https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-161-167

УДК 534.21

О выполнении закона сохранения энергии в теории упругих волн

Докт. физ.-мат. наук, проф. В. В. Невдах[1)]

[1)]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. В соответствии с законом сохранения энергии полная энергия замкнутой физической системы должна оставаться постоянной в любой момент времени. Энергия бегущей упругой волны состоит из кинетической энергии колеблющихся частиц среды и потенциальной энергии ее упругой деформации. В существующей теории упругих волн считается, что плотности кинетической и потенциальной энергий бегущей волны без потерь одинаковы в любой момент времени и меняются по одинаковому закону. Соответственно плотность полной энергии такой волны разная в различные моменты времени, а постоянным сохраняется только ее усредненное по времени значение. Таким образом, в существующей теории упругих волн закон сохранения энергии не выполняется. Цель настоящей работы – дать физически корректное описание этих волн. Предложено новое описание звуковой волны в идеальном газе, основанное на использовании системы волновых уравнений для возмущения скорости колебаний частиц газа, определяющего их кинетическую энергию, и для упругой деформации, определяющей их потенциальную энергию. Показано, что физически корректными решениями такой системы уравнений для бегущей звуковой волны являются гармонические решения, описывающие колебания возмущения скорости частиц газа и упругой деформации, которые сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Получено, что положения максимумов кинетической и потенциальной энергий упругой волны, описываемых такими решениями, чередуются в пространстве через каждые четверть длины волны. Установлено, что через каждые четверть периода в волне без потерь происходит полное преобразование кинетической энергии в потенциальную и обратно, при этом в каждой пространственной точке волны ее полная плотность энергии одинакова в любой момент времени, что согласуется с законом сохранения энергии. Плотность потока энергии такой бегущей упругой волны описывается выражением для вектора Умова. Сделан вывод, что бегущую звуковую волну без потерь в идеальном газе можно рассматривать как гармонический осциллятор.

Ключевые слова: упругие волны, закон сохранения энергии, волновое уравнение, возмущение скорости колебаний частиц, упругая деформация, вектор Умова

Для цитирования: Невдах, В. В. О выполнении закона сохранения энергии в теории упругих волн / В. В. Невдах // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 161–167. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-161-167

On Fulfillment of Energy Conservation Law in Theory of Elastic Waves

V. V. Nevdakh[1)]

[1)]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. In accordance with the energy conservation law, the total energy of a closed physical system must remain constant at any moment of time. The energy of a traveling elastic wave consists of the kinetic energy in the oscillating particles of the medium and the potential energy of its elastic deformation. In the existing theory of elastic waves, it is believed that the kinetic

Адрес для переписки
Невдах Владимир Владимирович
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-77-61
v.v.nev@bk.ru

Address for correspondence
Nevdakh Vladimir V.
Belarusian National Technical University
22, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-77-61
v.v.nev@bk.ru

and potential energy densities of a traveling wave without losses are the same at any moment of time and vary according to the same law. Accordingly, the total energy density of such wave is different at various moment of time, and only its time-averaged value remains constant. Thus, in the existing theory of elastic waves, the energy conservation law is not fulfilled. The purpose of this work is to give a physically correct description of these waves. A new description of a sound wave in an ideal gas has been proposed and it is based on the use of a wave equation system for perturbing the oscillation velocity of gas particles, which determines their kinetic energy, and for elastic deformation, which determines their potential energy. It has been shown that harmonic solutions describing the oscillations of the gas particles velocity perturbation and their elastic deformation, which are phase shifted by π/2, are considered as physically correct solutions of such equations system for a traveling sound wave. It has been found that the positions of the kinetic and potential energy maxima in the elastic wave, described by such solutions, alternate in space every quarter of the wavelength. It has been established that every quarter of a period in a wave without losses, the kinetic energy is completely converted to potential and vice versa, while at each spatial point of the wave its total energy density is the same at any time, which is consistent with the energy conservation law. The energy flux density of such traveling elastic wave is described by the expression for the Umov vector. It has been concluded that such traveling sound wave without losses in an ideal gas can be considered as a harmonic oscillator.

Keywords: elastic waves, energy conservation law, wave equation, perturbation of particle velocity, elastic deformation, Umov vector

For citation: Nevdakh V. V. (2021) On Fulfillment of Energy Conservation Law in Theory of Elastic Waves. *Science and Technique*. 20 (2). 161–167. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-161-167 (in Russian)

Введение

Один из фундаментальных законов природы – закон сохранения энергии, который может быть сформулирован в общем виде так: пока физическая система является замкнутой, ее полная энергия остается неизменной (постоянной) величиной в любой момент времени [1].

Считается, что закон сохранения энергии эквивалентен однородности времени, т. е. независимости всех законов, описывающих систему, от момента времени, в который рассматривается система. С математической точки зрения закон сохранения энергии эквивалентен утверждению, что система дифференциальных уравнений, описывающая динамику данной физической системы, обладает первым интегралом движения, связанным с симметричностью уравнений относительно сдвига во времени. Если время однородно, то функция Лагранжа $L(q_i, \dot{q}_i)$, описывающая рассматриваемую систему, не зависит явно от времени, поэтому полная ее производная по времени имеет вид

$$\frac{dL(q_i, \dot{q}_i)}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}_i}{dt}, \qquad (1)$$

где q_i – обобщенные координаты; $\dot{q}_i$ – производные по времени обобщенных координат системы или обобщенные скорости.

Уравнения Лагранжа, или уравнения движения такой системы, записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \qquad (2)$$

Подстановка (2) в (1) дает уравнение, в котором выражение, стоящее в скобках, по определению является энергией системы

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что полная энергия системы – постоянная величина, т. е. сохраняется в каждый момент времени.

Выполнение закона сохранения энергии является критерием справедливости различных теоретических построений в классической физике. Так как в различных разделах физики используются разные виды энергии, то и в законе сохранения энергии для этих разделов физики также фигурируют различные виды энергии. При этом смысл закона сохранения энергии не меняется – полная энергия замкнутой физической системы, равная сумме отдельных видов энергий, сохраняется в каждый момент времени.

Цель работы – показать, что в существующей в настоящее время теории упругих волн закон сохранения энергии не выполняется, и дать физически корректное описание этих волн.

Упругие колебания и волны

Упругие колебания и упругие волны рассматриваются в разделе классической (ньютоновской) механики, в которой закон сохранения энергии формулируется так: полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной. Если $U(\vec{r})$ – потенциальная энергия тела, имеющего массу m и движущегося со скоростью υ, то закон сохранения энергии (3) записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\upsilon^2}{2}+U(\vec{r})\right]=0. \quad (4)$$

В (4) выражение в скобках называется полной механической энергией материального тела, состоящей из ее кинетической энергии – первое слагаемое, и потенциальной энергии – второе слагаемое.

Рассмотрим вначале выполнение закона сохранения энергии на примере пружинного маятника, совершающего упругие колебания без затухания [2]. На маятник массой m действует сила $F = -kz$ в пределах закона упругости Гука, направленная вдоль оси Z (где k – коэффициент, характеризующий упругость пружины). Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ величина упругой деформации пружины $z_0 = a$. После снятия действия внешней силы под действием упругого напряжения маятник придет в движение, которое описывается уравнением Ньютона

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2}=-kz(t). \quad (5)$$

Решение (5), удовлетворяющее начальному условию, можно взять в виде (для простоты считаем, что начальная фаза равна 0)

$$z(t)=a\cos(\omega t). \quad (6)$$

Из (6) следует, что маятник будет совершать гармонические колебания с амплитудой a и циклической частотой ω

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (7)$$

где T – период колебаний.

Колебательная скорость маятника описывается выражением

$$\upsilon=\frac{dz(t)}{dt}=-\omega a\sin(\omega t), \quad (8)$$

а его кинетическая энергия с учетом (7) равна

$$W_k(t)=\frac{1}{2}ka^2\sin^2\omega t. \quad (9)$$

Потенциальная энергия маятника описывается выражением

$$W_p(t)=\frac{1}{2}ka^2\cos^2\omega t. \quad (10)$$

Из (9) и (10) видно, что колебания потенциальной и кинетической энергий маятника имеют одинаковые амплитуды, происходят с удвоенной частотой, по сравнению с частотой колебаний упругой деформации и колебательной скорости, и имеют сдвиг по фазе $\pi/2$. Также через каждую четверть периода колебаний происходит полное преобразование потенциальной энергии маятника в его кинетическую энергию и наоборот. Очевидно, что для полной энергии маятника можно записать

$$W=W_k(t)+W_p(t)=\frac{1}{2}ka^2=\text{const}. \quad (11)$$

То есть в соответствии с законом сохранения энергии полная механическая энергия пружинного маятника без затухания сохраняется неизменной в любой момент времени. Такой маятник можно рассматривать как классический гармонический осциллятор.

Рассмотрим упругие волны без потерь на примере звуковых волн в идеальном газе. Теория таких волн разработана давно и изложена в многочисленных научных трудах [3–10]. В существующей теории звуковые волны рассматриваются как упругие колебания частиц газа, распространяющиеся в продольном направлении от источника звука, который создает периодическое смещение частиц в этом направлении со скоростью, позволяющей изменить давление газа в некотором объеме, определяемом геометрией источника. Колебания частиц газа создают упругие деформации в этом объеме, которые, в свою очередь, обусловливают периодическое повышение и понижение давления газа относительно его начального невозмущенного значения. При этом распространения частиц газа в направлении распространения звуковой волны не происходит. В пространстве распространяется только упругая деформация сжатия и растяжения. При максимальном сжатии или растяжении частиц газа в некотором объеме их колебательная скорость и кинетическая энергия становятся равными нулю, а потенциальная энергия достигает максимального значения и определяется максимальной упругой деформацией или изменением давления газа в этом объеме. Колебательная скорость частиц газа в звуковой волне определяет их кинетическую энергию, а работа по созданию упругой деформации (или изменения давления газа в рассматриваемом объеме) определяет потенциальную энергию частиц газа этого объема.

В идеальном газе с плотностью ρ_0 и давлением P_0 источник звука создает продольное смещение частиц газа $\xi(z, t)$ вдоль оси $0Z$ в объеме $V_0 = S_0\Delta z$. Смещение частиц газа приводит к появлению в этом объеме упругой деформации, которая будет распространяться в направлении смещения. Рассматривая движение выделенного объема идеального газа в адиабатическом приближении, например [4], получают волновое уравнение для смещения

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon_s^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad (12)$$

где $\upsilon_s = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ – скорость звука; $\gamma = C_P/C_V$; C_P, C_V – теплоемкость газа при постоянном давлении и объеме соответственно.

Решение волнового уравнения (12) обычно принимается в виде

$$\xi(z, t) = A\cos\left(\omega t - kz\right). \qquad (13)$$

Подстановка (13) в (12) позволяет получить связь между величинами υ_s, ω и k

$$\upsilon_s = \frac{\omega}{k}. \qquad (14)$$

Считается, что решение (13) описывает колебания смещения частиц газа, распространяющиеся вдоль оси Z с фазовой скоростью $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\omega}{k}$, равной скорости звука (14), т. е. (13) описывает продольную звуковую волну. Эта волна обладает кинетической и потенциальной энергией.

Плотности кинетической энергии звуковой волны и потенциальной энергии определяются соответственно по формулам:

$$w_k(z, t) = \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 A^2\sin^2(\omega t - kz); \qquad (15)$$

$$\begin{aligned} w_p(z,t) &= \frac{1}{2}\gamma P_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho_0\upsilon_s^2 k^2 A^2\sin^2(\omega t - kz) = \\ &= \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 A^2\sin^2(\omega t - kz). \end{aligned} \qquad (16)$$

Следовательно, плотность полной энергии звуковой волны

$$\begin{aligned} w(z, t) &= w_k(z, t) + w_p(z, t) = \\ &= \rho_0\omega^2 A^2\sin^2(\omega t - kz). \end{aligned} \qquad (17)$$

В [2–10] из выражений (15)–(17) сделаны следующие выводы:

– кинетическая и потенциальная энергии бегущей звуковой волны без потерь одинаковы в любой момент времени;

– усредненные по времени (периоду колебаний) кинетическая и потенциальная энергии такой волны равны и постоянны

$$\overline{w}_k = \overline{w}_p = \frac{1}{4}\rho_0\omega^2 A^2 = \text{const}; \qquad (18)$$

– усредненная по времени плотность полной энергии звуковой волны есть величина постоянная

$$\overline{w} = \overline{w}_k + \overline{w}_p = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 A^2 = \text{const}. \qquad (19)$$

При этом в литературе не обсуждается практически очевидный факт, что софазные колебания $w_k(z, t)$ (15) и $w_p(z, t)$ (16) противоречат смыслу понятия «упругие колебания», так как вызывают естественные вопросы:

– куда девается энергия волны в моменты времени, когда и кинетическая, и потенциальная энергии волны одновременно становятся равными нулю, что бежит в такой волне?

– откуда появится энергия волны в последующие моменты времени?

Равно как не обсуждается также и то, что полученное выражение (17) противоречит закону сохранения энергии (11), согласно которому полная энергия звуковой волны без потерь должна оставаться постоянной в любой момент времени, а не средняя энергия этой волны за период.

Таким образом, наряду с существующими правильными представлениям об упругих колебаниях в газе, о том, что максимальная колебательная скорость частиц газа в звуковой волне достигается в моменты времени, когда упругая деформация равна нулю, и, наоборот, в моменты времени, когда колебательная скорость частиц газа становится равной нулю, упругая деформация – максимальна, существует и физически некорректное описание этих колебаний, нарушающее закон сохранения энергии. Некорректность в описании звуковых волн появилась из-за того, что для этого используется только одно волновое уравнение (12) для смещения частиц газа. Так как производная по времени от решения уравнения (13) определяет плотность кинетической энергии волны (15), а производная по координате от этого же решения – плотность потенциальной энергии волны (16), получается, что обе эти величины изменяются с течением времени по одинаковому гармоническому закону. Отсюда следует физически некорректный вывод, что максимальная колебательная скорость частиц газа и максимальная упругая деформация в звуковой волне достигаются одновременно.

Для физически корректного описания звуковых волн в идеальном газе нужно использовать систему из волновых уравнений для параметров, определяющих кинетическую и потенциальную энергию волны. Например, в [6] рассматривается баротропный поток идеального газа, линии тока которого параллельны оси Z, а скорость u, давление P, плотность ρ и температура T являются функциями только координаты z и времени t. Такой поток описывается уравнением Эйлера и уравнением неразрывности, образующими систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, в которой содержатся неизвестные u, P и ρ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z}; \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial z}(\rho u) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Для того чтобы эту систему можно было решить, необходимы еще уравнение связи между P и ρ, начальные и граничные условия. В покоящемся идеальном газе с параметрами u_0, P_0 и ρ_0 создаются малые возмущения скорости u', давления P' или плотности ρ'. Возникающее вследствие этого движение является одномерным, параллельным оси Z и зависящим только от координаты z и времени t. Ставится задача нахождения элементов этого движения. Система нелинейных уравнений (20) может быть линеаризована, если в ней пренебречь произведениями малых величин или их производных по координате, как малыми величинами высших порядков. В этом случае она принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{dP}{d\rho}\right)_0 \dfrac{\partial \rho'}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0\dfrac{\partial u'}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Так как в идеальном газе увеличение давления приводит к увеличению плотности и наоборот, то $dP/d\rho > 0$, и можно ввести обозначение

$$\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_0 = \upsilon_0^2. \tag{22}$$

Нетрудно убедиться, что υ_0 имеет размерность скорости.

Дифференцируя по времени первое уравнение системы (21) и подставляя в него второе уравнение, с учетом (22) получаем волновое уравнение для u'

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon_0^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}. \tag{23}$$

Аналогично, дифференцируя по времени второе уравнение системы (21) и подставляя в него первое уравнение, получаем волновое уравнение для ρ'

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon_0^2}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}. \tag{24}$$

Из (24) и (22) получаем такое же уравнение для P'

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon_0^2}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}. \tag{25}$$

Таким образом, малые возмущения скорости частиц газа u', его плотности ρ' и давления P' в случае идеального газа описываются одинаковыми волновыми уравнениями (23)–(25) и распространяются с одинаковой скоростью υ_0. Поскольку волна возмущений давления – это звуковая волна, то υ_0 – это скорость звука.

Возмущение давления P' (или, что то же самое, напряжения σ) в соответствии с законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{26}$$

где ε – относительная упругая деформация; E – модуль упругости газа.

Из (25) и (26) следует, что и для упругой деформации можно записать волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon_0^2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}. \tag{27}$$

Согласно [4], плотность потенциальной энергии сжатого газа определяется как работа по сжатию его единичного объема и выражается через модуль упругости и величину упругой деформации

$$w_p(z, t) = \frac{1}{2}E\varepsilon^2. \tag{28}$$

Плотность кинетической энергии колеблющегося газа может быть определена как

$$w_k(z, t) = \frac{1}{2}\rho_0 u'^2. \tag{29}$$

Для нахождения этих энергий в (28) и (29) нужно подставлять решения соответствующих волновых уравнений. Так как каждое волновое уравнение имеет несколько математически корректных решений, то для выбора правильного нужно исходить из их физического смысла. Пусть в начальный момент времени в рассматриваемом объеме существует максимальное изменение давления (напряжения) и, следовательно, максимальная упругая деформация. Очевидно, что в этот момент времени скорость колебания частиц газа равна нулю. Таким начальным условиям удовлетворяют гармонические решения волновых уравнений (27) и (23), сдвинутые по фазе на π/2:

$$\varepsilon(z, t) = \varepsilon_m \cos\left(\omega t - kz\right); \tag{30}$$

$$u'(z, t) = u'_m \sin\left(\omega t - kz\right). \tag{31}$$

Подставляя (30) в (28) и (31) в (29), соответственно получаем:

$$w_p(z, t) = \frac{1}{2}E\varepsilon_m^2 \cos^2\left(\omega t - kz\right); \tag{32}$$

$$w_k(z, t) = \frac{1}{2}\rho_0 u_m'^2 \sin^2\left(\omega t - kz\right). \tag{33}$$

Из (32) и (33) следует, что колебания плотности кинетической и потенциальной энергий звуковой волны сдвинуты по фазе относительно друг друга на π/2, а их периоды составляют половину периода колебаний деформации и скорости частиц. Также видно, что в моменты времени, когда плотность потенциальной энергии волны принимает максимальное значение $w_p^{\max} = \frac{1}{2}E\varepsilon_m^2$, плотность кинетической энергии равна нулю, а через четверть периода в моменты времени, когда плотность потенциальной энергии равна нулю, плотность кинетической энергии становится максимальной – $w_k^{\max} = \frac{1}{2}\rho_0 u_m'^2$. Это может быть только тогда, когда происходит полное преобразование потенциальной энергии в кинетическую и наоборот, и выполняется условие

$$w_p^{\max} = \frac{1}{2}E\varepsilon_m^2 = w_k^{\max} = \frac{1}{2}\rho_0 u_m'^2. \tag{34}$$

Следовательно, плотность полной энергии звуковой волны без потерь есть величина постоянная в любой момент времени в соответствии с законом сохранения энергии

$$w = w_p(z, t) + w_k(z, t) = \frac{1}{2}E\varepsilon_m^2 = \frac{1}{2}\rho_0 u_m'^2 = \text{const}. \tag{35}$$

Из (32) и (33) также следует, что положение максимумов кинетической и потенциальной энергий звуковой волны чередуется в пространстве через каждые $\lambda/4$, т. е. такая волна действительно является бегущей. При этом в каждой точке пространства в волне без потерь полная плотность энергии одинакова.

Таким образом, бегущую звуковую волну без потерь можно рассматривать как классический гармонический осциллятор.

В соответствии с физическим смыслом понятия «плотность потока энергии» как количества энергии, протекающей через единичную площадку в единицу времени в направлении нормали к площадке, эта величина для бегущей упругой волны может быть корректно описана через плотность полной энергии волны w и ее скорость υ_s, т. е. выражением для вектора Умова

$$\vec{I} = w\vec{\upsilon}_s. \quad (36)$$

ВЫВОДЫ

1. Показано, что в существующей в настоящее время теории упругих волн нарушается закон сохранения энергии. Предложено физически корректное описание звуковой волны в идеальном газе, основанное на использовании системы волновых уравнений для возмущения скорости колебаний частиц газа, определяющего их кинетическую энергию, и для упругой деформации, определяющей потенциальную энергию частиц газа в волне. Физически корректными решениями такой системы волновых уравнений являются гармонические решения, описывающие колебания возмущения скорости частиц газа и их упругой деформации, сдвинутые по фазе на $\pi/2$.

2. В бегущей звуковой волне без потерь, описываемой такими решениями, через каждые четверть периода происходит полное преобразование кинетической энергии частиц газа в потенциальную и наоборот. Плотность полной энергии волны в соответствии с законом сохранения энергии остается постоянной в каждый момент времени.

3. Плотность потока энергии бегущей упругой волны описывается вектором Умова.

4. Бегущую звуковую волну без потерь в идеальном газе можно рассматривать как гармонический осциллятор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А. М. Прохоров. М.: Сов. энцикл., 1983. 928 с.
2. Орир, Дж. Физика / Дж. Орир. М.: Мир, 1981. Т. 1. 336 с.
3. Тимошенко, С. П. Теория упругости. 2-е изд. / С. П. Тимошенко. Л.: ОНТИ, 1937. 452 с.
4. Горелик, Г. С. Колебания и волны / Г. С. Горелик. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. 572 с.
5. Ландау, Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986. 730 с.
6. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. М.: Наука, 1978. 736 с.
7. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. М.: Наука, 1979. 384 с.
8. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике. 8-е изд. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс; пер. с англ. М.: Либроком, 2013. Т. 4: Кинетика. Теплота. Звук. 260 с.
9. Кроуфорд, Ф. С. Берклеевский курс физики / Ф. С. Кроуфорд. М.: Наука, 1984. Т. 3: Волны. 512 с.
10. Holiday, D. Fundamentals of Physics. 9th ed. / D. Holiday, R. Resnick, J. Walker // John Wiley & Sons. 2010. 1330 p.

Поступила 15.06.2020
Подписана в печать 25.08.2020
Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Prokhorov A. M. (1983) Physical Encyclopedic Dictionary. Moscow, Sovetskaya Entsyklopedia Publ. 928 (in Russian).
2. Orire J. (1967) *Fundamental Physics*. New York, Wiley.
3. Timoshenko S. P. (1937) *Elasticity Theory*. 2nd ed. Leningrad, Publishing House of Scientific and Technical Information Department. 452 (in Russian).
4. Gorelik G. S. (1959) *Oscillations and Waves.* Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature. 572 (in Russian).
5. Landau L. D., Lifshitz E. M. (1986) *Hydrodynamics*. Moscow, Nauka Publ. 730 (in Russian).
6. Loitsyanskii L. G. (1978) *Mechanics of Liguids and Gases*. Moscow, Nauka Publ. 736 (in Russian).
7. Vinogradova M. B., Rudenko O. V., Sukhorukov A. P. (1979) *The Wave Theory*. Moscow, Nauka Publ. 384 (in Russian).
8. Feynman R., Leighton R., Sands M. (2013) *The Feynman Lectures on Physics. Vol. 4: Kinetics. Heat. Sound.* 8th ed. Moscow, Librokom Publ. 260 (in Russian).
9. Crawford F. S. (1984) *Berkeley Physics Course. Vol. 3: Waves*. Moscow, Nauka Publ. 512 (in Russian).
10. Holiday D., Resnick R., Walker J. (2010) *Fundamentals of Physics*. 9th ed. John Wiley & Sons. 1330.

Received: 15.06.2020
Accepted: 25.08.2020
Published online: 30.03.2021