

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет
Кафедра «Машины и технология обработки металлов давлением»

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБ-
НОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОМД

для специальности

1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением»

Минск ◊ БНТУ ◊ 2021

Составители: А.В. Мазуренок, В.А. Томило

Перечень материалов

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по дисциплине «Математическое моделирование процессов ОМД» содержит учебную программу учебной дисциплины, материалы для теоретического и практического изучения учебной дисциплины, представленные конспектом лекций и лабораторным практикумом, контрольные вопросы к экзамену, контрольную работу, перечень основной и дополнительной литературы.

Пояснительная записка

Цели УМК – самостоятельная теоретическая и практическая подготовка, направленная на изучение студентами основ математического моделирование процессов и машин обработки металлов давлением.

Особенности структурирования и подачи учебного материала

Структурно ЭУМК по дисциплине «Математическое моделирование процессов ОМД» состоит из учебной программы дисциплины, теоретического раздела, лабораторных работ и раздела контроля знаний.

Теоретический раздел содержит основной конспект лекций учебной дисциплины. В лекционном материале рассматриваются вопросы, направленные на получение необходимых знаний в области создания методов достаточно точного количественного описания технологических процессов с учетом большого числа факторов, то есть их математического моделирования и оптимизации.

Раздел лабораторных работ направлен на изучение методов построения математических моделей технологических процессов и машин обработки материалов давлением, алгоритмов и методов исследования математических моделей, численных методов программной реализации алгоритмов исследования математических моделей.

Раздел контроля знаний, включает в себя вопросы к экзамену и контрольную работу.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК – рекомендуется изучить теоретический раздел по темам, затем выполнить необходимую подготовку для выполнения лабораторных работ, проработать контрольные вопросы, выполнить контрольную работу.

Содержание

Программа	5
Теория	17
1. Основные определения, понятия, модели и методы	17
2. Тензоры в декартовых координатах	22
3. Аппроксимация экспериментальных данных	27
4. Метод наименьших квадратов для обработки экспериментальных данных	32
5. Кинематические соотношения механики сплошных сред	37
6. Динамические соотношения механики сплошных сред	41
7. Определяющие соотношения механики сплошных сред	46
8. Краевая задача механики сплошных сред	51
Литература	53
Лабораторный практикум	54
1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ГЛАВНЫХ ВАЛОВ КРИВОШИПНЫХ МАШИН	54
1.1. Расчет усилия, допускаемого прочностью кривошипного вала	54
1.2. Методика решения трансцендентного уравнения	56
1.3. Метод отделения корней трансцендентного уравнения	56
1.4. Метод дихотомии	58
2. ЗАДАЧИ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ	60
2.1. Метод Гаусса с выбором главного элемента для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	60
2.2. Поиск главных компонентов тензоров	62
3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ	65
3.1. Интерполяция каноническим полиномом	65
3.2. Интерполяция полиномом Лагранжа	66
4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК) ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ	68
4.1. Метод наименьших квадратов со степенным базисом	68
5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ НА ОПРАВКУ ПРОШИВНОГО СТАНА	71
5.1. Постановка задачи	71
5.2. Метод средних прямоугольников	72
5.3. Метод трапеций	74
5.4. Метод Симпсона	75
6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ КАМЕРНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАГРЕВАТЕЛЬНОЙ ПЕЧИ	77
6.1. Постановка задачи	77
6.2. Метод Эйлера решения системы ОДУ	78
6.3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка решения системы ОДУ	80
7. БЕЗУСЛОВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ	82
7.1. Постановка задачи поиска оптимального угла конусности матрицы при вытяжке с утонением стенки	82
7.2. Поиск минимума функции одной переменной	83
7.3. Метод Фибоначчи	83

7.4. Метод золотого сечения	84
7.5. Метод координатного спуска	86
Литература	89
Контроль знаний	90
Контрольные вопросы	90
Контрольная работа	91
Примеры решения задач	91
Контрольные задания.....	97

Программа
Белорусский национальный технический университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
Белорусского национального
технического университета

_____ О.К. Гусев

_____ /уч.
Регистрационный № УД-_____ /уч.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ ОМД

Учебная программа учреждения высшего образования

по учебной дисциплине для специальности

1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением»

2017г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-36 01 05-2013

СОСТАВИТЕЛЬ:

А.В. Мазуренок, старший преподаватель кафедры «Машины и технология обработки металлов давлением» Белорусского национального технического университета

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

А.Н. Давидович, зав. лабораторией прокатки Государственного научного учреждения «Физико-технический институт» НАН Беларуси, кандидат технических наук;

И. А. Каштальян, профессор кафедры «Технология машиностроения» Белорусского национального технического университета, доктор технических наук, профессор

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой «Машины и технология обработки металлов давлением» Белорусского национального технического университета
(протокол № 9 от « 20 » марта 2017 г.)

Заведующий кафедрой _____

К.Е.Белявин

Методической комиссией механико-технологического факультета
Белорусского национального технического университета
(протокол № от « » _____ 2017 г.)

Председатель методической комиссии _____

Н.И.Иваницкий

Научно-методическим советом Белорусского национального технического университета (протокол № секции №1 от _____ 2017г.)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа по учебной дисциплине «Математическое моделирование технологических процессов» разработана для специальности 1 – 36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением».

Целью преподавания дисциплины является подготовка специалистов, способных использовать методы математического моделирования широкого круга инженерных задач по обработке материалов давлением с дальнейшим решением их численным методом.

Основными задачами преподавания учебной дисциплины являются:

- изучить алгоритмы и методы построения математических моделей технологических процессов и оборудования;
- ознакомить студентов с алгоритмами и методами исследования математических моделей, решением задач по применению математических моделей в системах автоматического управления технологическими процессами;
- выполнить цикл лабораторных работ по изучению алгоритмов и программной реализации численных методов исследования математических моделей технологических процессов и оборудования.

Рассматриваемый курс связан с рядом естественнонаучных, общепрофессиональных и специальных дисциплин: «Математика», «Физика», «Механика материалов», «Информатика», «Прикладная информатика и компьютерное проектирование», «Теоретическая механика», «Теория механизмов, машин и манипуляторов», «Теория обработки металлов давлением», «Расчеты и конструкции нагревательных устройств».

В результате освоения курса «Математическое моделирование технологических процессов» студент должен:

знать:

- методы построения математических моделей технологических процессов и машин обработки материалов давлением;
- алгоритмы и методы исследования математических моделей;
- численные методы программной реализации алгоритмов исследования математических моделей.

уметь:

- построить математическую модель процесса и оборудования;
- выбрать определенный алгоритм вычислительной математики для описания построенной модели;
- осуществить программную реализацию выбранного алгоритма;
- произвести численный расчет различных характеристик исследуемого технологического процесса или оборудования.

владеть:

- методиками построения математических моделей процессов обработки материалов давлением;
- алгоритмами и методами вычислительной математики.

Освоение данной учебной дисциплины обеспечивает формирование следующих компетенций:

- АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.
- АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.
- АК-3. Владеть исследовательскими навыками.
- АК-4. Уметь работать самостоятельно.
- АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).
- АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.
- АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.
- АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.
- АК-10. Использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности.
- АК-11. Применять соответствующий физико-математический аппарат, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в физике, химии, экологии для решения проблем, возникших в ходе профессиональной деятельности.
- СЛК-6. Уметь работать в коллективе.
- СЛК-7. Самостоятельно приобретать и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности.
- ПК-3. Выявлять причины неоптимальности технологического процесса производства и разрабатывать пути их устранения на основе анализа показателей работы объектов производства и технического состояния оборудования.
- ПК-6. Проводить технические разработки и на их основе принимать на современном уровне инженерные решения по уменьшению материало- и энергоёмкости производства.
- ПК-14. Профессионально эксплуатировать современное оборудование и приборы.
- ПК-23. На научной основе организовывать свой труд, самостоятельно оценивать результаты своей деятельности.
- ПК-30. Владеть современными средствами инфокоммуникаций.
- ПК-35. Анализировать перспективы развития новых технологий обработки металлов давлением, соответствующего оборудования и технологической оснастки.

Согласно учебным планам на изучение учебной дисциплины отведено:

- для очной формы получения высшего образования всего 150 ч., из них аудиторных - 68 часов;
- для заочной формы получения высшего образования всего 150 ч., из них аудиторных - 16 часов;
- для заочной формы получения высшего образования интегрированного со средним специальным образованием всего 150 ч., из них аудиторных - 16 часов.

Распределение аудиторных часов по курсам, семестрам и видам занятий приведено ниже.

Таблица 1.

Очная форма получения высшего образования					
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма текущей аттестации
4	8	18	50		экзамен

Таблица 2.

Заочная форма получения высшего образования					
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма текущей аттестации
5	10	2	12	2	экзамен

Таблица 3.

Заочная форма получения высшего образования интегрированного со средним специальным образованием					
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма текущей аттестации
3	6	2	12	2	экзамен

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Тема 1.1. Основные определения, понятия, модели и методы курса

Определения математического моделирования. Основные понятия и методы механики сплошной среды. Краевые задачи. Механические граничные условия. Смешанные условия на примере внешнего трения при обработке металлов давлением. Методы решения краевых задач.

Раздел II. ТЕНЗОРЫ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Тема 2.1. Основные понятия и задачи тензорного анализа

Основные задачи тензорного анализа. Ортогональный базис. Правила Эйнштейна. Преобразования координат. Определение тензора. Действия над тензорами.

Тема 2.2. Связь задач линейной алгебры с задачами тензорного анализа

Проблема поиска главных направлений и главных компонент тензоров. Инварианты тензора. Представление тензора в матричном виде. Проблема поиска собственных значений и собственных векторов матриц.

Раздел III. АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Тема 3.1. Интерполяция зависимостей

Определения аппроксимации, интерполяции и экстраполяции. Задачи интерполяции. Интерполяция каноническим полиномом. Интерполяция полиномом Лагранжа. Интерполяция полиномом Ньютона.

Тема 3.2. Методы наименьших квадратов для обработки экспериментальных данных

Определения методов наименьших квадратов. Общий алгоритм. Метод наименьших квадратов со степенным базисом. Линейный вариант метода наименьших квадратов.

Раздел IV. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВНУТРЕННЕГО МЕХАНИЗМА ПРОЦЕССА ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Тема 4.1. Кинематические соотношения механики сплошной среды

Два подхода к описанию движения сплошной среды. Движение материальных частиц. Тензоры конечных деформаций. Тензор малой деформации.

Тема 4.2. Динамические соотношения механики сплошной среды

Внешние силы в механике сплошных сред. Внутренние напряжения. Тензор напряжений Коши. Законы сохранения.

Тема 4.3. Определяющие соотношения механики сплошной среды

Линейно-упругая среда. Линейно-вязкая среда. Теория малых упруго-пластических деформаций. Теория вязкопластического течения. Статическая задача для упругой однородной изотропной среды.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
очная форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	8 семестр							
1.	Общие вопросы математического моделирования							
1.1	Основные определения, понятия, модели и методы курса	2			6			
2.	Тензоры в декартовых координатах							
2.1.	Основные понятия и задачи тензорного анализа	2			4			
2.2.	Связь задач линейной алгебры с задачами тензорного анализа	2			6			
3.	Аппроксимация экспериментальных данных							
3.1.	Интерполяция зависимостей	4			8			
3.2.	Методы наименьших квадратов для обработки экспериментальных данных	2			6			
4.	Математическая модель внутреннего механизма процесса обработки материалов давлением							
4.1.	Кинематические соотношения механики сплошной среды	2			6			
4.2.	Динамические соотношения механики сплошной среды	2			6			
4.3.	Определяющие соотношения механики сплошной среды	2			8			
	Итого за семестр	18			50			экзамен
	Всего аудиторных часов				68			

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
заочная форма получения высшего образования¹

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний	
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	10 семестр								
2.	Тензоры в декартовых координатах								
2.1.	Основные понятия и задачи тензорного анализа	2	1					Контрольная работа	
3.	Аппроксимация экспериментальных данных								
3.1.	Интерполяция зависимостей				4				
3.2.	Методы наименьших квадратов для обработки экспериментальных данных		1		4			Контрольная работа	
4.	Математическая модель внутреннего механизма процесса ОМД								
4.3.	Определяющие соотношения механики сплошной среды				4				
	Итого за семестр	2	2		12			экзамен	
	Всего аудиторных часов	16							

¹ Темы учебного материала, не указанные в Учебно-методической карте, отводятся на самостоятельное изучение студентом.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
заочная форма получения высшего образования интегрированного со средним специальным образованием²

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний	
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	6 семестр								
2.	Тензоры в декартовых координатах								
2.1.	Основные понятия и задачи тензорного анализа	2	1					Контрольная работа	
3.	Аппроксимация экспериментальных данных								
3.1.	Интерполяция зависимостей				4				
3.2.	Методы наименьших квадратов для обработки экспериментальных данных		1		4			Контрольная работа	
4.	Математическая модель внутреннего механизма процесса ОМД								
4.3.	Определяющие соотношения механики сплошной среды				2				
	Итого за семестр	2	2		12			экзамен	
	Всего аудиторных часов	16							

² Темы учебного материала, не указанные в Учебно-методической карте, отводятся на самостоятельное изучение студентом.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Список литературы

Основная литература

1. Гунн, Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением / Г.Я. Гунн. - М.: Металлургия, 1980. - 456 с.
2. Гунн, Г.Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением / Г.Я. Гунн. - М.: Металлургия, 1983.- 352 с.
3. Колмогоров, В.Л. Механика обработки металлов давлением / В.Л. Колмогоров. - М.: Металлургия, 1986.- 688 с.
4. Мазурёнок, А.В. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением : учебно-методическое пособие по дисциплине «Математическое моделирование технологических процессов» для студентов специальности 1-36 01 05 «Машины и технология обработки металлов давлением» / А.В. Мазурёнок.- Минск : БНТУ, 2014.- 80с.
5. Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А.Попов. - М.: Машиностроение, 1977.- 423 с.
6. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл; Пер. с англ. - М.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1956.- 407 с.

Дополнительная литература

7. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков.- М.: Наука, 1987.- 600 с.
8. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. - М.: Мир, 1987.- 524 с.
9. Турчак, Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак. - М.: Наука, 1987.- 320 с.
10. Мудров, А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль / А.Е. Мудров. – Томск: МП "Раско", 1991.- 272 с.

Средства диагностики результатов учебной деятельности

Оценка уровня знаний студента производится по десятибалльной шкале в соответствии с критериями, утвержденными Министерством образования Республики Беларусь.

Для оценки достижений студента рекомендуется использовать следующий диагностический инструментарий:

- устный и письменный опрос во время практических занятий;
- проведение текущих контрольных работ (заданий) по отдельным темам;
- защита выполненных на практических и лабораторных занятиях индивидуальных заданий;
- защита выполненных в рамках самостоятельной работы индивидуальных заданий;

- собеседование при проведении индивидуальных и групповых консультаций;
- сдача экзамена.

Перечень тем практических занятий

1. Решение задач тензорного анализа.
2. Линейный вариант метода наименьших квадратов.

Перечень тем лабораторных работ

1. Математическая модель для расчета главных валов кривошипных машин. Методика решения трансцендентных уравнений.
2. Метод отделения корней трансцендентного уравнения.
3. Метод дихотомии решения трансцендентного уравнения.
4. Метод Гаусса с выбором главного элемента для решения системы линейных алгебраических уравнений.
5. Вычисление собственных значений матриц.
6. Решение задач тензорного анализа.
7. Интерполяция экспериментальных данных каноническим полиномом.
8. Интерполяция экспериментальных данных полиномом Лагранжа.
9. Интерполяция экспериментальных данных полиномом Ньютона.
10. Метод наименьших квадратов со степенным базисом для обработки экспериментальных данных.
11. Линейный вариант метода наименьших квадратов.
12. Математическая модель для определения давления на оправку прошивного стана.
13. Метод средних прямоугольников вычисления определенных интегралов.
14. Метод трапеций вычисления определенных интегралов.
15. Метод Симпсона вычисления определенных интегралов.
16. Математическая модель работы камерной электрической нагревательной печи.
17. Метод Эйлера решения задачи Коши.
18. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка решения задачи Коши.
19. Задача поиска оптимального угла конусности матрицы при вытяжке с утонением стакана.
20. Метод золотого сечения для оптимизации функции одной переменной.
21. Задача поиска оптимального значения угла наклона стенки клиновой полости, обеспечивающего минимальное усилие холодного прессования полосы. Метод координатного спуска решения этой задачи.

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- решение индивидуальных заданий (задач);

- подготовка сообщений, тематических докладов, презентаций по заданным темам;
- составление тематической подборки литературных источников, интернет-источников;
- проработка тем (вопросов), вынесенных на самостоятельное изучение;
- контролируемая самостоятельная работа в виде решения задач в аудитории во время проведения лабораторных занятий;
- самостоятельная работа в виде выполнения индивидуальных расчетных заданий;
- выполнение контрольной работы по индивидуальным заданиям, в том числе разноуровневым заданиям.

Теория

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПОНЯТИЯ, МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

1.1 Определения математического моделирования

Математическое моделирование – это приближенное описание какого-либо класса явлений, выраженное с помощью математических символов и соотношений, с целью его познания и оптимизации.

Математическое моделирование технологического процесса обработки металлов давлением – это, в сущности, сведение исследования процесса пластической деформации обрабатываемого тела к анализу решения некоторой краевой задачи математической физики, т.е. к изучению распределения напряжений и деформаций, температурных полей, условий разрушения.

1.2 Основные понятия дисциплины

В основе современной теории обработки металлов давлением лежат основные понятия и методы механики сплошных сред, которая использует следующие абстрактные понятия [1].

Материальная точка – это тело пренебрежимо малых размеров, но конечной массы.

Роль материальной точки может играть центр инерции системы материальных точек, в котором считается сосредоточенной масса всей системы.

Абсолютно твердое тело – это совокупность материальных точек, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга.

Понятие абсолютно твердого тела допустимо в том случае, если можно пренебречь деформацией этого тела под действием приложенных нагрузок (инструмент).

Сплошная среда – это совокупность материальных точек, для которых допустимо изменение взаимного расположения.

К сплошным средам относятся твердые деформируемые, жидкие и газообразные тела, абстрактно представляемые в отвлеченных моделях идеально упругого тела, пластического тела, идеальной жидкости, вязкой жидкости, идеального газа и т.д. В теории ОМД сплошными средами описываются заготовки практически во всех процессах и инструмент в специальных процессах обработки материалов давлением.

Материальная частица – это элемент объема пренебрежимо малых размеров.

Движение материальной частицы описывается векторами перемещения, скорости, ускорения. В целом движение сплошной среды – бесконечного множества материальных частиц – описывается соответствующими векторными полями – полем вектора перемещения, полем вектора скорости, полем вектора ускорения.

Основной мерой взаимодействия тел или частей тела в механике является сила. Как правило, в механике сплошных сред рассматриваются распределенные силы, интенсивность которых называется *напряжением*. Напряженное состояние сплошной среды описывается тензорными полями.

В качестве основной гипотезы вводится

гипотеза о сплошности, которая гласит: «Реальные тела рассматриваются как материальный континуум, заполняющий пространство непрерывно».

Применение гипотезы о сплошности приводит нас к понятию области, заполненной сплошной средой.

Область D – это совокупность точек пространства, характеризуемая двумя свойствами:

- 1) если некоторая точка M принадлежит области, то все точки достаточно близкие к M , тоже принадлежат области;
- 2) любые две точки области можно соединить ломанной линией, целиком лежащей внутри области.

Граница области S представляет собой совокупность точек, в любой окрестности каждой из которых есть точки, как принадлежащие области, так и не принадлежащие ей.

Границей плоской области может быть замкнутая кривая, или совокупность нескольких замкнутых кривых. Границей пространственной области может быть одна или несколько замкнутых поверхностей. Будем предполагать, что кривые или поверхности, ограничивающие область, либо гладкие либо кусочно-гладкие.

В механике сплошных сред скаляры, векторы и тензоры, как правило, являются функциями координат и времени. Будем предполагать, что эти функции непрерывно дифференцируемы достаточное число раз по указанным переменным и, как следствие, ограничены вместе с производными в любой конечной области, заполненной сплошной средой.

1.3 Понятие краевой задачи

Математическая модель внутреннего механизма процесса ОМД представляется *тремя группами уравнений*: кинематическими зависимостями, законами сохранения и определяющими соотношениями.

Они не описывают условий взаимодействия тела с окружающей средой, его начального состояния. В связи с этим необходимо дополнительно рассматривать совокупность данных, определяющих начальное состояние тела (*начальные условия*) и описывающих влияние окружающей среды на протекание в теле процесса (*граничные условия*). Вместе они образуют условие единственности решения рассматриваемой задачи, объединяясь в понятие *краевых условий*. При этом имеются в виду «края» той пространственно-временной области, в условиях которой происходит исследуемый процесс. В результате мы приходим к понятию краевой задачи.

| Поставить *краевую задачу* о движении сплошной среды в области D с

границей S означает выбрать математическую модель среды, т.е. записать соответствующую замкнутую систему уравнений, и сформулировать начальные и граничные условия.

К начальным условиям относятся уравнения, описывающие распределение искомых давлений, температур, скоростей в начальный момент времени. В некоторых случаях одних только начальных условий вполне достаточно для выделения определенного решения (например, течение в неограниченной области). Примером задания начальных условий является широко используемая гипотеза о первоначальном ненапряженном состоянии.

Условия на границе S (известной или неизвестной при любом времени t) можно разделить на *механические* и *температурные*. К последним относятся уравнения, описывающие распределение температуры или условие теплоотдачи на границе тела.

1.4 Механические граничные условия

В механике различают три рода механических граничных условий.

Условия I рода – *динамические* граничные условия, при которых на границе тела S задают вектор поверхностных напряжений $\vec{\sigma}^n$, как известную функцию точки границы M и времени t :

$$\vec{\sigma}^n|_S = \vec{f}(M, t), \quad M \in S.$$

Так, при движении сплошной среды можно рассматривать поверхности, называемые свободными, на которых поверхностные напряжения сводятся просто к атмосферному давлению.

Если среда находится в равновесии, то вышеприведенные условия не зависят от времени t и называются *статическими*.

Условия II рода – *кинематические* граничные условия, при которых на границе тела S задают вектор перемещений \vec{u} или скорости \vec{v} , как известную функцию точки границы M и времени t :

$$\vec{u}|_S = \vec{f}(M, t) \quad \text{или} \quad \vec{v}|_S = \Phi(M, t), \quad M \in S.$$

В механике сплошной среды часто применяют в качестве кинематических граничных условий условия «прилипания», при которых отсутствует проскальзывание материальных частиц по касательной к границе:

$$\begin{cases} u_{\text{среды}} = u_{\text{пов.}} \\ v_{\text{среды}} = v_{\text{пов.}} \end{cases}$$

Условия III рода – *смешанные* граничные условия, при которых граница тела S состоит из двух частей $S = S_1 \cup S_2$, и на одной части границы задают вектор перемещений \vec{u} или скорости \vec{v} , как известную функцию точки границы M и времени t , а на другой части – вектор поверхностных напряжений $\vec{\sigma}^n$, как известную функцию точки границы M и времени t :

$$\vec{u}|_{S_1} = \vec{f}_1(M, t) \quad \text{или} \quad \vec{v}|_{S_1} = \Phi_1(M, t), \quad M \in S_1;$$

$$\vec{\sigma}^n|_{S_2} = \vec{f}_2(M, t), \quad M \in S_2.$$

1.5. Смешанные граничные условия (на примере внешнего трения)

Для ОМД характерно трение скольжения, которое по своей природе существенно отличается от трения скольжения в узлах машин.

Рассмотрим элементарную площадку, расположенную на контактной поверхности, с нормалью \vec{n} (рис. 1.1). Вектор поверхностных напряжений $\vec{\sigma}^n$, действующий на площадке, представим в виде суммы двух векторов, вектора нормального давления \vec{p} и вектора напряжения трения $\vec{\tau}$:

$$\vec{\sigma}^n = \vec{p} + \vec{\tau}.$$

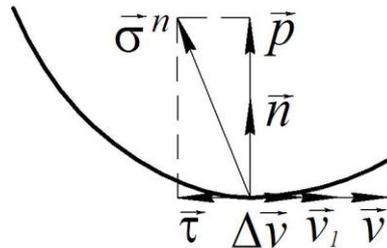


Рис. 1.1. Нормальные и касательные напряжения на контактной поверхности

Вектор \vec{p} направлен по внутренней нормали к поверхности, его модуль p равен нормальной силе, действующей на единицу площади. Вектор $\vec{\tau}$ лежит в плоскости, касательной к поверхности, и направлен в сторону, противоположную вектору скольжения частиц металла относительно инструмента. Пусть \vec{v} – скорость частицы, \vec{v}_1 – скорость инструмента на рассматриваемой площадке, $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_1$ – скорость скольжения. Тогда

$$\tau = -\tau \frac{\Delta v}{|\Delta v|} \Big|_{\text{на поверхности контакта металла и инструмента}},$$

где τ – модуль вектора напряжения трения; обычно называется просто напряжением трения.

Для определения τ практически используют два упрощенных закона:
– закон Амонтона-Кулона:

$$\tau = \mu p, \quad \text{где } \mu \text{ – коэффициент трения и}$$

– закон Прандтля (Зибеля)

$\tau = f \sigma_s$, где σ_s – предел текучести обрабатываемого материала, а коэффициент f тоже часто условно называют коэффициентом трения.

Первое уравнение обычно используют для описания внешнего трения при холодной обработке металлов давлением, а второе – при горячей.

1.6 Методы решения краевых задач

После постановки краевой задачи необходимо перейти к математическому исследованию процесса. Для этого нужно получить *решение краевой задачи* – точное или приближенное.

Как правило, точное (*аналитическое*) решение удается получить при самой упрощенной постановке задачи для наиболее грубых и несложных моделей. На практике большие трудности связаны с описанием реологических свойств среды, моделирующей реальные свойства металлов и сплавов, условий трения и теплоотдачи на контактной поверхности тела. Все это приводит к необходимости применения *приближенных методов* решения задач с использованием вычислительной техники.

Однако нет оснований полагать, что приближенные методы целиком вытесняют аналитические. Точные аналитические решения, полученные для некоторых идеализированных задач (например, некоторые решения, полученные методом линий скольжения), позволяют полнее описать механизм изучаемого процесса, его зависимость от основных параметров. Это в свою очередь дает возможность лучше отработать алгоритм приближенного метода.

Точные решения можно использовать в качестве тестов, при отладке компьютерных программ, а также для контроля точности расчетов. Таким образом, приближенные и аналитические методы решения краевых задач должны разумно сочетаться при исследовании технологических процессов. И все же при всех оговорках приближенные методы решения краевых задач можно считать в настоящее время наиболее перспективным средством моделирования процессов обработки металлов давлением.

Основные проблемы, возникающие при численном моделировании:

- 1) дать четкое определение схемы приближенного метода;
- 2) сформулировать условия существования решения, его единственности и сходимости;
- 3) обосновать оценку погрешности приближенного решения.

Эти проблемы удастся решать в рамках *функционального анализа* – одного из наиболее быстро развивающихся разделов современной математики.

Приближенных методов решения краевых задач теории обработки металлов давлением великое множество. Назовем только некоторые группы [3]:

- *итерационные методы;*
- *проекционные методы;*
- *методы разделения переменных;*
- *вариационные методы;*
- *методы теории функции комплексного переменного и теории комплексного потенциала*

и т.д.

2. ТЕНЗОРЫ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

2.1 Основные задачи тензорного анализа

В механике сплошных сред изложение теории напряжений и деформаций, изучение связи между ними, как правило, проводится с применением *тензорного анализа* [2].

Основными задачами тензорного анализа являются

1. Изучить влияние выбора системы координат на представление физических объектов.
2. Выделить так называемых *инварианты*, т.е. величины, которые не изменяют свое значение при переходе от одной системы координат к другой.
3. Изложить правила преобразования компонентов вектора или тензора при переходе от одной системы координат к другой.
4. Записать физические законы в *ковариантном виде*, т.е. уравнения должны сохранять свой вид и форму при произвольных преобразованиях координат.

2.2 Ортогональный базис

Выберем три взаимно ортогональных направления и отложим на них три вектора единичной длины $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, для которых выполняются соотношения

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0.$$

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называются *ортами*, если их длины равны единице, и они попарно перпендикулярны. Будем говорить, что они образуют *ортогональный базис* в рассматриваемом трехмерном пространстве, причем, если имеет место зависимость $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, то базис называется *правым*, если же $\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, то – *левым*.

Как правило, в дальнейшем будем использовать правый базис.

Соответствующая базису система координатных осей x_1, x_2, x_3 называется *ортогональной прямолинейной (декартовой) системой координат*.

Возьмем произвольный ортогональный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Любой вектор \vec{a} может быть разложен по базисным ортам, т.е. можно записать

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3.$$

Величины a_1, a_2, a_3 называются *компонентами* вектора \vec{a} , они представляют собой проекции вектора на оси x_1, x_2, x_3 .

2.3 Правила Эйнштейна

В дальнейшем будут часто встречаться выражения с индексами – верхними и нижними, например $a_i, b_{ik}, c_m^i, e_{jl}^{ik}$ и т.д.

Целесообразно следуя Эйнштейну, ввести правила сокращенной записи таких выражений.

1. Каждый буквенный индекс, встречающийся в одночлене один раз, может принимать значения 1, 2, 3.
2. По дважды повторяющемуся в одночлене буквенному индексу проводится суммирование от 1 до 3.

Теперь пользуясь правилами Эйнштейна, приведем в сжатой форме обозначение вектора $\vec{a} = (a_i)$ и правила действия над векторами, представленными своими компонентами:

сложение векторов $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = (a_i + b_i)$;

умножение вектора на скаляр $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) = (\lambda a_i)$;

скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i$;

векторное произведение векторов $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

2.4 Преобразования координат

Рассмотрим некоторый базис, образованный тройкой взаимно ортогональных векторов – ортов \vec{e}_i . Повернем базис в пространстве, оставим начало координат (точку O) неподвижным (рис. 2.1). Обозначим символом \vec{e}'_i орты, занявшие новое положение.

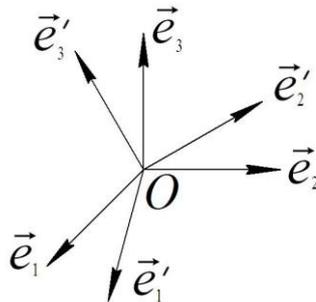


Рис. 2.1 Поворот базиса в пространстве

В результате мы получим две системы координат – «старую» (без штрихов) с ортами \vec{e}_i и «новую» (со штрихами) с ортами \vec{e}'_i , причем

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k; \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \quad (2.2)$$

Введем таблицу косинусов девяти углов, составленных новыми осями координат со старыми. Назовем ее таблицей направляющих косинусов

	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
\vec{e}'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
\vec{e}'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Из элементов таблицы косинусов составим матрицу, которую будем называть *матрицей Якоби*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Здесь α_{ik} - косинус угла между i -тым ортом «штрихованным» и k -тым «нештрихованным»: $\alpha_{ik} = \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}_k) = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_k$.

В связи с этим разложение нового орта \vec{e}'_i по старым ортам \vec{e}_k имеет следующий вид:

$$\vec{e}'_i = \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}_k) \vec{e}_k = \alpha_{ik} \vec{e}_k. \quad (2.3)$$

Отсюда с учетом (2.2) вытекают следующие свойства матрицы Якоби:

1. Сумма квадратов элементов любой строки равна единице.
2. Сумма попарных произведений соответствующих элементов, находящихся в различных двух строках, равна нулю.

Разложение «нештрихованного» орта \vec{e}_k по «штрихованным» \vec{e}'_i имеет вид:

$$\vec{e}_k = \cos(\vec{e}_k, \vec{e}'_i) \vec{e}'_i = \alpha_{ik} \vec{e}'_i. \quad (2.4)$$

Отсюда с учетом (2.1) вытекают следующие свойства матрицы Якоби:

3. Сумма квадратов элементов любого столбца равна единице.
4. Сумма попарных произведений соответствующих элементов, находящихся в различных двух столбцах, равна нулю.

Пятое свойство матрицы Якоби следует из несжимаемости трехмерного пространства.

5. Определитель матрицы Якоби равен единице.

2.5. Определение тензора

Допустим, что нам задан некоторый вектор \vec{a} и, следовательно, известны его компоненты a_k в старом базисе \vec{e}_k . Рассмотрим, каким образом изменятся компоненты вектора \vec{a} с переходом к новому базису.

$$\text{Имеем с учетом (2.4)} \quad \vec{a} = a_k \vec{e}_k = a_k (\alpha_{ik} \vec{e}'_i) = (\alpha_{ik} a_k) \vec{e}'_i.$$

В этом преобразовании мы сначала выразили старые орты \vec{e}_k через новые \vec{e}'_i , а затем произвели перегруппировку сомножителей. В результате, вспоминая, что в новой системе координат $\vec{a} = a'_i \vec{e}'_i$, получаем выражение для новых «штрихованных» компонентов вектора \vec{a} : $a'_i = \alpha_{ik} a_k$. Это позволяет дать новое определение вектора:

Если для каждой декартовой системы координат нам дана совокупность трех величин a_k , преобразующихся при повороте базиса по закону

$$a'_i = \alpha_{ik} a_k,$$

то нам задан *одновалентный тензор*, или *тензор I ранга*, или *вектор*.

Обобщив это понятие, получим следующее определение:

Если для каждой декартовой системы координат нам задана совокупность $3^2=9$ чисел a_{pq} , преобразующихся при повороте базиса по закону

$$a'_{ik} = \alpha_{ip} \alpha_{kq} a_{pq},$$

то нам задан **двухвалентный тензор**, или **тензор II ранга**, или **тензор**.

Числа a_{pq} будем называть **компонентами** тензора, а тензор обозначать следующим образом: $T_A = [a_{pq}]$, $T_B = [b_{ik}]$ и т.д.

Тензор первой валентности будем в дальнейшем называть вектором, а тензор второй валентности – просто тензором. Очевидно, скаляр является тензором нулевой валентности.

Каждому тензору в принятой системе координат соответствует матрица, образованная компонентами тензора. Так тензору $T_A = [a_{pq}]$ соответствует матрица $A = (a_{pq})$. Следует помнить, что если матрица – таблица чисел – не связанная с системой координат, то компоненты тензора существенным образом зависят от выбора базиса, поэтому одному и тому же тензору в различных системах координат будут соответствовать различные матрицы.

2.6. Некоторые действия над тензорами

Действия над тензорами сводятся к соответствующим действиям над матрицами, составленными из компонент тензоров. Полученная в результате матрица есть матрица нового тензора. К ним относятся

сложение тензоров $T_C = T_A + T_B$, где матрица $C = A + B$;

умножение тензора на скаляр $T_B = \lambda T_A$, где матрица $B = \lambda A$;

умножение тензора на тензор (скалярное) $T_C = T_A \cdot T_B$, где матрица $C = A \cdot B$.

Пусть A – матрица направляющих косинусов при повороте базиса вокруг начала координат (матрица Якоби), тогда компоненты тензора в новой системе координат

$$T'_\sigma = A \cdot (T_\sigma \cdot A^T). \quad (2.5)$$

2.7. Главные направления и главные компоненты тензора

Результатом умножения тензора T_σ на вектор \vec{y} является вектор. Если в результате умножения направление вектора не меняется, а изменяется лишь его длина, т.е. $T_\sigma \cdot \vec{y} = \lambda \vec{y}$, то этот вектор \vec{y} называется **главным направлением** тензора T_σ , а λ – его **главной компонентой**.

Проблема поиска главных направлений и главных компонент тензора T_σ , сводится к решению характеристического уравнения его матрицы.

$$|\sigma_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Найдя три корня характеристического уравнения, мы узнаем три главные компоненты этого тензора.

Для каждого симметричного тензора имеются три взаимно ортогональные главные направления, соответствующие им главные компоненты – действительные числа.

Тензор в пространстве главных направлений представлен диагональной матрицей, ненулевыми элементами которой являются главные компоненты тензора.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

2.8. Инварианты тензора

Очевидно, что главные компоненты тензора, как и его главные направления, не должны зависеть от выбора системы координат. Поэтому коэффициенты характеристического уравнения

$$\lambda^3 - \sigma^I \lambda^2 + \sigma^{II} \lambda - \sigma^{III} = 0, \quad (2.6)$$

также не зависят от этого выбора и называются **инвариантами тензора**:

линейный (первый) инвариант равен сумме диагональных элементов матрицы, представляющей тензор в текущей системе координат, или сумме его главных компонентов

$$\sigma^I = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

квадратичный (второй) инвариант равен сумме определителей главных миноров матрицы, представляющей тензор в текущей системе координат, или сумме попарных произведений главных компонентов тензора

$$\sigma^{II} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3;$$

кубический (третий) инвариант равен определителю матрицы, представляющей тензор в текущей системе координат, или произведению главных компонентов тензора

$$\sigma^{III} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

3. АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

3.1 Определения

Одной из первейших задач математического моделирования является построение аналитических функций, адекватно описывающих поведение модели. В то же время на практике мы можем получить только таблицу экспериментальных значений, отображающих поведение природы (т.е. табличную функцию).

С другой стороны в процессе анализа математических моделей иногда получают функции, которые неудобны для проведения дальнейших математических исследований, (недифференцируемые, неинтегрируемые или трудно дифференцируемые, трудно интегрируемые). Поэтому возникает проблема замены одной функции $f(x)$ (дискретной или сложной) другой функцией $\varphi(x)$ (непрерывной, более простой, легко дифференцируемой и легко интегрируемой).

Приближение функции $f(x)$ более простой функцией $\varphi(x)$ называется **аппроксимацией** [4]. Близости этих функций добиваются путем введения в аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ свободных параметров c_0, c_1, \dots, c_n .

Пусть функция $f(x)$ задана таблицей значений, полученной из эксперимента или путем вычисления в последовательности значений аргумента x_0, x_1, \dots, x_n (табл. 3.1). Выбранные значения аргумента x называются **узлами таблицы**. Считаем, что узлы в общем случае не являются равноотстоящими.

Таблица 3.1.

x	$f(x)$
x_0	f_0
x_1	f_1
\dots	\dots
x_n	f_n

Введем аппроксимирующую функцию $\varphi(x, c_0, c_1, \dots, c_n)$ так, чтобы она совпадала с табличными значениями заданной функции $f(x)$ во всех узлах x_i :

$$\varphi(x_i, c_0, c_1, \dots, c_n) = f_i, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (3.1)$$

Свободные параметры c_i определяются из системы (3.1).

Подобный способ введения аппроксимирующей функции называется **лагранжевой интерполяцией**, а соотношения (3.1) – **условиями Лагранжа**.

Задачей **аппроксимации** считают нахождения приближенных значений табличной функции при аргументах x , не совпадающих с узловыми. Если значение аргумента x расположено между узлами $x_0 \leq x \leq x_n$, то нахождение приближенного значения функции $f(x)$ называют **интерполяцией**, если аппроксимирующую функцию вычисляют вне интервала $[x_0, x_n]$, то процесс называют **экстраполяцией**.

3.2 Интерполяция каноническим полиномом

Выберем в качестве аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ полином $P_n(x)$ степени n в каноническом виде

$$\varphi(x) = P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n. \quad (3.2)$$

Свободными параметрами интерполяции c_i являются коэффициенты полинома (3.2). Интерполяция полиномами обладает такими преимуществами, как простота вычисления их значений, дифференцирования и интегрирования.

Коэффициенты c_i определяются из условий Лагранжа

$$P_n(x_i) = f_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

или

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \dots + c_nx_0^n = f_0, \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \dots + c_nx_1^n = f_1, \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \dots + c_nx_n^n = f_n. \end{cases} \quad (3.3)$$

Относительно неизвестных свободных параметров c_i система (3.3) является системой линейных алгебраических уравнений. Расширенная матрица системы называется расширенной **матрицей Вандермонда** и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & f_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & f_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & f_n \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Определитель матрицы Вандермонда отличен от 0, если среди узлов x_i нет совпадающих, следовательно, система (3.3) в таком случае имеет единственное решение.

Преимущества интерполяционного канонического полинома – удобен для проведения дальнейших математических исследований, легко дифференцируем, легко интегрируем. *Недостаток* – слишком много промежуточных вычислений.

3.3 Интерполяция полиномом Лагранжа

Пусть таблица 3.1 задает $(n+1)$ значений функции $f(x)$ в узлах x_i . Лагранж предложил следующую форму интерполяционного полинома:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \text{или в развернутом виде:}$$

$$\begin{aligned}
P_n(x) = & f_0 \cdot \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \times \dots \times \frac{x-x_k}{x_0-x_k} \times \dots \times \frac{x-x_n}{x_0-x_n} + \\
& + f_1 \cdot \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \times \dots \times \frac{x-x_k}{x_1-x_k} \times \dots \times \frac{x-x_n}{x_1-x_n} + \dots + \\
& + f_k \cdot \frac{x-x_0}{x_k-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_k-x_1} \times \dots \times \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} \times \dots \times \frac{x-x_n}{x_k-x_n} + \dots + \\
& + f_n \cdot \frac{x-x_0}{x_n-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_n-x_1} \times \dots \times \frac{x-x_k}{x_n-x_k} \times \dots \times \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Старшая степень аргумента x в полиноме Лагранжа равна n , так как каждое произведение в формуле (3.5) содержит n сомножителей $(x-x_j)$. В узлах $x=x_k$ выполняются условия Лагранжа, потому что в сумме (3.5) остается по одному слагаемому $=f_k$, остальные обращаются в нуль за счет нулевых сомножителей в произведениях.

Недостатки интерполяционного полинома Лагранжа – неудобен для проведения дальнейших математических исследований, трудно дифференцируем, трудно интегрируем. *Преимущество* – нет промежуточных вычислений. Практическое применение полинома Лагранжа оправдано в тех случаях, когда интерполяционная функция вычисляется в сравнительно небольшом количестве точек x .

3.4 Интерполяционный полиномом Ньютона

В случаях возникновения погрешностей в таблице 3.1 на границах эксперимента имеет смысл использовать один из видов интерполяционного полинома Ньютона. Первый вариант имеет вид:

$$\begin{aligned}
P_n(x) = & A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \\
& + A_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Равносильный вариант полинома можно записать при симметричной перенумерации узлов и значений функции исходной таблицы:

$$\begin{aligned}
P_n(x) = & B_n + B_{n-1}(x-x_n) + B_{n-2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + \\
& + B_0(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Коэффициенты полиномов (3.6) и (3.7) определяются из условий Лагранжа

$$P_n(x_i) = f_i, \quad 0 \leq i \leq n \tag{3.8}$$

Рассмотрим вывод значений коэффициентов полинома (3.6). Для полинома (3.7) вывод значений коэффициентов происходит аналогично.

Полагаем $x=x_0$, тогда в формуле (3.6) все слагаемые, кроме A_0 , обращаются в 0, следовательно

$$A_0 = f_0. \tag{3.9}$$

Затем полагаем $x = x_1$, тогда по условию (3.8) $f_1 = f_0 + A_1(x_1 - x_0)$, откуда находим коэффициент

$$A_1 = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} = f_{01}, \quad (3.10)$$

который называется **разделенной разностью первого порядка**. Величина f_{01} близка к первой производной функции $f(x)$ при малом расстоянии между узлами x_0 и x_1 .

При $x = x_2$ полином (3.6) согласно (3.8) принимает значение

$$f_2 = f_0 + f_{01}(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1), \text{ откуда}$$

$$A_2 = \frac{f_2 - f_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f_{01}}{x_2 - x_1}, \text{ обозначим } f_{02} = \frac{f_0 - f_2}{x_0 - x_2}, \text{ тогда получим}$$

$$A_2 = \frac{f_{01} - f_{02}}{x_1 - x_2} = f_{012}.$$

Величина f_{012} называется **разделенной разностью второго порядка**, которая при близком расположении узлов x_0, x_1, x_2 будет пропорциональна второй производной $f(x)$.

Аналогичным образом при $x = x_3$ находим коэффициент

$$A_3 = \frac{f_{012} - f_{013}}{x_2 - x_3} = f_{0123}, \text{ где } f_{013} = \frac{f_{01} - f_{03}}{x_1 - x_3}, f_{03} = \frac{f_0 - f_3}{x_0 - x_3}.$$

Для коэффициента A_k методом математической индукции запишем

$$A_k = \frac{f_{01\dots(k-1)} - f_{01\dots(k-2)k}}{x_{k-1} - x_k}. \quad (3.11)$$

Для $n = 4$ заполним таблицу 3.2. Для построения интерполяционного полинома Ньютона используются только диагональные элементы таблицы 3.2, находящиеся в ячейках с жирными границами.

Таблица 3.2

x	$f(x)$	1	2	3	4
x_0	f_0	-	-	-	-
x_1	f_1	$f_{01} = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$	-	-	-
x_2	f_2	$f_{02} = \frac{f_0 - f_2}{x_0 - x_2}$	$f_{012} = \frac{f_{01} - f_{02}}{x_1 - x_2}$	-	-
x_3	f_3	$f_{03} = \frac{f_0 - f_3}{x_0 - x_3}$	$f_{013} = \frac{f_{01} - f_{03}}{x_1 - x_3}$	$f_{0123} = \frac{f_{012} - f_{013}}{x_2 - x_3}$	-
x_4	f_4	$f_{04} = \frac{f_0 - f_4}{x_0 - x_4}$	$f_{014} = \frac{f_{01} - f_{04}}{x_1 - x_4}$	$f_{0124} = \frac{f_{012} - f_{014}}{x_2 - x_4}$	$f_{01234} = \frac{f_{0123} - f_{0124}}{x_3 - x_4}$

4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

4.1. Определения

Если набор экспериментальных данных (таблица 3.1) получен со значительной погрешностью, то не имеет смысла использовать интерполяцию Лагранжа полиномами и сплайнами для обработки результатов. В этом случае необходимо провести аппроксимирующую кривую $\varphi(x)$, которая не проходит через экспериментальные точки, но в то же время отражает исследуемую зависимость, сглаживает возможные выбросы за счет погрешности эксперимента [4]. На рисунке 4.1 изображены графики аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ и интерполяционного полинома $P_n(x)$, построенного по условиям Лагранжа (см. пред. раздел).

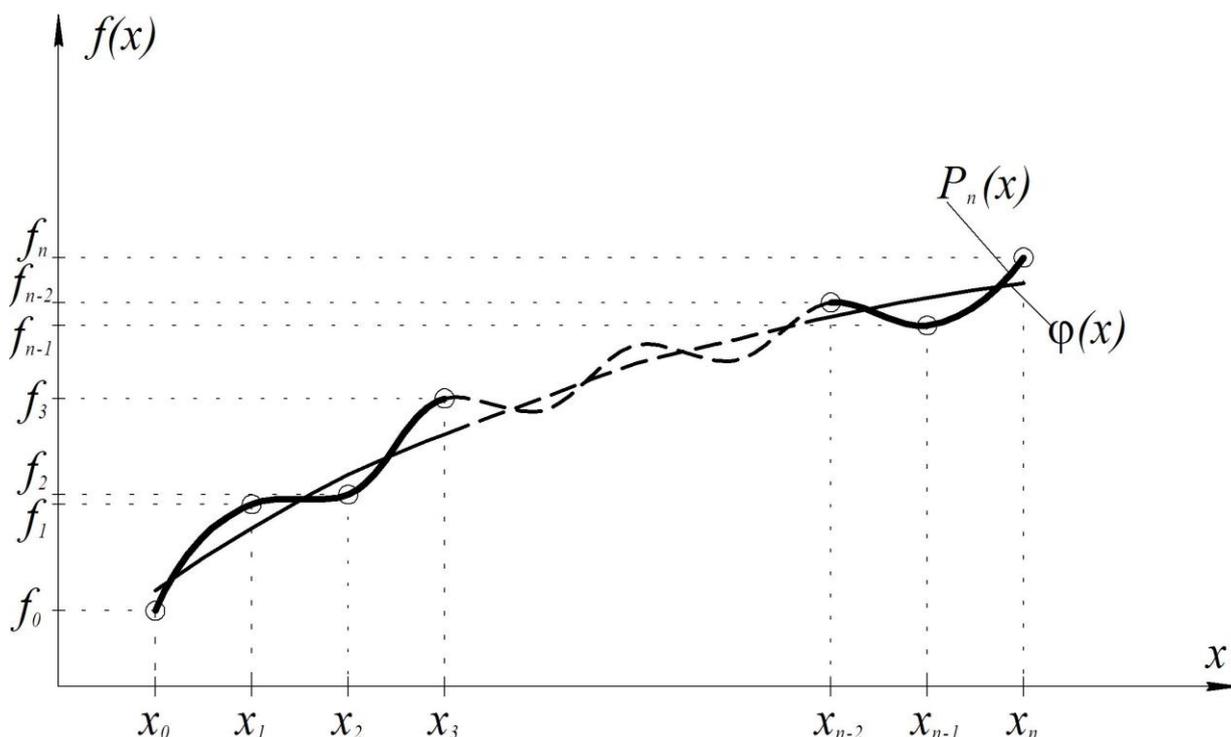


Рис.4.1

Обозначим узлы исходной таблицы данных через x_i , где $0 \leq i \leq n$ - номер узла. Считаем известными значения экспериментальных данных в узловых точках $f(x_i) = f_i$. Введем непрерывную функцию $\varphi(x)$ для аппроксимации дискретной зависимости $f(x_i)$. В узлах функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ будут отличаться на величину $\varepsilon_i = \varphi(x_i) - f(x_i)$. Отклонения ε_i могут принимать положительные и отрицательные значения. Чтобы не учитывать знаки, возведем каждое отклонение в квадрат и просуммируем квадраты отклонений по всем узлам:

$$Q = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i) - f(x_i)]^2. \quad (4.1)$$

Метод построения аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ из условия минимума величины Q называется **методом наименьших квадратов** (МНК).

4.2. Общий алгоритм

Наиболее распространен способ выбора функции $\varphi(x)$ в виде линейной комбинации:

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x), \quad (4.2)$$

где $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ - базисные функции;

$$m \leq n;$$

c_0, c_1, \dots, c_m - коэффициенты, определяемые при минимизации величины Q .

Математические условия минимума суммы квадратов отклонений Q запишем, приравняв нулю частные производные от Q по коэффициентам c_k , $0 \leq k \leq m$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial c_0} = 2 \sum_{i=0}^n [c_0\varphi_0(x_i) + c_1\varphi_1(x_i) + \dots + c_m\varphi_m(x_i) - f_i] \cdot \varphi_0(x_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial c_1} = 2 \sum_{i=0}^n [c_0\varphi_0(x_i) + c_1\varphi_1(x_i) + \dots + c_m\varphi_m(x_i) - f_i] \cdot \varphi_1(x_i) = 0, \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \frac{\partial Q}{\partial c_m} = 2 \sum_{i=0}^n [c_0\varphi_0(x_i) + c_1\varphi_1(x_i) + \dots + c_m\varphi_m(x_i) - f_i] \cdot \varphi_m(x_i) = 0. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (4.3) определяются все коэффициенты c_k . Система (4.3) называется системой нормальных уравнений. Матрица этой системы имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots & (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_m) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\varphi_m, \varphi_0) & (\varphi_m, \varphi_1) & \dots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

и называется матрицей Грама. Элементы матрицы Грама являются скалярными произведениями базисных функций

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) \cdot \varphi_k(x_i). \quad (4.5)$$

Расширенная матрица системы уравнений (4.3) получится добавлением справа к матрице Грама столбца свободных членов

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \\ \dots \\ (\varphi_m, f) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

где скалярные произведения, являющиеся элементами столбца, определяются аналогично (4.5)

$$(\varphi_j, f) = \sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) \cdot f_i. \quad (4.7)$$

Отметим основные свойства матрицы Грама, полезные при программной реализации алгоритмов МНК:

1) матрица симметрична, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$, что позволяет сократить объем вычислений при заполнении матрицы;

2) матрица является положительно определенной, следовательно, при решении системы нормальных уравнений методом исключения Гаусса можно отказаться от процедуры выбора главного элемента;

3) определитель матрицы будет отличен от нуля, если в качестве базиса выбраны линейно независимые функции $\varphi_k(x)$, при этом система (4.3) имеет единственное решение.

4.3 МНК со степенным базисом

Выберем базисные функции $\varphi_k(x)$ в виде последовательности степеней аргумента x , которые линейно независимы,

$$\varphi_0(x) = x^0 = 1, \quad \varphi_1(x) = x^1 = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \dots, \quad \varphi_m(x) = x^m. \quad (4.8)$$

В этом случае, так же как и при интерполяции, мы будем аппроксимировать экспериментальную зависимость полиномом. Однако степень полинома m выбираем обычно $m < n$ (при лагранжевой интерполяции $m = n$). Аппроксимирующая кривая в МНК не проходит (см. рисунок 4.1) через значения исходной функции в узлах, но проведена из условия наименьшего суммарного квадратичного отклонения. Экспериментальные данные "сглаживаются" с помощью функции $\varphi(x)$. Если же выбрать $m = n$, то на основании теоремы об единственности интерполяционного полинома получим функцию $\varphi(x)$, совпадающую с каноническим интерполяционным полиномом степени n , аппроксимирующая кривая пройдет через все экспериментальные точки и величина Q будет равна 0. Последнее обстоятельство используется для отладки и тестирования программ, реализующих алгоритмы МНК.

Запишем расширенную матрицу Грама для степенного базиса (4.8)

$$\left(\begin{array}{cccccc} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n f_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^n x_i \cdot f_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2m} & \sum_{i=0}^n x_i^m \cdot f_i \end{array} \right). \quad (4.9)$$

Нетрудно видеть, что для формирования расширенной матрицы (4.9) достаточно вычислить только элементы нулевой строки и двух последних столбцов (m -го и $m+1$ -го), остальные элементы не являются "оригинальными" и заполняются с помощью циклического присвоения по формуле $a_{i,j} := a_{i-1,j+1}$.

4.4 Линейный вариант МНК

На практике довольно часто оказывается возможным при обработке экспериментальных данных ограничиться построением линейной аппроксимирующей функции:

$$\varphi(x) = a + bx. \quad (4.10)$$

Зная качественное поведение аппроксимируемой зависимости, иногда удается перейти и от нелинейной функции к линейной методом «выравнивания». Так, например, если исходная зависимость близка к экспоненциальной, то достаточно прологарифмировать значения заданной функции в узлах таблицы экспериментов, чтобы перейти к линейной зависимости. И наоборот, если исходная зависимость близка к логарифмической, то достаточно взять экспоненту от значений заданной функции в узлах таблицы экспериментов, чтобы перейти к линейной зависимости. Выравнивание данных следует осуществлять на этапе подготовки исходной таблицы.

Выведем выражения для определения коэффициентов a и b . Пусть у нас есть таблица измерений экспериментальных данных (не нарушая общности, нумерацию экспериментов можем начать с 1).

x_i	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
...	...
x_n	f_n

Из общего алгоритма МНК по формуле (4.1) имеем:

$$Q = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - f_i)^2$$

Запишем условия минимума функционала Q

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i - f_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i - f_i) \cdot x_i = 0, \end{cases}$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n f_i, & \text{или} \quad an + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n f_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n f_i x_i \end{cases}$$

Обозначив $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, $\bar{f} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{n}$, из первого уравнения имеем $a + b\bar{x} = \bar{f}$,

или $a = \bar{f} - b\bar{x}$. Подставим полученное выражение во второе уравнение системы:

$$(\bar{f} - b\bar{x}) \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i f_i, \quad \text{или} \quad b \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_i \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i (f_i - \bar{f}).$$

В левую часть полученного выражения добавим

$$b \sum_{i=1}^n (-x_i \bar{x} + \bar{x}^2) = b(-\bar{x}n\bar{x} + \bar{x}^2 n) = 0, \quad \text{тогда левая часть} = b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

а в правую часть добавим

$$\sum_{i=1}^n [-\bar{x}(f_i - \bar{f})] = -\bar{x} \bar{f} n + \bar{x} \bar{f} n = 0, \quad \text{тогда правая часть} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(f_i - \bar{f}).$$

Тогда имеем коэффициенты для линейного варианта МНК:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(f_i - \bar{f})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad a = \bar{f} - b\bar{x}. \quad (4.11)$$

5. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

5.1 Два подхода к описанию движения сплошной среды

1. Подход Лагранжа. Объектом изучения являются материальные частицы. При этом рассматривается изменение во времени некоторых скалярных или векторных величин, таких как температура, плотность, скорость фиксированной материальной частицы, а также изменение этих величин при переходе от одной частицы к другой.

Иначе говоря, эти величины рассматриваются как функции от времени и тех переменных, которые характеризуют *индивидуальность* взятой частицы [2].

В качестве таких переменных можно взять, например, X_i – декартовы координаты произвольной материальной частицы в начальный момент времени $t=0$, тогда ее текущие координаты в том же базисе неподвижного наблюдателя будут выражаться

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, X_1, X_2, X_3) \\ x_2 &= \varphi_2(t, X_1, X_2, X_3) \\ x_3 &= \varphi_3(t, X_1, X_2, X_3) \end{aligned} \right\} \text{или сокращенно } x_i = \varphi_i(t, X_k) - \quad (4.1)$$

запись закона движения одной фиксированной частицы с начальными координатами X_k .

Если считать X_k переменными, то мы получаем запись закона движения сплошной среды.

Переменные X_1, X_2, X_3, t – называются *переменными Лагранжа*. Проекции скорости и ускорения материальной частицы определяются следующими формулами

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_i(t, X_k)}{\partial t},$$

$$w_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_i(t, X_k)}{\partial t^2}.$$

2. Подход Эйлера. Здесь в качестве объекта изучения принимается неподвижное пространство наблюдателя или его фиксированная часть, заполненная движущейся средой. Различные величины, характеризующие движение, считаются *функциями точки и времени*, т.е. функциями трех аргументов x_i и времени t , называемых *переменными Эйлера*.

Например, выражение скорости в данной точке пространства с радиус-вектором \vec{x} имеет вид $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(x_i, t)$. Таким образом, с точки зрения Эйлера объектом изучения являются различные поля (скалярные, векторные, тензорные), характеризующие движение сплошной среды.

ПЕРЕХОД от переменных Эйлера к переменным Лагранжа вытекает из (4.1)

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t).$$

5.2 Тензоры конечных деформаций

Пусть материальная частица M в начальный момент времени $t=0$ находится в точке пространства с начальными координатами $(X_1, X_2, X_3) = \vec{X}$, а в текущий момент времени t – в точке с текущими координатами $(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}$.

Причем можно записать

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}, \quad (4.2)$$

где \vec{u} – вектор перемещения.

Лагранжев способ описания движения дает зависимость

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t), \quad (4.3)$$

$$\text{Эйлеров –} \quad \vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t). \quad (4.4)$$

Предполагается, что эти функции необходимое количество раз дифференцируемы. Очевидно, что формулы (4.3) и (4.4) представлены единственной парой взаимобратных функций, причем функциональный определитель (якобиан)

$$\Delta = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \right| \neq 0$$

в каждой точке области, заполненной сплошной средой, отличен от 0.

Для элементов объема начального dW и текущего dw имеет место соотношение

$$dw = \Delta dW.$$

А условие несжимаемости (неизменности объема) можно записать следующим образом

$$\Delta = 1, \text{ т.е. } dw = dW.$$

С целью описания деформации сплошной среды рассмотрим перемещение двух близких материальных частиц

$$\begin{array}{c} M_0 \\ N_0 \end{array} \Big|_{t=0} \quad \begin{array}{c} M \\ N \end{array} \Big|_{t-\text{текущий момент времени}} .$$

Квадрат бесконечно малого расстояния между точками M и N равен

$$(dx)^2 = dx_p dx_p,$$

беря за основу Лагранжево описание движения

$$dx_p = \frac{\partial x_p}{\partial X_i} dX_i.$$

В результате квадрат элемента длины равен

$$(dx)^2 = \frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} dX_k dX_i.$$

В начальный момент времени квадрат расстояния между этими точками был

$$(dX)^2 = \delta_{ik} dX_i dX_k = dX_p dX_p.$$

Изменение квадрата длины

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} - \delta_{ik} \right) dX_i dX_k = 2L_{ik} dX_i dX_k.$$

Если всюду в теле $(dx)^2 - (dX)^2 = 0$, то движение тела называется абсолютно жестким движением. Если в точке M $(dx)^2 - (dX)^2 \neq 0$, то говорят, что в этой точке тело находится в деформированном состоянии. Отсюда выражение тензора Лагранжа конечной деформации (тензор Грина):

$$L_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} - \delta_{ik} \right).$$

Получим выражение тензора Лагранжа через перемещения. Из (4.2)

$$x_p = u_p + X_p, \text{ тогда } \frac{\partial x_p}{\partial X_i} = \frac{\partial u_p}{\partial X_i} + \frac{\partial X_p}{\partial X_i} = \frac{\partial u_p}{\partial X_i} + \delta_{pi}$$

$$\text{и } \frac{\partial x_p}{\partial X_k} = \frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \frac{\partial X_p}{\partial X_k} = \frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \delta_{pk},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_p}{\partial X_i} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} &= \left(\frac{\partial u_p}{\partial X_i} + \delta_{pi} \right) \left(\frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \delta_{pk} \right) = \frac{\partial u_p}{\partial X_i} \frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i} \delta_{pk} + \frac{\partial u_p}{\partial X_k} \delta_{pi} + \delta_{pi} \delta_{pk} = \\ &= \frac{\partial u_p}{\partial X_i} \frac{\partial u_p}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \delta_{ik}. \end{aligned}$$

$$\text{Окончательно получим } L_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_p}{\partial X_i} \frac{\partial u_p}{\partial X_k} \right).$$

Если взять за основу Ейлерово описание движения, то аналогичным образом можно получить тензор Эйлера конечной деформации (тензор Альманси):

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ik} - \frac{\partial X_p}{\partial x_i} \frac{\partial X_p}{\partial x_k} \right), \text{ или } E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \right).$$

5.3 Тензор малой деформации

Будем считать, что компоненты перемещения и их градиенты малы, в частности $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \ll 1$. Отбрасывая произведение малых величин, получаем

Лагранжев тензор малой деформации

$$l_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

Эйлеров тензор малой деформации

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

Предположение о малости перемещений позволяет заключить, что разница между лагранжевскими и эйлеровскими переменными несущественна, а соответствующие тензоры совпадают $\varepsilon_{ik} = l_{ik}$.

В дальнейшем в теории малых деформаций будем использовать только эйлеровы переменные, а тензор $T_\varepsilon = [\varepsilon_{ik}]$ называть тензором малой деформации.

Рассмотрим физический смысл компонентов тензора малой деформации.

$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ – линейные деформации и они показывают относительное удлинение материального отрезка первоначально параллельного оси x_1, x_2 или x_3 , соответственно. Если соответствующий отрезок удлиняется, то $\varepsilon > 0$, если же – укорачивается, то $\varepsilon < 0$.

Боковые компоненты тензора деформации называют сдвиговыми деформациями, и они характеризуют искажение угла между отрезками, первоначально параллельными соответствующим осям координат (рис. 5.1). Если угол уменьшается, то соответствующая сдвиговая деформация положительна, если же угол увеличивается, то – отрицательна.

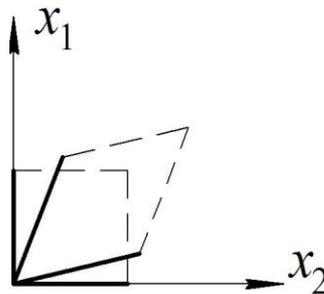


Рис. 5.1 Интерпретация сдвиговой деформации ε_{12}

6. ДИНАМИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

6.1 Внешние силы в механике сплошных сред

Изучив кинематику, перейдем к анализу причин, вызывающих механическое движение. К ним относятся силы – величины, являющиеся мерой механического воздействия на данное тело других тел как при непосредственном контакте (трение, давление прижатых друг к другу тел), так и через посредство создаваемых телами полей (гравитационное поле, электромагнитное поле и т.д.). Обычно в механике сплошных сред силы имеют распределенный характер – они непрерывно распределяются по некоторым поверхностям или объемам [1]. Поэтому более удобно предельным переходом перейти к понятию напряжения – силе, приходящейся на единицу площади поверхности.

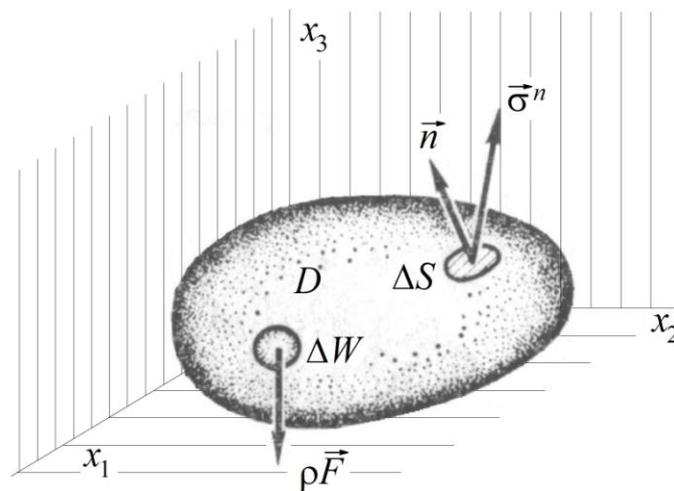


Рис. 6.1 Поверхностные и массовые внешние силы

Внешние силы. Дано некоторое тело D , ограниченное поверхностью S . Со стороны окружающей среды на рассматриваемое тело действуют силы. Будем называть их внешними силами и делить на объемные (массовые), приложенные к элементам объема (массы), и поверхностные, приложенные к поверхности тела (рис. 6.1).

Плотность. Возьмем внутри рассматриваемого тела произвольную точку M и выделим в окрестности этой точки элементарный объем ΔW с массой Δm . Величина $\rho(M) = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W}$ – называется плотностью среды в точке M .

Массовые внешние силы. Пусть главный вектор внешних сил, действующих на выделенный элемент, равен $\Delta \vec{\Phi}$. Составим отношение $\frac{\Delta \vec{\Phi}}{\Delta m}$ и вычислим предел

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\Phi}}{\Delta m} = \frac{1}{\rho} \cdot \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\Phi}}{\Delta W}.$$

Полученная в результате предельного перехода векторная величина \vec{F} называется внешней массовой силой.

Поверхностные внешние силы. Выделим элемент поверхности ΔS с внешней нормалью \vec{n} . На этот элемент действуют силы, $\Delta \vec{P}$ – их вектор.

Устремим размеры элемента к 0. Согласно принципу напряжения Коши, отношение $\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S}$ стремится к определенному пределу $\vec{\sigma}^n$, когда элемент по-

верхности стягивается в точку M : $\vec{\sigma}^n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S}$, в то время как главный момент стремится к 0.

Результирующий вектор $\vec{\sigma}^n$ (сила, отнесенная к единице площади) называется вектором поверхностных напряжений, действующих в точке M на площадке с нормалью \vec{n} .

6.2 Внутренние напряжения

Вернемся к рассматриваемому телу D (рис. 6.2) и мысленно рассечем его поверхностью Σ на две части D_1 и D_2 . Также мысленно отбросим часть D_2 . Для того, чтобы оставшаяся часть оставалась в равновесии, необходимо, чтобы на поверхности Σ действовала некоторая система сил (рис. 6.3). Назовем их внутренними силами.

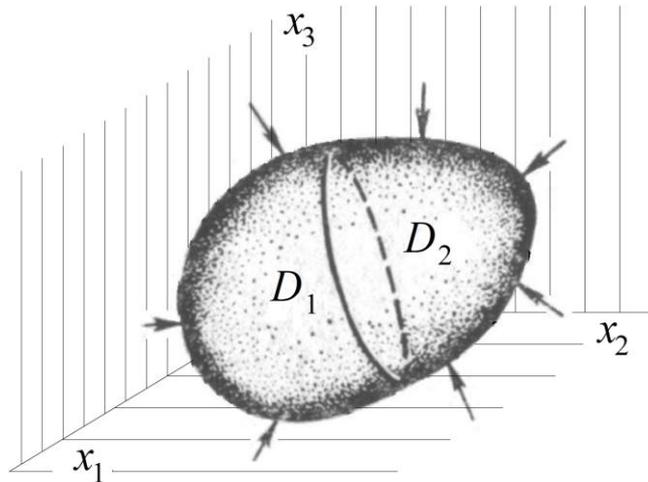


Рис. 6.2 Сечение тела D

Возьмем на поверхности Σ точку M и выделим в ее окрестности элементарную площадку $\Delta \Sigma$ с нормалью \vec{n} .

Пусть главный вектор сил, приложенных к площадке со стороны внешней нормали равен $\Delta \vec{P}$.

Повторяя предыдущие рассуждения, предельным переходом получаем вектор внутренних напряжений:

$\vec{\sigma}^n = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta \Sigma}$, действующих на ориентированной площадке с внешней нормалью \vec{n} .

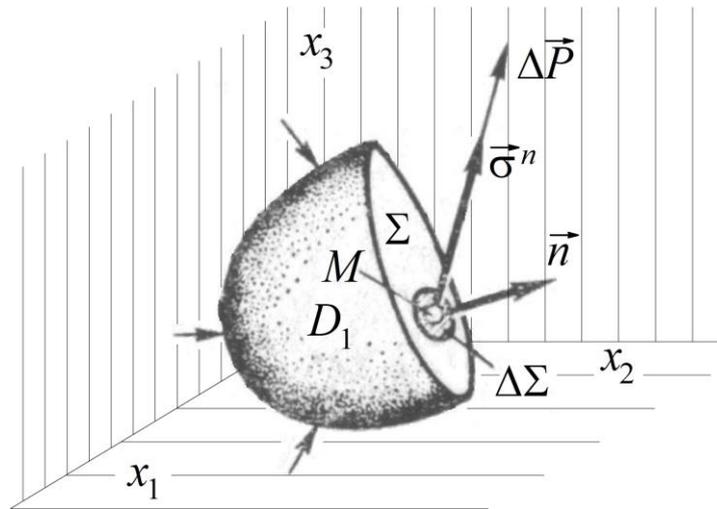


Рис. 6.3 Внутренние напряжения

Существенной особенностью в этих рассуждениях является произвольная ориентация поверхности Σ и, следовательно, нормали \vec{n} .

Выберем в связи с этим площадки, проходящие через точку M и нормальные ортам \vec{e}_i . В качестве таких площадок удобно использовать грани элементарного куба, построенного в окрестностях указанной точки так, чтобы его ребра были параллельны координатным осям x_i (рис. 6.4).

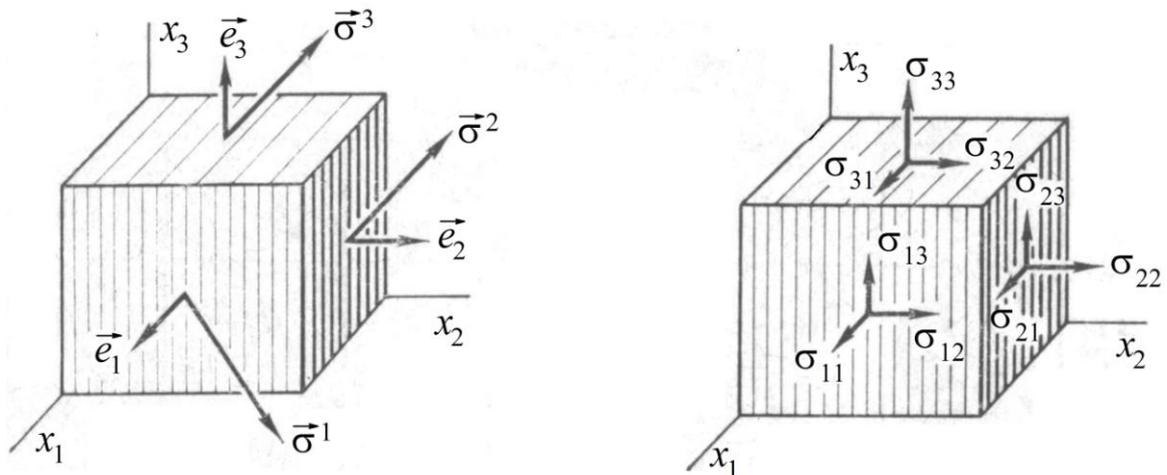


Рис. 6.4 Напряжения на гранях элементарного куба

На площадке, перпендикулярной орту \vec{e}_1 , действует вектор напряжений $\vec{\sigma}^1$ с компонентами $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$. Аналогично на двух других площадках $\vec{\sigma}^2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$ и $\vec{\sigma}^3 = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$.

Составим матрицу
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$
 и рассмотрим физический смысл ее

компонентов.

Диагональные элементы матрицы $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ — называются нормальными компонентами напряжений, поскольку они представляют собой проек-

ции векторов напряжений на нормали к площадкам. Боковые элементы матрицы называются касательными компонентами напряжений. Они являются проекциями векторов напряжений на плоскости площадок.

Правило знаков для компонентов напряжений. Нормальное напряжение является положительным, если оно вызывает растяжение, и отрицательным, если оно вызывает сжатие.

Нетрудно показать, что матрица напряжений является тензором, причем симметричным.

Тензор $T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ называется тензором напряжений Коши.

При этом вектор напряжений на наклонной площадке с внешней нормалью \vec{n} определяется формулой Коши $\vec{\sigma}^n = \vec{n} \cdot T_\sigma$.

6.3 Законы сохранения

Законами сохранения называются физические закономерности, согласно которым численные значения некоторых физических величин не изменяются со временем в любых физических процессах.

1. Закон сохранения массы

$$m = \iiint_W \rho(\vec{X}, t) dW = const.$$

Следствием этого закона является условие неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

а если среда имеет неизменную плотность ($\rho = const$), получаем условие несжимаемости:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \text{ или } \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

2. Закон сохранения количества движения. Пусть элемент объема dW масса которого ρdW , перемещается со скоростью \vec{v} . Количество движения элемента равно $\rho dW \vec{v}$, а общее количество движения объема W находится интегрированием:

$$\iiint_W \rho \vec{v} dW.$$

На элемент поверхности dS действует внешняя поверхностная сила $\vec{\sigma}^n dS$. Сумма этих сил равна $\iint_S \vec{\sigma}^n dS$. На элемент объема dW действует внешняя массовая сила $\rho \vec{F} dW$. Сумма всех массовых сил равна $\iiint_W \rho \vec{F} dW$.

Уравнение сохранения количества движения для объема W можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho \vec{v} dW = \iint_S \vec{\sigma}^n dS + \iiint_W \rho \vec{F} dW :$$

производная по времени от количества движения объема W сплошной среды равняется сумме всех внешних действующих на него массовых и поверхностных сил.

Следствием из этого закона являются:

– уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}, \text{ и}$$

– уравнение равновесия (если инерционные члены малы и ими можно пренебречь)

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = 0,$$

а при отсутствии массовых сил

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

7. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

7.1 Математическая модель внутреннего механизма процесса ОМД

Кинематические зависимости и законы сохранения не дают полной системы уравнений, позволяющей вместе с начальными и граничными условиями целиком описать движение сплошной среды. Для того, чтобы сделать систему замкнутой, необходимы дополнительные соотношения. К ним относятся так называемые *определяющие уравнения*, которые характеризуют конкретные физические свойства изучаемой среды.

Общая теория феноменологических определяющих соотношений устанавливает общие формы связей между полями напряжений, деформаций, скоростей деформаций, температур для различных сред. Как правило, определяющие уравнения выводятся на основании результатов экспериментальных исследований.

Итак, для того чтобы записать математическую модель внутреннего механизма процесса ОМД, необходимо записать три группы уравнений:

1. *Кинематические соотношения*, которые устанавливают связь между перемещениями и деформациями, либо между скоростями и скоростями деформаций.
2. *Динамические соотношения*, которые представлены уравнением неразрывности или несжимаемости и уравнением движения или равновесия.
3. *Определяющие соотношения*, которые связывают напряжения или скорости напряжений с деформациями или скоростями деформаций и температурами.

Следует отметить, что уравнения первых двух групп имеют общий вид для любых сплошных сред, а уравнения третьей группы для различных сред имеют различный вид [2].

7.2 Линейно-упругая среда

Линейная изотропная зависимость между напряжениями и деформациями имеет вид

$$T_{\sigma} = 3 \lambda \varepsilon_0 I + 2 \mu T_{\varepsilon}, \quad (7.1)$$

где I – единичный тензор, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ε_0 – средняя деформация.

Или в скалярной форме

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \Delta + 2 \mu \varepsilon_{ik}, \quad (7.2)$$

где $\Delta = 3 \varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – относительное изменение объема.

Это уравнение, называемое *обобщенным законом Гука*, описывает поведение линейно-упругой среды, постоянные λ и μ называются *упругими постоянными Лямэ*.

Для того, чтобы записать соотношения (7.1) и (7.2) в эквивалентной форме, разложим сначала тензора напряжений и деформаций на шаровые и девиаторные части

$$T_{\sigma} = \sigma_0 I + D_{\sigma}, \quad T_{\varepsilon} = \varepsilon_0 I + D_{\varepsilon},$$

затем подставим это разложение в соотношение (7.1)

$$\sigma_0 I + D_{\sigma} = 3\lambda \varepsilon_0 I + 2\mu (\varepsilon_0 I + D_{\varepsilon}).$$

Записав отдельно равенство для шаровой и девиаторной частей, получим

$$\sigma_0 = 3\lambda \varepsilon_0 + 2\mu \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad D_{\sigma} = 2\mu D_{\varepsilon}.$$

Отсюда можно записать другую форму закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= k \Delta; \\ D_{\sigma} &= 2\mu D_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Коэффициент $k = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ называется *модулем объемного сжатия*.

Итак, для линейно-упругой среды среднее напряжение пропорционально относительному изменению объема, а девиатор напряжений пропорционален девиатору деформаций.

Положив $k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$, где E – модуль Юнга, а ν – коэффициент Пуассона,

получим закон Гука в виде $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$.

В случае чистого сдвига $\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12}$. Поэтому коэффициент Лямэ μ представляет собой хорошо известный из курса механики материалов *модуль сдвига G*. Кроме того

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G; \\ \lambda &= \frac{E \nu}{(1-2\nu) \cdot (1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)}. \end{aligned}$$

7.3 Линейно-вязкая среда

Переходя к изучению линейно-вязкой среды, предположим, что среднее напряжение состоит из давления ($-p$), непосредственно независящего от скоростей деформации, и дополнительного напряжения σ'_0 , пропорционального скорости объемной деформации $\Delta' = \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = 3\xi_0$:

$$\sigma_0 = -p + \sigma'_0, \quad \sigma'_0 = k' \Delta'.$$

Воспользовавшись линейной изотропной зависимостью тензоров второй валентности, получим уравнение, обобщающее *гипотезу Ньютона*:

$$T_{\sigma} = -p I + 3 \lambda' \xi_0 I + 2 \mu' T_{\xi} .$$

В скалярной форме это уравнение запишется в виде

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \lambda' \delta_{ik} \Delta' + 2 \mu' \xi_{ik} .$$

Коэффициенты λ' и μ' называются *коэффициентами вязкости*. Поскольку они не зависят от деформаций и скоростей деформаций, их называют «*вязкими постоянными*», хотя они могут зависеть от температуры.

Другая форма записи этих уравнений выглядит следующим образом:

$$\sigma_0 = -p + k' \Delta' ,$$

$$D_{\sigma} = 2 \mu' D_{\xi} .$$

Т.е. девиаторы напряжений и скоростей деформаций пропорциональны.

Постоянная k' называется *коэффициентом объемной вязкости*.

Если среда несжимаема, то $\Delta' = 0$ и вышеприведенные уравнения сводятся к условию пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций.

Наконец, если коэффициенты вязкости λ' и μ' равны нулю, то

$$T_{\sigma} = -p I ,$$

т.е. тензор напряжений совпадает с шаровым тензором, а девиатор напряжений равен нулю. Это свойство идеальной жидкости.

7.4 Теория малых упругопластических деформаций

При установлении нелинейной зависимости между напряжениями и малыми деформациями для изотропной упругопластической среды, ограничившись рассмотрением изотермических процессов, воспользуемся уравнениями

$$\sigma_0 = k \Delta ; \tag{7.3}$$

$$D_{\sigma} = 2\mu D_{\varepsilon} . \tag{7.4}$$

Опыты показывают, что относительное изменение объема $\Delta = 3 \varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ всегда является обратимым (упругим), и зависимость (7.3) близка к линейной.

Таким образом, можно принять $k = const$. Положим $\mu = \mu(\theta, \Gamma)$, где θ – температура, а Γ – интенсивность деформаций сдвига

$$\Gamma = \sqrt{\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2}{6}} .$$

Приняв тем самым *гипотезу «единой кривой»*, получаем возможность описать процессы пластического деформирования. При этом можно сформулировать следующие исходные положения теории малых упругопластических деформаций:

1. Среда изотропна.
2. Среднее напряжение пропорционально относительному изменению объема, имеющему упругий характер.
3. Девиаторы напряжений и деформаций пропорциональны.

Следствием третьего положения является совпадение главных осей у тензоров напряжений и деформаций, а также пропорциональность главных компонентов девиаторов.

Рассмотрим частные случаи. К ним относятся:

– состояние линейной упругости:

$$\mu = const;$$

– состояние идеальной пластичности:

$$\mu = \frac{\tau_s}{\Gamma} \quad (\tau_s - \text{предел текучести при чистом сдвиге),$$

при этом

$$s_{ik} = \frac{2\tau_s}{\Gamma} e_{ik} \quad (s_{ik} - \text{компоненты девиатора напряжений,} \\ e_{ik} - \text{компоненты девиатора деформаций);$$

– состояние деформационного упрочнения:

$$T = \mu(\theta, \Gamma) \Gamma \quad (T = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{6}} - \text{интенсивность} \\ \text{касательных напряжений})$$

и $s_{ik} = 2\mu(\theta, \Gamma) e_{ik},$

или $s_{ik} = \frac{2T(\theta, \Gamma)}{\Gamma} e_{ik};$

– состояние упругой разгрузки:

$$\sigma_0^* - \sigma_0 = k (\Delta^* - \Delta);$$

$$s_{ik}^* - s_{ik} = 2\mu (e_{ik}^* - e_{ik}), \quad \mu = const.$$

Звездочкой обозначены напряжение и деформированное состояние, соответствующие началу разгрузки.

Теория малых упругопластических деформаций хорошо подтверждается экспериментальными данными при монотонном изменении температуры и нагружениях, близких к *простому*. Так называется нагружение тела, когда во всех его точках компоненты тензора напряжений возрастают

пропорционально некоторому параметру. В противном случае нагружение является **сложным**.

7.5 Теория вязкопластического течения

Для сложного нагружения лучшие результаты дает теория вязкопластического течения.

Будем пренебрегать упругими деформациями, как весьма малыми по сравнению с пластическими, а также температурными напряжениями, и сформулируем основные положения теории течения вязкопластической среды.

1. Среда изотропна и несжимаема.
2. Девиаторы напряжений и скоростей деформаций пропорциональны:

$$D_{\sigma} = 2 g D_{\xi} , \quad \text{причем } g = g(\theta, H) ,$$

где θ – температура,

$$H = \sqrt{\frac{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_1 - \xi_3)^2}{6}} \quad \text{– интенсивность скоростей деформаций сдвига.}$$

Отсюда следует, что главные оси у тензоров напряжений и скоростей деформаций совпадают, а главные компоненты соответствующих девиаторов пропорциональны.

К частным случаям относятся:

- состояние линейной вязкости: $g = const$;
- состояние идеальной пластичности:

$$g = \frac{\tau_s}{H} \quad (\tau_s \text{ – предел текучести при чистом сдвиге), \text{ при этом}$$

$$s_{ik} = \frac{2\tau_s}{H} \eta_{ik} \quad (s_{ik} \text{ – компоненты девиатора напряжений, } \eta_{ik} \text{ – компоненты девиатора скоростей деформаций);$$

- состояние вязкого упрочнения:

$$T = g(\theta, H) H \quad (T = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{6}} \text{ – интенсивность касательных напряжений})$$

$$\text{и} \quad s_{ik} = 2g(\theta, H) \eta_{ik} ,$$

$$\text{или} \quad s_{ik} = \frac{2T(\theta, H)}{H} \eta_{ik} .$$

8. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

8.1 Статическая задача для упругой однородной изотропной среды

При постановке статических задач инерционными членами в уравнениях движения можно пренебречь.

В каждой точке области D , заполненной сплошной средой, должны выполняться:

а) уравнения равновесия (*динамические соотношения*)

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = 0,$$

где F_i – компоненты внешней массовой силы.

б) закон Гука (*определяющие соотношения*)

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \Delta + 2 \mu \varepsilon_{ik},$$

где $\Delta = \varepsilon_{pp} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – относительное изменение объема, λ и μ – константы Лямэ.

в) соотношения, связывающие деформации с перемещениями (*кинематические соотношения*)

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

На поверхности S , ограничивающей область D , должны удовлетворяться граничные условия, наложенные на напряжения или перемещения.

Принято различать три типа граничных условий:

1) на всей границе S заданы перемещения (*кинематические граничные условия*)

$$\vec{u}|_S = \vec{f}_1(M), \quad \text{где } M \text{ – точка на границе;}$$

2) на всей границе S заданы напряжения (*статические граничные условия*)

$$\vec{\sigma}^n|_S = \vec{f}_2(M);$$

3) на части границы S_1 заданы перемещения, на остальной поверхности S_2 – напряжения (*смешанные граничные условия*)

$$\begin{aligned}
S &= S_1 \cup S_2, \\
M \in S_1 \quad \vec{u}|_{S_1} &= \vec{f}_1(M), \\
M \in S_2 \quad \vec{\sigma}^n|_{S_2} &= \vec{f}_2(M).
\end{aligned}$$

Во всех трех случаях предполагается, что всюду в теле внешние массовые силы известны.

8.2 Пример решения

Сплошное упругое тело сжимается со всех сторон постоянным внешним давлением p . Внешние массовые силы отсутствуют. Найти распределение напряжений.

Решение: Будем искать решение в виде

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}, \quad \text{где } p = \text{const}.$$

Легко видеть, что уравнения равновесия удовлетворены. На границе имеем

$$\vec{\sigma}^n = \sigma_{ik} n_k \vec{e}_i = -p \delta_{ik} n_k \vec{e}_i = -p n_i \vec{e}_i = -p \vec{n},$$

т.е. внешняя поверхностная сила должна быть давлением p , что и имеет место в действительности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гун Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением.- М.: Металлургия, 1980. - 456 с.
2. Гун Г.Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением.- М.: Металлургия, 1983.- 352 с.
3. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением.- М.: Металлургия, 1986.- 688 с.
4. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль.- Томск, МП "Раско", 1991.- 272 с.
5. Мазурёнок, А.В. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением : учебно-методическое пособие по дисциплине «Математическое моделирование технологических процессов» для студентов специальности 1-36 01 05 «Машины и технология обработки металлов давлением» / А.В. Мазурёнок.- Минск : БНТУ, 2014.- 80с.

Лабораторный практикум

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ГЛАВНЫХ ВАЛОВ КРИВОШИПНЫХ МАШИН

1.1. Расчет усилия, допускаемого прочностью кривошипного вала

Кривошипный вал одностоечного открытого кривошипного пресса при работе подвержен действию изгибающего момента, создаваемого рабочим усилием на ползуне и реакциями в опорах, а также крутящего момента, передаваемого со стороны маховика. При такой схеме нагружения в материале вала возникают нормальные и касательные напряжения. Так как вал работает в условиях пульсирующего цикла изменения напряжений, усилие допускаемое прочностью кривошипного вала, рассчитывают по формуле [4]:

$$P_d = \frac{0,2 \cdot d_p^3 \cdot [\sigma_{-1}]}{n \cdot k_3 \cdot \sqrt{\Phi_\sigma \cdot l_{ш}^2 + \Phi_\tau \cdot m_k^2}}, \quad (1.1)$$

где d_p – диаметр шатунной шейки вала (рисунок 1.1);

$[\sigma_{-1}]$ – предел выносливости при изгибе гладкого образца материала вала при знакопеременном цикле;

n – запас прочности (для универсальных прессов $n = 1,3 \dots 1,4$);

k_3 – коэффициент эквивалентной нагрузки, учитывающий изменение характера нагружения во времени (для универсальных прессов $k_3 = 0,8$);

Φ_σ, Φ_τ – величины, учитывающие наличие пульсирующего цикла изменения напряжений и качество обработки поверхности вала;

$l_{ш}$ – длина шатунной цапфы вала;

m_k – приведенное плечо силы (относительный крутящий момент).

Относительный крутящий момент рассчитывают по выражению

$$m_k = R \cdot (\sin \alpha + 0,5 \cdot \lambda \cdot \sin 2\alpha) + 0,5 \cdot \mu \cdot [(1 + \lambda) \cdot d_A + \lambda \cdot d_B + d_{01}], \quad (1.2)$$

где R – радиус кривошипа (рисунок 1.1);

α – угол поворота кривошипного вала;

λ – коэффициент шатуна ($\lambda = R / L_{ш}$), равный отношению радиуса кривошипа к длине шатуна;

μ – коэффициент трения;

d_A – диаметр эксцентриковой втулки;

d_B – диаметр ползунной головки шатуна;

d_{01} – диаметр передней опорной шейки кривошипного вала.

В связи с тем, что величина хода ползуна у рассматриваемого пресса регулируемая, в формулу (1.2) необходимо подставить максимальное значение радиуса кривошипа. Известно, что $R_{\max} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$; $R_{\min} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, где ε_1 – эксцентриситет кривошипного вала с закрепленной на нем втулкой; ε_2 – эксцентриситет поворотной эксцентриковой втулки.

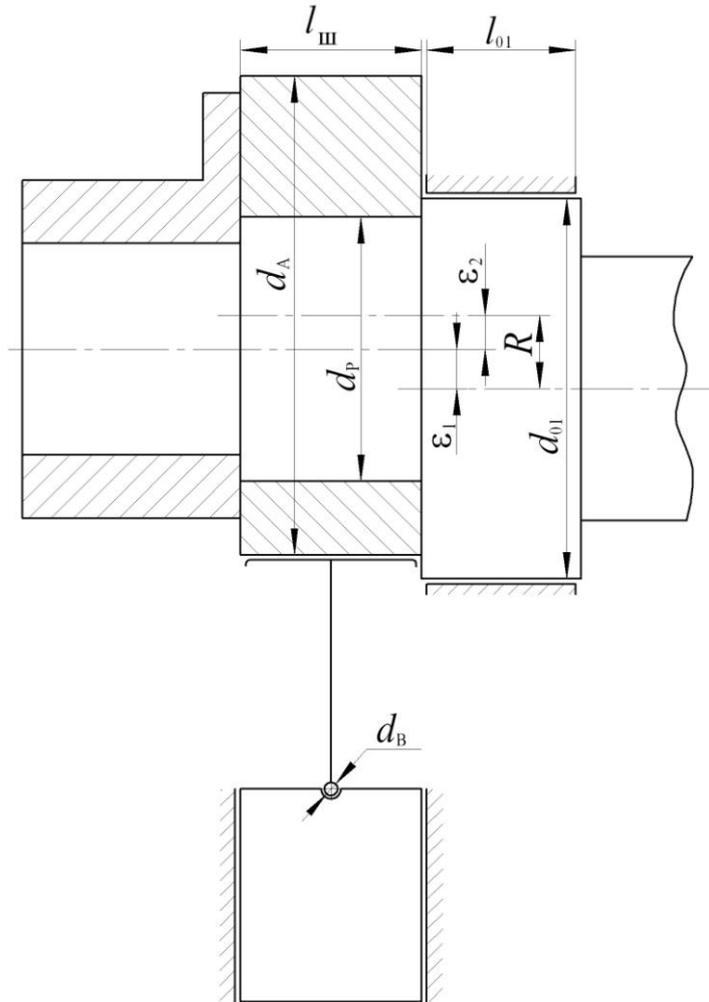


Рис. 1.1. Фрагмент кривошипного вала

ГОСТ регламентирует величину максимального S_{\max} и минимального S_{\min} хода ползуна. Учитывая, что $S_{\max} = 2R_{\max}$ и $S_{\min} = 2R_{\min}$, находим

$$\varepsilon_1 = 0,25 \cdot (S_{\max} + S_{\min}); \quad \varepsilon_2 = 0,25 \cdot (S_{\max} - S_{\min}), \quad (1.3)$$

В расчетную формулу (1.2) необходимо подставлять d_A и d_{01} . Диаметр эксцентриковой втулки d_A и диаметр передней опорной шейки вала d_{01} можно найти из конструктивных соображений:

$$d_A = 1,1 \cdot (d_p + 2\varepsilon_2), \text{ мм}; \quad (1.4)$$

$$d_{01} = d_p + 2\varepsilon_1 + 10, \text{ мм}; \quad (1.5)$$

Длину шатунной цапфы кривошипного вала и диаметр ползунной головки шатуна можно определить исходя из допускаемых давлений в подшипниках:

$$l_{\text{ш}} = \frac{P_{\text{н}}}{d_A \cdot [g_A]}; \quad d_B = \frac{P_{\text{н}}}{l_B \cdot [g_B]}, \quad (1.6)$$

где $P_{\text{н}}$ – номинальное усилие прессы;

$[g_A]$ и $[g_B]$ – допускаемые давления в кривошипной и ползунной головках шатуна.

Поскольку почти все размеры вала связаны с диаметром d_p , находим величину этого диаметра. Для этого приведем выражение (1.1) к уравнению

$$y = \frac{0,2 \cdot [\sigma_{-1}]}{n \cdot k_3 \cdot \sqrt{\Phi_\sigma \cdot l_{ш}^2 + \Phi_\tau \cdot m_k^2}} \cdot d_p^3 - P_H. \quad (1.7)$$

При $y = 0$ диаметр d_p и связанные с ним размеры будут такими, что прочность кривошипного вала обеспечит допускаемое усилие на ползуне, равное номинальному усилию прессы.

Мы пришли к необходимости решения *трансцендентного уравнения*.

1.2. Методика решения трансцендентного уравнения

Уравнение вида $f(x, p_1, p_2, \dots, p_k) = 0$ называется *трансцендентным*, если f – заданная функция, x – главная неизвестная величина, а p_1, p_2, \dots, p_k – параметры задачи, среди которых есть как известные, так и неизвестные.

Приведем уравнение (1.7) к классу трансцендентных. Для этого

1. выделим главную неизвестную величину – d_p ;
2. классифицируем параметры: $[\sigma_{-1}], n, k_3, \Phi_\sigma, \Phi_\tau, P_H$ – известные и $l_{ш}, m_k$ – неизвестные;
3. методом отделения корней выявим диапазон, в котором есть единственное решение;
4. одним из известных методов (дихотомии) найдем корень уравнения $x = d_p$.

Таким образом, за 4 шага мы избавились от одной неизвестной величины математической модели. Для того чтобы полностью решить задачу расчета конструктивных параметров кривошипного вала, необходимо повторить решение, но в качестве главной неизвестной величины выбрать один из неизвестных параметров, а найденную величину d_p перевести в разряд известных параметров.

1.3. Метод отделения корней трансцендентного уравнения

(Лабораторная работа №1)

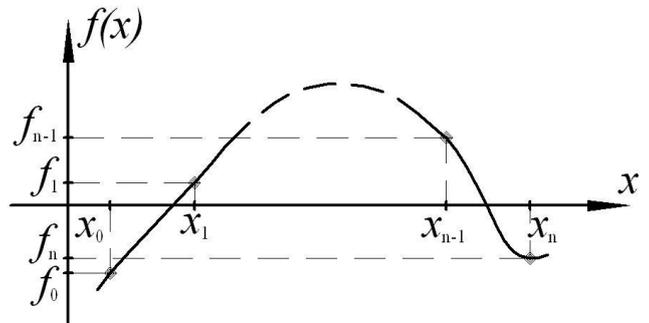
1. Исходя из математических и инженерных соображений выявляем диапазон, на котором будем искать решение:
математические – $x \in]-\infty, +\infty[$,
инженерные – $x \in [x_0, x_n]$, $x_0 = 100$, $x_n = 1000$.
2. Задаем либо количество разбиений n , либо шаг разбиения диапазона h :
 $n = \frac{x_n - x_0}{h}$ ($n \leq 20$), $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ ($h = 100$).
3. Находим точки разбиения $x_{i+1} = x_i + h$ ($i = \overline{0, n-1}$).
4. Находим значения функции $f_i = f(x_i, p_1, p_2, \dots, p_k)$.

5. Анализ результатов и выводы можно сделать двумя способами:
 а) **табличный**: заносим полученные значения в таблицу:

x_i	f_i
x_0	f_0
x_1	f_1
...	...
x_{n-1}	f_{n-1}
x_n	f_n

Поскольку в этом методе необходимо найти отрезок, на котором есть один корень уравнения, необходимо проанализировать знаки значений во второй строке таблицы. Если на отрезке значение функции меняется с положительного на отрицательное либо наоборот, то на этом отрезке есть корень.

б) **графический**: по полученным значениям x_i и f_i строим примерный график функции. Необходимо выявить отрезки, на которых график функции пересекает ось x .



Задание.

1. Написать программу на языке Pascal для решения уравнения (1.7) в соответствии со схемой алгоритма (рисунок 1.2). Набрать ее на компьютере.
2. Отделить корни уравнения. Исходные данные взять из таблицы:

№ варианта	σ_{-1} , Н/мм ²	Φ_{σ}	Φ_{τ}	$l_{ш}$, мм ²	m_k , мм	P_H , Н
1	280	2,1	3,5	350	900	160000
2	300	2,2	3,6	380	950	400000
3	320	2,4	3,8	390	980	400000
4	310	3,5	3,9	400	990	1000000
5	290	2,9	2,8	375	920	250000
6	350	2,8	3,0	360	930	160000

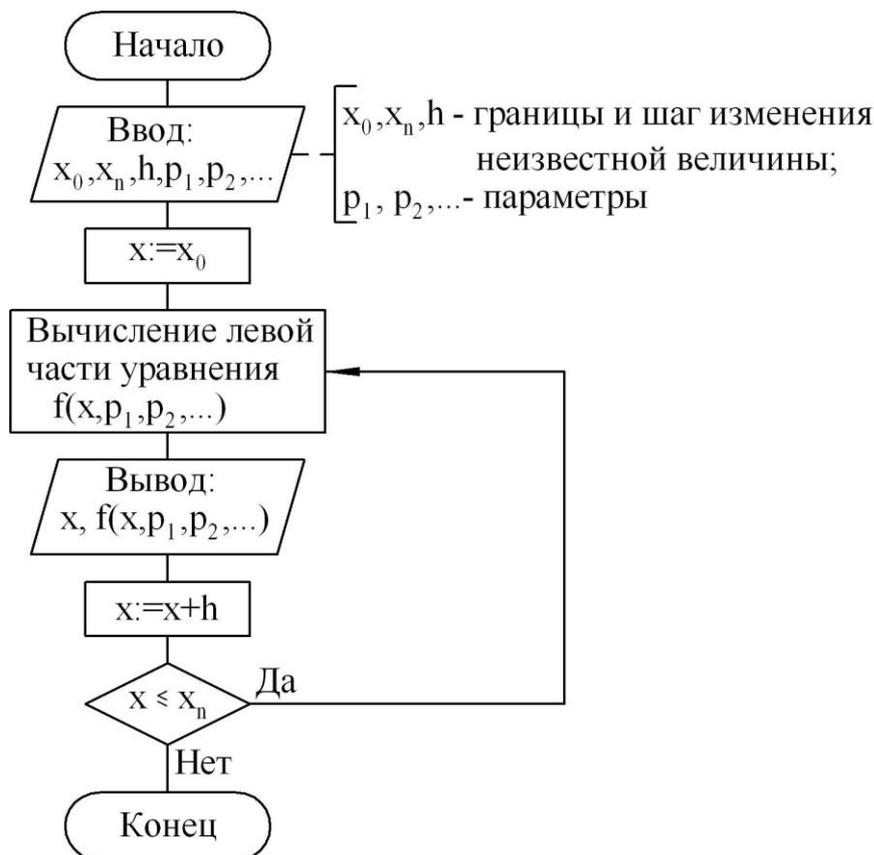


Рис. 1.2. Схема алгоритма табличного метода отделения корней

1.4. Метод дихотомии (Лабораторная работа №2)

Считаем, что отделение корней трансцендентного уравнения проведено и на отрезке $[a, b]$ расположен один корень, который необходимо уточнить с погрешностью ε (рисунок 1.3).

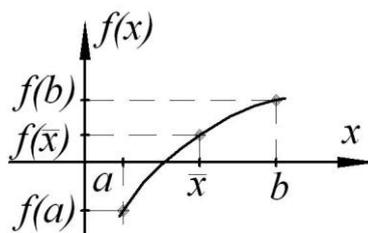


Рис. 1.3. Графическая интерпретация метода дихотомии

Метод дихотомии, или половинного деления заключается в следующем. Определяем середину отрезка $\bar{x} = (a + b) / 2$ и вычисляем функцию $f(\bar{x})$. Далее делаем выбор, какую из двух частей отрезка взять для дальнейшего уточнения корня. Если левая часть уравнения $f(x)$ есть непрерывная функция аргумента x , то корень будет находиться в той части отрезка, на концах которой $f(x)$ имеет разные знаки. На рисунке 1.3 это отрезок $[a, \bar{x}]$, т.е. для очередного шага уточнения точку b перемещаем в середину отрезка \bar{x} и продолжаем процесс деления, как и с первоначальным отрезком $[a, b]$.

Следует учитывать, что функция $f(x)$ вычисляется с некоторой абсолютной погрешностью. Вблизи корня значения функции $f(x)$ малы по абсо-

лютой величине и могут оказаться сравнимыми с погрешностью ее вычисления.

Условия завершения итерационного процесса:

а) $|f(\bar{x})| < \varepsilon$ – будем считать, что мы нашли корень;

б) $|a - b| < \varepsilon$ – интервал поиска корня стал меньше заданной погрешности.

В любом случае, необходимо выводить значения x и $f(x)$, чтобы оценить, успешно ли завершен итерационный процесс.

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal для решения уравнения (1.7) в соответствии со схемой алгоритма (рисунок 1.4). Набрать ее на компьютере.
2. Уточнить корни уравнения (1.7), взяв исходные данные лабораторной работы №1. Отрезок местоположения корня задать в соответствии с результатами предыдущей лабораторной работы.
3. Сделать общие выводы.

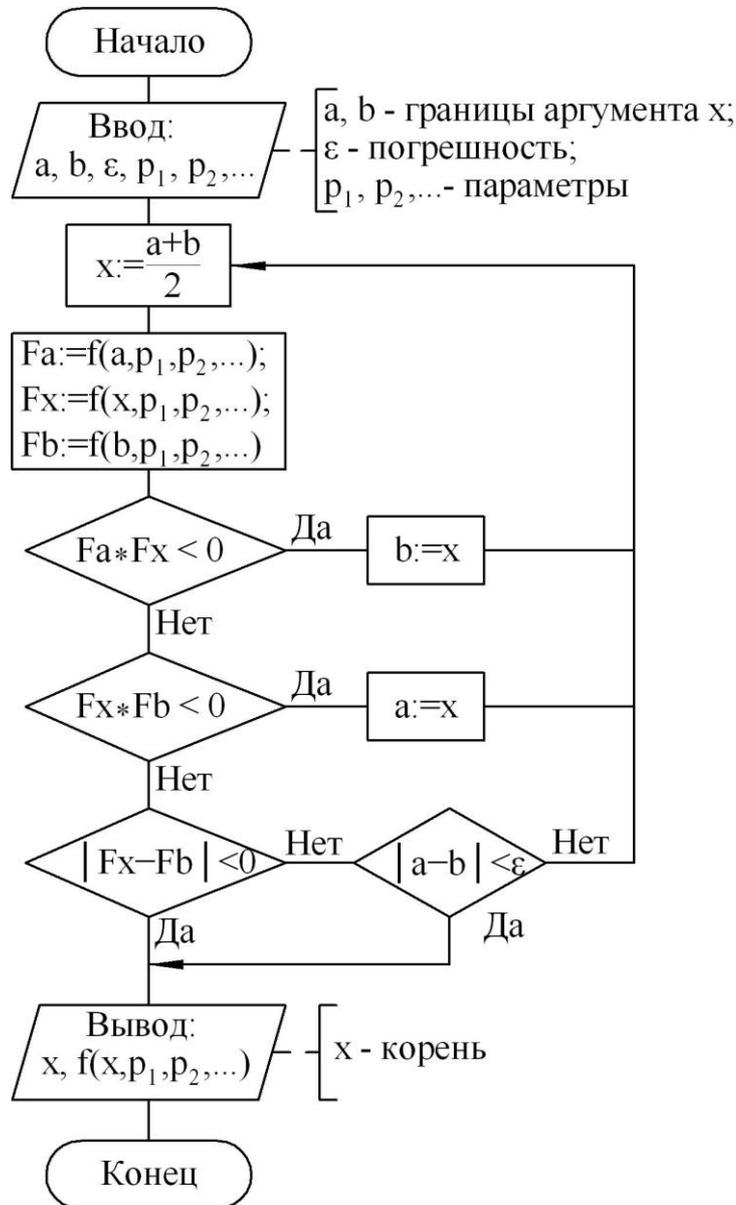


Рис. 1.4. Схема алгоритма решения трансцендентного уравнения методом дихотомии

2. ЗАДАЧИ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Метод Гаусса с выбором главного элемента для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

(Лабораторная работа №3)

Необходимо решить СЛАУ

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= a_{n,n+1} \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

где x_k – неизвестные величины;

a_{ij} – заданные элементы расширенной матрицы системы уравнений.

Алгоритм метода Гаусса состоит из двух этапов. Первый этап называется прямым ходом метода и заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений. Начинается прямой ход с выбора **главного элемента**, которым назовем наибольший по модулю элемент столбца, начиная с диагонального и ниже. Главный элемент выставляется на диагональ матрицы путем перестановки строк. Таким образом, в системе (2.1) окажется коэффициент $a_{11} \neq 0$, иначе система будет вырожденной и решению методом Гаусса не подлежит. Разделив первое уравнение системы на a_{11} , получим новое уравнение

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)}. \quad (2.2)$$

Для исключения x_1 из каждого уравнения системы, начиная со второго, будем умножать уравнение (2.2) последовательно a_{21} , a_{31} и т.д. и вычитать из второго, третьего и т.д. уравнений системы, соответственно. Получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n &= a_{3,n+1}^{(1)} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= a_{n,n+1}^{(1)} \end{aligned} \right\}. \quad (2.3)$$

Аналогично преобразуем систему (2.3). Последовательно продолжая этот процесс, в предположении, что $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, $a_{44}^{(3)}$, ..., $a_{nn}^{(n-1)}$ – главные элементы соответствующих строк, приведем систему (2.1) к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= a_{1,n+1}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= a_{2,n+1}^{(2)} \\ x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n &= a_{3,n+1}^{(3)} \\ &\vdots \\ x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n &= a_{n-1,n+1}^{(n-1)} \\ x_n &= a_{n,n+1}^{(n)} \end{aligned} \right\}. \quad (2.4)$$

Таким образом, коэффициенты системы (2.4) находятся с помощью формул $a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$; $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}a_{kj}^{(k)}$, где

$$k+1 \leq j \leq n+1; \quad k+1 \leq i \leq n; \quad k = \overline{1, n} \quad (a_{ij}^{(0)} = a_{ij}).$$

Второй этап решения СЛАУ называется обратным ходом метода Гаусса и состоит в последовательном определении неизвестных x_k , начиная с x_n и заканчивая x_1 , по формулам

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)}; \quad x_i = a_{i,n+1}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)}x_j, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal для решения СЛАУ методом Гаусса согласно схеме алгоритма (рисунок 2.1). Набрать ее на компьютере.
2. Решить СЛАУ. Исходные данные взять из таблицы:

№ варианта	Система линейных алгебраических уравнений	№ варианта	Система линейных алгебраических уравнений
1	$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_4 &= 9 \\ 2x_1 + 5x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= -4 \end{aligned} \right\}$	2	$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_4 &= 8 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned} \right\}$
3	$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 15 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 5x_4 &= 9 \end{aligned} \right\}$	4	$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_4 &= 25 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -3 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 22 \\ x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= -6 \end{aligned} \right\}$
5	$\left. \begin{aligned} -3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -3 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11 \end{aligned} \right\}$	6	$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_4 &= -2 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 6 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$

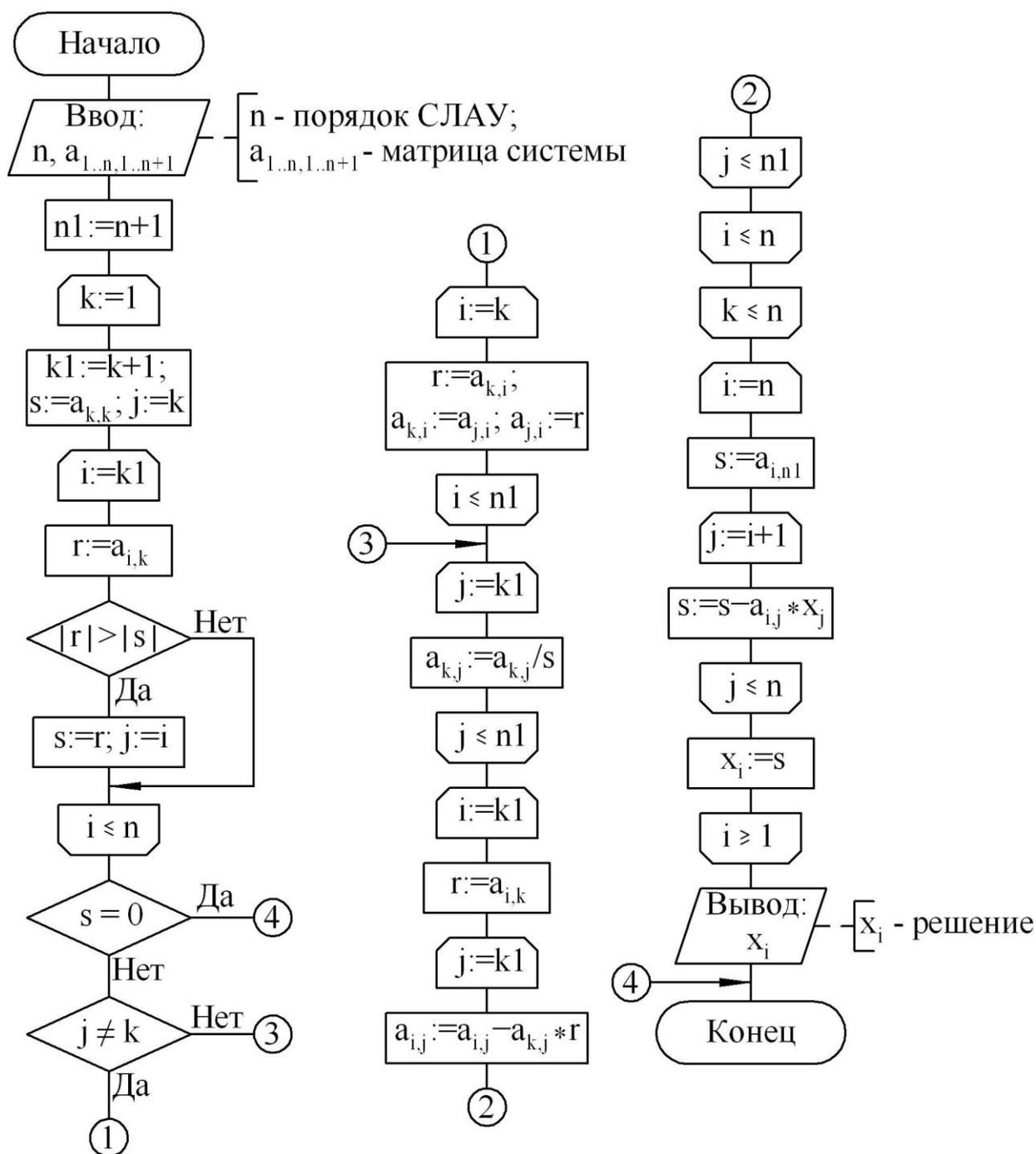


Рис. 2.1. Схема алгоритма решения СЛАУ методом Гаусса

2.2. Поиск главных компонент тензоров (Лабораторная работа №4)

Проблеме поиска главных компонент и главных направлений тензоров соответствует задача вычисления собственных значений и собственных векторов квадратных матриц, представляющих соответствующие тензора в текущей системе координат [1].

По определению, известному из линейной алгебры, **собственными значениями** квадратной матрицы A называются числа λ , удовлетворяющие соотношению

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x}, \quad (2.6)$$

где \bar{x} – **собственный вектор** матрицы.

Простейшим **итерационным методом** нахождения собственных значений и собственных векторов матриц является метод, основанный на соотношении (2.6).

1. Задаем максимальное количество итераций m (100), погрешность вычислений ε (0,00001) и начальный вектор \bar{x}_0 .
2. Умножаем матрицу A на вектор \bar{x}_0 . Полученный в результате вектор обозначаем \bar{x}'_1 : $A \cdot \bar{x}_0 = \bar{x}'_1$.
3. Находим наибольшую по модулю компоненту вектора \bar{x}'_1 и обозначаем ее λ_1 .
4. Нормируем вектор \bar{x}'_1 на λ_1 и полученный в результате вектор обозначаем \bar{x}_1 : $\frac{1}{\lambda_1} \bar{x}'_1 = \bar{x}_1$.
5. После проверки **условий окончания процесса** решение возвращается к шагу 2, заменяя \bar{x}_0 на найденный вектор \bar{x}_1 .

Основная формула 1-й итерации: $A \cdot \bar{x}_0 = \lambda_1 \bar{x}_1$. Отсюда видно, что **основная формула** итерационного процесса: $A \cdot \bar{x}_{k-1} = \lambda_k \bar{x}_k$.

Условия завершения процесса:

- а) выполняется условие $\left| \frac{\lambda_{k-1} - \lambda_k}{\lambda_k} \right| < \varepsilon$, следовательно, итерационный процесс завершился успешно: λ_k – собственное значение матрицы, \bar{x}_k – ее собственный вектор;
- б) достигли максимального количества итераций ($k = m$) – решение не найдено, возвращаемся к шагу 1 и задаем другой начальный вектор \bar{x}_0 (как правило, перпендикулярный).

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal для нахождения собственного значения и собственного вектора матрицы, представляющей тензор в текущей системе координат, согласно схеме алгоритма (рисунок 2.2). Набрать ее на компьютере.
2. Найти одну из главных компонент тензора, начальный вектор для 1, 2 и 6 вариантов – (1,0,0), для 3, 4 и 5 вариантов – (0,0,1). Исходный тензор взять из таблицы:

№ варианта	Тензор	№ варианта	Тензор
1	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$	4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

№ варианта	Тензор	№ варианта	Тензор
5	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

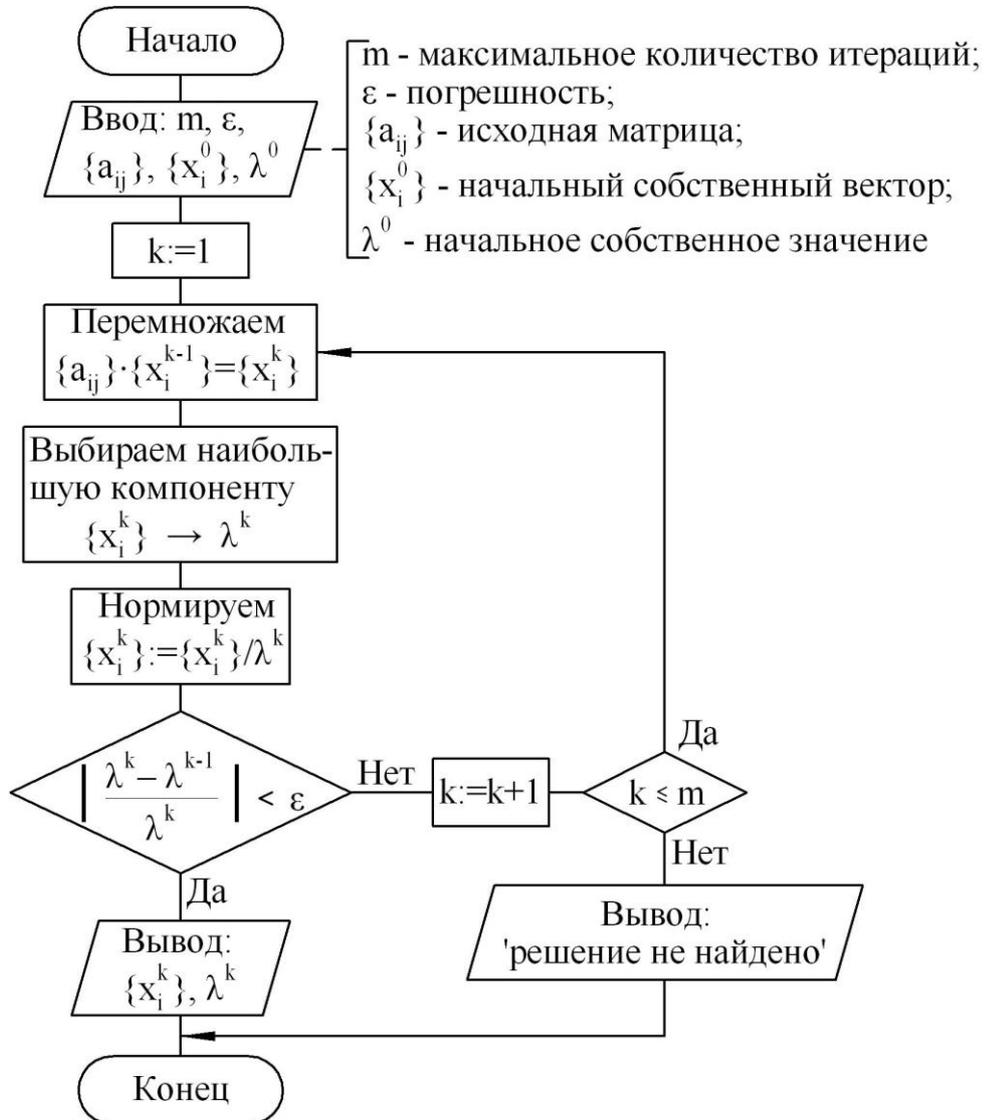


Рис. 2.2. Схема алгоритма итерационного метода вычисления собственного значения и собственного вектора матрицы

3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ

3.1. Интерполяция каноническим полиномом (Лабораторная работа №5)

Выберем в качестве аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ полином $P_n(x)$ степени n в каноническом виде [5]

$$\varphi(x) = P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n. \quad (3.1)$$

Свободными параметрами интерполяции c_i являются коэффициенты полинома (3.1), которые определим из условий Лагранжа

$$P_n(x_i) = f_i, \quad 0 \leq i \leq n \quad \text{или} \quad \begin{cases} c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \dots + c_nx_0^n = f_0 \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \dots + c_nx_1^n = f_1 \\ \dots \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \dots + c_nx_n^n = f_n \end{cases}. \quad (3.2)$$

Система линейных алгебраических уравнений (3.2) относительно свободных параметров c_i имеет решение, так как определитель системы отличен от нуля, если среди узлов x_i нет совпадающих.

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal, реализующую метод интерполяции каноническим полиномом, в соответствии со схемой алгоритма (рисунок 3.1). Набрать ее на компьютере.
2. Рассчитать значения функции $f(x)$ при $x = 3, 7, 11, 15$ для следующих значений экспериментов:

1 вариант		2 вариант		3 вариант	
x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	10	1	20	1	10
5	18	5	50	5	20
8	25	8	60	8	30
12	40	12	80	12	40
16	60	16	90	16	50
4 вариант		5 вариант		6 вариант	
x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	10	1	10	1	12
5	20	5	40	5	19
8	40	8	50	8	37
12	60	12	70	12	55
16	80	16	80	16	65

3. Записать канонический полином для своего варианта экспериментальных данных

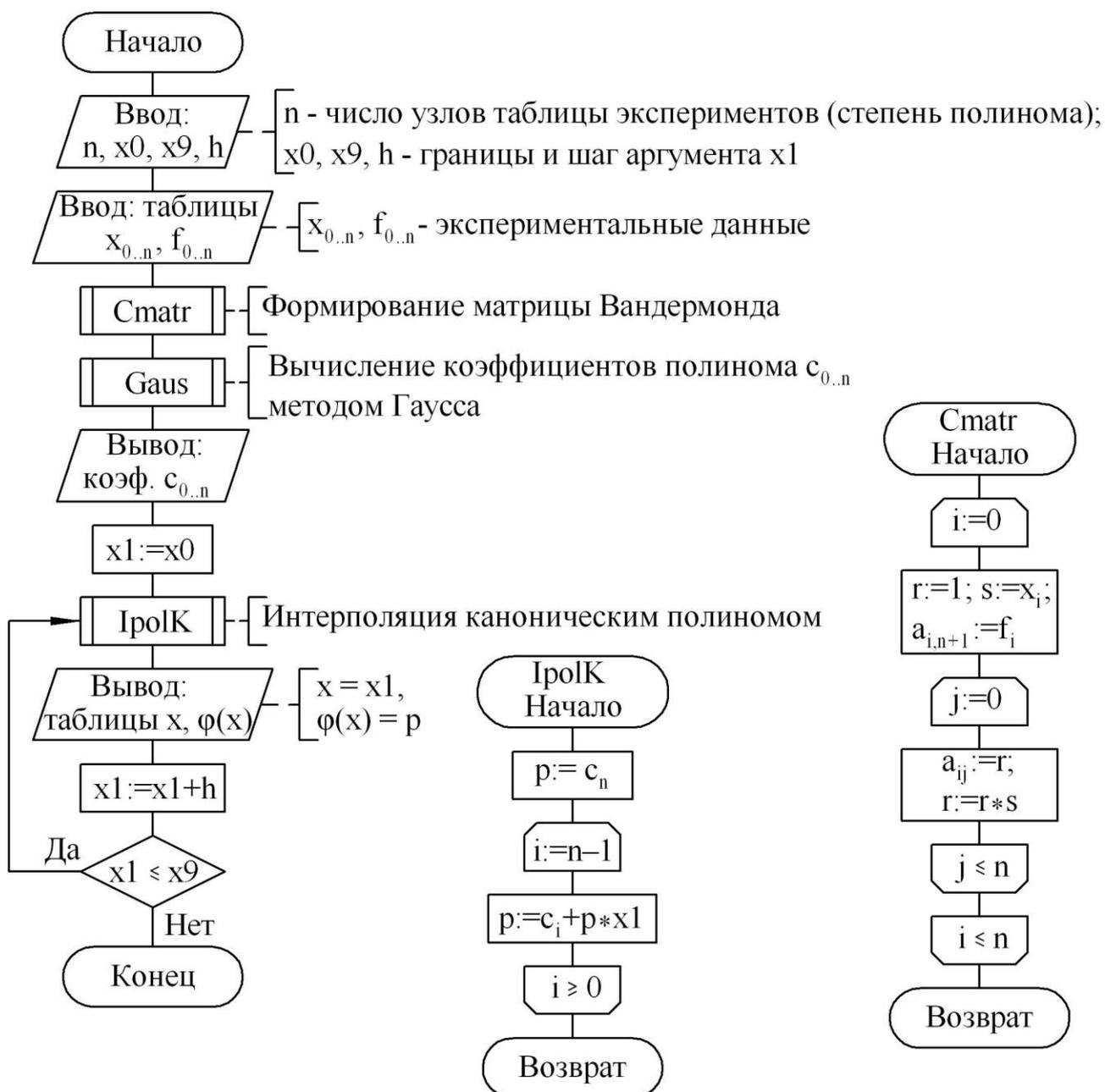


Рис. 3.1. Схема алгоритма метода интерполяции каноническим полиномом

3.2. Интерполяция полиномом Лагранжа (Лабораторная работа №6)

Лагранж предложил следующую форму интерполяционного полинома

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal, реализующую метод интерполяции полиномом Лагранжа в соответствии со схемой алгоритма (рисунок 3.2), набрать ее на компьютере.

2. Рассчитать значения функции $f(x)$ при $x = 3, 7, 11, 15$. Исходные данные взять из предыдущей лабораторной работы.
3. Сравнить результаты, сделать выводы по лабораторным работам №5 и №6.

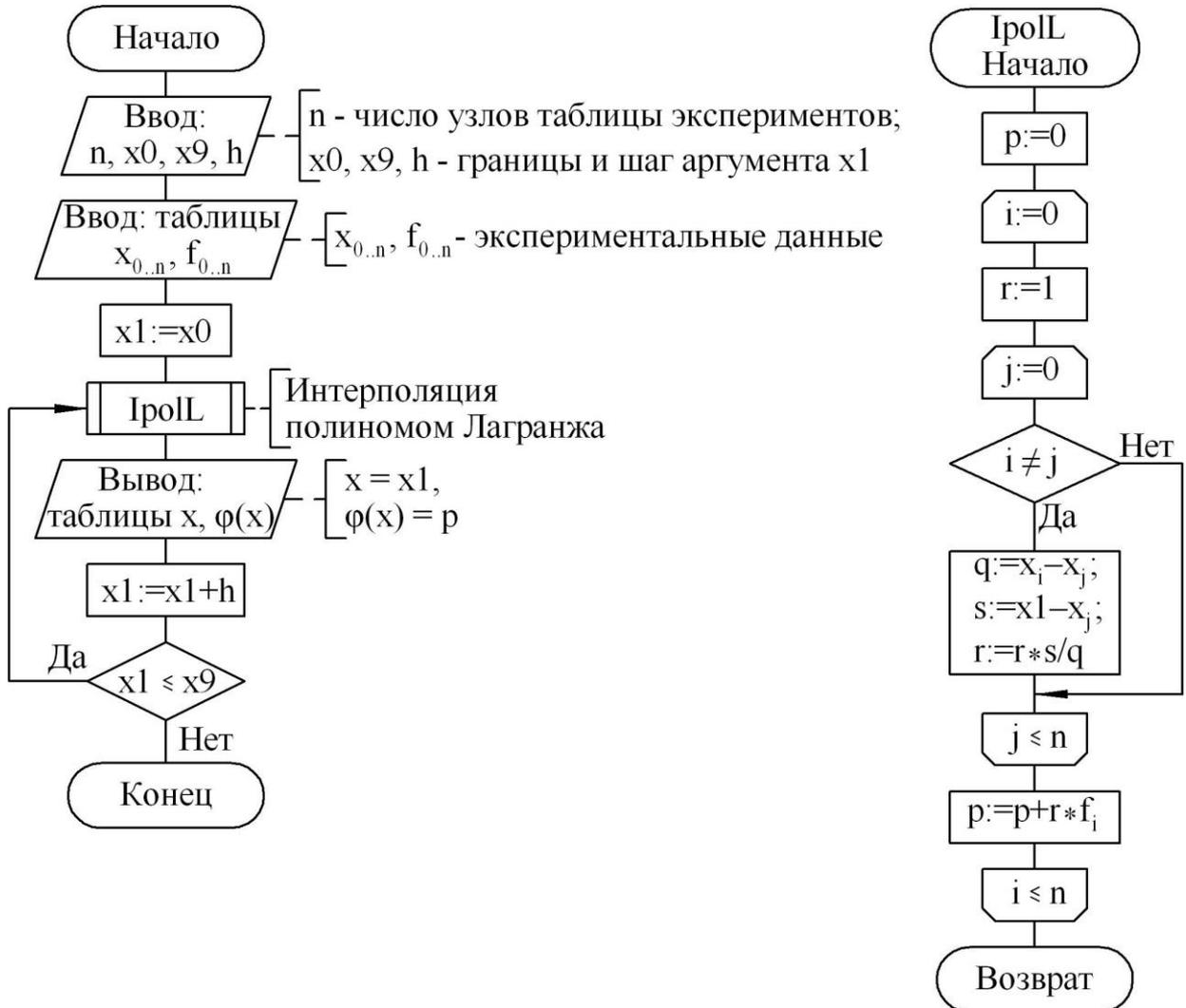


Рис. 3.2. Схема алгоритма метода интерполяции полиномом Лагранжа

4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК) ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

4.1. Метод наименьших квадратов со степенным базисом

(Лабораторная работа №7)

Выберем базисные функции $\varphi_k(x)$ в виде последовательности степеней аргумента x , которые линейно независимы:

$$\varphi_0(x) = x^0 = 1, \quad \varphi_1(x) = x^1 = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \dots, \quad \varphi_m(x) = x^m. \quad (4.1)$$

В этом случае, как и при интерполяции, мы будем аппроксимировать экспериментальную зависимость полиномом. Однако степень полинома m выбираем обычно $m \leq n$. Если же выбрать $m = n$, то на основании единственности интерполяционного полинома получим функцию $\varphi(x)$, совпадающую с каноническим интерполяционным полиномом степени n . Это обстоятельство используется для отладки и тестирования программ, реализующих этот алгоритм. Запишем расширенную матрицу Грама для степенного базиса (4.1):

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n f_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^n x_i \cdot f_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2m} & \sum_{i=0}^n x_i^m \cdot f_i \end{bmatrix}$$

Программу, реализующую МНК со степенным базисом, нетрудно составить в соответствии со схемой алгоритма, приведенной на рисунках 4.1 – 4.2.

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal, реализующую МНК со степенным базисом, набрать ее на компьютере.
2. Рассчитать значения функции $f(x)$ при $x = 3, 7, 11, 15$; $m = n$. Исходные данные взять из лабораторной работы №5. Сравнить результаты лабораторных работ №5 и №7.
3. Рассчитать значения функции $f(x)$ при $x = 3, 7, 11, 15$; $m = 3$. Записать аппроксимирующий полином.
4. Сравнить результаты, сделать выводы по лабораторным работам №5, №6 и №7.

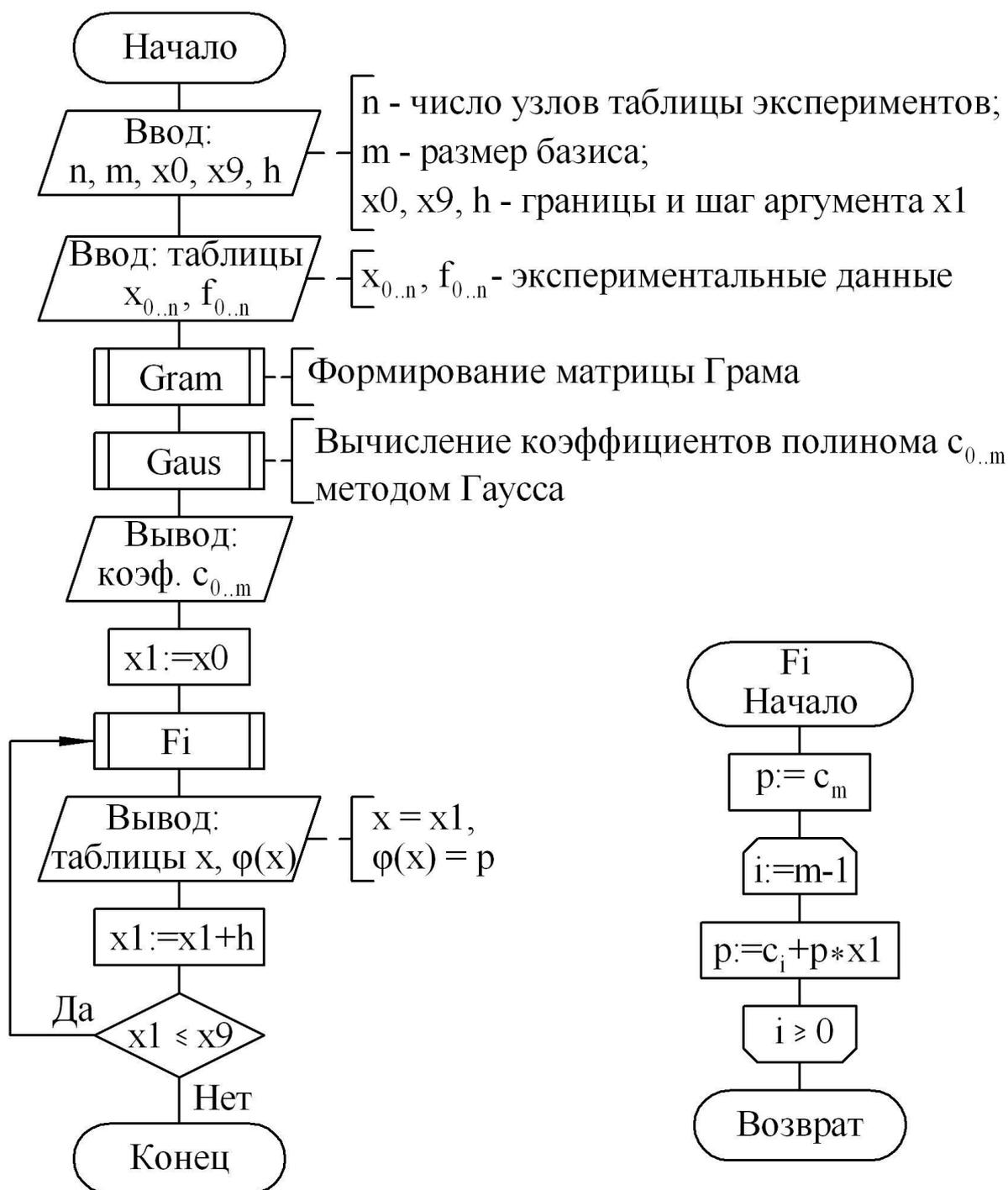


Рис. 4.1. Схема алгоритма МНК со степенным базисом

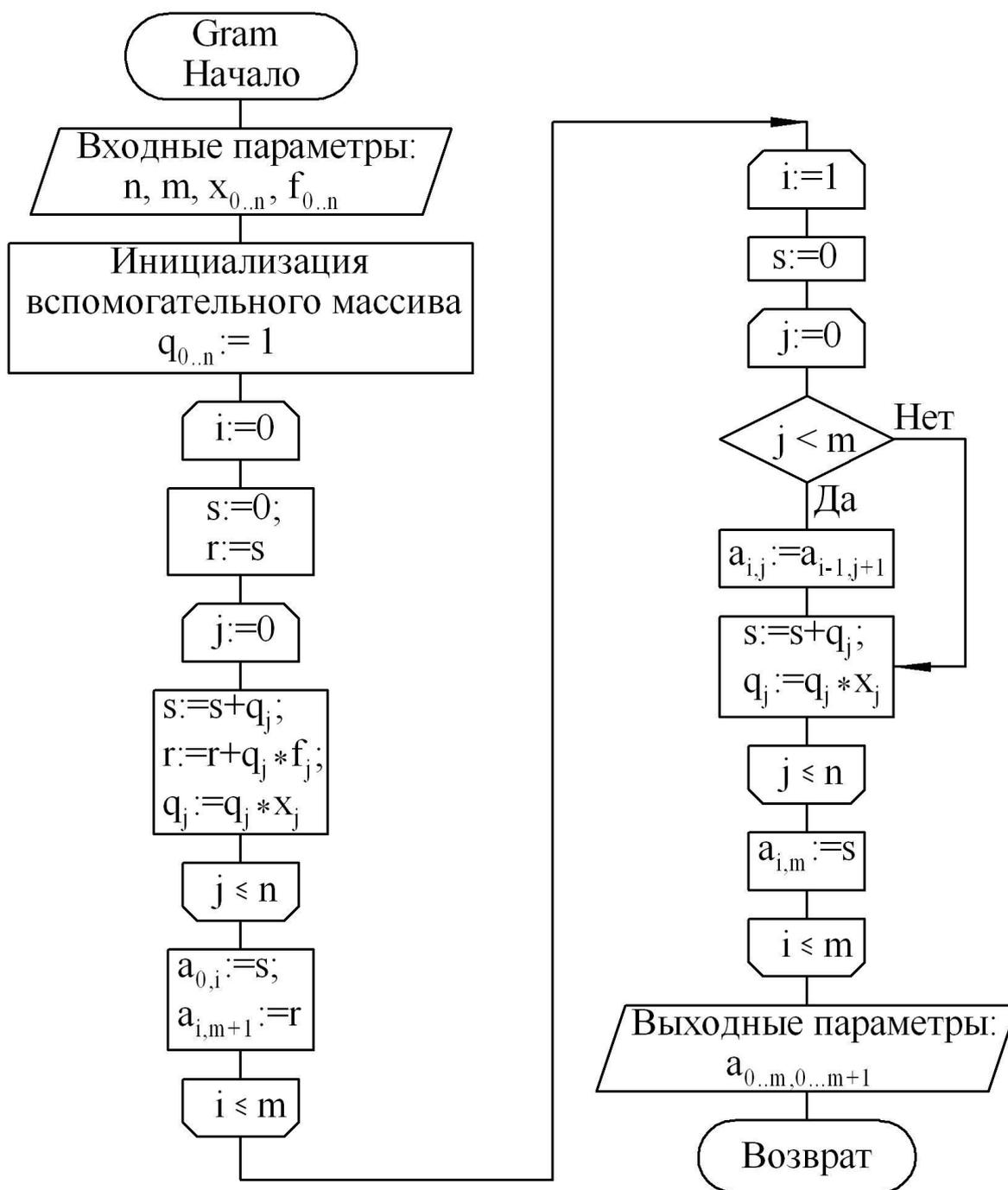


Рис. 4.2. Схема подпрограммы формирования матрицы Грама для МНК со степенным базисом

5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ НА ОПРАВКУ ПРОШИВНОГО СТАНА

5.1. Постановка задачи

Необходимо определить давлением на оправку прошивного стана в установившемся процессе прошивки с учетом напряжений от внешних сил в центре заготовки (рисунок 5.1) [8].

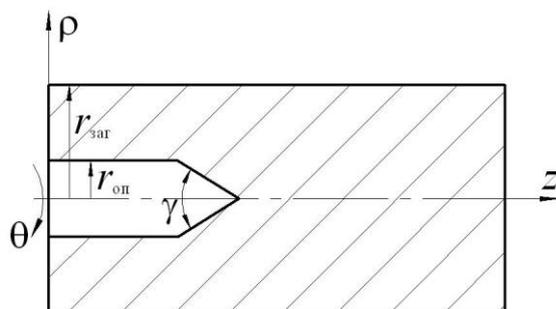


Рис. 5.1. Схема к определению давления на оправку прошивного стана

Осевое напряжение при прошивке $\sigma_z = 0,5(\sigma_\rho + \sigma_\theta)$. Используя формулы для расчета рабочих напряжений в зонах под валками, с учетом напряжений от внешних сил в центральной части заготовки

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_\rho}{K} &= -\frac{1}{4} e^{\mu\theta} \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right] + \ln \frac{r}{\rho}; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= -\frac{1}{4} e^{\mu\theta} \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right] + \ln \frac{r}{\rho} + 1; \\ \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} &= -\frac{\mu}{4} e^{\mu\theta} \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right] \end{aligned} \right\}, \quad (5.1)$$

получим [7]

$$\frac{\sigma_z}{K} = -\frac{1}{4} e^{\mu\theta} \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right] + \ln \frac{r}{\rho} + \frac{1}{2}, \quad (5.2)$$

где нормальные и касательные напряжения записаны в цилиндрической системе координат;

r – радиус заготовки;

K и μ – физико-механические параметры материала заготовки;

$a = -1 + \sqrt{1 + \mu^2}$.

Заготовка соприкасается с оправкой лишь на участке, соответствующем углу γ . Поэтому осевое давление на оправку равно

$$\frac{Q}{K} = -2 \int_0^{\gamma r_{\text{оп}}} \int_0^{\gamma r_{\text{оп}}} \frac{1}{4} e^{\mu\theta} \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right] \rho d\rho d\theta + \int_0^{\gamma r_{\text{оп}}} \int_0^{\gamma r_{\text{оп}}} \rho d\rho d\theta + 2 \int_0^{\gamma r_{\text{оп}}} \int_0^{\gamma r_{\text{оп}}} \rho \ln \frac{r}{\rho} d\rho d\theta. \quad (5.3)$$

Интегрируя по θ , окончательно получим

$$\frac{Q}{K} = -\frac{1}{2} \frac{e^{\mu\gamma} - 1}{\mu} \int_0^{\gamma r_{\text{оп}}} \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right] \rho d\rho + \gamma \int_0^{\gamma r_{\text{оп}}} \rho d\rho + 2\gamma \int_0^{\gamma r_{\text{оп}}} \rho \ln \frac{r}{\rho} d\rho. \quad (5.4)$$

Следует отметить, что не только эта, но и многие другие задачи обработки металлов давлением сводятся к вычислению определенных интегралов. Поэтому далее рассмотрим некоторые методы численного расчета определенных интегралов.

5.2. Метод средних прямоугольников (Лабораторная работа №8)

Ставится задача вычислить интеграл вида

$$J = \int_a^b f(x) dx, \quad (5.5)$$

где a и b – нижний и верхний пределы интегрирования;

$f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Метод средних прямоугольников является одним из простейших методов из класса методов Ньютона-Котеса [6], когда подынтегральную функцию $f(x)$ на интервале интегрирования заменяем полиномом нулевой степени, т.е. константой. Приближенное значение интеграла определяется как площадь прямоугольника, одна из сторон которого есть длина отрезка интегрирования, а другая – аппроксимирующая константа, равная значению $f(x)$ в средней точке \bar{x}_i интервала интегрирования $[x_{i-1}, x_i]$ (рисунок 5.2). Отсюда происходит и название метода. На рисунке 5.2 $x_0 = a$, $x_n = b$.

Запишем выражение для интеграла на интервале $[x_i, x_i+h]$, полученное методом средних прямоугольников

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx = h \cdot f(\bar{x}_i) + R, \text{ где } \bar{x}_i = x_{i-1} + h/2, \quad R = J_{\text{точн.}} - J_{\text{прибл.}}. \quad (5.6)$$

Программу, реализующую метод средних прямоугольников, можно составить в соответствии со схемой алгоритма (рисунок 5.3). Предлагаемый алгоритм является универсальным и позволяет вычислять определенные интегралы от различных функций.

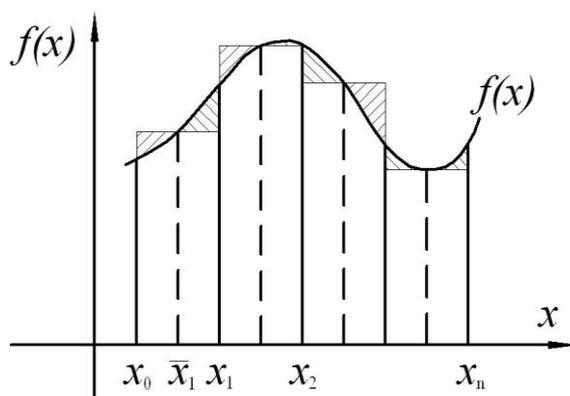


Рис. 5.2. Графическая интерпретация метода средних прямоугольников

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal для расчета давления на оправку прошивного стана по формуле (5.4), для каждого интеграла формулы описать соответствующую подпрограмму-функцию. Набрать программу на компьютере.
2. Рассчитать давление, исходные данные взять из таблицы:

№ варианта	N	$r_{\text{оп}}, \text{ мм}$	$r_{\text{заг}}, \text{ мм}$	$\gamma, \text{ град.}$	μ	K
1	300; 500	10	40	60	0.2	50
2	300; 500	12	50	65	0.2	45
3	300; 500	15	70	70	0.3	48
4	300; 500	14	60	75	0.2	55
5	300; 500	10	50	65	0.3	40
6	300; 500	16	80	60	0.2	50

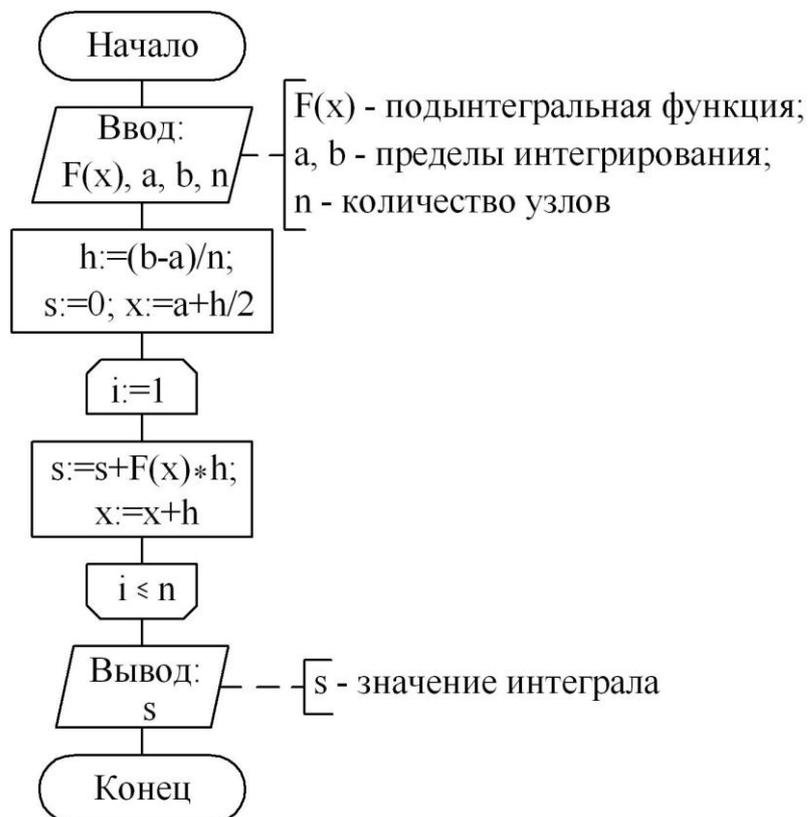


Рис. 5.3. Схема алгоритма численного интегрирования методом средних прямоугольников

5.3. Метод трапеций

(Лабораторная работа №9)

Подынтегральную функцию заменим на участке $[x_i, x_i+h]$ полиномом 1-й степени $P_1(x)$. Как и в методах прямоугольников, такая аппроксимация неоднозначна. Одним из возможных способов является проведение прямой через значения функции на границах интервала интегрирования (рисунок 5.4). В этом случае приближенное значение интеграла определяется площадью трапеции:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx = h \cdot \frac{f(x_i) + f(x_i+h)}{2} + R.$$

Программу, реализующую метод трапеций, можно составить в соответствии со схемой алгоритма (рисунок 5.5). Предлагаемая структура алгоритма является универсальной, как и в предыдущем случае, и позволяет вычислять интегралы от различных функций.

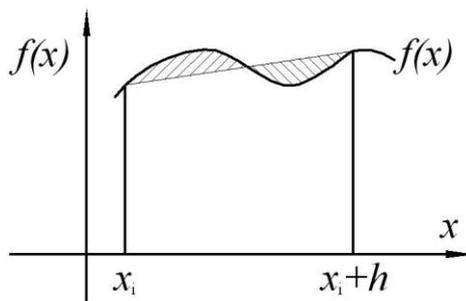


Рис. 5.4. Графическая интерпретация метода трапеций

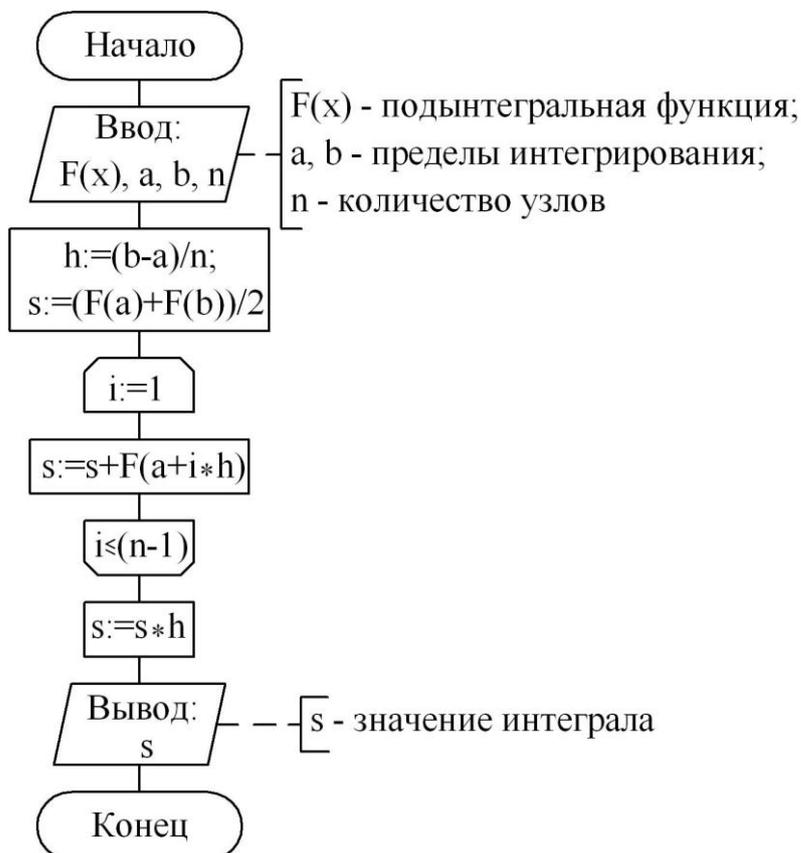


Рис. 5.5. Схема алгоритма численного интегрирования методом трапеций

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal для расчета давления на оправку прошивного стана по формуле (5.4), для каждого интеграла формулы описать соответствующую подпрограмму-функцию. Набрать программу на компьютере.
2. Рассчитать давление, исходные данные взять из предыдущей лабораторной работы, меняя только $N = 200; 300$.
3. Сравнить результаты.

5.4. Метод Симпсона*(Лабораторная работа №10)*

Подынтегральную функцию заменим интерполяционным полиномом 2-й степени $P_2(x)$ – параболой, проходящей через узлы x_0, x_1, x_2 (рисунок 5.6), тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx + R.$$

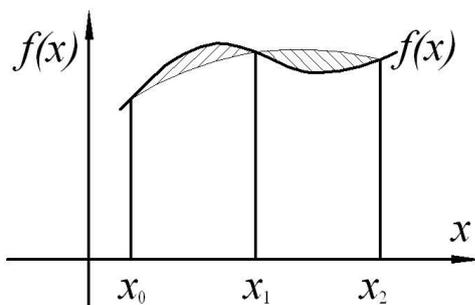


Рис. 5.6. Графическая интерпретация метода Симпсона

Для записи полинома $P_2(x)$ воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона для трех узлов

$$P_2(x) = f_0 + f_{01} \cdot (x - x_0) + f_{012} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1),$$

$$\text{где } \left. \begin{aligned} f_{01} &= \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} = \frac{f_1 - f_0}{h}, \\ f_{012} &= \frac{f_{01} - f_{02}}{x_1 - x_2} = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2h^2} \end{aligned} \right\} \text{ – разделенные разности;}$$

h – расстояние между узлами; $f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2)$.

Введем новую переменную $z = x - x_0$, тогда $x = z + x_0$ и полином примет вид

$$P_2(z) = f_0 + (f_{01} - f_{012} \cdot h) \cdot z + f_{012} \cdot z^2.$$

Теперь вычислим интеграл от полинома

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \int_0^{2h} P_2(z) dz = \frac{(f_0 + 4f_1 + f_2) \cdot h}{3}.$$

Последнее соотношение называют квадратурной формулой Симпсона, или формулой парабол.

Программу, реализующую метод Симпсона, можно составить в соответствии со схемой алгоритма (рисунок 5.7). Предлагаемая структура программы является универсальной, как и в предыдущих случаях, и позволяет вычислять интегралы от различных функций.

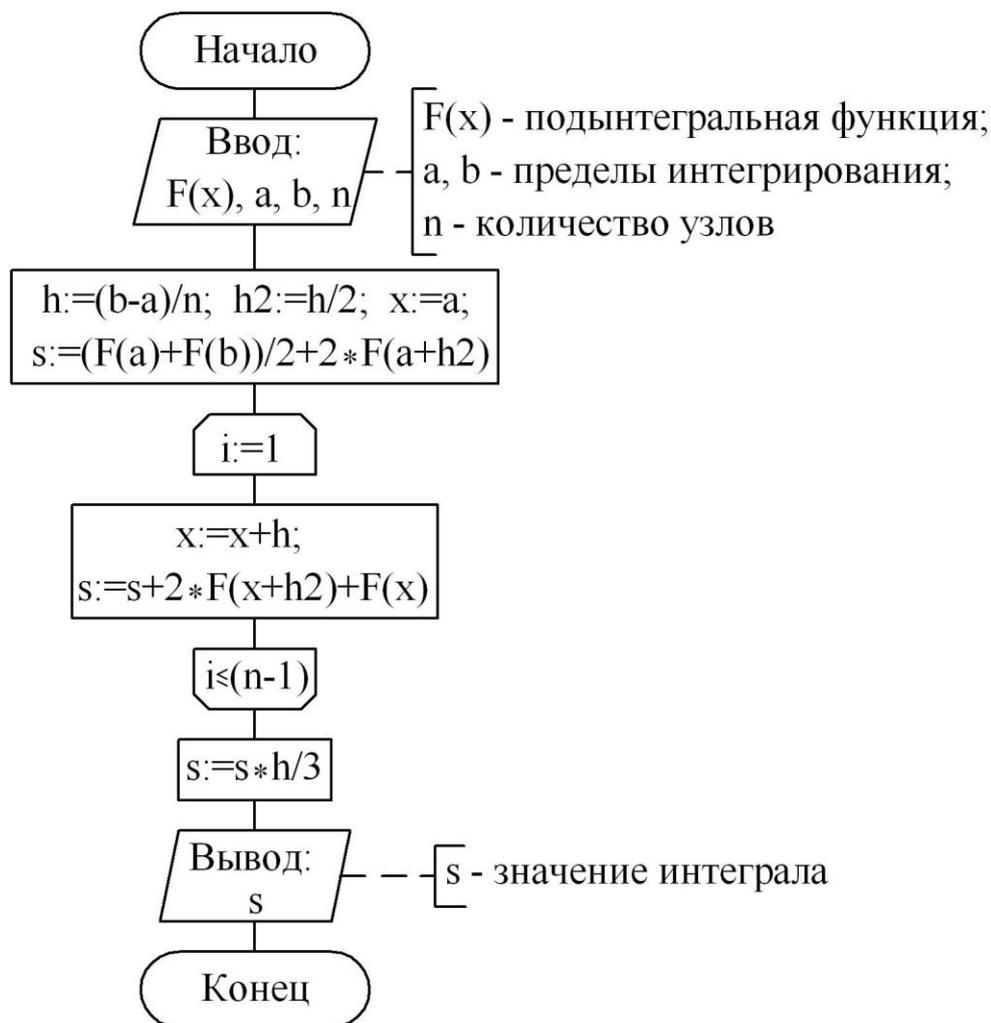


Рис. 5.7. Схема алгоритма численного интегрирования методом Симпсона

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal для расчета давления на оправку прошивного стана по формуле (5.4), для каждого интеграла формулы описать соответствующую подпрограмму-функцию. Набрать программу на компьютере.
2. Рассчитать давление, исходные данные взять из лабораторной работы №8, меняя только $N = 100; 200$.
3. Сравнить результаты лабораторных работ №8, №9, №10.

6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ КАМЕРНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАГРЕВАТЕЛЬНОЙ ПЕЧИ

6.1. Постановка задачи

Составим математическую модель работы камерной электрической нагревательной печи (рисунок 6.1) участка горячей штамповки алюминиевых сплавов [3]. На стенках корпуса 1 печи, футерованного огнеупорным кирпичом, размещены электрические нагреватели 2, которые стальным экраном 3 отделены от алюминиевых заготовок 4. Печь оборудована вентилятором 5, обеспечивающим циркуляцию воздуха в рабочем пространстве печи и лучшую теплоотдачу от нагревателей к заготовкам.

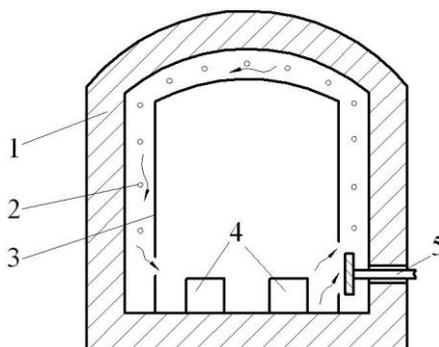


Рис. 6.1. Схема камерной электрической нагревательной печи

Составим один из простейших вариантов математической модели работы камерной печи. Удовлетворимся определением средней температуры печи $\theta_{\text{п}}$, экрана $\theta_{\text{э}}$ и нагреваемых заготовок $\theta_{\text{м}}$. Известна температура воздуха цеха $\theta_{\text{в}}$. Если W – мощность, выделяемая на нагревателях; $C_{\text{п}}$, $C_{\text{э}}$, $C_{\text{м}}$ – общая теплоемкость печи, экрана и металла соответственно; t – время; K , $T_{\text{э}}$, $T_{\text{м}}$ – некоторые коэффициенты пропорциональности, то запишем уравнение сохранения тепловой энергии: тепловая мощность нагревателей расходуется на нагрев металла $C_{\text{м}} \frac{d\theta_{\text{м}}}{dt}$, экрана $C_{\text{э}} \frac{d\theta_{\text{э}}}{dt}$, печи $C_{\text{п}} \frac{d\theta_{\text{п}}}{dt}$ и на тепловые потери в атмосферу цеха, которые пропорциональны разности температур $[K(\theta_{\text{п}} - \theta_{\text{в}})]$. Следовательно,

$$W = C_{\text{м}} \frac{d\theta_{\text{м}}}{dt} + C_{\text{э}} \frac{d\theta_{\text{э}}}{dt} + C_{\text{п}} \frac{d\theta_{\text{п}}}{dt} + K(\theta_{\text{п}} - \theta_{\text{в}}). \quad (6.1)$$

Температуры при нагреве алюминия невысокие. Теплопередача в основном осуществляется конвекцией. Скорости нагрева металла и экрана пропорциональны разности температуры печи $\theta_{\text{п}}$, с одной стороны, и температуры металла $\theta_{\text{м}}$ и экрана $\theta_{\text{э}}$, соответственно, с другой стороны. Поэтому можно написать

$$\left. \begin{aligned} T_{\text{м}} \frac{d\theta_{\text{м}}}{dt} &= \theta_{\text{п}} - \theta_{\text{м}}; \\ T_{\text{э}} \frac{d\theta_{\text{э}}}{dt} &= \theta_{\text{п}} - \theta_{\text{э}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Уравнения (6.1) и (6.2) представляют систему линейных дифференциальных уравнений, которая после ряда преобразований и введения безразмерных

величин и новых переменных может быть представлена в каноническом виде (точка означает производную по времени):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u; \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u \end{aligned} \right\}, \quad (6.3)$$

где a_{ij} , b_i ($i, j = 1, 2, 3$) – постоянные коэффициенты, характеризующие теплофизические свойства печи, экрана и нагреваемого металла; x_i ($i = 1, 2, 3$) – переменные, обозначающие температуры металла, экрана и печи; $u = u(t)$ – переменная, соответствующая мощности печи. Система (6.3) дополняется начальными условиями (при $t = t_0$ в начале процесса):

$$x_1 = x_1^0; x_2 = x_2^0; x_3 = x_3^0, \quad (6.4)$$

где x_1^0, x_2^0, x_3^0 – значения переменных, соответствующие температурам $\theta_m, \theta_3, \theta_n$ в начале процесса нагрева очередной садки металла. Если известны мощность нагревателей u , коэффициенты системы a_{ij} , b_i , то задача интегрирования системы (6.3) с начальными условиями (6.4) разрешима, причем решение единственно.

Можно найти опытным путем значения коэффициентов a_{ij} , b_i , а также начальные условия (6.4), которые будут лучшим образом по некоторому параметру описывать процесс нагрева металла в конкретной камерной печи. Для этого следует выполнить параметрическую идентификацию [3], которую здесь опустим. В результате система уравнений (6.3) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1x_1 + a_1x_3; \\ \dot{x}_2 &= -a_2x_2 + a_2x_3; \\ \dot{x}_3 &= a_3x_1 + a_4x_2 - (a_3 + a_4 + a_6/20)x_3 + a_5u + a_6 \end{aligned} \right\}. \quad (6.5)$$

Систему (6.5) можно интегрировать при помощи различных численных методов решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

6.2. Метод Эйлера решения системы ОДУ (Лабораторная работа №11)

Систему ОДУ часто удается представить в каноническом виде, в так называемой форме Коши:

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \text{где } k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.6)$$

При формулировке задачи Коши система (6.6) дополняется начальными условиями

$$x_1(t_0) = x_1^0; x_2(t_0) = x_2^0; \dots; x_n(t_0) = x_n^0. \quad (6.7)$$

Для простоты рассмотрим задачу Коши для одного уравнения типа (6.6), а затем полученные алгоритмы обобщим на систему n уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (6.8)$$

В окрестности точки t_0 функцию $x(t)$ разложим в ряд Тейлора

$$x(t) = x(t_0) + (t - t_0) \cdot x'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} \cdot x''(t_0) + \dots, \quad (6.9)$$

который можно применить для приближенного определения искомой функции $x(t)$. В точке t_0+h при малых h ($h = t - t_0$) можно ограничиться двумя членами ряда (6.9), тогда

$$x(t_0 + h) = x_0 + h \cdot x'(t_0) + O(h^2), \quad (6.10)$$

где $O(h^2)$ – бесконечно малая величина порядка h^2 . Заменяем производную $x'(t_0)$ в формуле (6.10) на правую часть уравнения (6.8):

$$x(t_0 + h) = x_0 + h \cdot f(t_0, x_0). \quad (6.11)$$

Далее приближенное решение в точке $t_1=t_0+h$ можно вновь рассматривать как начальное условие и по формуле (6.11) найти значение искомой функции в следующей точке $t_2=t_1+h_1$. В результате получен простейший алгоритм решения задачи Коши, который называется методом Эйлера или методом ломанных. Последнее название связано с геометрической интерпретацией процесса (рисунок 6.2): искомую функцию $x(t)$ мы заменяем ломанной линией, представляющей собой отрезки касательных к этой функции в узлах t_0, t_1, \dots

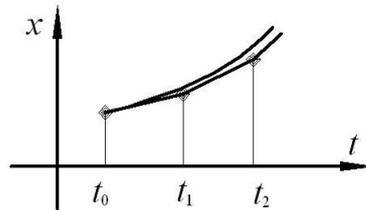


Рис. 6.2. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

Формула Эйлера (6.11) обобщается для систем ОДУ, записанных в форме Коши (6.6) с начальными условиями (6.7)

$$x_i(t_0 + h) = x_i^0 + h \cdot f(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0). \quad (6.12)$$

Программу, реализующую метод Эйлера решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений, можно составить в соответствии со схемой алгоритма (рисунок 6.3).

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal для расчета температур печи, экрана и заготовки. Набрать программу на компьютере.
2. Рассчитать изменение температур печи, экрана и заготовки при значениях параметров $a_1=4,019 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$; $a_2=5,485 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$; $a_3 = 1,663 \cdot 10^{-6} \text{ c}^{-1}$; $a_4 = 1,177 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$; $a_5 = 1,493 \cdot 10^{-3} \text{ град/кДж}$; $a_6 = 2,511 \cdot 10^{-3} \text{ град/с}$; $u = 180 \text{ кВт}$. Исходные данные:

№ варианта	t_0, c – начало процесса	t_k, c – окончание процесса	h, c – шаг	Начальные температуры		
				$\theta_m^0, ^\circ C$ – заготовки	$\theta_s^0, ^\circ C$ – экрана	$\theta_n^0, ^\circ C$ – печи
1	0	600	60	43	400	470
2	0	720	60	45	403	472
3	0	900	90	47	405	475
4	0	1200	120	49	407	478
5	0	1080	90	50	410	480
6	0	1440	120	51	412	483



Рис. 6.3. Схема алгоритма метода Эйлера решения системы ОДУ

6.3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка решения системы ОДУ (Лабораторная работа №12)

Для построения вычислительных схем метода Рунге-Кутты 4-го порядка в тейлоровском разложении искомого решения $x_i(t)$ учитываются члены, содержащие степени шага h до 4-ой включительно. После аппроксимации производных правой части ОДУ получено семейство схем Рунге-Кутты 4-го порядка, из которых наиболее используемой в вычислительной практике является следующая [6]:

$$x_i(t_0 + h) = x_i^0 + (q_i^1 + 2q_i^2 + q_i^3 + q_i^4)/3 + O(h^5),$$

$$\text{где } q_i^1 = h_2 \cdot f_i(t_0, x_i^0),$$

$$q_i^2 = h_2 \cdot f_i(t_0 + h_2, x_i^0 + q_i^1), \quad h_2 = h/2.$$

$$q_i^3 = h \cdot f_i(t_0 + h_2, x_i^0 + q_i^2),$$

$$q_i^4 = h_2 \cdot f_i(t_0 + h, x_i^0 + q_i^3),$$

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal для расчета температур печи, экрана и заготовки), в соответствии со схемой алгоритма (рисунок 6.4). Набрать программу на компьютере.
2. Исходные данные взять из лабораторной работы №11. Сравнить результаты.

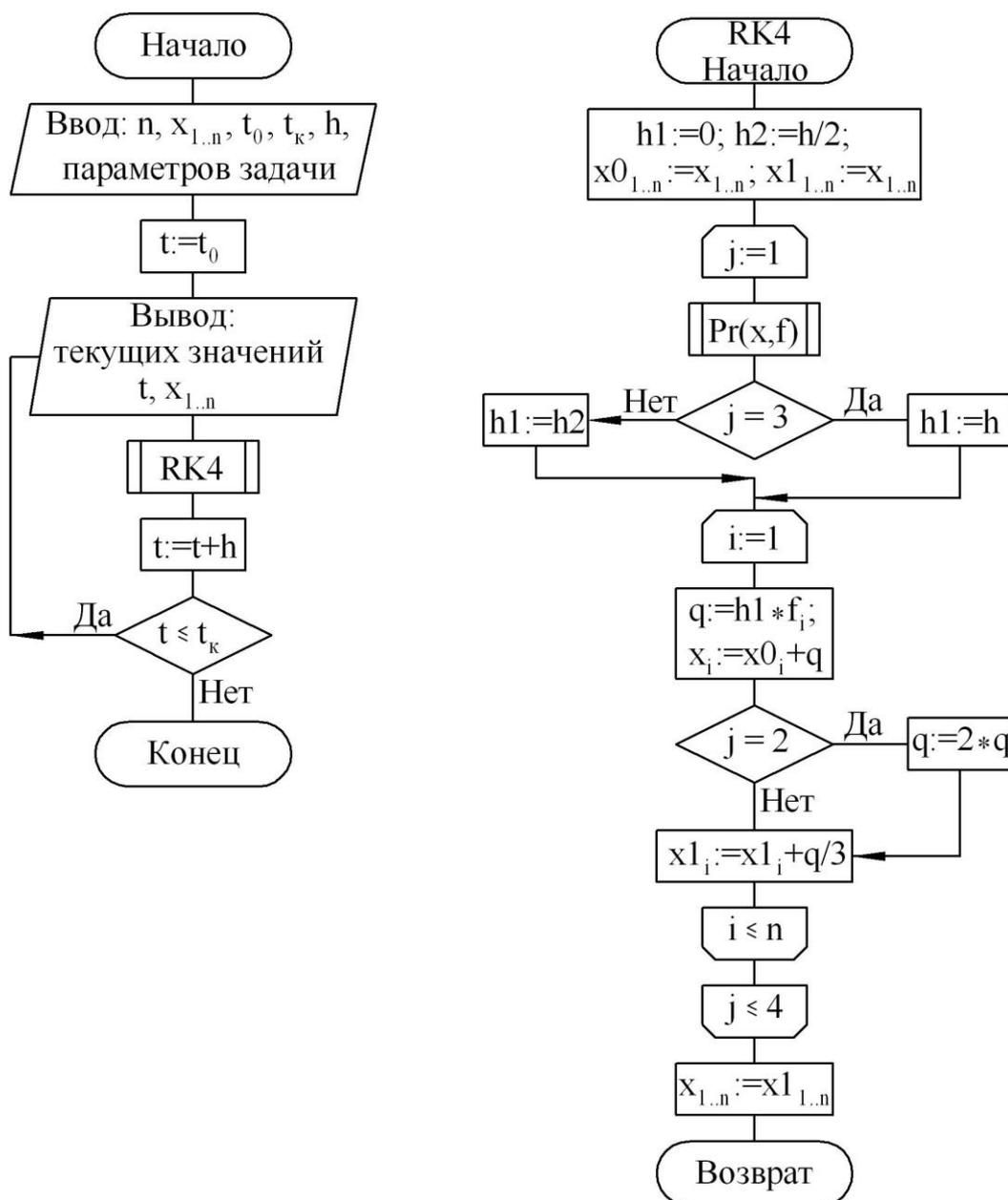


Рис. 6.4. Схема алгоритма метода Рунге-Кутты 4-го порядка решения системы ОДУ

7. БЕЗУСЛОВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

7.1. Постановка задачи поиска оптимального угла конусности матрицы при вытяжке с утонением стенки

Вытяжка с утонением стенки характеризуется тем, что зазор между пуансоном и матрицей берется заведомо меньше толщины стенки заготовки, которая в процессе вытяжки получает преднамеренное утонение [8]. Особенностью этой операции (рисунок 7.1) является наличие значительных нормальных напряжений на контактных поверхностях, а также разное направление сил трения, действующих по наружной и внутренней поверхностям заготовки. Рассмотрение условий деформирования при вытяжке с утонением стенки показывает, что этот процесс весьма сложен и точное решение задачи по отысканию поля напряжений затруднительно.

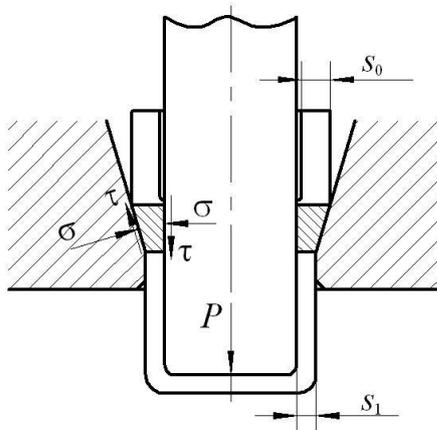


Рис. 7.1. Схема процесса вытяжки с утонением стенки

Особый интерес представляет отыскание напряжений σ_z , действующих в стенках протянутой части заготовки на этапе установившегося процесса деформирования, когда размеры очага деформации остаются постоянными. В [8] проведен анализ вытяжки с утонением стенки, основанный на методе баланса работ. Получено

$$\sigma_z = \sigma_s \left[\ln \frac{s_0}{s_1} + 2 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha} \left(1 - \ln \frac{s_0}{s_1} \right) \ln \frac{s_0}{s_1} \right], \quad (7.1)$$

где μ – коэффициент трения;

σ_s – напряжение текучести [2];

α – угол конусности матрицы.

Анализируя формулу (7.1) можно заметить, что с увеличением угла α одни составляющие σ_z увеличиваются, а другие уменьшаются. Можно полагать, что при некоторых значениях угла α напряжение σ_z будет минимальным при прочих равных условиях. Отыскать оптимальное значение $\alpha_{\text{опт}}$ можно пользуясь методами безусловной оптимизации функций. Рассмотрим некоторые из них.

7.2. Поиск минимума функции одной переменной

Рассмотрим задачу поиска минимума функции одной переменной $f(x)$ на интервале $[a, b]$, где может быть расположено несколько локальных минимумов, среди которых нужно выбрать глобальный. Чтобы перейти к поиску максимумов функции $f(x)$, достаточно изменить знак функции на противоположный и действовать по алгоритмам отыскания минимумов. Минимумы дифференцируемой функции $f(x)$ определяются из уравнения

$$f'(x) = 0, \quad (7.2)$$

для решения которого можно использовать алгоритмы и программы решения трансцендентных уравнений. Известно, что x^* корень уравнения (7.2) является точкой минимума функции $f(x)$, если $f''(x^*) > 0$ и точкой максимума при $f''(x^*) < 0$. Если невозможно получить аналитическую формулу для производной $f'(x)$, то ее значения могут быть определены дифференцированием полинома, аппроксимирующего функцию $f(x)$. Когда функция $f(x)$ недифференцируема или труднодифференцируема и вычисление ее значений для аппроксимации производной связано со значительными затратами времени, минимизацию осуществляют по алгоритмам, не связанным с решением уравнения (7.2).

Поиск минимума функции $f(x)$ разделяется на два этапа.

На *первом этапе* выделяют интервалы аргумента x , в которых существует единственная точка x^* , где функция $f(x)$ принимает экстремальное значение. Функция на каждом таком интервале называется униmodalьной. Первый этап минимизации близок по идеологии к задаче отделения корней уравнения и не поддается строгой алгоритмизации. Обычно интервалы униmodalьности находят на основе анализа упрощенных математических моделей процессов. Графическое представление минимизируемой функции также помогает на первом этапе, хотя требует значительных временных затрат.

На *втором этапе* осуществляется уточнение местоположений минимумов на интервалах униmodalьности функции.

7.3. Метод Фибоначчи

Пусть функция $f(x)$ униmodalьна на интервале $[a, b]$, необходимо построить такую последовательность $\{x_k\}$, чтобы минимум функции $f(x)$ находился в интервале неопределенности $[x_{i-1}, x_i]$, то есть $x_{i-1} < x^* < x_i$. Алгоритм выбора элементов последовательности $\{x_k\}$ называют стратегией поиска. При заданном количестве вычислений функции $f(x)$ оптимальной является стратегия, которая приводит к наименьшему интервалу неопределенности. Установлено, что стратегия поиска минимума будет оптимальной, если для построения последовательности $\{x_k\}$ использовать числа Фибоначчи F_k : $F_{k+1} = F_{k-1} + F_k$, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$.

На каждом шаге метода Фибоначчи интервал $[a, b]$ делится в точке x_1 в отношении двух последовательных чисел Фибоначчи. Чтобы воспользоваться свойствами униmodalьности функции для уменьшения интервала неопределенности, на отрезке $[a, b]$ выбирается другая точка x_2 , симметрично расположенная относительно середины отрезка по отношению к x_1 . Если $x_1 < x_2$

и $f(x_1) > f(x_2)$, то на основании унимодальности функции $f(x)$ в качестве следующего интервала неопределенности следует выбрать отрезок $[x_1, b]$, что эквивалентно переносу точки a в точку x_1 . Если $x_1 < x_2$ и $f(x_1) < f(x_2)$, то очередной интервал неопределенности будет $[a, x_2]$, что эквивалентно переносу точки b в точку x_2 . При $f(x_1) = f(x_2)$ минимум расположен на интервале $[x_1, x_2]$. Чтобы не усложнять алгоритм, последний вариант можно объединить с одним из предыдущих.

Недостаток метода Фибоначчи – зависимость точек от общего числа вычислений N , так как на 1-й итерации точка x_1 выбирается из условия деления интервала $[a, b]$ в отношении F_{N-1}/F_N . Отношение чисел Фибоначчи имеет предел $g = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F_{N-1}}{F_N} = 0.618034\dots$

7.4. Метод золотого сечения (Лабораторная работа №13)

Золотым сечением называется деление отрезка таким образом, что отношение длины большей части отрезка ко всей его длине будет равно отношению длины меньшей части к длине большей части.

Действительно, принимая длину отрезка за 1, из определения золотого сечения будем иметь $g = \frac{1-g}{g}$, что сводится к квадратному уравнению

$$g^2 + g - 1 = 0, \quad \text{положительный корень которого будет равен } g = (-1 + \sqrt{5}) / 2 = 0,618034\dots$$

Алгоритм метода золотого сечения состоит из следующих шагов.

1. Имеем отрезок унимодальности функции $f(x)$ – $[a, b]$. Необходимо найти точку минимума x^* функции $f(x)$.
2. Находим золотое сечение этого отрезка: $r = g \cdot (b - a)$.
3. На отрезке $[a, b]$ наносим точки x_1 и x_2 таким образом, что $x_1 = a + r$, $x_2 = b - r$.
4. Вычисляем значения функции в точках x_1 и x_2 : $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$.
5. Сравниваем значения f_1 и f_2
 - а) $f_1 > f_2$, $\Rightarrow x^* \in [a, x_1]$ и мы переводим точку b в точку x_1 (рисунок 7.2, а) тем самым сокращая отрезок унимодальности \approx на 38,2%;
 - б) $f_1 < f_2$, $\Rightarrow x^* \in [x_2, b]$ и мы переводим точку a в точку x_2 (рисунок 7.2, б) тем самым сокращая отрезок унимодальности \approx на 38,2%;
 - в) $f_1 = f_2$, $\Rightarrow x^* \in [x_2, x_1]$ и мы можем перевести точку a в точку x_2 и точку b в точку x_1 (рисунок 7.2, в) тем самым сократив отрезок унимодальности \approx на 76,4%, но при реализации метода этот вариант объединяют с одним из выше рассмотренных для исключения дополнительной логической операции ($f_1 = f_2$).
6. Шаги 1 – 5 повторяем до тех пор, пока не достигнем условия завершения итерационного процесса $r < \varepsilon$.

При одинаковом количестве итераций метод Фибоначчи дает отрезок неопределенности на 17% меньше, чем метод золотого сечения. Но в методе

Фибоначчи на каждой итерации совершаются два дополнительных действия, а именно: вычисление очередного числа Фибоначчи и вычисление соотношения его двух последних чисел. Поэтому за один и тот же интервал реального времени оба этих метода приводят примерно к одинаковым отрезкам неопределенности.

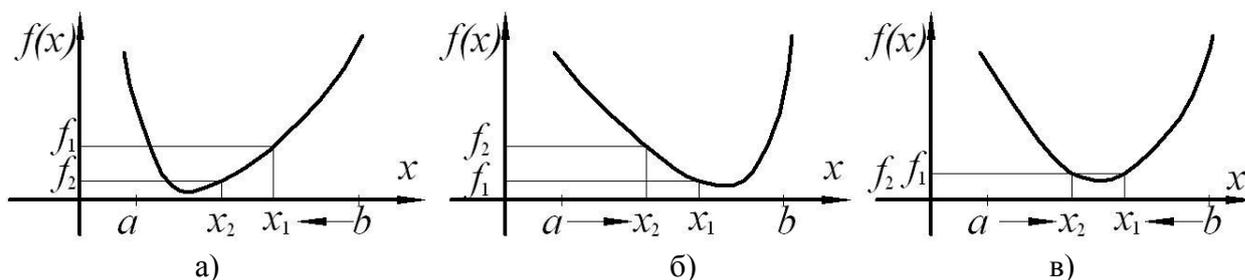


Рис. 7.2. Геометрическая интерпретация метода золотого сечения

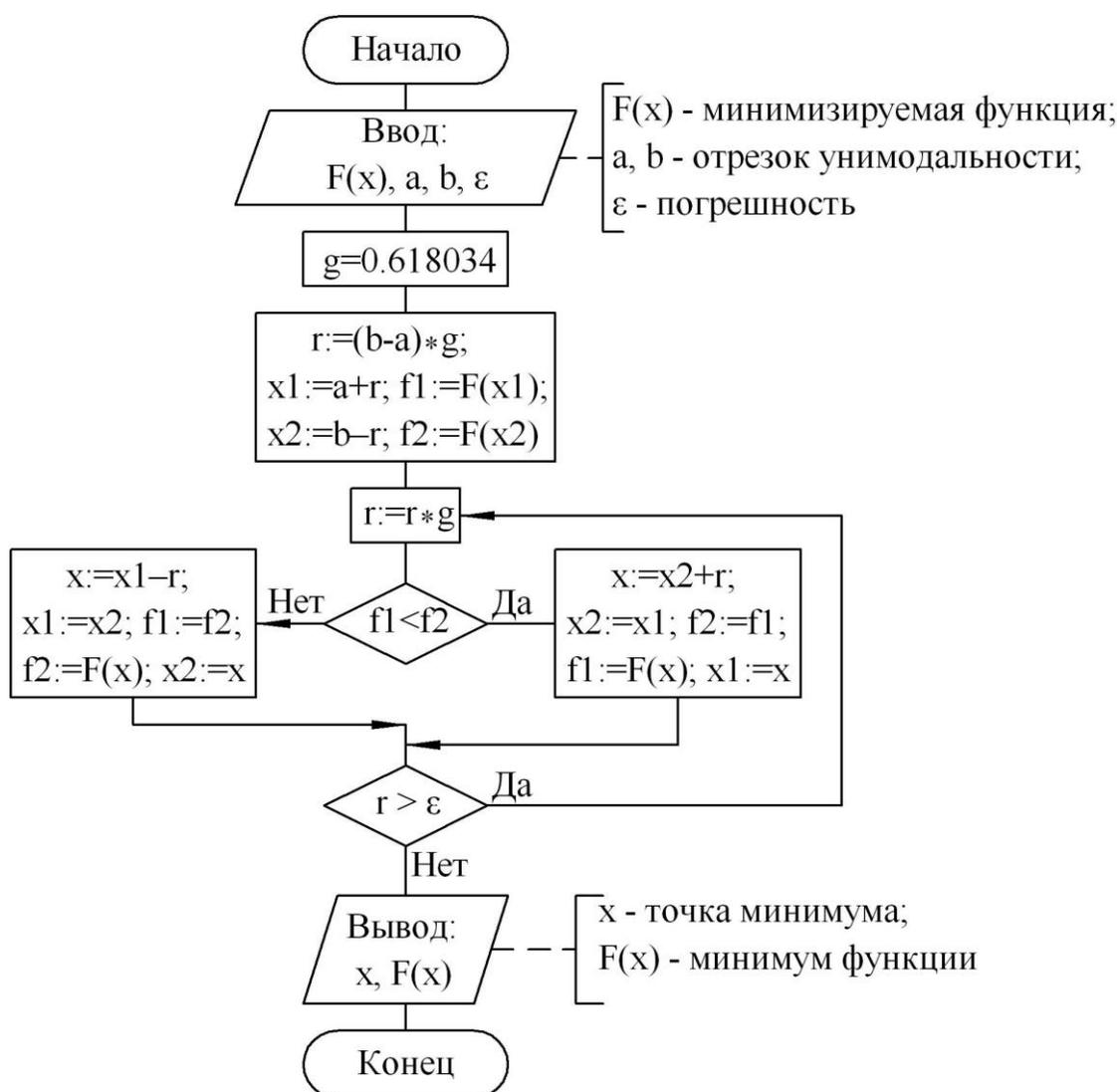


Рис. 7.3. Схема алгоритма метода золотого сечения

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal для расчета оптимального значения угла α конусности матрицы при вытяжке с утонением стенки, минимизируя напряжение σ_z , заданное формулой (7.1), в соответствии со схемой алгоритма (рисунок 7.3). Набрать программу на компьютере.

2. Найти оптимальный угол α в пределах от α_1 до α_2 и минимальное напряжение σ_z , исходные данные взять из таблицы:

№ варианта	s_0 , мм	s_1 , мм	α_1 , °	α_2 , °	σ_s , МПа	μ	ε
1	2	1,5	5	45	368	0,1	0,00001
2	1,8	1,4	4	40	488	0,05	0,00001
3	1,5	1,3	3	45	398	0,08	0,00001
4	2	1,7	4	40	409	0,12	0,00001
5	1,8	1,6	3	44	423	0,15	0,00001
6	1,5	1,1	2	40	470	0,16	0,00001

7.5. Метод координатного спуска (Лабораторная работа №14)

Рассмотрим алгоритм поиска минимума многомерной функции на примере функции двух переменных $f(z_1, z_2)$. График функции $f(z_1, z_2)$ в области ее минимума представим в параметрическом виде, подобно изображению рельефа местности на географических картах, соединяя линиями точки на координатной плоскости (z_1, z_2) , где функция принимает одинаковые значения (рис. 7.4).

Предположим, что нам известна прямоугольная область на плоскости (z_1, z_2) , где находится минимум функции $f(z_1, z_2)$, т.е.

$$z_1 \in [z_1^0, z_1^n], \quad z_2 \in [z_2^0, z_2^n]. \quad (7.4)$$

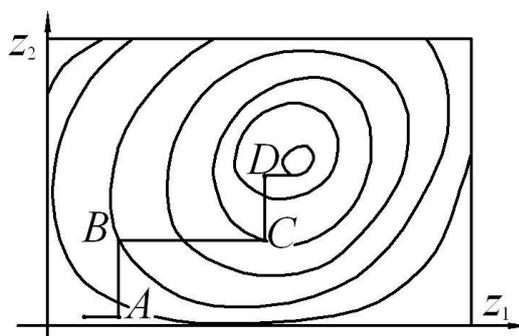


Рис. 7.4. Рельеф функции $f(z_1, z_2)$

Алгоритм координатного спуска заключается в сведении многомерной задачи к последовательным одномерным задачам, которые решаются методами минимизации функции одной переменной (методом золотого сечения). Вначале в прямоугольной области (7.4) зафиксируем координату $z_2 = z_2^0$, тогда функция $f(z_1, z_2^0)$ будет зависеть только от одной переменной z_1 . Найдем минимум z_1^0 функции $f(z_1, z_2^0)$, изменяя координату z_1 по методу золотого сечения. На рисунке 7.4 найденный минимум располагается в точке $A(z_1^0, z_2^0)$. Затем зафиксируем первый аргумент $z_1 = z_1^0$ и найдем минимум z_2^1 функции $f(z_1^0, z_2)$ относительно второго аргумента z_2 (точка $B(z_1^0, z_2^1)$ на рисунке 7.4). Аналогичным образом перейдем последовательно к точкам $C(z_1^1, z_2^1)$, $D(z_1^1, z_2^2)$ и т.д. Если в области минимума функция $f(z_1, z_2)$ доста-

точно гладкая, то процесс спуска по координатам будет линейно сходиться к минимуму.

В сходящемся процессе с приближением к минимуму $f(z_1, z_2)$ расстояния между последовательными точками однокоординатных минимумов будут стремиться к нулю. Поэтому в качестве критериев окончания итерационного процесса координатного спуска выбираются условия $|z_1^k - z_1^{k-1}| < \varepsilon_1$, $|z_2^k - z_2^{k-1}| < \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 – заданные допустимые абсолютные погрешности определения местоположения минимума по первой и второй координате.

Метод координатного спуска легко обобщается на случай функций, имеющих размерность больше 2. Однако, с ростом размерности значительно увеличивается объем вычислений.

Задание.

1. Написать программу на языке Pascal для расчета методом координатного спуска оптимального значения угла α наклона стенки клиновой полости, обеспечивающего минимальное усилие холодного прессования полосы через клиновую полость с калибрующим пояском), в соответствии со схемой алгоритма (рисунок 7.5). Функция усилия холодного прессования зависит от двух аргументов (α и γ) и выражается уравнением [2]

$$P = \frac{\sigma_T^* \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{3} \sin(\beta - \alpha)} \left[\frac{b_1}{\sin^2 \beta} + \frac{b_3}{\sin^2 \gamma} + \frac{\mu(b_1 - b_3)}{\sin^2 \alpha} \right] + \mu \sigma_T l_K + \mu \sigma_T \frac{b_1}{b_3} l_{\text{кп}},$$

где σ_T – предел текучести материала; $\sigma_T^* = (\sigma_T + \sigma_s) / 2$;

σ_s – напряжение текучести материала, вычисляемое по формуле

$$\sigma_s = \sigma_T + \left(\frac{\sigma_B}{1 - \psi_{\text{ш}}} - \sigma_T \right) \cdot \left(\frac{\psi}{\psi_{\text{ш}}} \right)^{\frac{\sigma_B \psi_{\text{ш}}}{(1 - \psi_{\text{ш}}) [\sigma_B - \sigma_T (1 - \psi_{\text{ш}})]}};$$

σ_B – предел прочности материала;

b_1 – начальная ширина полосы;

b_3 – конечная ширина полосы;

ψ – относительное уменьшение площади поперечного сечения;

$\psi_{\text{ш}}$ – относительное сужение образца в момент образования шейки;

$l_{\text{кп}}$ – длина калибрующего пояска;

l_K – длина контакта полосы с контейнером;

μ – коэффициент трения;

$$\beta = \text{arctg} \frac{b_1}{(b_1 - b_3) \text{ctg} \alpha - b_3 \text{ctg} \gamma}.$$

Набрать программу.

2. Найти оптимальные углы α и γ и минимальное усилие прессования P . Исходные данные взять из таблицы:

№ варианта	b_1 , мм	b_3 , мм	μ	$l_{кп}$, мм	$l_{к}$, мм
Материал: сталь 10 ($\sigma_T = 300$ Мпа, $\sigma_B = 360$ Мпа, $\psi_{ш} = 0,22$)					
1	50	40	0,15	30	60
2	100	90	0,06	100	120
3	100	90	0,14	100	120
4	90	85	0,10	100	120
5	90	80	0,15	100	120
6	90	75	0,10	100	120

Граничные значения: для $\alpha - [1^\circ, 89^\circ]$; для $\gamma - [30', 89^\circ 30']$.

Начальные значения – левый нижний угол рассматриваемой области.

$\varepsilon = 0,00001$.

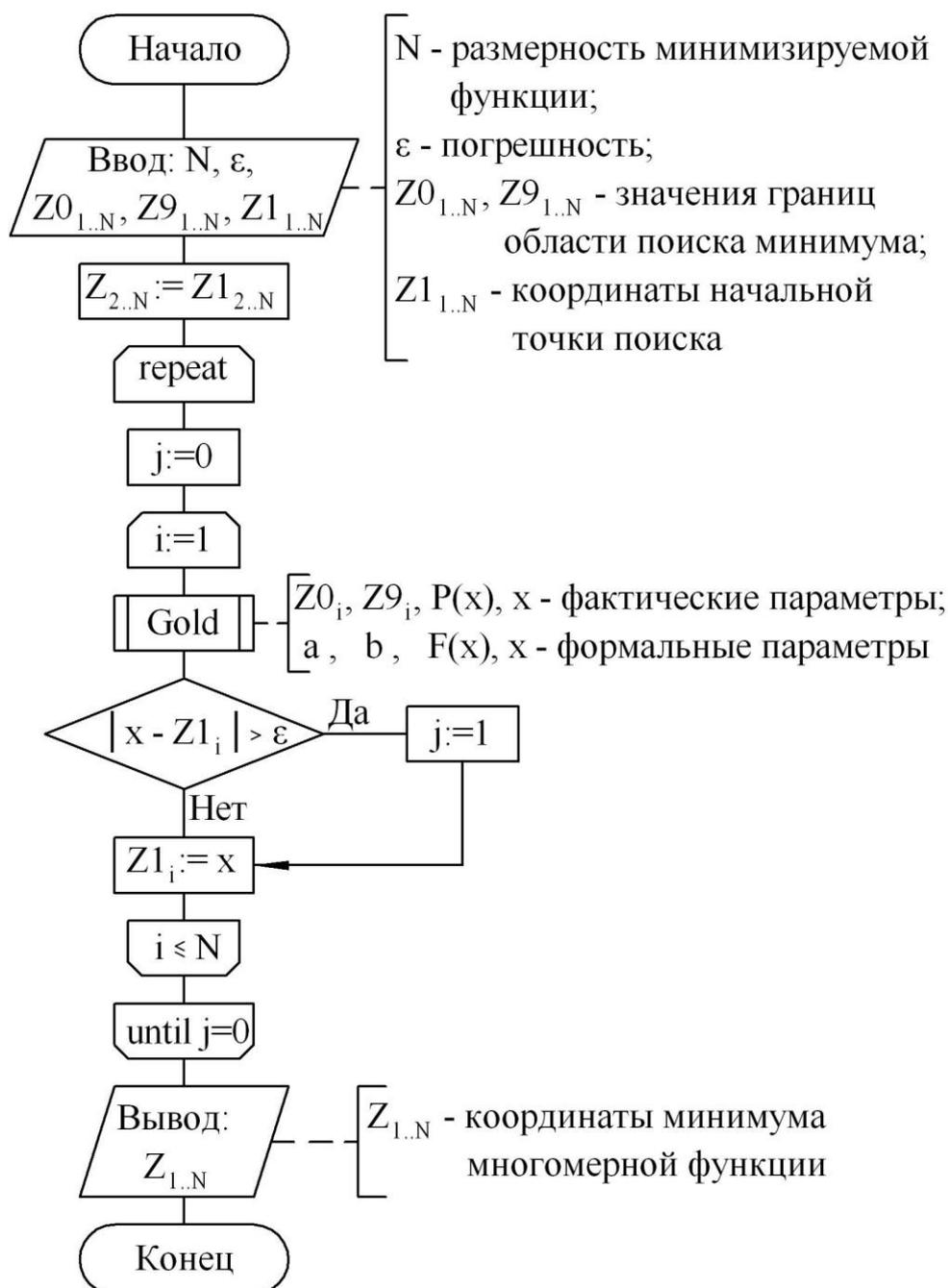


Рис. 7.5. Схема алгоритма метода координатного спуска

ЛИТЕРАТУРА

1. Гун, Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением / Г.Я. Гун. – М.: Металлургия, 1980. – 456 с.
2. Исаевич, Л.А. Теория обработки металлов давлением: методическое пособие к выполнению курсовой работы для студентов специальности 1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением» / Л.А. Исаевич, Д.М. Иваницкий, А.В. Мазурёнок. – Минск: БНТУ, 2009. – 59 с.
3. Колмогоров, В.Л. Механика обработки металлов давлением / В.Л. Колмогоров. – М.: Металлургия, 1986. – 688 с.
4. Ланской, Е.Н. Элементы расчета деталей и узлов кривошипных прессов / Е.Н. Ланской, А.Н. Банкетов. – М.: Машиностроение, 1966. – 380 с.
5. Мазурёнок, А.В. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением: учебно-методическое пособие по дисциплине «Математическое моделирование технологических процессов» для студентов специальности 1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением» / А.В. Мазурёнок. – Минск: БНТУ, 2014. – 80 с.
6. Мудров, А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль / А.Е. Мудров. – Томск: МП «Раско», 1991. – 272 с.
7. Смирнов, В.С. Сборник задач по обработке металлов давлением / В.С. Смирнов. – М.: Металлургия, 1973. – 191 с.
8. Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.

Контроль знаний

Контрольные вопросы

1. Основные положения и определения математического моделирования.
2. Основные понятия дисциплины: материальная точка, абсолютно твердое тело, сплошная среда.
3. Понятие напряжения. Гипотеза о сплошности.
4. Понятия области и границы области.
5. Понятие краевой задачи: математическая модель процесса, начальные и граничные условия. Механические граничные условия.
6. Смешанные граничные условия (на примере внешнего трения).
7. Методы решения краевых задач теории обработки металлов давлением.
8. Основные задачи тензорного анализа.
9. Ортогональный базис. Преобразования координат.
10. Определение тензора. Действия над тензорами.
11. Главные направления и главные компоненты тензоров. Инварианты тензора.
12. Аппроксимация экспериментальных данных. Определения.
13. Интерполяция каноническим полиномом.
14. Интерполяция полиномом Лагранжа. Интерполяция полиномом Ньютона.
15. Метод наименьших квадратов для обработки экспериментальных данных. Определения.
16. Общий алгоритм метода наименьших квадратов.
17. Метод наименьших квадратов со степенным базисом.
18. Линейный вариант метода наименьших квадратов.
19. Два подхода к описанию движения сплошной среды.
20. Тензоры конечной деформации.
21. Тензор малой деформации.
22. Внешние силы в механике сплошных сред.
23. Внутренние напряжения.
24. Законы сохранения.
25. Математическая модель внутреннего механизма процесса ОМД.
26. Определяющие соотношения механики сплошных сред.
27. Линейно-упругая среда.
28. Линейно-вязкая среда.
29. Теория малых упругопластических деформаций.
30. Теория вязкопластического течения.
31. Статическая задача для упругой однородной изотропной среды.
32. Пример решения статической задачи для упругой однородной изотропной среды.
33. Математическая модель для расчета усилия, допускаемого прочностью кривошипного вала.
34. Методика решения трансцендентного уравнения.
35. Метод отделения корней трансцендентного уравнения.
36. Метод дихотомии.
37. Метод Гаусса с выбором главного элемента решения системы линейных алгебраических уравнений.

38. Вычисление собственных значений матриц. Связь задач линейной алгебры с задачами тензорного анализа.
39. Математическая модель для расчета давления на оправку прошивного стана в установившемся процессе прошивки.
40. Метод средних прямоугольников для численного расчета определенных интегралов.
41. Метод трапеций для численного расчета определенных интегралов.
42. Метод Симпсона для численного расчета определенных интегралов.
43. Математическая модель работы камерной электрической нагревательной печи.
44. Метод Эйлера решения задачи Коши.
45. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка решения задачи Коши.
46. Постановка задачи поиска оптимального угла конусности матрицы при вытяжке с утонением стенки.
47. Поиск минимума функции одной переменной.
48. Метод Фибоначчи.
49. Метод золотого сечения.
50. Поиск минимума функции нескольких переменных.

Контрольная работа

Примеры решения задач

Задача №.1 Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг орта \vec{e}_1 .

Решение. Для нахождения компонентов тензора в новой системе координат воспользуемся (2.5). Чтобы записать матрицу Якоби, необходимо составить таблицу косинусов, для заполнения которой воспользуемся иллюстрацией (рис. 2.2).

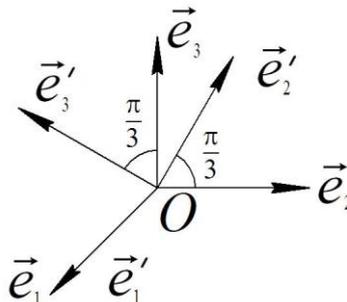


Рис. 2.2 Поворот базиса на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг орта \vec{e}_1

Таблица косинусов для данного случая будет иметь вид:

	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}'_1	1	0	0
\vec{e}'_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
\vec{e}'_3	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Умножим тензор на транспонированную матрицу Якоби:

$$T_\sigma \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{3} \\ -2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Затем матрицу Якоби умножим на полученный результат и получим:

$$T'_\sigma = A \cdot (T_\sigma \cdot A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{3} \\ -2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Ответ: } T'_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}.$$

Проверка.

1. Симметричность тензора – это свойство физического объекта, поэтому в любой системе координат его должна представлять симметричная матрица.

2. Вычислим линейный инвариант $\sigma^I = 1 + 2 + 1 = 1 + \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 4$.

3. Вычислим квадратичный инвариант

$$\sigma^{II} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 2 + 1 = 1;$$

$$\sigma^{II} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \frac{7}{4} \end{vmatrix} = \frac{5}{4} - 1 + \frac{35}{16} - \frac{3}{16} + \frac{7}{4} - 3 = 1.$$

4. Вычислим кубический инвариант

$$\sigma^{\text{III}} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 - 4) = -2;$$

$$\sigma^{\text{III}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3} & \frac{7}{4} \end{vmatrix} +$$

$$+ \sqrt{3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \frac{5}{4} \\ \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(\frac{35}{16} - \frac{3}{16} \right) + 1 \cdot \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{4} \right) + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{4} \right) = -2.$$

Задача №2 Записать тензор T_σ в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 3$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Решение. Для нахождения компонентов тензора в пространстве главных направлений необходимо решить его характеристическое уравнение (2.6). Для того, чтобы записать конкретный вид характеристического уравнения, вычислим инварианты тензора

$$\sigma^{\text{I}} = 3 + 5 + 3 = 11;$$

$$\sigma^{\text{II}} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 1 + 15 + 9 = 38;$$

$$\sigma^{\text{III}} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (15 - 1) = 42.$$

Характеристическое уравнение для исследуемого тензора имеет вид:

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 38\lambda - 42 = 0.$$

Поскольку известен один из корней, это кубическое уравнение можно разложить:

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 38\lambda - 42 = (\lambda - 3) \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 14) = 0.$$

Два других корня найдем, решим квадратное уравнение

$$\lambda^2 - 8\lambda + 14 = 0: \quad \lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 14}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}.$$

Зная три корня характеристического уравнения тензора, можем записать его в пространстве главных направлений (в механике сплошной среды принято, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

$$\text{Ответ: } T''_{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 + \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Проверка.

1. Симметричность тензора – это свойство физического объекта, поэтому в любой системе координат его должна представлять симметричная матрица.

2. Вычислим линейный инвариант $\sigma^I = 4 + \sqrt{2} + 3 + 4 - \sqrt{2} = 11$.

3. Вычислим квадратичный инвариант

$$\sigma^{II} = (4 + \sqrt{2}) \cdot 3 + 3 \cdot (4 - \sqrt{2}) + (4 + \sqrt{2}) \cdot (4 - \sqrt{2}) = 12 + 3\sqrt{2} + 12 - 3\sqrt{2} + 16 - 2 = 38$$

4. Вычислим кубический инвариант

$$\sigma^{III} = (4 + \sqrt{2}) \cdot 3 \cdot (4 - \sqrt{2}) = 3 \cdot (16 - 2) = 42.$$

Задача №3 Дана таблица экспериментальных данных. Построить интерполяционный полином Ньютона.

x_i	f_i
1	1,8
2	2,6
4	3,9
5	5

Решение. Для нахождения коэффициентов полинома Ньютона для приведенной таблицы экспериментальных данных, необходимо найти разделенные разности до третьего порядка. Для этого заполним таблицу:

x	$f(x)$	1	2	3
2	2	-	-	-
3	2,6	$f_{01} = \frac{2 - 2,6}{2 - 3} = 0,6$	-	-
4	3,5	$f_{02} = \frac{2 - 3,5}{2 - 4} = 0,75$	$f_{012} = \frac{0,6 - 0,75}{3 - 4} = 0,15$	-
6	5	$f_{03} = \frac{2 - 5}{2 - 6} = 0,75$	$f_{013} = \frac{0,6 - 0,75}{3 - 6} = 0,05$	$f_{0123} = \frac{0,15 - 0,05}{4 - 6} = -0,05$

Ответ. Интерполяционный полином Ньютона для приведенной таблицы экспериментальных данных имеет вид:

$$P_n(x) = 2 + 0,6 \cdot (x - 2) + 0,15 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) - 0,05 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4).$$

Задача №4.1 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к линейной).

x_i	f_i
2	2
2,8	2,4
3,2	2,6
6	4

Решение. Будем искать аппроксимирующую функцию в виде $f(x) = a + bx$. Для нахождения коэффициентов a и b воспользуемся формулой (4.11), для реализации которой заполним таблицу:

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$f_i - \bar{f}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (f_i - \bar{f})$
2	2	-1,5	-0,75	2,25	1,125
2,8	2,4	-0,7	-0,35	0,49	0,245
3,2	2,6	-0,3	-0,15	0,09	0,045
6	4	2,5	1,25	6,25	3,125
$\Sigma = 14, \bar{x} = 3,5$	$\Sigma = 11, \bar{f} = 2,75$			$\Sigma = 9,08$	$\Sigma = 4,54$

Тогда согласно (4.11) $b = \frac{4,54}{9,08} = 0,5$; $a = 2,75 - 0,5 \cdot 3,5 = 1$

Ответ: аппроксимирующая функция для приведенной таблицы экспериментальных данных имеет вид

$$f(x) = 1 + 0,5x.$$

Задача №4.2 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к логарифмической).

x_i	y_i
2	0,693147
2,4	0,788457
2,6	0,832909
3,6	1,02962

Решение. Если исходная зависимость близка к логарифмической, то для «выравнивания» данных нужно взять экспоненту от значений заданной функции в узлах таблицы экспериментов, чтобы перейти к линейной зависимости. Выравнивание данных будем осуществлять на этапе подготовки исходной таблицы. Затем найдем вспомогательную аппроксимирующую функ-

цию в виде $f(x) = a + bx$, после этого перейдем к искомой аппроксимирующей функции, прологарифмировав найденную $y(x) = \ln(a + bx)$. Для реализации описанного алгоритма заполним таблицу:

x_i	y_i	$f_i = e^{y_i}$	$x_i - \bar{x}$	$f_i - \bar{f}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (f_i - \bar{f})$
2	0,693147	2	-0,65	-0,325	0,4225	0,21125
2,4	0,788457	2,2	-0,25	-0,125	0,0625	0,03125
2,6	0,832909	2,3	-0,05	-0,025	0,0025	0,00125
3,6	1,02962	2,8	0,95	0,475	0,9025	0,45125
$\Sigma = 10,6;$ $\bar{x} = 2,65$		$\Sigma = 9,3;$ $\bar{f} = 2,325$			$\Sigma = 1,39$	$\Sigma = 0,695$

Тогда согласно (4.11) $b = \frac{0,695}{1,39} = 0,5$; $a = 2,325 - 0,5 \cdot 2,65 = 1$ и

$$f(x) = 1 + 0,5x.$$

Применив логарифмирование, получим искомую функцию.

Ответ: аппроксимирующая функция для приведенной таблицы экспериментальных данных имеет вид

$$y(x) = \ln(1 + 0,5x).$$

Задача №4.3 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к экспоненциальной).

x_i	y_i
1	7,3891
1,4	16,4446
1,6	24,5325
2	54,5981

Решение. Если исходная зависимость близка к экспоненциальной, то для «выравнивания» данных нужно взять логарифм от значений заданной функции в узлах таблицы экспериментов, чтобы перейти к линейной зависимости. Выравнивание данных будем осуществлять на этапе подготовки исходной таблицы. Затем найдем вспомогательную аппроксимирующую функцию в виде $f(x) = a + bx$, после этого перейдем к искомой аппроксимирующей функции, взяв экспоненту от найденной $y(x) = e^{a+bx}$. Для реализации описанного алгоритма заполним таблицу:

x_i	y_i	$f_i = \ln(y_i)$	$x_i - \bar{x}$	$f_i - \bar{f}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (f_i - \bar{f})$
1	7,3891	2	-0,5	-1	0,25	0,5
1,4	16,4446	2,8	-0,1	-0,2	0,01	0,02
1,6	24,5325	3,2	0,1	0,2	0,01	0,02
2	54,5981	4	0,5	1	0,25	0,5
$\Sigma = 6;$ $\bar{x} = 1,5$		$\Sigma = 12;$ $\bar{f} = 3$			$\Sigma = 0,52$	$\Sigma = 1,04$

Тогда согласно (4.11) $b = \frac{1,04}{0,52} = 2$; $a = 3 - 2 \cdot 1,5 = 0$ и $f(x) = 2x$.

Применив потенцирование, получим искомую функцию.

Ответ: аппроксимирующая функция для приведенной таблицы экспериментальных данных имеет вид

$$y(x) = e^{2x}.$$

Контрольные задания

Вариант №1

Задача №1 Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг орта \vec{e}_3 .

Задача №2 Записать тензор T_σ в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 3$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Задача №3 Дана таблица экспериментальных данных. Построить интерполяционный полином Ньютона.

x_i	f_i
1	1,8
2	2,6
4	3,9
5	5

Задача №4 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к линейной).

x_i	f_i
0,8	-0,2
1,4	0,4
1,9	0,9
2,8	1,8

Вариант №2

Задача №1 Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг орта \vec{e}_1 .

Задача №2 Записать тензор T_σ в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 4$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Задача №3 Дана таблица экспериментальных данных. Построить интерполяционный полином Ньютона.

x_i	f_i
2	2,8
4	3,6
5	4,9
6	5,2

Задача №4 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к логарифмической).

x_i	y_i
0,9	0,896088
1,5	1,011601
1,8	1,064711
2,2	1,131402

Вариант №3

Задача №1 Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг орта \vec{e}_2 .

Задача №2 Записать тензор T_σ в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 4$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Задача №3 Дана таблица экспериментальных данных. Построить интерполяционный полином Ньютона.

x_i	f_i
1	1,8
3	2,6
5	3,8
7	4,2

Задача №4 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к линейной).

x_i	f_i
1,2	2,6
1,4	2,2
1,8	1,4
2,2	0,6

Вариант №4

Задача №1 Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг орта \vec{e}_3 .

Задача №2 Записать тензор T_σ в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 5$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Задача №3 Дана таблица экспериментальных данных. Построить интерполяционный полином Ньютона.

x_i	f_i
1	1,8
3	2,6
4	3,6
6	4,1

Задача №4 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к экспоненциальной).

x_i	y_i
0,5	5,754603
0,7	7,767901
0,9	10,485570
1,1	14,154039

Вариант №5

Задача №1 Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг орта \vec{e}_1 .

Задача №2 Записать тензор T_σ в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 3$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Задача №3 Дана таблица экспериментальных данных. Построить интерполяционный полином Ньютона.

x_i	f_i
1	1,8
3	2,6
4	3,6
5	3,8

Задача №4 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к логарифмической).

x_i	y_i
1,2	0,955511
1,4	0,788457
1,8	0,336472
2,2	-0,510826

Вариант №6

Задача №1 Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг орта \vec{e}_2 .

Задача №2 Записать тензор T_σ в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 3$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Задача №3 Дана таблица экспериментальных данных. Построить интерполяционный полином Ньютона.

x_i	f_i
1	1,8
2	2,6
4	3,9
6	4

Задача №4 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к экспоненциальной).

x_i	y_i
0,5	2,718282
0,9	6,049647
1,0	7,389056
1,2	11,023176

Вариант №7

Задача №1 Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \vec{e}'_i , полученной поворотом базиса \vec{e}_i на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг орта \vec{e}_3 .

Задача №2 Задача. Записать тензор T_σ в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 1$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача №3 Дана таблица экспериментальных данных. Построить интерполяционный полином Ньютона.

x_i	f_i
2	2,8
4	3,6
5	4,9
7	6,3

Задача №4 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к линейной).

x_i	f_i
1	2,25
2	2,5
4	3
6	3,5

Вариант №8

Задача №1 Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \vec{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \bar{e}'_i , полученной поворотом базиса \bar{e}_i на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг орта \bar{e}_1 .

Задача №2 Записать тензор T_σ в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 1$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача №3 Дана таблица экспериментальных данных. Построить интерполяционный полином Ньютона.

x_i	f_i
2	2,8
3	3,6
5	4,9
7	7,8

Задача №4 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к линейной).

x_i	f_i
2,2	1,8
3,2	0,8
3,6	0,4
3,8	0,2

Вариант №9

Задача №1 Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \bar{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \bar{e}'_i , полученной поворотом базиса \bar{e}_i на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг орта \bar{e}_2 .

Задача №2 Записать тензор T_σ в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 2$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Задача №3 Дана таблица экспериментальных данных. Построить интерполяционный полином Ньютона.

x_i	f_i
1	1,2
3	3,6
5	4,8
7	7,2

Задача №4 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к логарифмической).

x_i	y_i
0,2	0,336472
0,4	0,587787
0,6	0,788457
1	1,098612

Вариант №10

Задача №1 Тензор T_σ в декартовой системе координат с базисом \bar{e}_i имеет компоненты

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора T'_σ в новой системе координат с базисом \bar{e}'_i , полученной поворотом базиса \bar{e}_i на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг орта \bar{e}_2 .

Задача №2 Записать тензор T_σ в пространстве главных направлений, если известно, что одна из его главных компонент $\sigma_i = 2$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Задача №3 Дана таблица экспериментальных данных. Построить интерполяционный полином Ньютона.

x_i	f_i
2	2,8
3	3,6
5	4,9
8	8,8

Задача №4 Дана таблица экспериментальных данных. Найти аппроксимирующую функцию, используя линейный вариант МНК (исходная зависимость близка к экспоненциальной).

x_i	y_i
1,2	1,822119
1,8	2,459603
2,2	3,004166
2,4	3,320117