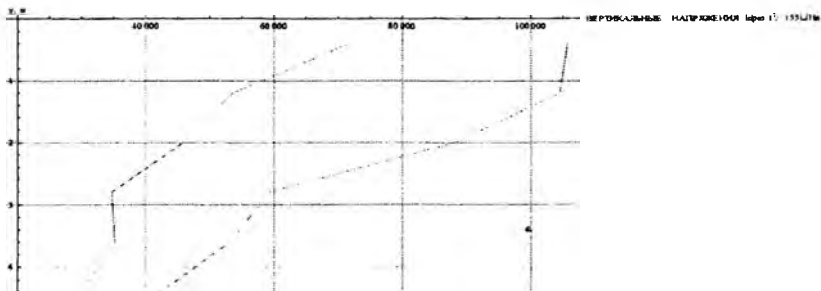


Рис. 15. Эпюра напряжений  $\sigma_y^k$  по глубине расчетной области (вторая итерация), вертикальный срез (15–155):  
 --- без учета включений; — с учетом включений

Сравнивая максимальные напряжения вертикального среза 15–155 без учета и с учетом включений получаем, что они уменьшились в 1,47 раза ( $\Delta_\sigma = 47,51\%$ ), хотя по максимальному напряжению горизонтального среза получаем увеличение на  $\Delta_\sigma = 15,74\%$ . Это несоответствие объясняется так называемым «краевым эффектом».

На рис. 16 построена обратная нелинейная зависимость между осадками плиты и реактивными давлениями основания, которая объясняется наличием больших краевых давлений, и указывает на недостатки модели упругого полупространства. Характер зависимостей для разных оснований одинаков, однако они строятся на отличительных почти в два раза осадках (1,6 раза из табл. 3).

Отметим, что несложно по найденным значениям вертикальных перемещений узловых точек найти внутренние усилия в сечениях плиты.



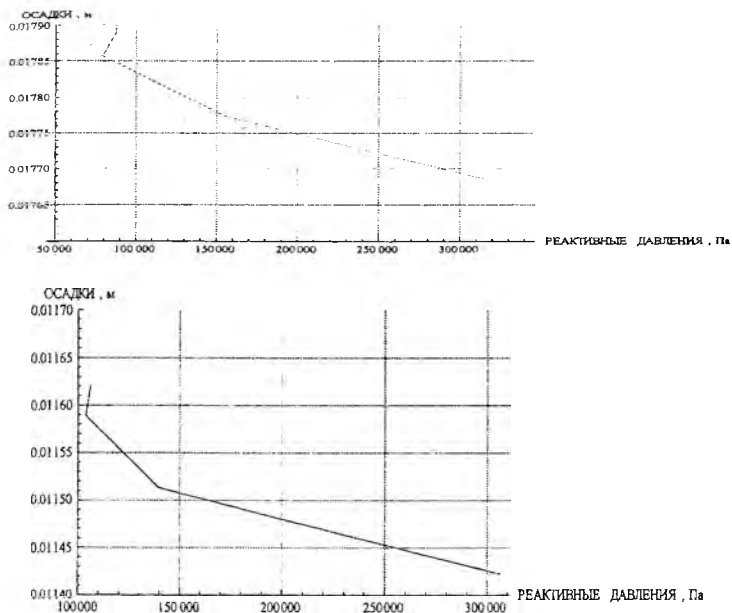


Рис. 16. Зависимость между осадками и реактивными давлениями в контактной зоне основания (*вторая итерация*):  
 — без влияния включений; — с влиянием включений

На рис. 17 показаны результаты вычислений внутренних усилий. Поперечные силы и изгибающие моменты имеют знаки, противоположные, изображенным на рисунках, так как направление оси  $Y$  – вниз. Эпюра  $Q_y$  – кососимметрична и достигает максимума под крайними внешними силами, действующими на плиту. Эпюра  $M_x$  – симметрична и максимальна под средней внешней силой. Вид и характер эпюр полностью соответствует результатам теоретических расчетов [1, 2].

В сравнении эпюр наблюдается увеличение максимальных ординат: поперечных сил на 6,21 %; изгибающих моментов на 9,69 %, что в 8 и 5 раз соответственно меньше увеличения осадок ( $\Delta_v = 53,96\%$ ). Следовательно, биогенные включения, являясь слабыми полостями, заметно увеличивают деформационные свойства упругого основания без заметного изменения прочностных свойств. Такое возможно только в зоне упругопластических деформаций, и это учитывалось при

моделировании основания, выборе нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями и соответствующего метода расчета.

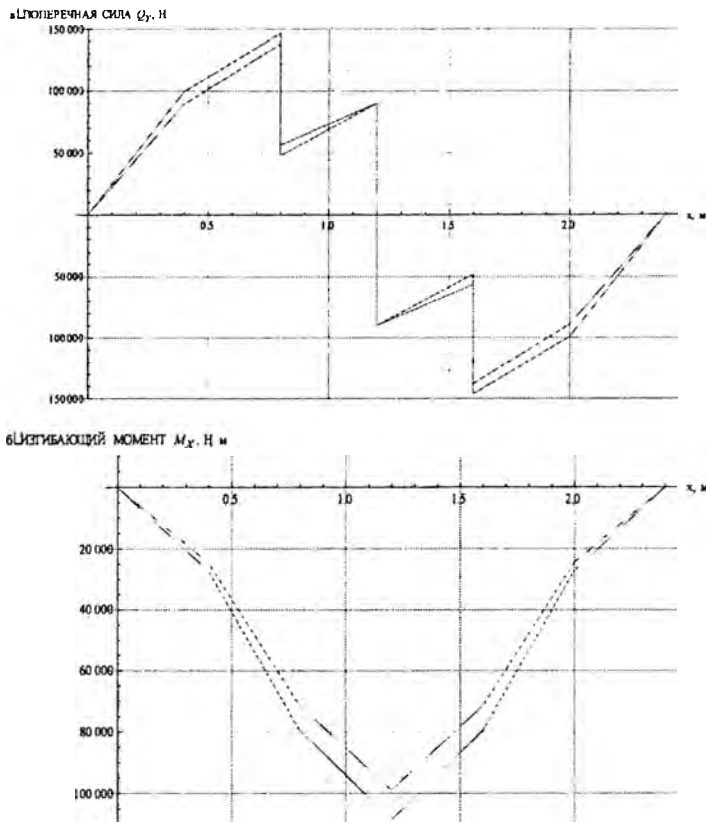


Рис.17. Эпюры внутренних усилий в сечениях плиты:  
 ---- без влияния включений; — с влиянием включений.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый эффективный итерационный подход для расчета балок и плит на нелинейно упругом неоднородном основании. Он основывается на свойстве минимума функционала полной энергии системы «плита–основание». Этот подход позволя-

ет полностью найти НДС основания, исследовать контактную зону, вычислить внутренние усилия и осадки плиты.

В связи с применением математического программного пакета при решении контактной задачи было установлено, что конечно-разностные

аппроксимации предпочтительнее сочетать именно с вариационной постановкой задачи. Это позволяет удобно алгоритмизировать все этапы расчета, избежать вывода дифференциальных уравнений в сложных случаях, упрощает формулировку граничных условий.

Преимущество вариационно-разностного подхода состоит в том, что граничные условия получаются автоматически при решении уравнений на границах области того же вида, что и внутри области. Различие разностных уравнений внутри области и на ее границе является одной из главных причин неустойчивости МКР. Кроме того, в получающемся решении компоненты перемещения изменяются от узла к узлу монотонно, без «гармошки», характерной для МКР.

Вычисления показали, что:

а) применение вариационного подхода в решении контактной задачи вместе с физическими итерациями по А. А. Ильюшину приводит к быстрой сходимости расчета (максимум – три итерации), особенно в напряжениях;

б) на скорость сходимости итерационного процесса влияет правильный выбор модели основания и вида функциональной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций;

в) с увеличением глубины упругого слоя основания происходит видоизменение эпюры напряжений и перераспределение опасных сечений в горизонтальных срезах, благодаря влиянию биогенных включений и собственного веса грунта, оказываемого на нижние слои упругого основания;

г) наличие распределительной способности грунта очевидна и неоспорима, поэтому в инженерных расчетах необходим учет этой способности, особенно в условиях плотной застройки города;

д) характер и вид эпюр внутренних усилий в сечениях линейно упругой плиты полностью соответствует гипотезам и допущениям теории упругости. Наряду с этим в силу нелинейности упругого основания нарушается прямая пропорциональность между напряжениями и деформациями, и возникает не прямая, а обратная нелинейная зависимость. Это объясняется тем, что на краю плиты наблюда-

ется так называемый «краевой эффект»: при меньших осадках – не-реально большие напряжения;

е) сравнение результатов нелинейных расчетов слоистых оснований без биогенных включений и с биогенными включениями (см. табл. 3) показывает, что все параметры НДС системы «плита-основание» (перемещения, напряжения, внутренние усилия) увеличились в силу ослабления физико-механических свойств грунтов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Симвулиди, И.А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании / И.А. Симвулиди. – М.: Высшая школа, 1973. – 480 с.

2. Горбунов-Посадов, Н.И. Расчет конструкций на упругом основании / Н.И. Горбунов-Посадов, Т.А. Маликова, В.И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.

3. Жемочкин, Б.Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б.Н. Жемочкин, А.П. Сеницын. – М.: Стройиздат, 1962. – 262 с.

4. Босаков, С.В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 127 с.

5. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л.А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 492 с.

6. Сеницын, А.П. Расчет балок и плит на упругом основании за пределом упругости / А.П. Сеницын. – М.: Стройиздат, 1974. – 174 с.

7. Винокуров, Е.Ф. Итерационный метод расчета оснований и фундаментов / Е.Ф. Винокуров // Стр-во и арх. Белоруссии. – 1970. – № 1. – С. 31–34.

8. Винокуров, Е.Ф. Итерационный метод расчета балок и плит, лежащих на линейно и нелинейно деформируемом анизотропном основании / Е.Ф. Винокуров // Стр-во и арх. Белоруссии. – 1970. – № 3. – С. 26–28.

9. Тарасевич, А.Н. Изгиб самонапряженных плит на упругом основании: дис. ... канд. техн. наук / А.Н. Тарасевич. – Брест: БГТУ, 2001. – 125 с.

10. Федоровский, В.Г. Прогноз осадок фундаментов мелкого заложения и выбор модели основания для расчета плит / В.Г. Федо-

ровский, С.Г. Безволев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2000. – № 4. – С. 10–18.

11. Клейн, Г.К. Учет возрастания модуля деформации с увеличением глубины при расчете балок на сплошном основании / Г.К. Клейн, А.Е. Дураев // Гидротехническое строительство. – 1971. – № 7. – С. 19–21.

12. СНБ 5.01.01-99 «Основания и фундаменты зданий и сооружений». – Минск: Мин-во арх. и стр-ва РБ, 1999. – 36 с.

13. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 398 с.

14. Selvadurai A.P.S The interaction between a uniformly loaded circular plate and a isotropic elastic halfspace: a variational approach. J. Struct. Mech. – 1979. – V.7(3). – P. 231–246.

15. Босаков, С.В. Вариационный подход к решению контактной задачи для упругой полуплоскости / С.В. Босаков // Прикладная механика и техническая физика. – 1994. – Т. 30. – № 7. – С. 70–73.

16. Босаков, С.В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С.В. Босаков. – Брест: БрГУ, 2006. – 107 с.

17. Босаков, С.В. Расчет балки на упругой физически нелинейной полуплоскости / С.В. Босаков, О.В. Машкова (Козунова) // Перспективы развития новых технологий в стр-ве и подготовке инж. кадров Респ. Беларусь. – Гомель: БелГУТ, 2005. – С. 40–43.

18. Федоровский, В.Г. Жесткий штамп на нелинейно-деформируемом связном основании (плоская задача) / В.Г. Федоровский, С.Е. Кагановская // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1975. – № 1. – С. 41–44.

19. Босаков, С.В. Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация / С.В. Босаков, О.В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2008. – № 4. – С. 20–35.