МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Гидротехническое и энергетическое строительство,
водный транспорт и гидравлика»

И. В. Качанов
В. А. Ключников
И. М. Шаталов

ТЕОРИЯ КОРАБЛЯ. ПЛАВУЧЕСТЬ

Пособие для студентов специальности 1-37 03 02
«Кораблестроение и техническая эксплуатация
водного транспорта»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области транспорта и транспортной деятельности*

Минск
БНТУ
2021

УДК 629.5.015.11
ББК 39.42-01я7
К30

Р е ц е н з е н т ы:
заведующий кафедрой «ЭГиТ» Белорусского государственного технологического университета,
канд. техн. наук, доцент *А. С. Дмитриченко*;
директор ОАО «Белсудопроект» *А. П. Афанасьев*

Качанов, И. В.

К30 Теория корабля. Плавучесть: пособие для студентов специальности 1-37 03 02 «Кораблестроение и техническая эксплуатация водного транспорта» / И. В. Качанов, В. А. Ключников, И. М. Шаталов. – Минск: БНТУ, 2021. – 53 с.
ISBN 978-985-583-310-0.

Пособие содержит изложение основных вопросов, изучаемых в разделе «Плавучесть» дисциплины «Теория корабля». Изложенный в пособии материал будет способствовать формированию у студентов-корабелов знаний, необходимых для решения практических задач в процессе эксплуатации, ремонта и проектирования объектов водного транспорта.

УДК 629.5.015.11
ББК 39.42-01я7

ISBN 978-985-583-310-0

Введение

Теория корабля (ТК) – наука о его мореходных качествах (МК): плавучести, остойчивости, непотопляемости, ходкости, умеренности качки и управляемости.

Изучение ТК производится в зависимости от главных размерений корабля, формы обводов корпуса, распределения грузов и внешних нагрузок.

Корабль в ТК рассматривается как твердое недеформируемое тело, поэтому изучение законов его движения опирается на законы теоретической механики. Но поскольку движение корабля происходит в жидкости и воздушной среде, то наряду с законами теоретической механики в ТК широко используются законы движения жидкостей и газов.

Рассмотрим основные определения мореходных качеств.

Плавучесть – способность судна плавать в заданном положении относительно поверхности воды.

Остойчивость – способность судна (корабля), выведенного из равновесия, возвращаться в исходное положение после прекращения действия внешних сил.

Непотопляемость – способность судна оставаться на плаву и в ограниченной степени сохранять МК после затопления одного или группы отсеков. Непотопляемость определяется плавучестью и остойчивостью поврежденного судна.

Ходкость – способность судна двигаться с заданной скоростью при наименьшей возможной мощности главной механической установки.

Качка – это колебательное движение корабля при перемещении его или стоянке на поверхности или над поверхностью воды. Качка исключительно вредное явление. В понятие умеренность качки входят малость и плавность наклонений.

Управляемость – способность корабля удерживать заданное направление движения или изменять его в соответствии с действиями судоводителя.

Плавучесть, остойчивость и непотопляемость входят в раздел, называемый статикой корабля; *ходкость, качка и управляемость* – в раздел, именуемый динамикой корабля.

Учение о плавучести, остойчивости и непотопляемости основано на законе Архимеда: «На всякое тело, погруженное в жидкость, действует со стороны этой жидкости выталкивающая (поддерживающая) сила, равная весу (силе тяжести) вытесненной телом жидкости, направленная вверх и проходящая через центр тяжести вытесненного объема». Поддерживающую (выталкивающую) силу, действующую на погруженную часть корабля, называют Архимедовой силой.

Закон Архимеда был открыт в III в. до н. э., но практическое применение его началось с XVII в., когда в 1666 г. английский инженер А. Дин предсказал осадку военного корабля «Рупперт», что дало возможность до его спуска прорезать в бортах отверстия для установки пушек. С тех пор расчеты по статике корабля стали предшествовать его постройке.

К XVIII в. относится начало развития ТК как самостоятельной науки. В 1746 г. французский ученый Бугер издал первые труды по теории корабля. В 1749 г. Л. Эйлер издал фундаментальный труд «Корабельная наука», основанный на использовании методов математического анализа для решения задач по теории корабля.

В первой половине XIX в. были разработаны методы вычисления элементов плавучести и остойчивости корабля и установлен практический способ определения его центра тяжести.

Основоположником современной теории корабля является А. Н. Крылов (1863–1945), который расширил и углубил знания по всем разделам этой науки. Российские ученые А. Н. Крылов и С. О. Макаров являются авторами методов расчета остойчивости и инициаторами ее нормирования. Им же принадлежит авторство в разработке теории непотопляемости. Важные работы в этой области выполнили И. Г. Бубнов, В. Г. Власов, В. В. Семенов-Тяньшанский. Большое значение для развития теории ходкости имели труды Д. И. Менделеева, В. И. Жуковского, В. Л. Поздюнина, Г. Е. Павленко и др.

Перед теорией корабля стоят следующие основные проблемы:

– дальнейшее развитие теории плавучести, остойчивости и непотопляемости и на этой базе разработка практических мероприятий, направленных на обеспечение безопасности плавания;

– увеличение скоростей хода судов за счет улучшения их обводов, управления пограничным слоем и создания более современных типов судовых движителей;

– дальнейшее развитие теории качки и создание эффективных способов ее успокоения;

– дальнейшее развитие теории поворотливости и устойчивости судна на курсе и разработка мероприятий по улучшению управляемости судов.

ФОРМА КОРПУСА И ПЛАВУЧЕСТЬ СУДНА

1. Теоретический чертеж судна (ТЧС)

Теоретический чертеж является основным проектным документом. Он служит основой не только для расчета мореходных качеств, но и для разработки чертежей общего расположения, для плазовой разметки, для контроля за правильностью сборки корпуса судна во время постройки и т. д. На теоретическом чертеже поверхность корпуса изображается без учета наружной обшивки (кроме деревянных судов) в виде трех проекций: «Бок», «Корпус», «Полуширота».

В качестве главных плоскостей на ТЧС используют диаметральную плоскость (ДП), рассекающую судно вдоль и являющуюся продольной плоскостью симметрии, плоскость мидель-шпангоута (МШ), разрезающую судно поперек перпендикулярно ДП на середине расчетной длины судна, и основную плоскость (ОП), перпендикулярную плоскости ДП и МШ и проходящую через нижнюю точку теоретической поверхности судна в днищевой части (рис. 1).

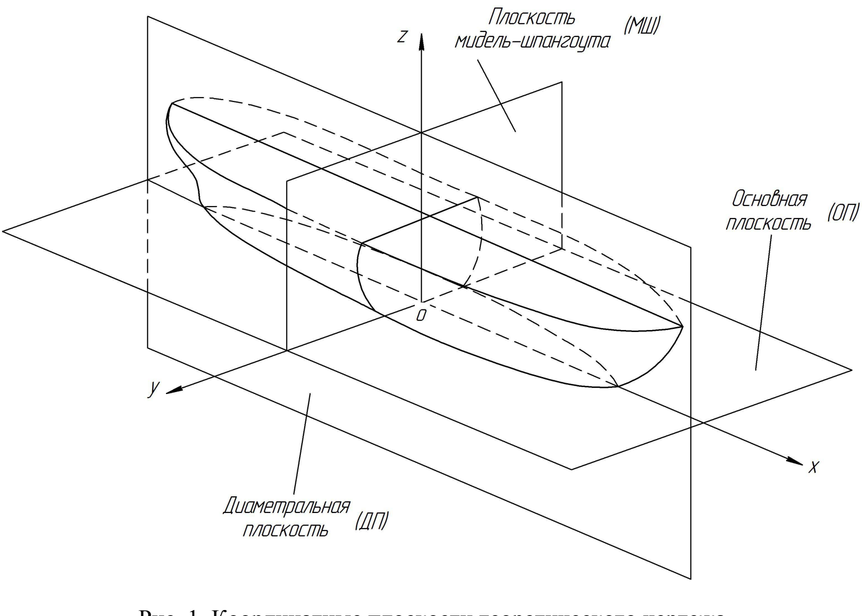

Рис. 1. Координатные плоскости теоретического чертежа

Сечения поверхности судна плоскостями, параллельными ДП, называются ***батоксами,*** сечения поверхности судна плоскостями, параллельными плоскости МШ, называются ***шпангоутами***, а сечения поверхности судна плоскостями, параллельными ОП, – ***ватерлиниями***.

Проекции всех сечений на плоскость ДП образуют вид «Бок», на котором батоксы *I* и *II* изображают в виде кривых линий, а шпангоуты и ватерлинии – в виде прямых линий, создавая так называемую сетку (рис. 2).

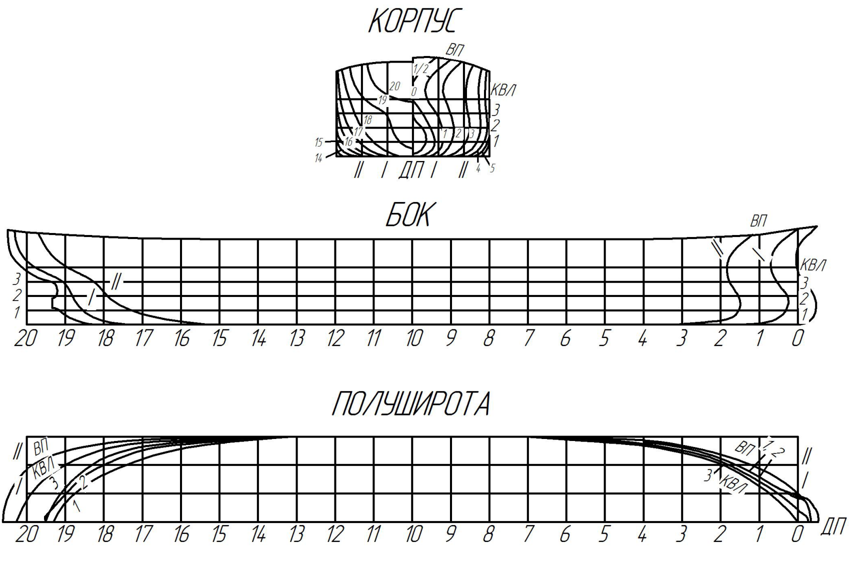

Рис. 2. Теоретический чертеж судна

Проекции всех сечений на плоскость МШ образуют «Корпус». Шпангоуты на этой проекции имеют вид кривых линий, а батоксы и ватерлинии – прямых. Обычно на корпусе изображают половины шпангоутов: носовые ветви шпангоутов – справа от следа ДП, кормовые – слева. МШ вычерчивают на оба борта.

Проекции всех сечений на ОП образуют «Полушироту» (для судна, симметричного относительно ДП, вычерчивают только половины ватерлиний). На полушироте ватерлинии изображаются в виде кривых, а шпангоуты и батоксы – в виде прямых.

На ТЧС изображают, как правило, равноотстоящие батоксы, ватерлинии и шпангоуты. Число батоксов обычно равняется 4–6; ватерлиний – 10–15; шпангоутов – 21, но в особых случаях количество тех или иных сечений может быть другим. Нумерацию батоксов производят влево и вправо от ДП римскими цифрами (I, II и т. д.); нумерацию ватерлиний (ВЛ) от ОП – вверх от 0 до 10–15; нумерацию шпангоутов с носа в корму от 0 до 20.

При этом МШ будет иметь номер 10 и его обозначают значком $\otimes$. Точки пересечения батоксов, шпангоутов и ВЛ должны быть согласованы на всех трех проекциях в соответствии с правилами начертательной геометрии.

Кроме указанных сечений на ТЧС изображают линии верхней палубы, надстроек, форштевня, ахтерштевня, киля.

Одна из теоретических ВЛ, по которую судно может плавать во время эксплуатации (обычно в полном грузу) принимается за главную (грузовую) (ГВЛ). Для судов, не связанных с перевозкой грузов, эта ВЛ называется конструктивной (КВЛ).

2. Система координат

В расчетах статики корабля используют две прямоугольные системы координат с началом в точке O – точке пересечения трех главных плоскостей: одна – система $OXYZ$ – жестко связана с корпусом судна и другая – полусвязанная система (рис. 3).

В связанной системе координат плоскость XOZ – диаметральная; плоскость XOY – основная; плоскость YOZ – плоскость МШ.

Ось OX – линия пересечения ДП и ОП, направлена в нос, ось OY – линия пересечения ОП и плоскости МШ – на правый борт, ось OZ – линия пересечения МШ и ДП – вертикально вверх.

В полусвязанной системе координат ось OZ_θ направлена вверх перпендикулярно к следу действующей наклонной ватерлинии ВЛ, а ось OY_θ ей параллельна и направлена на правый борт. Эта система повернута относительно связанной системы около оси OX на угол крена θ.

Формулы перехода от связанной системы к полусвязанной имеют вид (см. рис. 3):

$$\begin{cases} Y_\theta = Y\cos\theta + Z\sin\theta; \\ Z_\theta = Z\cos\theta - Y\sin\theta. \end{cases} \qquad (1)$$

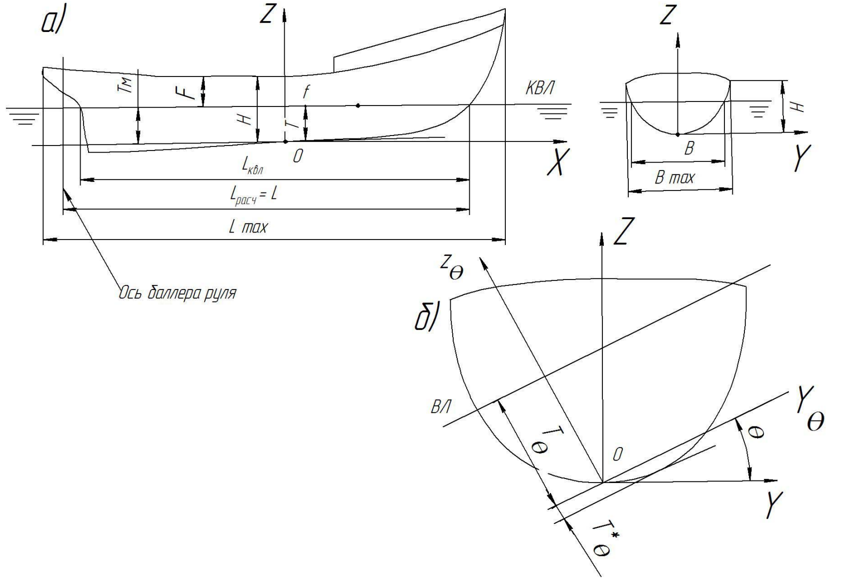

Рис. 3. Системы координат и главные измерения судна:
а – связанная система; *б* – полусвязанная система

3. Главные размерения (ГР)

К ГР судна (рис. 4) относят его длину, ширину, высоту борта, осадку.

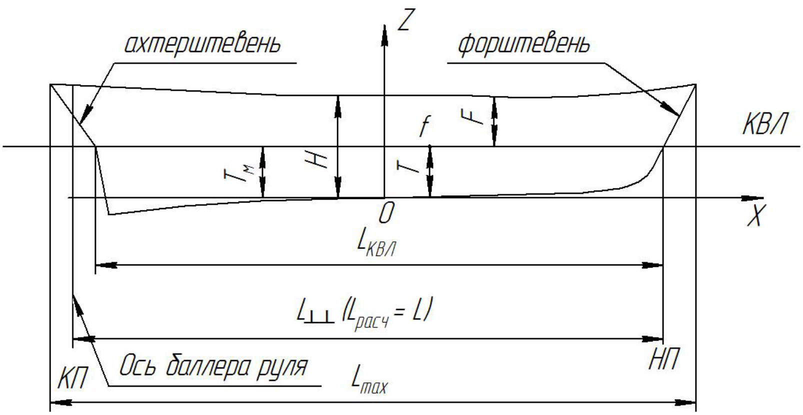

Рис. 4. Главные размерения судна

Рассмотрим определение некоторых основных величин:

Наибольшая длина $L_{\max}$ – расстояние по горизонтали между крайними точками штевней (форштевня и ахтерштевня).

Вертикальные линии, проведенные через точки пересечения КВЛ с линиями штевней, называются носовым (НП) и кормовым (КП) перпендикулярами. Для одновинтовых судов кормовой перпендикуляр (КП) совпадает с осью баллера руля.

Длина между перпендикулярами $L_{\perp\perp}$ $\left(L, L_{\text{расч}}\right)$ – расстояние между точками пересечения КВЛ (ГВЛ) с теоретической линией форштевня и осью баллера руля для одновинтовых судов или с теоретической линией ахтерштевня для двухвинтовых судов.

Эта длина является расчетной и делится на 20 равных частей – теоретических шпаций с расстояниями между ними $\Delta L = L_{\perp\perp}/20$. Шпангоуты, установленные на теоретическом чертеже на расстоянии $\Delta L = L_{\perp\perp}/20$, называются теоретическими, в отличие от конструктивных, которые изображаются на практических (конструкторских) чертежах.

Длина по КВЛ $L_{\text{КВЛ}}$ – расстояние между точками пересечения ГВЛ (КВЛ) с форштевнем и ахтерштевнем; для двухвинтовых судов совпадает с длиной между носовым и кормовым перпендикулярами: $L_{\text{КВЛ}} = L_{\perp\perp}\left(L_{\text{расч}}\right)$.

Наибольшая ширина судна $B_{\max}$ – расстояние по ширине между плоскостями, параллельными ДП и касательными к корпусу судна в крайних его точках; но иногда наиболее широкий шпангоут смещен в корму (рис. 5).

Наибольшая ширина ватерлинии B – измеряется на КВЛ в месте максимальной ширины судна; эта ширина является расчетной.

Высота борта H – измеряется в плоскости МШ по вертикали от ОП до линии палубы у борта (рис. 4, 5).

Средняя осадка T – углубление судна, измеряемое в сечении, проходящем через центр тяжести (т. f) площади ватерлинии; эта величина также является расчетной.

Осадка на МШ $T_{\text{м}}$ – углубление судна, измеряемое на МШ (рис. 4). При посадке судна на ровный киль $T = T_{\text{м}}$ (рис. 6). При наличии угла крена осадка судна T равна $T_\theta + T_\theta^*$ (см. рис. 3, *б*), где T_θ – осадка судна в полусвязанной системе координат; T_θ^* – углубление точки A касания корпуса с плоскостью, параллельной ВЛ, относительно начала координат 0.

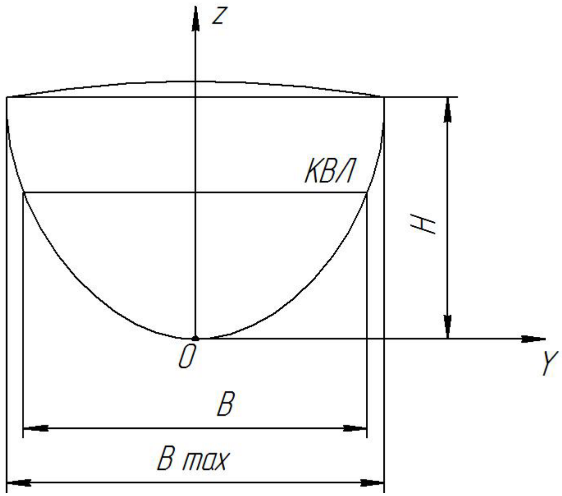

Рис. 5. Схема сечения корпуса в плоскости МШ

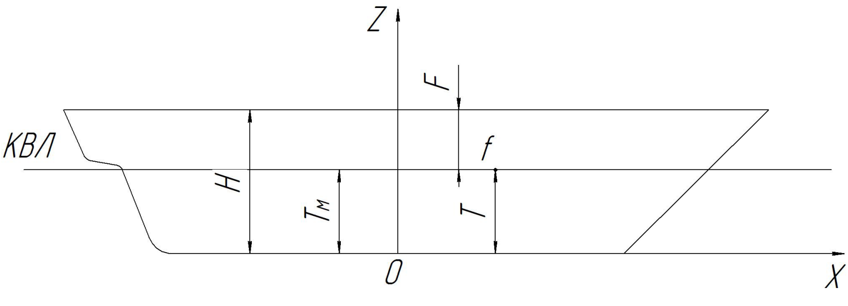

Рис. 6

Высота надводного борта F – разность между размерениями H и $T_м$:

$$F = H - T_м.$$

Расчетные значения L, B, T служат для разбивки сетки ТЧ.

4. Соотношения главных размерений

Для характеристики формы корпуса служат соотношения главных размерений и безразмерные коэффициенты полноты. Соотношения главных размерений следующие:

$$\frac{L}{B};\ \frac{B}{T};\ \frac{L}{T};\ \frac{H}{T};\ \frac{L}{H};$$

$$\begin{cases} \dfrac{L}{B} = 3/10; \\ \dfrac{B}{T} = 2/13{,}5; \\ \dfrac{H}{T} = 1{,}5/4{,}5; \\ \dfrac{L}{H} = 14/32. \end{cases}$$

Отношение $\frac{L}{B}$ – относительная длина, в значительной мере определяет ходовые качества: чем оно больше, тем относительно быстроходнее судно. У современных водоизмещающих судов эта величина колеблется в диапазоне $\frac{L}{B} = 3\text{–}10.$ Нижний предел характерен для некоторых буксирных судов, верхний – присущ высокоскоростным военным кораблям. В порядке исключения некоторые спортивные лодки для академической гребли имеют $\frac{L}{B} > 25$.

Отношение $\frac{B}{T}$ в основном влияет на остойчивость и качку. Чем оно больше, тем выше остойчивость, хотя качка при этом делается более порывистой. Для современных морских судов $\frac{B}{T}$ = 2–5; для катеров – 3,5–4,1; сухогрузов – 1,9–2,9; пассажирских – 2–2,8; грузопассажирских – 2–3,8. Для пассажирских и грузопассажирских (П и ГП) судов внутреннего водного транспорта (ВВТ) $\frac{B}{T}$ = 4–13,3; танкеров – 4–8,2; сухогрузов – 3,4–9,9; буксиров – 3,7–4,7.

Отношение $\frac{L}{T}$ влияет на управляемость: его увеличение повышает устойчивость на курсе и ухудшает поворотливость.

Отношение $\frac{H}{T}$ определяет остойчивость на больших углах крена и дифферента и непотопляемость судна. Рост $\frac{H}{T}$ благоприятно влияет на оба эти качества. Для судов ВВТ $\frac{H}{T}$ = 1,6–4,3 (П и ГП); 1,6–1,9 (буксиры); 1,5–2,3 (сухогрузы).

Отношение $\frac{L}{H}$ влияет на прочность корпуса: чем выше это отношение, тем сложнее обеспечить общую прочность судна. Для судов ВВТ $\frac{L}{H}$ = 16–22,0 (П и ГП); 19–34 (танкеры); 11,0–16,2 (буксиры); 14–31,8 (сухогрузы).

5. Коэффициенты полноты

Среди применяемых в ТК пяти безразмерных коэффициентов полноты три коэффициента являются независимыми.

Коэффициент полноты площади ватерлинии α_i – отношение площади ВЛ S_i к площади описанного прямоугольника со сторонами L_i и B_i:

$$\alpha_i = \frac{S_i}{L_i \cdot B_i}, \tag{2}$$

где i – номер ватерлинии;

L_i и B_i – длина и ширина ватерлинии.

Для КВЛ индекс i опускается (рис. 7) и выражение для расчета α имеет вид:

$$\alpha = \frac{S_{\text{КВЛ}}}{LB}. \tag{2, а}$$

Полнота конструктивной ВЛ оказывает влияние на остойчивость судна, а также связана с кубатурой отсеков, с определением непотопляемости. Полнота КВЛ влияет на форму шпангоутов теоретического чертежа. При большой полноте ватерлинии шпангоуты в оконечностях, как правило, V-образные, а при малой – U-образные (рис. 7).

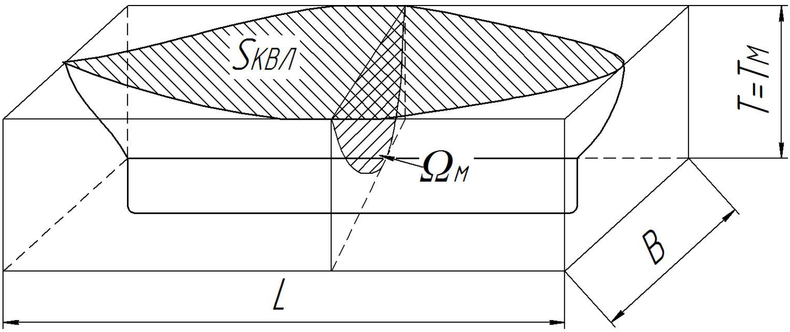

Рис. 7. Схема расчета коэффициентов α, β, φ и δ для судна, сидящего по КВЛ

Коэффициент полноты площади шпангоута β_i – отношение площади погруженной части шпангоута $\Omega_{\text{К}}$ к площади прямоугольника со сторонами $B_{\text{К}}$ и $T_{\text{К}}$:

$$\beta_{\text{К}} = \frac{\Omega_{\text{К}}}{B_{\text{К}} T_{\text{К}}}, \tag{3}$$

где К – номер шпангоута.

Для МШ индекс К опускается и выражение (3) принимает вид:

$$\beta = \frac{\Omega}{B T_{\text{м}}}. \tag{3, а}$$

В (3, а) для судна, сидящего на ровный киль, осадка $T_{\text{м}} = T$ (см. рис. 7).

Коэффициент общей полноты δ_i – отношение объема погруженной части судна V, сидящего по i-ю ватерлинию, к объему параллелепипеда со сторонами L_i, B_i, T_i:

$$\delta_i = V / \left(L_i \cdot B_i \cdot T_i \right). \tag{4}$$

Для КВЛ индекс i опускается (рис. 7) и $\delta = V / \left(L \cdot B \cdot T \right)$.

Кроме отмеченных трех основных коэффициентов полноты применяют еще два вспомогательных коэффициента.

Коэффициент продольной полноты φ – отношение объема погруженной части V к объему горизонтального цилиндра с площадью основания $\Omega_м$ и высотой L (рис. 8).

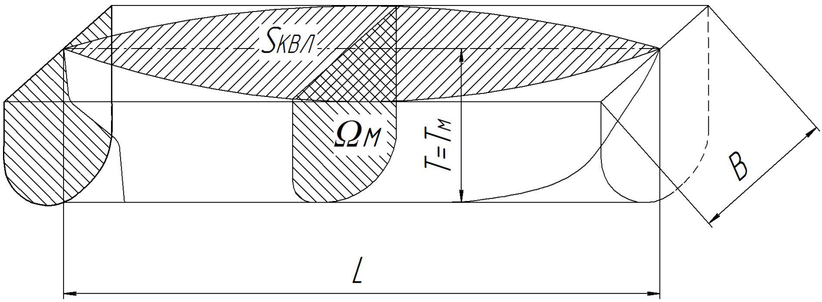

Рис. 8. Схема для расчета коэффициентов продольной и вертикальной полноты φ и χ

$$\varphi = V / \Omega_м L. \tag{5}$$

Коэффициент вертикальной полноты – отношение объема погруженной части судна V к объему вертикального цилиндра с площадью основания $S_{КВЛ}$ и высотой T (см. рис. 8):

$$\chi = V / \left(S_{КВЛ} T \right), \tag{6}$$

где χ – коэффициент вертикальной полноты.

$$\chi = V / ST.$$

Для судов ВВТ:

– ПиГП: $\delta = 0{,}46–0{,}8$; $\beta = 0{,}78–0{,}995$; $\alpha = 0{,}73–0{,}86$;

– СГ: $\delta = 0{,}76–0{,}85$; $\beta = 0{,}9–0{,}99$; $\alpha = 0{,}82–0{,}93$;

– Танкеры: $\delta = 0{,}81–0{,}87$; $\beta > 0{,}92$; $\alpha = 0{,}86–0{,}93$;

– Буксиры: $\delta = 0{,}51–0{,}67$; $\beta = 0{,}82–0{,}99$; $\alpha = 0{,}76–0{,}91$.

Средние значения коэффициентов продольной и вертикальной полноты φ и χ для судов ВВТ будут равны соответственно 0,88–0,93.

При этом

$$\chi > \delta;\ \psi > \delta,\ \text{т. к. } \alpha \text{ и } \beta < 1{,}0.$$

Коэффициенты продольной полноты φ и вертикальной полноты χ являются производными от основных (α, β, δ).

Коэффициент продольной полноты φ характеризует распределение водоизмещения в продольном направлении. Его величина в большой мере влияет на сопротивление воды движению судна и выбирается в зависимости от отношения между скоростью судна и его длиной. Как правило, снижение коэффициента продольной полноты ведет при прочих равных условиях к повышению скорости судна.

Проводя аналогичные преобразования для коэффициента χ (в некоторых изданиях он обозначается через ψ), получим:

$$\chi = \frac{\delta LBT}{\alpha LBT} = \frac{\delta}{\alpha} \Rightarrow \delta = \chi\alpha. \qquad (8)$$

Так как $\alpha < 1$, то $\delta < \chi$.

Значения коэффициентов полноты и соотношений главных размерений для судов внутреннего плавания приведены в табл. 1.

Таблица 1

Тип судна	α	β	δ	L/B	B/T
Пассажирские	0,70–0,81	0,85–0,96	0,45–0,71	7,9–10,0	2,0–2,8
Грузопассажирские	0,70–0,87	0,84–0,98	0,50–0,76	6,0–9,0	2,0–3,8
Грузовые	0,75–0,87	0,85–0,98	0,60–0,85	4,7–7,5	1,9–2,9
Буксиры	0,68–0,83	0,75–0,84	0,40–0,60	3,5–6,5	2,0–5,0
Катера	0,70–0,75	0,80–0,90	0,50–0,55	6,5–7,2	3,5–4,1

6. Посадка судна и ее параметры

Посадкой судна называется его положение по отношению к поверхности спокойной невозмущенной воды. В общем случае посадка характеризуется системой параметров $T_м$, ψ и θ (рис. 9), предложенной профессором В. Г. Власовым, в которой $T_м$ – расстояние *OA* от основной плоскости до точки пересечения произвольной ватерлинии с осью *OZ*; θ – угол крена, составленный следом *AB* ватерлинии на плоскости МШ с осью *OY* (положительный при наклонении на правый борт); ψ – угол дифферента, составляемый следом *АЛ* ватерлинии с осью *OX* (положительный при дифференте корпуса на нос).

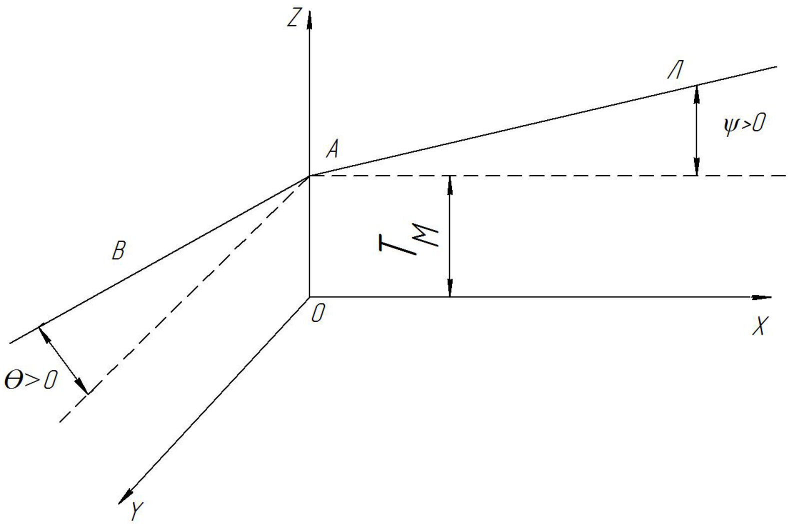

Рис. 9. Параметры посадки судна

Рассмотрим некоторые частные случаи посадки судна.

1. Плоскость ОП (*XOY*) горизонтальна, плоскости МШ (*YOZ*) и ДП (*XOZ*) вертикальны. При этом угол крена θ = 0 и угол дифферента ψ = 0. В этом случае посадка судна характеризуется лишь одним параметром – осадкой $T = T_м$. Для оценки посадки в этом случае (рис. 10) и используется специфическая терминология, в соответствии с которой говорят, что:

– судно сидит (не плавает) прямо (θ = 0);

– судно сидит на ровный киль (ψ = 0).

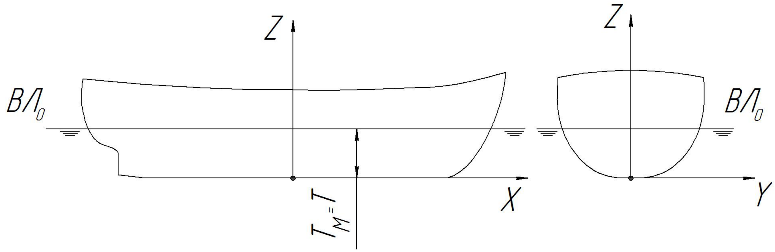

Рис. 10. Посадка судна прямо и на ровный киль:
1 – посадка прямо θ = 0; *2* – на ровный киль ψ = 0

Как правило, нормальной в эксплуатации, а следовательно, и расчетной является посадка, при которой θ = 0 и ψ = 0, т. е. когда судно «сидит прямо и на ровный киль».

2. Плоскость МШ (*YOZ*) вертикальна, ДП (*XOZ*) наклонена на угол θ, основная линия, проходящая через горизонтальный участок киля, горизонтальна (рис. 11).

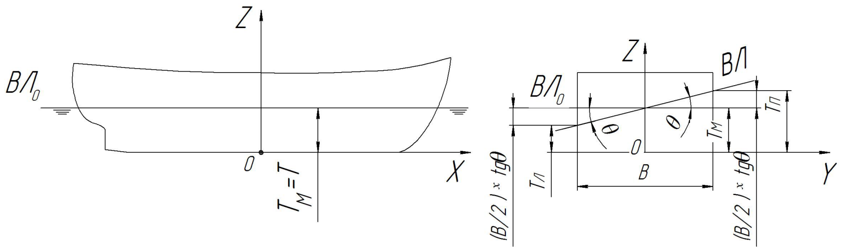

Рис. 11. Посадка судна на ровный киль с креном

Посадка характеризуется осадками на миделе $T = T_м$, на правом $T_п$ и на левом $T_л$ бортах, а также углом крена θ. Судно считается сидящим на ровный киль (ψ = 0), но с креном θ. При этом в полусвязанной системе координаты точек правого борта равны $x, y_{\theta,п}, z_{\theta,п}$, а с левого – $x, y_{\theta,л}, z_{\theta,л}$.

Осадки $T_п$ и $T_л$ соответственно равны:

$$T_п = T_м + \frac{B}{2}\mathrm{tg}\theta;$$
$$T_л = T - \frac{B}{2}\mathrm{tg}\theta. \quad (9)$$

3. Плоскость ДП (XOZ) вертикальна, а плоскость МШ (YOZ) наклонена. Основная линия, а также первоначальная ватерлиния ВЛ$_0$ образуют с горизонтальной плоскостью угол дифферента ψ. Судно считается сидящим прямо ($\theta = 0$), но с дифферентом ($\psi \neq 0$) (рис. 12).

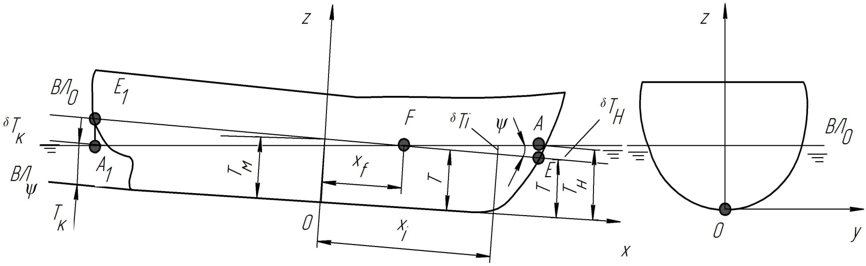

Рис. 12. Посадка судна прямо с дифферентом

При малых дифферентах судно вращается так, что центр тяжести площади ВЛ$_0$ (точка F), лежащий на расстоянии x_f от плоскости МШ, остается неподвижным. Так как осадка в этом сечении равна T, то в соответствии с рис. 12 для осадок на носовом ($T_{\text{н}}$) и кормовом ($T_{\text{к}}$) перпендикулярах можно записать:

$$\begin{aligned} T_{\text{н}} &= T + \delta T_{\text{н}}; \\ T_{\text{к}} &= T - \delta T_{\text{к}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Из ΔFE_1A_1 следует, что:

$$\delta T_{\text{к}} = \left(\frac{L}{2} + x_f\right)\text{tg}\psi. \tag{11}$$

Тогда

$$T_{\text{к}} = T - \left(\frac{L}{2} + x_f\right)\text{tg}\psi, \tag{12}$$

$$T_{\text{н}} = T + \left(\frac{L}{2} - x_f\right)\text{tg}\psi. \tag{13}$$

В выражениях (12), (13) величины x_f и ψ подставляются со своими знаками.

7. Силы, действующие на плавающее судно. Условия и уравнения равновесия судна

Плавающее судно может находиться в полупогруженном или полностью погруженном состоянии. Считается, что оно не совершает никаких движений, поэтому силами гидродинамической природы (сопротивлением окружающей воды и ее инерцией) можно пренебречь.

Плавающее судно обычно находится под действием сил тяжести (силы собственного веса) и сил гидростатического давления воды на смоченную поверхность судна.

Поскольку в ТК судно рассматривается как абсолютно твердое тело, все эти распределенные силы можно заменить равнодействующими, приложенными в соответствующих точках.

Судно будет в равновесии в том случае, когда сумма всех равнодействующих сил и их моментов равняется нулю.

Силы тяжести всех частей корпуса и грузов приводятся к одной равнодействующей, называемой силой тяжести судна D, направленной вертикально вниз и приложенной в точке G, называемой центром тяжести (ЦТ) судна. Положение ЦТ судна (точки G) в системе координат, связанной с судном, определяется координатами x_g, y_g, z_g.

Сила тяжести судна D связана с массой судна M формулой

$$D = Mg, \tag{14}$$

где g – ускорение силы тяжести.

При свободном плавании судна на поверхности воды силы ее давления на непроницаемую смоченную поверхность корпуса можно свести к одной силе, действующей вертикально вверх. Эта сила называется силой плавучести (поддержания). В дисциплине «Механика жидкости и газа» (МЖГ) она обозначалась $F_{\text{Ар}}$. В соответствии с выводами МЖГ эта сила равна весу воды, вытесненной судном:

$$F_{\text{Ар}} = \rho g V, \text{ кН}, \tag{15}$$

где ρ – плотность воды, кг/м^3, т/м^3;

V – объемное водоизмещение, м^3;

$\rho g V$ – весовое водоизмещение, кН.

Масса вытесненной судном воды ρV, равная массе судна M, называется водоизмещением судна. Т. е.

$$M = \rho V, \tag{16}$$

где M и ρV измеряются в кг, т.

С другой стороны водоизмещением называется масса судна M, измеряемая в тоннах и равная массе воды ρV, вытесненной судном. Сила плавучести $F_{\text{Ар}}$ проходит через центр тяжести C погруженного объема с координатами x_c, y_c, z_c.

$$D = \rho g V = \gamma V; \quad D = F_{\text{Ар}}.$$

Центр тяжести погруженного объема судна называется центром величины (ЦВ).

Первое условие равновесия плавающего судна заключается в равенстве силы веса судна D и силы поддержания $F_{\text{Ар}}$:

$$D = \rho g V \Rightarrow M = \varphi V, \tag{17}$$

или

$$D = F_{\text{Ар}} = F_{\text{пл}}; \;\; D = \gamma V, \tag{17, а}$$

или

$$D = \gamma \delta L B T, \tag{17, б}$$

где $\gamma = \rho g$ – удельный вес воды, кН/м^3.

Уравнения (17), (17, а) называются основными уравнениями плавучести и отражают первое условие плавучести (равновесия судна).

Второе условие равновесия судна заключается в действии силы веса и силы поддержания по одной прямой. Это условие сводится к тому, что центр тяжести судна (точка G) и ЦВ (точка C) располагаются на одной вертикали $(x_g = x_c;\, y_g = y_c = 0)$ (рис. 13). Это условие следует из теоремы механики: «для равновесия двух сил необходимо, чтобы они были равны по абсолютному значению и направлены противоположно друг другу по прямой, соединяющей точки приложения этих сил». Таким образом, для плавающего судна необходимо обеспечить расположение точек приложения сил D и $F_{\text{Ар}}$ – центра тяжести G и центра величины C на одной прямой (вертикали), направленной перпендикулярно к плоскости ватерлинии, при этом $z_g \neq z_c$.

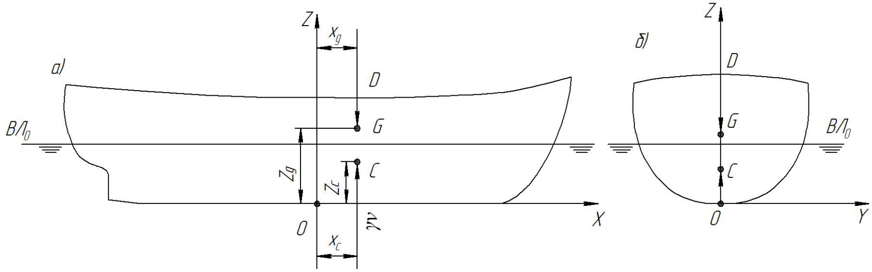

Рис. 13. Схема сил, действующих на судно при посадке прямо и на ровный киль

Для различных случаев посадки в ТК используют соответствующие уравнения равновесия действующих сил.

Для посадки прямо и с дифферентом на нос (рис. 14) уравнения равновесия сил имеют вид:

$$\theta = 0; \ \psi \neq 0.$$

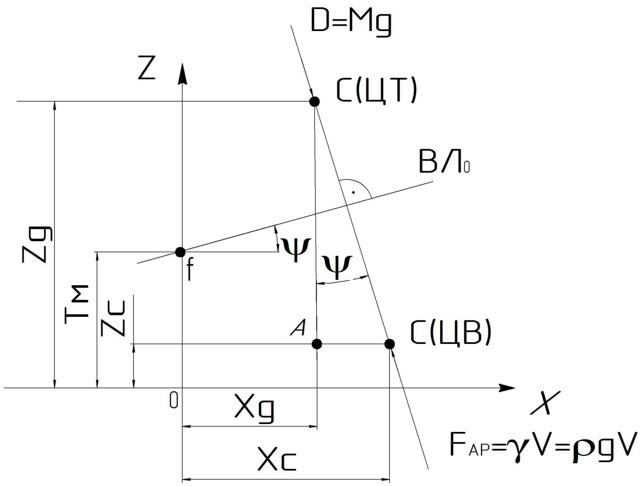

Рис. 14. Положение ватерлинии ВЛо при посадке судна прямо и с деферентом на нос

$$\begin{cases} D = \gamma V;\ \ D = \rho g V; \\ y_c - y_g = 0; \\ x_c - x_g = (z_g - z_c)\mathrm{tg}\psi. \end{cases} \qquad (17, в)$$

где x_c и y_c – координаты ЦВ погруженного объема V;

x_g и y_g – координаты ЦТ судна.

Для случая, когда имеет место посадка судна на ровный киль ($\psi = 0$) и с креном, например, на правый борт ($\theta \neq 0$) (рис. 15), уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} D = \gamma V; \\ x_c - x_g = 0; \\ y_c - y_g = (z_g - z_c)\mathrm{tg}\theta. \end{cases} \qquad (17, в)$$

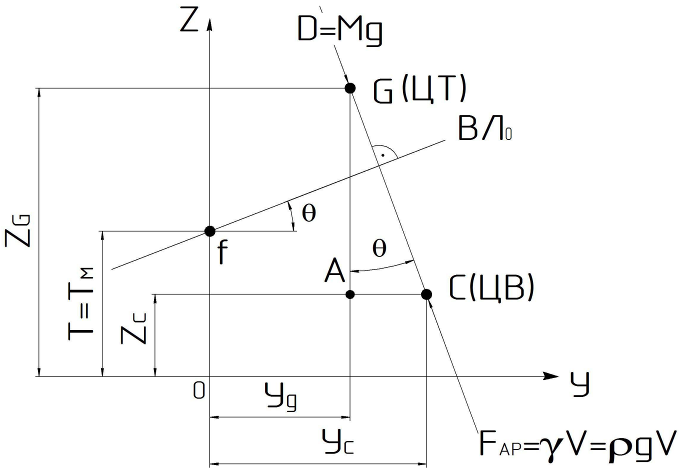

Рис. 15. Положение ватерлинии ВЛо при посадке судна на ровный киль
и с креном на правый борт

Произвольную посадку судна, когда одновременно имеют место крен ($\theta \neq 0$) и дифферент ($\psi \neq 0$) корпуса, иллюстрирует схема на рис. 16.

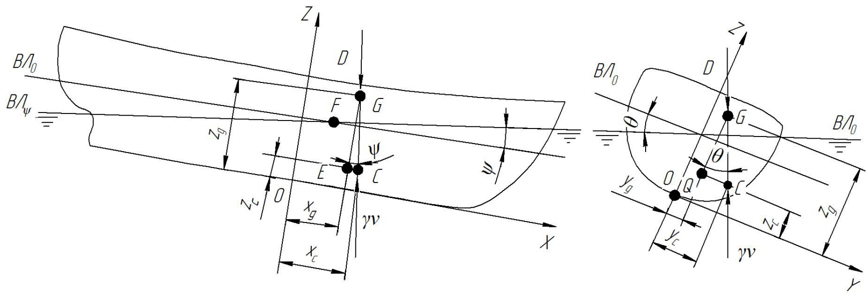

Рис. 16. Равновесие судна при произвольной посадке

В этом случае $\psi \neq 0$; $\theta \neq 0$. Из схемы на рис. 14 следует, что при наклонении корпуса на угол ψ:

$$EC = GE\,\mathrm{tg}\psi.$$

Но $EC = x_c - x_g$; $GE = z_g - z_c$.

Из ΔGCE следует, что

$$(x_c - x_g) = (z_c - z_g)\,\mathrm{tg}\psi. \qquad (18)$$

При крене судна на угол θ из ΔGQC следует, что $QC = GQ\,\mathrm{tg}\theta$, но $QC = y_c - y_g$. $GQ = z_g - z_c$.

Тогда

$$(y_c - y_g) = (z_g - z_c)\,\mathrm{tg}\theta. \qquad (19)$$

Таким образом, при плавании по произвольную ватерлинию уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} D = \rho g V; \\ \mathrm{tg}\psi = \dfrac{x_c - x_g}{z_g - z_c}; \\ \mathrm{tg}\theta = \dfrac{y_c - y_g}{z_g - z_c}. \end{cases} \qquad (20)$$

Из системы (20) следует, что при посадке прямо (θ = 0), но с дифферентом ψ, уравнения равновесия принимают вид:

$$\begin{cases} D = \rho g V; \\ y_c - y_g = 0; \\ (x_c - x_g) = (z_g - z_c)\mathrm{tg}\psi. \end{cases} \qquad (21)$$

Для большинства судов корпус симметричен относительно ДП, поэтому $y_c = 0$. Отсюда следует, что $y_g = 0$. Т. е. при проектировании масса судна должна быть распределена симметрично относительно ДП.

При посадке судна на ровный киль (ψ = 0), но с углом крена θ (θ ≠ 0) уравнения равновесия запишут так:

$$\begin{cases} D = \rho g V; \\ x_c = x_g; \\ (y_c - y_g) = (z_g - z_c)\mathrm{tg}\theta. \end{cases} \qquad (22)$$

Случай посадки судна прямо (θ = 0) и на ровный киль (ψ = 0) иллюстрирует рис. 17.

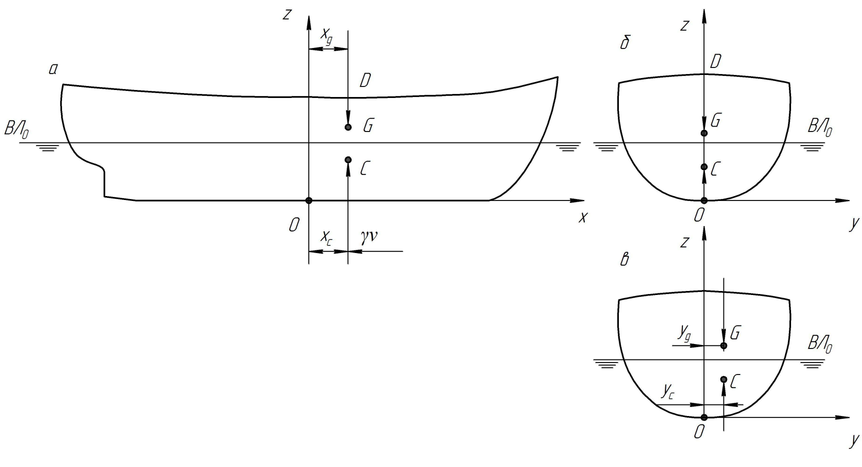

Рис. 17. Равновесие судна при посадке прямо и на ровный киль:
а – проекция «Бок»; *б* – проекция «Корпус» судна, симметричного относительно ДП; *в* – проекция «Корпус» судна, несимметричного относительно ДП

Для этого случая уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} D = \rho g V; \\ x_c = x_g; \\ y_c = y_g. \end{cases} \quad (23)$$

Для судна, симметричного относительно ДП (см. рис. 17, *б*), следует, что

$$y_c = y_g = 0.$$

И тогда

$$\begin{cases} D = \rho g V; \\ x_c = x_g. \end{cases} \quad (23, а)$$

С помощью уравнений равновесия можно определить, будет ли корабль при данной посадке плавать в состоянии статического равновесия или он погрузится по другую ватерлинию. Для этого необходимо вычислить массу (вес) судна, координаты центра тяжести судна (указанные параметры определяются из таблицы нагрузки судна) (табл. 2), а также объемное водоизмещение и координаты центра величины, вычисляемые по теоретическому чертежу.

Таблица 2

Нагрузка судна

Код раздела	Наименование разделов погрузки	Масса тела, m_i	Плечи масс, м			Статические моменты масс, тм		
			x_i	y_i	z_i	$m_i\,x_i$	$m_i\,y_i$	$m_i\,z_i$
01	Корпус	m_{01}				Отн	Отн	Отн
0101*	Металлический корпус					МШ	ДП	ОП
010101	Обшивка наружная, настил второго дна примыкающей части							

Окончание табл. 2

Код раздела	Наименование разделов погрузки	Масса тела, m_i	Плечи масс, м			Статические моменты масс, тм		
			x_i	y_i	z_i	$m_i\,x_i$	$m_i\,y_i$	$m_i\,z_i$
01010102	Настил второго дна							
02	Устройства судовые							
03	Системы							
04	Установка энергетическая							
05 и т. д.	Электроэнергетическая система, внутрисудовые связь и управление, водоизмещение порожнего судна							
13	Снабжение, имущество							
14	Экипаж, провизия, расходные материалы, расходные жидкие среды					M_{YOZ}	M_{XOZ}	M_{XOY}
15 и т. д.	Груз перевозимый, водоизмещение полное	$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$	x_g	y_g	z_g	$M_{YOZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$	$M_{XOZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$	$M_{XOY} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$

* – для судов с деревянным корпусом код 010, с пластмассовым – 0103, с железобетонным – 0104 и т. д. до 0107.

Подставляя найденные значения указанных величин в соответствующие уравнения равновесия, можно установить, будут ли они удовлетворяться.

Таким образом, задачи по определению веса (массы) корабля, объемного водоизмещения V, а также координат центра тяжести (x_g, y_g, z_g), центра величины (x_c, y_c, z_c) являются основными в разделе «Плавучесть», поскольку без знания этих величин нельзя решать вопрос о равновесии корабля при свободном плавании.

8. Масса и координаты центра масс (тяжести) судна. Дедвейт судна

Для расчета массы M, а учитывая (14) и силы тяжести судна D, необходимо произвести суммирование масс m_i отдельных частей корпуса, механизмов, устройств, оборудования и грузов, перевозимых на судне.

Тогда

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i; \quad D = Mg, \tag{24}$$

где n – число слагаемых;

i – индекс слагаемого;

m_i – масса отдельных частей корабля;

D – сила тяжести судна;

M – масса (водоизмещение судна).

Центр масс совпадает с ЦТ судна, поэтому координаты ЦТ могут быть определены на основании теоремы статических моментов масс, используемой для расчета координат точки приложения равнодействующих параллельных сил:

$$x_g = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad y_g = \frac{1}{M}\sum m_i y_i; \quad z_g = \frac{1}{M}\sum m_i z_i. \tag{25}$$

Здесь x_i, y_i, z_i – координаты центра масс (тяжести) i-го груза, входящего в состав массовой (весовой) нагрузки судна.

На практике масса судна M и координаты ЦТ x_g, y_g, z_g определяются расчетным путем в табличной форме, которая называется таблицей нагрузки масс судна (см. табл. 2).

Все грузы на судне делятся на постоянные и переменные.

Постоянные грузы – это конструкции, механизмы электрооборудование, системы, устройства и т. д., т. е. все грузы, которые остаются на судне во время эксплуатации (но могут быть изменены при ремонте судна).

Переменные грузы – это грузы, которые принимаются или снимаются с судна в процессе эксплуатации. Табл. 2 используется для вычисления водоизмещения M, координат ЦМ.

Примечание: в табл. 2 приняты сокращенные обозначения для статических моментов водоизмещения относительно координатных плоскостей *YOZ*, *XOZ*, *XOY*.

Т. е.

$$\sum m_i x_i = M_{YOZ}; \quad \sum m_i y_i = M_{XOZ}; \quad \sum m_i z_i = M_{XOY}.$$

С учетом сказанного координаты ЦТ судна можно записать в таком общем виде:

$$x_g = \frac{M_{YOZ}}{M}; \quad y_g = \frac{M_{XOZ}}{M}; \quad z_g = \frac{M_{XOY}}{M}, \tag{26}$$

где M_{YOZ}, M_{XOZ}, M_{XOY} – статические моменты водоизмещения относительно соответственно плоскости МШ, диаметральной плоскости и основной плоскости киля, т. е.

$$\begin{cases} M_{YOZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i; \\ M_{XOZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i; \\ M_{XOY} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \end{cases} \tag{27}$$

В соответствии с количеством принятых переменных грузов различают несколько водоизмещений:

– водоизмещение порожнего судна $D_{\text{пор}}$ – масса судна, готового для выхода в море, со всем судовым снабжением, с водой в котлах на рабочий уровень, в трубопроводах и механизмах, но без груза, перевозка которого является прямым назначением судна, а также без экипажа, топлива и всех расходных запасов;

– водоизмещение судна с полным грузом *D* – масса судна при наибольшей допустимой осадке, установленной для данного судна при выходе его в рейс;

– водоизмещение судна с полным грузом, но с 10 % запасов топлива, масла, провизии и т. д., это водоизмещение соответствует нагрузке судна при возвращении его из рейса.

Разность между массой судна с полным грузом D и массой порожнего судна $D_{пор}$ составляет предельную грузоподъемность транспортного судна, называемую дедвейтом D_w, а массы всех грузов и пассажиров с багажом, перевозка которых является назначением судна, составляет полезную или чистую грузоподъемность судна.

$$D_w = D - D_{пор}.$$

Координата ЦТ x_g называется абсциссой ЦТ. Если ЦТ расположен в нос от МШ, то x_g берется со знаком «+», а если в корму, то со знаком «–». Согласование положений ЦТ и ЦВ на основе обеспечения равенства $x_g = x_c$ называется удифферентовкой корабля.

Координата ЦТ z_g, определяющая возвышение ЦТ над ОП, называется ординатой ЦТ корабля. Величину z_g можно вычислять приближено $z_g = a_g H$, где H – высота борта у МШ, a_g – коэффициент возвышения ЦТ над ОП.

9. Объемное водоизмещение и координаты ЦВ при посадке судна прямо и на ровный киль

Вычисление объемного водоизмещения (ОВ) для заданного в той или иной форме теоретического корпуса сводится к определению объема V погруженной части корабля по заданную ватерлинию. Предположим, что требуется вычислить ОВ по ГВЛ при заданной осадке T (рис. 18).

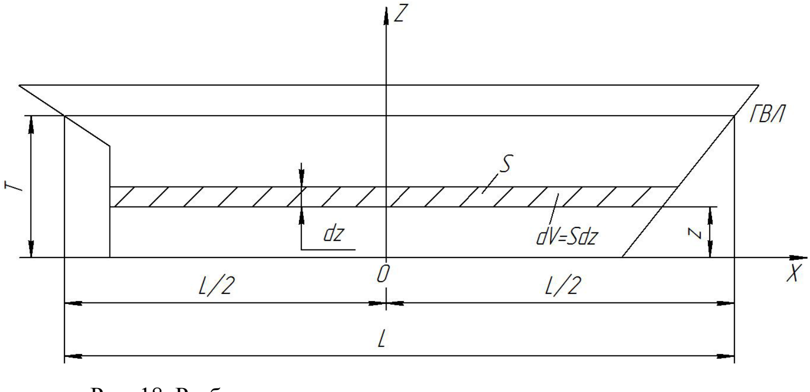

Рис. 18. Разбивка теоретического корпуса на горизонтальные элементарные объемы

Для этого на расстоянии z от ОП (XOY) выделяется элементарный слой толщиной dz с площадью основания S, равной площади соответствующей ВЛ. Элементарный объем данного слоя будет равен

$$\mathrm{d}V = S \cdot \mathrm{d}z. \tag{28}$$

Интегрируя это выражение в пределах осадки T, получим формулу для расчета ОВ корабля:

$$V = \int_{o}^{T} S\mathrm{d}z, \tag{29}$$

где $S = f\left(z\right)$ – площадь ВЛ при различных углублениях z;

T – осадка, соответствующая действующей ГВЛ корабля.

Выделив из половины площади ВЛ при произвольном значении x (рис. 19) площадку $\mathrm{d}S = y\mathrm{d}x,$ в результате интегрирования по длине судна для обеих частей площади получаем полную площадь ВЛ:

$$S = 2\int_{-L/2}^{+L/2} y\mathrm{d}x, \tag{30}$$

где y – ординаты одной половины ВЛ, являющиеся при каждом углублении z функциями только x;

L – длина теоретического корпуса по расчетной ВЛ.

Если подставить в выражение (29) выражение для площади S по формуле (30), то ОВ выразится двойным интегралом:

$$V = 2\int_{0}^{T}\int_{-L/2}^{+L/2} y\mathrm{d}x\mathrm{d}z. \tag{31}$$

Выражение (31) является расчетным при вычислении ОВ по заданным ординатам поверхности теоретического корпуса. Если теоретический корпус разбить на элементарные объемы по длине корабля, то для вычисления V можно получить аналогичную формулу.

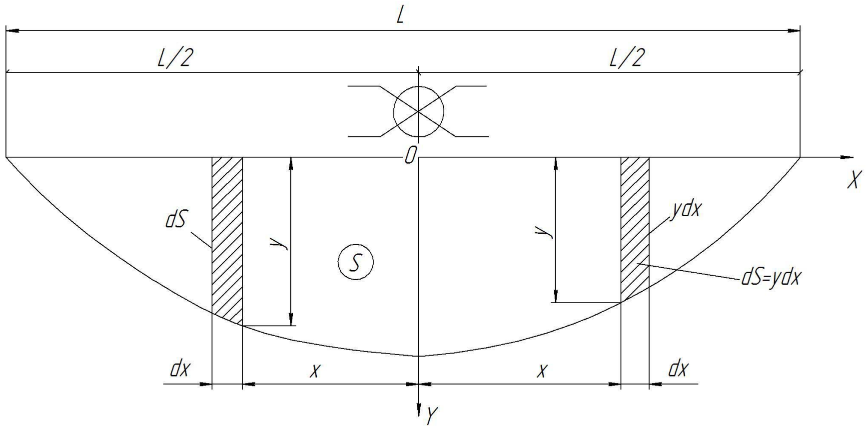

Рис. 19. Разбивка площади ватерлинии на поперечные элементарные площади dS

Выделяя из подводного объема (рис. 20) двумя плоскостями, параллельными плоскости МШ, элементарный слой длиной dx и с площадью основания ω, получим:

$$\mathrm{d}V = \omega \mathrm{d}x. \tag{32}$$

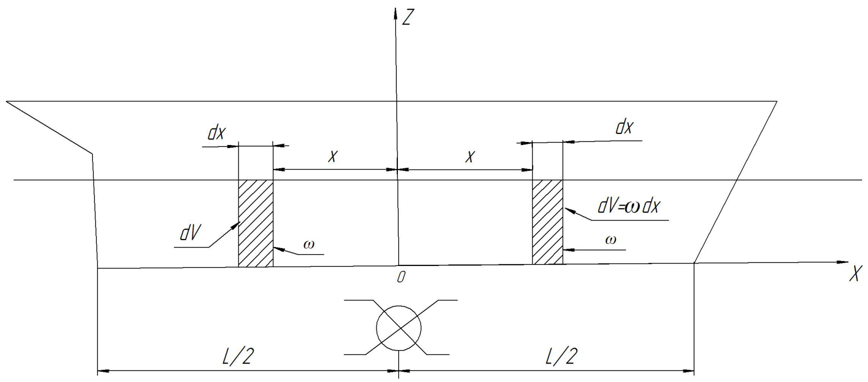

Рис. 20. Разбивка теоретического корпуса на поперечно-вертикальные элементарные объемы

Интегрируя уравнение (32) в пределах от $-L/2$ до $+L/2$, получим:

$$V = \int_{-L/2}^{+L/2} \omega \mathrm{d}x, \tag{33}$$

где $\omega = \varphi(x)$ – площади шпангоутов при различных значениях x.

Представив, в свою очередь, площади шпангоутов (рис. 21) в виде определенных интегралов, получим:

$$\omega = 2\int_{0}^{T} y \mathrm{d}z. \tag{34}$$

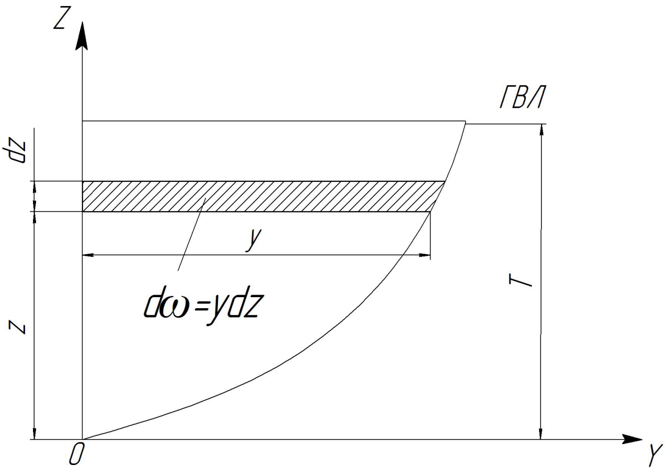

Рис. 1.21. Разбивка площади шпангоута на поперечные элементарные площадки

Принципиальное отличие формул (31) и (35) заключается в порядке интегрирования по переменным x и z, т. е. по длине и осадке корпуса. При интегрировании приближенными способами различие между ними обусловлено порядком снятия и суммирования ординат по ватерлиниям или по шпангоутам. Вычисление ОВ по формулам (31), (35) служит взаимной проверкой результата.

Координаты ЦВ находим из формул:

$$x_c = M_{yz}/V; \quad y_c = M_{xz}/V; \quad z_c = M_{xy}/V, \tag{36}$$

где M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статические моменты погруженного объема относительно координатных плоскостей *YOZ*, *XOZ*, *XOY* соответственно.

Так как при посадке прямо погруженная часть корпуса судна симметрична относительно ДП (плоскости *XOZ*), то момент $M_{xoz} = 0$ и $y_c = 0$.

Для определения абсциссы x_c и ординаты z_c центра величины рассчитаем статические моменты объемного водоизмещения относительно плоскостей *YOZ* и *XOY*.

Статический момент $\mathrm{d}M_{xy}$ элементарного объема $\mathrm{d}V$ ($\mathrm{d}V = S\mathrm{d}z$), находящегося на расстоянии z (см. рис. 18) от ОП (от плоскости *XOY*), будет равен

$$\mathrm{d}M_{xy} = S\mathrm{d}z \cdot z. \tag{37}$$

Интегрируя (37) в пределах от 0 до T, получим статический момент ОВ относительно плоскости *XOY*:

$$M_{xy} = \int_0^T SZ\mathrm{d}z. \tag{38}$$

Статический момент M_{yz} элементарного объема $\mathrm{d}V$ ($\mathrm{d}V = \omega\mathrm{d}x$), который находится на расстоянии x от плоскости МШ (см. рис. 20) относительно плоскости *YOZ* будет равен:

$$\mathrm{d}M_x = \omega\mathrm{d}x \cdot x. \tag{39}$$

Интегрируя (39) в пределах от $-L/2$ до $+L/2$ найдем статический момент всего объема:

$$M_{yz} = \int_{-L/2}^{+L/2} \omega\mathrm{d}x \cdot x. \tag{40}$$

Подставляя (38), (40) в формулы (36), получим следующие выражения:

$$x_c = \frac{1}{V}\int\limits_{-L/2}^{+L/2} \omega x \mathrm{d}x; \qquad z_c = \frac{1}{V}\int\limits_{0}^{T} Sz\mathrm{d}z. \tag{41}$$

Если величина V при вычислении координат ЦВ является заданной, то выражения (41) могут быть приняты в качестве расчетных.

Если координаты ЦВ вычисляются одновременно с объемным водоизмещением, то в этом случае для повышения точности расчетов необходимо воспользоваться формулами для расчета ОВ (29) и (33). Тогда расчетные формулы для координат ЦВ примут вид:

$$x_c = \frac{1}{\int\limits_{-L/2}^{+L/2} \omega \mathrm{d}x}\int\limits_{-L/2}^{+L/2} \omega x \mathrm{d}x; \qquad z_c = \frac{1}{\int\limits_{0}^{T} S\mathrm{d}z}\int\limits_{0}^{T} Sz\mathrm{d}z. \tag{42}$$

Вычисленное по формуле (42) значение абсциссы x_c следует оценить в отношении возможности получения равного ей значения абсциссы центра тяжести x_g в соответствии с распределением весовой нагрузки по длине корабля.

Для различных форм теоретического корпуса значение ординаты ЦВ z_c в зависимости от осадки корабля изменяется в границах:

$$0{,}5T < z_c < \frac{2}{3}T. \tag{43}$$

При этом нижняя граница соответствует прямоугольным, а верхняя – тэтраэдровидным обводам корпуса.

10. Вычисление элементов плавучести по теоретическому чертежу судна

Элементы плавучести определяются по теоретическому чертежу (ТЧ). К ним относятся объемное водоизмещение V, абсцисса x_c и ордината z_c центра величины. В ТК указанные элементы V, x_c и z_c называются *основными элементами плавучести*. Они входят в уравнения равновесия, используемые для расчета плавучести. Под плавучестью в дальнейшем будем понимать мореходное качество корабля плавать по заданную ватерлинию, неся при этом положенные грузы с сохранением достаточной величины надводного борта.

Для вычисления основных элементов плавучести в качестве исходных данных, определяемых по ТЧ, принимаются площади ватерлинии S и шпангоутов ω, которые находятся по известным формулам:

$$S = 2\int_{-L/2}^{+L/2} y\mathrm{d}x; \qquad \omega = 2\int_{0}^{T} y\mathrm{d}z. \tag{44}$$

Кроме этого для расчета водоизмещения V можно использовать следующие зависимости на основе использования главных размерений и коэффициентов полноты δ, φ и ω:

$$V = \delta LBT; \qquad V = \varphi L\omega; \qquad V = \chi ST. \tag{45}$$

Все указанные элементы (S, ω, δ, φ, χ) называются элементами теоретического чертежа.

Графики изменения указанных элементов в функции x, z называются кривыми элементов плавучести. Причем $V = f(z)$, $x_c = f(z)$, $z_c = f(z)$ называются основными кривыми плавучести.

Зависимости δz_c, $\omega = f(z)$, $\delta = f(z)$, $\varphi = f(z)$, $\chi = f(z)$ – кривые элементов теоретического чертежа.

11. Приближенное вычисление определенных интегралов по формулам квадратур

Из высшей математики известно, что численная величина определенного интеграла равна площади криволинейной трапеции, ограниченной подынтегральной кривой $Y = f(x)$. Расчет определенного интеграла производится по формуле:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b y\mathrm{d}x = S, \tag{46}$$

где S – площадь, ограниченная подынтегральной кривой AB (рис. 22), осью OX, ординатами y_A и y_B точек A и B на кривой $y = f(x)$, соответствующих абсциссам a и b на оси OX.

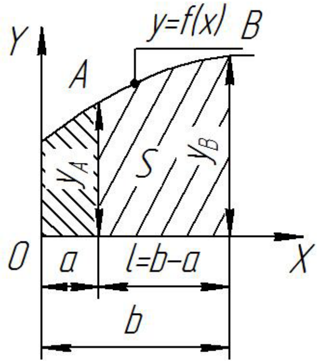

Рис. 22. Схема для расчета площади S, ограниченной кривой подынтегральной функции $y = f(x)$

Точное вычисление определенного интеграла с пределами a и b от функции $y = f(x)$ можно произвести при аналитическом задании последней. Вычисление площади под любой замкнутой кривой сводится к суммированию составляющих ее простых площадей.

Для случаев, когда функция неинтегрируемая или она задана только графически, определенный интеграл вычисляется по приближенным формулам.

Формулы для приближенного вычисления определенных интегралов называются формулами квадратур. В ТК формула квадратуры называется правилом. В ТК наибольшее распространение получили:

1. Правило трапеции.
2. Правило Симпсона.
3. Правило Чебышева.

12. Вычисление определенного интеграла по правилу трапеции

По правилу трапеции основание площади S (рис. 23), представляющей собой численное значение определенного интеграла, делится на равные части Δl, ограниченные ординатами y_0, y_1, y_2, y_3,..., y_n.

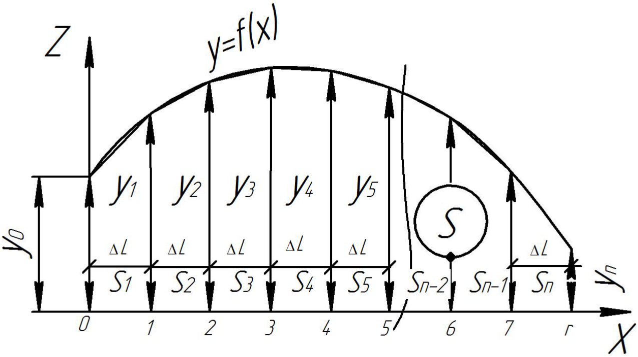

Рис. 23. Схема для расчета определенного интеграла по правилу трапеции

Действительная подынтегральная кривая $y = f(x)$ заменяется ломаной линией, проходящей через вершины ее ординат. Таким образом, действительная площадь S вычисляется как сумма площадей трапеций S_1, S_2, S_3,..., S_n, определяемых в зависимости от ограничивающих ординат и длин оснований по формулам:

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{\Delta L}{2}\left(y_0 + y_1\right); \\ S_2 = \dfrac{\Delta L}{2}\left(y_1 + y_2\right); \\ \qquad \ldots \\ S_n = \dfrac{\Delta L}{2}\left(y_{n-1} + y_n\right). \end{cases} \tag{47}$$

Тогда площадь S:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$

или

$$S = \Delta L\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + \frac{y_n}{2}\right), \tag{48}$$

где ΔL – интервал между смежными ординатами;

n – число площадок с одинаковыми основаниями или номер последней ординаты, если первая крайняя принимается за нулевую (Y_0).

Между L, ΔL и n существует зависимость:

$$n = \frac{L}{\Delta L} \quad \text{или} \quad \Delta L = \frac{L}{n}. \tag{49}$$

При этом число ординат по правилу трапеции будет $n + 1$.

На завершающей стадии расчетов зависимость для определения площади S по правилу трапеции принимает вид:

$$S = \Delta L \left(\sum_{i=0}^{n} y_i - \frac{y_0 - y_n}{2} \right) = \Delta L \cdot \sum y, \tag{50}$$

где $\sum y$ – исправленная сумма ординат.

$$\sum y = \sum{}' - \Delta \sum, \tag{51}$$

где $\sum{}' = \sum_{i=0}^{n} y_i$ – сумма всех ординат от y_0 до y_n;

$\Delta \sum = \dfrac{y_0 + y_n}{2}$ – полусумма крайних ординат y_0 и y_n, называемая поправкой правила трапеции.

Таким образом, для определения площади S по правилу трапеции необходимо просуммировать все равноотстоящие ординаты y_i, вычислить из полученной суммы поправку $\Delta\sum$ и умножить полученное выражение на ΔL.

На практике расчет площади S выполняется по следующей схеме, приведенной в табл. 3.

Таблица 3

№ ординат	Значение ординат
i	y_i
0	y_0
1	y_1
2	y_2

Окончание табл. 3

№ ординат	Значение ординат
3	y_3
…	…
n	y_n
Сумма ординат	$\sum\limits_{i=0}^{n} y_i = \sum{}'$
Поправка	$\Delta\sum = \dfrac{y_0 + y_n}{2}$
Исправленная сумма	$\sum = \sum\limits_{i=0}^{n}{}' y_i - \Delta\sum;$ $\sum = \sum{}' \Delta\sum$
Площадь S	$S = \Delta L \sum$

13. Правило Симпсона (ПС)

По ПС действительная кривая подынтегральной функции заменяется параболой второй степени, проходящей через вершины равноотстоящих ординат. По ПС основание площади под кривой ABC делится на четное число частей с одинаковыми основаниями ΔL (рис. 24).

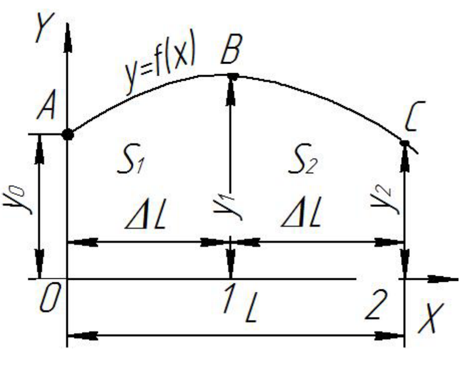

Рис. 24. Схема для расчета площади S подынтегральной кривой по правилу Симпсона

Для каждой пары площадок действительная кривая ABC, соответствующая зависимости $y = f(x)$, заменяется параболой, проходящей через вершины ординат y_0, y_1, y_2.

Ординаты этой кривой, аппроксимирующей заданную кривую ABC, будут определяться уравнением:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \tag{52}$$

Площадь S, ограниченная этой кривой, будет равна:

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \int\limits_0^{2\Delta L} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) \mathrm{d}x = a_0 2\Delta L + a_1 \frac{4\Delta L^2}{2} + a_2 \frac{8\Delta L^3}{3} = \\ &= -a_0 2\Delta L + a_1 \frac{\left(2\Delta L\right)^2}{2} + a_2 \frac{\left(2\Delta L\right)^3}{3} = \frac{\Delta L}{3}\left(6a_0 + 6a_1 \Delta L + 8a_2 \Delta L^2\right). \end{aligned} \tag{53}$$

Для определения коэффициентов a_0, a_1 и a_2 в (53) используем следующие граничные условия:

1) $x_0 = 0;\;\; a_0 = y_0;$

2) $x_1 = \Delta L;\;\; y_1 = a_0 + a_1 \Delta L + a_2 \Delta L^2;$

3) $x_2 = 2\Delta L;\;\; y_2 = a_0 + a_1 2\Delta L + a_2 4\Delta L^2.$

После преобразований, выполненных относительно коэффициентов a_0, a_1 и a_2, получим (для $n = 2$):

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\Delta L}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right). \tag{54}$$

Проводя аналогичные преобразования для последующих двух смежных площадок, получим выражение расчета всей площади S:

$$\begin{aligned} S = \frac{\Delta L}{3}\big(&y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \\ &+ 4y_5 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\big). \end{aligned} \tag{55}$$

$$S = \frac{\Delta L}{3} \sum_{i=0}^{n} K_i y_i, \qquad (56)$$

где y_i – равностоящие ординаты подынтегральной кривой;

K_i – множитель правила Симпсона;

n_i – число площадок с основанием ΔL.

По ПС считаются суммы произведений $K_i y_i$ и умножается на $\frac{\Delta L}{3}$.

В табличном виде расчеты по ПС можно проиллюстрировать с помощью табл. 4.

Таблица 4

Схема табличного расчета определенного интеграла по ПС

№ ординаты	Ордината	Множитель K_i	Произведение $K_i y_i$
0	y_0	1	$1 \cdot y_0$
1	y_1	4	$4 \cdot y_1$
2	y_2	2	$2 \cdot y_2$
3	y_3	4	$4 \cdot y_3$
4	y_4	2	$2 \cdot y_4$
5	y_5	1	$1 \cdot y_5$
Сумма	–	–	$\sum_{i=0}^{n} K_i y_i$
Численное значение определенного интеграла $i = 0$			$S = \frac{\Delta L}{3} \sum_{i=0}^{n} K_i y_i$

14. Правило Чебышева (ПЧ)

По ПЧ при расчете определенного интеграла используются абсциссы неравноотстоящих ординат кривой подынтегральной функции. По ПЧ площадь S для любой формы кривой $y = f(x)$ можно вычислить вполне точно с помощью одной ординаты y_c, абсцисса которой x_c (рис. 25).

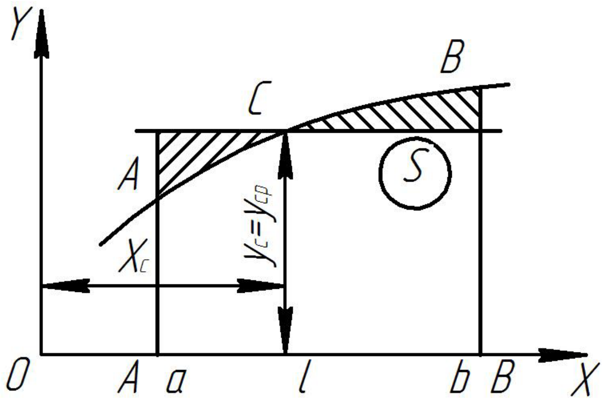

Рис. 25. Схема расчета площади S на основе использования средней ординаты y_c

Представив площадь с основанием AB в виде прямоугольника со сторонами l и $y_{ср}$, получим в точке C координаты x_c и y_c, отвечающие требованию:

$$S = l y_{ср}. \tag{57}$$

Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к определению абсцисс относительно малого количества неравноотстоящих координат $y_{i,ср}$, обеспечивающих надлежащую точность результатов. Эта задача впервые была решена П. Л. Чебышевым, который использовал интерполяционную формулу Лагранжа, позволяющую составлять целую функцию n-й степени относительно переменной x, принимающей заданные частные значения $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$.

Пример.

Рассмотрим решение поставленной задачи для простейшего случая ($n = 2$).

Пусть требуется определить площадь S с основанием AB, равным l, ограниченную кривой CD, по двум Чебышевским ординатам y_1, y_2, соответствующим абсциссам x_1 и x_2 (рис. 26).

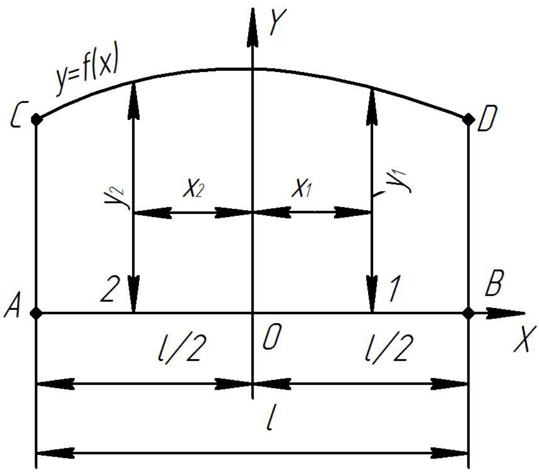

Рис. 26. Схема к выводу формулы правила Чебышева при $n = 2$

Для вычисления определенного интеграла воспользуемся следующей формулой:

$$\int_{-l/2}^{+l/2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{l}{m}(y_1 + y_2). \tag{58}$$

Заменив кривую $y = f(x)$ параболой по уравнению

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \tag{59}$$

получим два условия прохождения ее через вершины координат:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2; \\ y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2. \end{cases} \tag{60}$$

Площадь, ограниченную параболой, найдем путем вычисления определенного интеграла:

$$S = \int_{-L/2}^{+L/2} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right)\mathrm{d}x = a_0 l + \frac{a_2 l^3}{12}. \tag{61}$$

Данная площадь должна быть равна площади, получаемой из уравнения (58):

$$\frac{l}{m}\left(y_1 + y_2\right) = a_0 l + \frac{a_2 l^3}{12}. \qquad (62)$$

Подставляя в это уравнение значения ординат y_1 и y_2 из системы (60), получим:

$$\frac{l}{m}\left[2a_0 + a_1\left(x_1 + x_2\right) + a_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right] = a_0 l + \frac{a_2 l^3}{12}. \qquad (63)$$

Приравняв множители при коэффициентах в левой и правой частях, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{2L}{m} = L; \\ \dfrac{l}{m}\left(x_1 + x_2\right) = 0; \\ \dfrac{l}{m}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = \dfrac{l^3}{12}. \end{cases} \qquad (64)$$

Из первого уравнения системы (64) следует, что $m = 2$. Тогда из второго и третьего уравнений (64) получаем, что $x_1 = -x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{l}{2} = 0{,}5773\frac{l}{2}$.

После вычисления x_1 и x_2 и определения ординат по кривой $y = f(x)$ найдем численное значение определенного интеграла:

$$S = \int\limits_{-L/2}^{+L/2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{l}{m}\left(y_1 + y_2\right) = \frac{l}{2}\left(y_1 + y_2\right). \qquad (65)$$

Полученное выражение является формулой правила Чебышева для двух ординат. При n ординатах формула принимает вид:

$$S = \frac{l}{n}\left(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1} + y_n\right). \qquad (66)$$

Значения оптимальных Чебышевских абсцисс для нескольких частных значений n приведены в табл. 5.

Таблица 5

Схема расчета площади подынтегральной кривой
по правилу Чебышева

Число ординат n	Отстояние Чебышевских ординат от середины основания площади в долях половины длины
2	±0,5733
3	x; ±0,7071
4	±0,1876; ±0,7947
5	x; ±0,3745; ±0,8325
6	±0,2666; ±0,4225; ±0,8622
7	x; ±0,3239; ±0,5297; ±0,8839
8	±0,1026; ±0,4062; ±0,5938; ±0,8974
9	x; ±0,1679; ±0,5288; ±0,6010; ±0,9116

Из анализа данных видно, что Чебышевские ординаты располагаются симметрично относительно середины основания вычисляемой площади. При нечетном числе ординат одно из них проходит через середину основания.

В ТК чаще всего применяют правило Чебышева с нечетным числом координат, т. к. в этом случае начало координат лежит в плоскости мидель-шпангоута. Нулевая ордината, как наибольшая, при этом включается в расчет.

По ПЧ основание L кривой $y = f(x)$ делится на 2 равные части и от середины откладываются абсциссы x_i в соответствии с принятым числом ординат. Абсолютные значения абсцисс вычисляются по их относительным значениям путем умножения на половину длины $L/2$. Так, при n = 7 (рис. 27) абсолютные значения абсцисс вычисляются по выражениям:

$$x_1 = -x_7 = 0{,}8839\frac{l}{2}; \quad x_2 = -x_6 = 0{,}5297\frac{l}{2};$$

$$x_3 = -x_5 = 0{,}3239\frac{l}{2}; \quad x_4 = 0.$$

При этих значениях абсцисс с кривой $y = f(x)$ снимаются значения Чебышевских ординат $y_1, y_2, y_3, ..., y_7$ (рис. 27) и по формуле (67) определяется искомая площадь S под кривой $y = f(x)$.

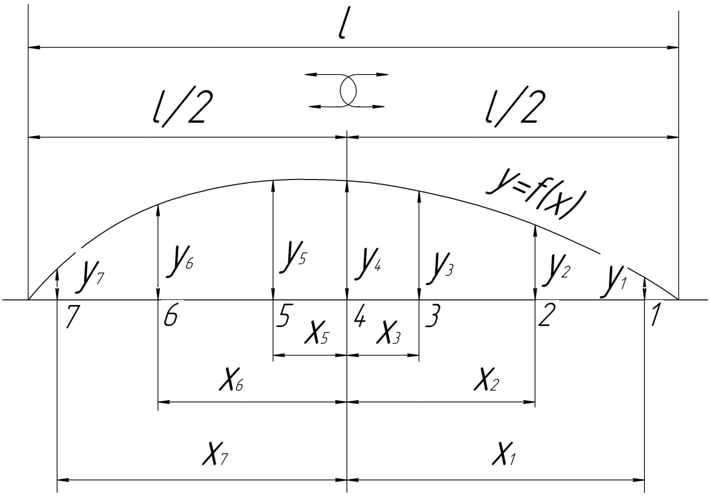

Рис. 27. Схема размещения Чебышевских ординат относительно середины основания площади при $n = 7$

15. Оценка применяемых в теории корабля формул квадратур и повышение точности правила трапеций

При выполнении расчета по теории корабля, связанного с вычислением определенных интегралов по геометрически заданным ординатам, надо, прежде всего, выбрать наиболее подходящую формулу квадратур. Для этого необходимо дать общую оценку расчетным правилам трапеций, Симпсона и Чебышева в отношении эффективности и точности.

В отношении точности вычислений по формулам квадратур следует заметить, что в соответствии с их структурой она повышается с увеличением числа расчетных ординат. Точность каждого из правил может быть сколь угодно высокой, если при вычислении не ограничиваться каким-либо заданным числом ординат.

Однако при чрезмерном увеличении числа ординат растет непроизводительная затрата труда на вычисления и понижается эффективность проведения самого расчета. Вместе с тем в инженерных расчетах и нет надобности в абсолютной точности вычислений, поскольку исходные данные для их выполнения могут быть получены не абсолютно точно, а лишь приближенно. Поэтому требуемая точность вычислений по приближенной формуле должна соответствовать возможной точности исходных данных и необходимой точности результатов расчета. В расчетах плавучести погрешность вычислений допустима до 0,5 %.

Оценка точности формул квадратур производится применительно к минимально необходимому числу ординат для данного расчета, которое бы удовлетворяло требуемой точности при использовании того или иного приближенного правила.

Чтобы повысить точность вычислений по правилу трапеций, как и по любой другой формуле квадратур, нужно увеличить число расчетных ординат. Для этого теоретические шпации по длине корпуса делят пополам, и расчеты выполняют по правилу трапеций с увеличенным числом ординат. Точность вычислений возрастает, но затрата дополнительного времени на них не всегда может быть признана целесообразной. В первую очередь это относится к судам с полными обводами, имеющими значительную цилиндрическую вставку в районе мидель-шпангоута.

В отдельных случаях точность вычислений по правилу трапеций может быть повышена без общего увеличения числа ординат путем введения добавочных исправленных и приведенных ординат.

Добавочными или промежуточными называются ординаты, вводимые в пределах теоретической шпации на тех участках, где кривая наиболее резко изменяет свой характер. Предположим, что в целом плавная кривая имеет резкое искривление всего лишь на одном первом участке (рис. 28), где ошибка будет δS.

Если уменьшить промежуток Δl вдвое, то точность вычисления повысится, но в основном за счет уменьшения ошибки на первом участке. Поэтому можно ограничиться введением дополнительной половинной ординаты на первом участке, сохранив на всех остальных длину теоретической шпации Δl.

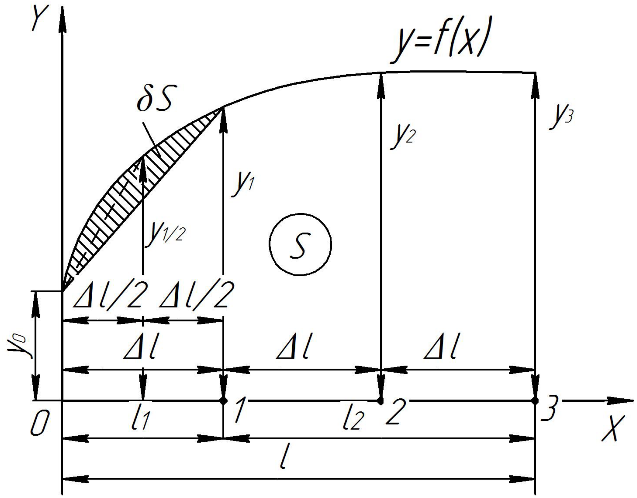

Рис. 28. Схема к выводу формулы правила трапеций
с добавочными ординатами

С введением добавочных ординат несколько изменится вид формулы правила трапеции. Чтобы вывести новую формулу, общую площадь S, ограниченную кривой $y = f(x)$, представим в виде двух площадей S_1 и S_2, для чего основание l разделим на два участка, из которых l_1 с половинными промежутками и l_2 с целыми промежутками Δl. Применяя для вычисления соответствующих площадей на двух участках основания формулу, получим:

$$S_1 + S_2 = \frac{\Delta L}{2}\left(\frac{y_0}{2} + y_{1/2} + \frac{y_1}{2}\right) + \Delta l\left(\frac{y_1}{2} + y_2 + \frac{y_3}{2}\right),$$

откуда

$$S = S_1 + S_2 = \Delta l\left(\frac{1}{4}y_0 + \frac{1}{2}y_{1/2} + \frac{3}{4}y_1 + y_2 + \frac{1}{2}y_3\right).$$

Если распространить это выражение на любое число ординат в каждом из двух участков кривой, то получим формулу правила трапеций с добавочными половинными ординатами в следующем общем виде:

$$S = \Delta l\left(\frac{y_0}{4} + \frac{y_{1/2}}{2} + \frac{y_1}{2} + \frac{y_{3/2}}{2} + \ldots + \frac{3y_k}{4} + y_{k+1} + \ldots + \frac{y_n}{2}\right). \quad (67)$$

Таким образом, в обычную формулу правила трапеций при наличии промежуточных половинных ординат вводятся множители: $\frac{3}{4}$ – для ординаты y_k на границе участков с половинными и с целыми промежутками, $\frac{1}{4}$ – для ординаты y_0 на второй границе участка с половинными промежутками, $\frac{1}{2}$ – для всех промежуточных ординат участка с половинными промежутками и для ординаты y_n на второй границе участка с целыми промежутками. Все остальные ординаты, начиная с y_{k+1}, суммируются непосредственно, как в обычном правиле трапеций.

Аналогичные формулы можно вывести для правила трапеций с четвертными и с более мелкими промежуточными ординатами, а также с добавочными ординатами не на крайних участках кривой. Геометрический принцип исправления формулы в данном случае сохраняется, и при любом способе введения добавочных ординат общая формула правила трапеций остается постоянной. Лишь только на участках с измененными промежутками к ординатам вводятся соответствующие множители, значения которых определяют подобно коэффициентам ординат в формуле (67).

Приведенными и исправленными называются условные ординаты, используемые вместо крайних нулевых или несуществующих, которые с предпоследними образуют трапеции, равновеликие площади, ограничиваемой подынтегральной кривой на крайних промежутках основания.

Исправленная ордината y_0 (рис. 29) вводится для уменьшения погрешности правила трапеций взамен равной нулю концевой ординаты, когда площадь треугольника *OA1* меньше площади S_1, ограничиваемой кривой *OCA* на первом промежутке основания. Трапеция *OBA1* строится из условия, чтобы отрезаемая от площади S_1 площадка δS_1 была равна добавляемой площадке δS_2.

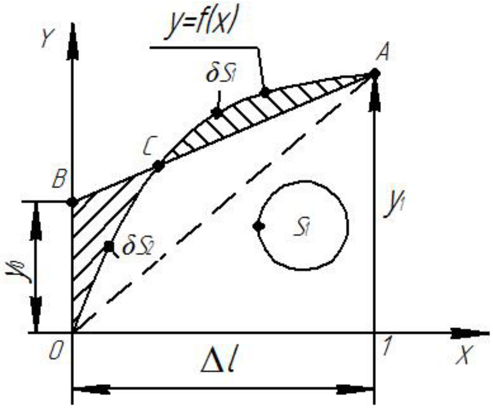

Рис. 29. Исправленная нулевая ордината y_0 для правила трапеций

Приведенные ординаты необходимо применять также в тех случаях, когда ограничивающая кривая вычисляемой площади S не доходит до конца ее основания (рис. 30).

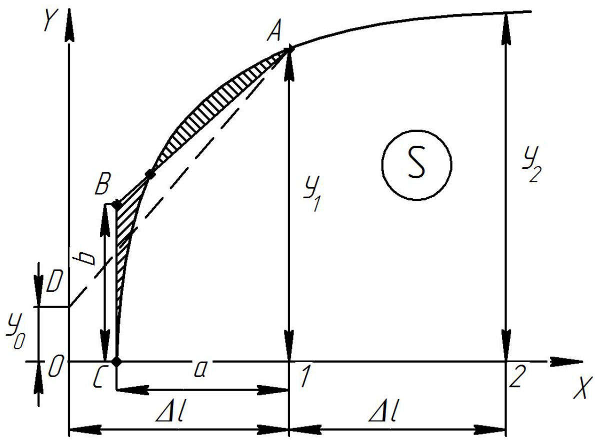

Рис. 30. Приведенная концевая ордината y_0 для повышения точности правила трапеции

Очевидно, в данном случае приведенная ордината y_0 будет определяться из равенства трапеции *CBA1*, равновеликой площади криволинейной трапеции *CA1* с основанием *a* и трапеции *ODA1* с основанием Δl. При этом приведенная ордината будет равна:

$$y_0 = (b + y_1)\frac{a}{\Delta l} - y_1. \tag{68}$$

Исправленная нулевая ордината в первом случае и приведенная к другому основанию крайняя ордината во втором случае могут быть положительными и отрицательными. В самом деле, если на рис. 25 кривая *OCA* была бы не выпуклая, а вогнутая, то площадь, ограничиваемая ею, была бы меньше площади треугольника *O1A*. При этом исправленную ординату y_0 откладывали бы вниз от оси *OX* с тем, чтобы отрицательная площадь компенсировала избыток положительной площади треугольника.

При введении отрицательных ординат следует обращать внимание на характер кривой не только первого, но и второго участков. Так, если на границе участков ограничивающая кривая имеет точку перегиба, то приведенная ордината не только не повышает, а может даже понизить точность правила трапеций. Это объясняется тем, что для вогнутой части кривой первого участка правило трапеций дает завышенное значение площади, тогда как для выпуклой части кривой второго участка – заниженное, в результате чего получается взаимная компенсация ошибок, и исправление площади одного первого участка не приводит к положительному результату.

Литература

1. Статика корабля: учебное пособие / Р. В. Борисов [и др.]. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Судостроение, 2005. – 256 с.
2. Борисов, Р. В. Расчеты по статике корабля: методическое пособие / Р. В. Борисов, И. В. Качанов, Н. Н. Юрков. – Мн.: БНТУ, 2007. – 87 с.
3. Жинкин, В. Б. Ходкость судна: методическое пособие / В. Б. Жинкин, И. В. Качанов. – Мн.: БНТУ, 2010. – 56 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

КАЧАНОВ Игорь Владимирович
КЛЮЧНИКОВ Владимир Анатольевич
ШАТАЛОВ Игорь Михайлович

ТЕОРИЯ КОРАБЛЯ. ПЛАВУЧЕСТЬ

Пособие для студентов специальности 1-37 03 02
«Кораблестроение и техническая эксплуатация
водного транспорта»

Редактор *А. С. Мокрушников*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 19.02.2021. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,14. Уч.-изд. л. 2,45. Тираж 100. Заказ 837.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.