МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика»

А. Д. Корзников
О. М. Королева

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-43 01 01 «Электрические станции»,
1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети»,
1-43 01 03 «Электроснабжение (по отраслям)»,
1-43 01 04 «Тепловые электрические станции»,
1-43 01 05 «Промышленная теплоэнергетика»,
1-43 01 08 «Паротурбинные установки
атомных электрических станций»,
1-43 01 09 «Релейная защита и автоматика»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области энергетики и энергетического оборудования*

Минск
БНТУ
2021

УДК 517.445(075.8)
ББК 22.161я7
К66

Р е ц е н з е н т ы :
кафедра информатики и методики преподавания
информатики БГПУ им. М. Танка;
зав. отделом вычислительной математики Института
математики НАН Беларуси, канд. физ.-мат. наук *Г. Ф. Громыко*

Корзников, А. Д.
К66 Операционное исчисление : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 1-43 01 01 «Электрические станции», 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети», 1-43 01 03 «Электроснабжение (по отраслям)», 1-43 01 04 «Тепловые электрические станции», 1-43 01 05 «Промышленная теплоэнергетика», 1-43 01 08 «Паротурбинные установки атомных электрических станций», 1-43 01 09 «Релейная защита и автоматика» / А. Д. Корзников, О. М. Королева. – Минск : БНТУ, 2021. – 85 с.
ISBN 978-985-583-196-0.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с программой курса высшей математики для энергетических специальностей вузов. В нем приведены примеры решения задач по курсу, даны задания для самостоятельной работы. Издание будет полезным для организации лабораторных и практических занятий, а также для самостоятельной работы студентов.

УДК 517.445(075.8)
ББК 22.161я7

ISBN 978-985-583-196-0

ВВЕДЕНИЕ

Операционное (символическое) исчисление применяется для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциально-разностных уравнений и интегральных уравнений типа свертки, к которым приводятся задачи по переходным процессам линейных физических систем электротехники, радиотехники, импульсной техники, теории автоматического регулирования и других отраслей науки и техники.

В основе операционного исчисления лежит идея замены изучаемых функций (оригиналов) некоторыми другими функциями (изображениями), получаемых из первых с помощью интегральных преобразований.

Суть операционного исчисления состоит в том, что исследование функции $f(t)$ заменяется исследованием ее интегрального преобразования Лапласа. При этом, как правило, сложные уравнения для $f(t)$ превращаются в простые соотношения для ее интегрального преобразования (изображения). Например, аналитические действия интегрирования и дифференцирования заменяются совокупностью алгебраических операций, что в значительной мере упрощает исследуемую задачу. Так дифференциальные уравнения в пространстве функций-оригиналов преобразуются в линейные алгебраические уравнения в пространстве функций-изображений. По найденному решению алгебраических уравнений (изображению) восстанавливается решение исходной задачи.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ

Определение 1. *Оригиналом* или *функцией-оригиналом* называется функция $f(t)$ (может быть комплекснозначная) действительной переменной t, $-\infty < t < +\infty$, удовлетворяющая условиям:

а) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

б) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале $[0, B]$, $B > 0$ (в частности, непрерывна на нем);

в) $f(t)$ имеет ограничение на рост при $t \to +\infty$ (возрастает не быстрее показательной функции): то есть существуют постоянные $M > 0, \quad s_0 \ge 0$ такие, что $\left|f(t)\right| \le Me^{s_0 t}, \quad t \ge 0$.

Величина s_0 называется *показателем роста* функции $f(t)$. Для любой ограниченной функции можно принять $s_0 = 0$. Показатель роста функции $f(t)$ можно определить непосредственно, оценивая $\left|f(t)\right|$, либо используя формулу $s_0 = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln\left|f(t)\right|}{t}$. Для многочлена $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ показатель роста $s_0 = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{n \ln t}{t} = 0$, то есть любая степенная функция растет медленней показательной функции.

Простейший пример оригинала – функция Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0. \end{cases}$$

Условия а) и б) выполнены. Так как $\left|\eta(t)\right| = \eta(t) \le 1 = 1 \cdot e^{0t}$, то показатель роста функции $\eta(t)$ есть $s_0 = 0$.

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям б) и в), то функция

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t), & t \ge 0 \end{cases}$$

является оригиналом. В дальнейшем для сокращения записи вместо $f(t)\eta(t)$ будем писать $f(t)$, считая, что рассматриваемые функции продолжены нулем для отрицательных t.

Свойства функций-оригиналов:

1. Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0, то функции

$$g_1(t)=|f(t)|,\ g_2(t)=t^z f(t), z\in C,\ g_3(t)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau, t>0,$$

$$g_4(t)=f(t-\tau)\eta(t-\tau), \tau>0$$

являются оригиналами с показателями роста s_0.

2. Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0, то функция

$$g_5(t)=f(\lambda t),\ \lambda>0$$

является оригиналом с показателем роста λs_0.

3. Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0, то функция

$$g_6(t)=e^{\lambda t} f(t), \lambda\in C$$

является оригиналом с показателем роста

$$s=\begin{cases} s_0+\operatorname{Re}\lambda, & s_0+\operatorname{Re}\lambda>0, \\ 0, & s_0+\operatorname{Re}\lambda<0. \end{cases}$$

4. Произведение двух функций-оригиналов является оригиналом.

Определение 2. *Изображением оригинала* $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного *p*, определяемая интегралом Лапласа

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют *преобразованием Лапласа*. Несобственный интеграл (1) сходится, если $f(t)$ является оригиналом.

Для преобразования Лапласа будем использовать следующие обозначения: $f(t) \mapsto F(p)$ и $F(p) \leftarrow f(t)$ означающие, что оригиналу $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$ и изображению $F(p)$ соответствует оригинал $f(t)$.

Теорема 1 (существование изображения).

Для оригинала $f(t)$ с показателем роста $s_0 > 0$ изображение $F(p)$ существует в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости.

Теорема 2 (необходимый признак существования изображения).

Если функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, то $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to +\infty} F(p) = 0$.

Теорема 3 (единственность оригинала).

Если функции $F(p)$ и $\Phi(p)$ совпадают, то совпадают между собой и соответствующие оригиналы $f(t)$ и $\varphi(t)$ во всех точках, в которых они непрерывны.

Оригинал $f(t)$ однозначно определяется своим изображением $F(p)$, за исключением точек разрыва функции $f(t)$.

С целью проверки правильности вычислений в операционном исчислении используются предельные соотношения.

Теорема 4 (о предельных соотношениях).

Если $f(t), f'(t)$ – оригиналы и $f(t) \mapsto F(p)$, то

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} pF(p) = \lim_{t \to +0} f(t) = f(0), \tag{2}$$

если существует конечный предел $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$, то

$$\lim_{p \to 0} pF(p) = \lim_{t \to +\infty} f(t). \tag{3}$$

Пример 1. Являются ли оригиналами следующие функции:

1.1. $f\left(t\right)=2e^{3t}\sin at$, $a\in R$, 1.2. $f\left(t\right)=e^{3+it^2}$,

1.3. $f\left(t\right)=\dfrac{1}{t}$, 1.4. $f\left(t\right)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$,

1.5. $f\left(t\right)=\dfrac{1}{t^2-4}$, 1.6. $f\left(t\right)=e^{t^2}$.

1.1. Функция $f\left(t\right)=2e^{3t}\sin at,\quad a\in R$ непрерывна на любом конечном интервале [0, B], B > 0. Следовательно, она интегрируема на [0, B]. Так как

$$\left|f\left(t\right)\right|=2e^{3t}\left|\sin at\right|\le 2e^{3t},\quad M=2,\quad s=3,$$

то $f\left(t\right)$ – функция ограниченного роста с показателем роста $s_0=3$. Следовательно, $f\left(t\right)$ – функция-оригинал.

1.2. Функция $f\left(t\right)=e^{3+it^2}$ непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом конечном интервале [0, B].

$$\left|e^{3+it^2}\right|=e^3\left|\cos t^2+i\sin t^2\right|=e^3\le e^3e^{0\cdot t},\quad M=e^3,\quad s=0.$$

Функция $f\left(t\right)$ – оригинал с показателем роста $s_0=0$.

1.3. Функция $f\left(t\right)=\dfrac{1}{t}$ не является оригиналом. Интеграл $\int\limits_0^B\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln t\Big|_0^B=+\infty$ расходится. Функция $f\left(t\right)$ не интегрируемая. Нарушено условие б) определения функции-оригинала.

1.4. Функция $f\left(t\right)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ является оригиналом. Так как интеграл $\int\limits_0^B t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=2\sqrt{t}\Big|_0^B=2\sqrt{B}$ сходится, то функция интегрируема на отрезке [0, B]. Показатель роста

$$s_0=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t^{-1/2}}{t}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=\left[\text{правило Лопиталя}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{1/t}{1}=0.$$

1.5. Функция $f(t)=\dfrac{1}{t^2-4}$ не является оригиналом. Точка $t=2$ является точкой разрыва второго рода:

$$\lim_{t\to 2-0}\frac{1}{t^2-4}=-\infty,\quad \lim_{t\to 2+0}\frac{1}{t^2-4}=+\infty.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^B\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2-4}$ расходится, если $B\geq 2$. Нарушено условие б) определения функции-оригинала.

1.6. Функция интегрируема на отрезке [0, B] (непрерывна). Показатель роста $s_0=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^{t^2}\right)}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2}{t}=+\infty$. Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{t^2}}{Me^{st}}=$ $=\dfrac{1}{M}\lim\limits_{t\to+\infty}e^{(t-s)t}=\infty$, то $f(t)$ растет быстрее любой функции Me^{st}. Нарушено условие в) определения функции-оригинала. Функция $f(t)=e^{t^2}$ не является оригиналом.

Пример 2. Задана функция $F(p)$. Может ли она быть изображением некоторого оригинала в некоторой области? Если да, то укажите эту область.

2.1. $F(p)=1$, 2.2. $F(p)=\sin p$,

2.3. $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$, 2.4. $F(p)=\dfrac{1}{1+p^4}$.

2.1. Так как $\lim\limits_{\mathrm{Re}(p)\to+\infty} F(p)=1$, то для $F(p)$ не выполняется необходимый признак существования изображения. Функция $F(p)$ не является изображением.

2.2. Так как $\lim\limits_{\mathrm{Re}(p)\to+\infty} \sin p$ не существует, то для $F(p)$ не выполняется необходимый признак существования изображения. Функция $F(p)$ не является изображением.

2.3. Необходимый признак существования изображения $\lim\limits_{\mathrm{Re}(p)\to+\infty} \dfrac{p}{p^2-2p+5}=0$ выполнен. Функция $F(p)$ аналитическая во всей области кроме нулей знаменателя. Решив уравнение $p^2-2p+5=0$, получим простые полюсы $p_{1,2}=1\pm 2i$ функции $F(p)$. Следовательно, $F(p)$ будет изображением в области $\mathrm{Re}(p)=s>1$.

2.4. Необходимый признак существования изображения $\lim\limits_{\mathrm{Re}(p)\to+\infty} \dfrac{1}{1+p^4}=0$ выполнен. Решив уравнение $1+p^4=0$, получим простые полюсы функции $F(p)$

$$p_k=\sqrt[4]{-1}=\cos\frac{2k+1}{4}\pi+i\sin\frac{2k+1}{4}\pi,\quad k=0,1,2,3,$$

или

$$p_{0,1}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ p_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $F(p)$ будет изображением в области

$$\mathrm{Re}(p)=s>\frac{\sqrt{2}}{2}=\max_{0\le i\le 3}\{\mathrm{Re}\,p_i\}.$$

1.1. Задачи для самостоятельного решения

С1. Являются ли оригиналами следующие функции:

С1.1. $f(t)=2e^{(-3+5i)t}\cos at$, $a\in R$,

С1.2. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & 0\le t<2,\\ t, & t\ge 2.\end{cases}$

С1.3. $f(t)=\frac{1}{t}\cdot\eta(t-1)$,

С1.4. $f(t)=\sin t\cdot\eta(t+1)$,

С1.5. $f(t)=e^{-t}$,

С1.6. $f(t)=\mathrm{tg}\,t$,

С1.7. $f(t)=\frac{1}{t-1}$,

С1.8. $f(t)=\ln t$,

С1.9. $f(t)=3^t$,

С1.10. $f(t)=\sin(1/t)$.

Ответы.

С1.1. Да. $s_0=-3$. **С1.2.** Да. $s_0=0$. **С1.3.** Да. $s_0=0$. **С1.4.** Нет. **С1.5.** Да. $s_0=0$. **С1.6.** Нет. **С1.7.** Нет. **С1.8.** Нет. **С1.9.** Да. $s_0=\ln 3$. **С1.10.** Нет.

С2. Задана функция $F(p)$. Может ли она быть изображением некоторого оригинала в некоторой области? Если да, то укажите эту область.

С2.1. $F(p)=p$,

С2.2. $F(p)=\frac{p}{1+p}$,

С2.3. $F(p)=\frac{1}{p^3-8}$,

С2.4. $F(p)=\frac{p}{p^2-3p-4}$.

Ответы.

С2.1. Нет. **С2.2.** Нет. **С2.3.** Да. $\mathrm{Re}(p)=s>2$. **С2.4.** Да. $\mathrm{Re}(p)=s>4$.

2. НАХОЖДЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

2.1. Непосредственное вычисление интеграла Лапласа

Изображение $F(p)$ для функции $f(t)$ можно найти непосредственно, вычисляя интеграл Лапласа (1).

Пример 3. Пользуясь определением, найти изображения следующих функций

3.1. $f(t)=\eta(t)$, 3.2. $f(t)=e^{4t}$,

3.3. $f(t)=\sin t$, 3.4. $f(t)=t-2$.

3.1. Функция $f(t)=\eta(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0=0$.

$$F(p)=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-pt}\mathrm{d}t=\lim_{B\to+\infty}\int_0^B 1\cdot e^{-pt}\mathrm{d}t=\lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}\cdot e^{-pt}\Big|_0^B\right)=\frac{1}{p}.$$

3.2. Функция $f(t)=e^{4t}$ – оригинал с показателем роста $s_0=4$.

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{4t}\cdot e^{-pt}\mathrm{d}t=\lim_{B\to+\infty}\int_0^B e^{-(p-4)t}\mathrm{d}t=-\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{p-4}e^{-(p-4)t}\Big|_0^B\right)=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{p-4}-\frac{e^{-(p-4)B}}{p-4}\right)=\frac{1}{p-4}.$$

Проверим вычисления, используя предельные соотношения (2) и (3). В данном случае $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{4t}=+\infty$ (конечный предел $f(t)$ не существует), а условие (2) выполняется

$$\lim_{\operatorname{Re}p\to+\infty}pF(p)=\lim_{\operatorname{Re}p\to+\infty}\frac{p}{p-4}=1=\lim_{t\to+0}e^{4t}=f(0).$$

3.3. Функция $f(t)=\sin t$ – оригинал с показателем роста $s_0=0$.

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty}\sin t\,e^{-px}\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} u=e^{-pt}, & \mathrm{d}v=\sin t\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}u=-pe^{-pt}\mathrm{d}t, & v=-\cos t \end{bmatrix}=$$

$$=-e^{-pt}\cos t\Big|_0^{+\infty}-p\int\limits_0^{+\infty}\cos t\;e^{-pt}\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} u=e^{-pt}, & \mathrm{d}v=\cos t\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}u=-pe^{-pt}\mathrm{d}t, & v=\sin t \end{bmatrix}=$$

$$=1-p\left(pe^{-pt}\sin t\Big|_0^{+\infty}-p\int\limits_0^{+\infty}\sin t\,e^{-pt}\mathrm{d}t\right)=1-p^2\int\limits_0^{+\infty}\sin t\,e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin t\,e^{-pt}\mathrm{d}t=1-p^2\int\limits_0^{+\infty}\sin t\,e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

Из полученного равенства выразим искомый интеграл:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty}\sin t\,e^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{1}{p^2+1}.$$

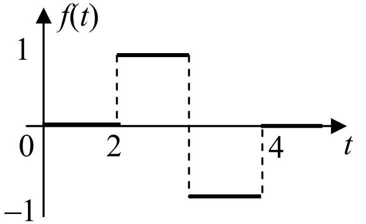
3.4. Функция $f(t)=t-2$ – оригинал с показателем роста $s_0=0$.

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty}(t-2)e^{-pt}\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} u=t-2, & \mathrm{d}v=e^{-pt}\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t, & v=-\dfrac{e^{-pt}}{p} \end{bmatrix}=$$

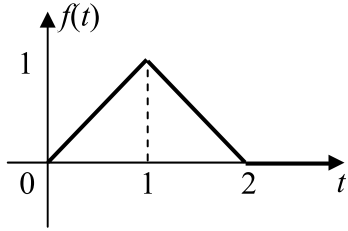
$$=-\frac{(t-2)e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\mathrm{d}t=-\frac{(t-2)e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{+\infty}-\frac{e^{-pt}}{p^2}\Bigg|_0^{+\infty}=$$

$$=\begin{bmatrix} p>0 & \\ \lim\limits_{t\to+\infty}e^{-pt}=0, & \lim\limits_{t\to+\infty}te^{-pt}=0 \end{bmatrix}=-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}.$$

Пример 4. Найти изображение функции, заданной следующим графиком:



4.1.



4.2.

4.1. Функция может быть записана в аналитическом виде

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\le 2,\quad t>4,\\ 1, & 2<t\le 3,\\ -1, & 3<t\le 4.\end{cases}$$

Используем формулу преобразования Лапласа:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_2^3 e^{-pt}\mathrm{d}t-\int\limits_3^4 e^{-pt}\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{p}\left(-e^{-3p}+e^{-2p}+e^{-4p}-e^{-3p}\right)=$$

$$=\frac{e^{-2p}}{p}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right)=\frac{\left(e^{-p}\left(1-e^{-p}\right)\right)^2}{p}=\frac{\left(e^{-p}-e^{-2p}\right)^2}{p}.$$

4.2. Функция может быть записана в аналитическом виде

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\quad t>2,\\ t, & 0<t\le 1,\\ 2-t, & 1<t\le 2.\end{cases}$$

Используем формулу преобразования Лапласа:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 te^{-pt}\mathrm{d}t+\int\limits_1^2 (2-t)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

Для вычисления интегралов воспользуемся формулами интегрирования по частям:

$$\int_0^1 te^{-pt}\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = t, & \mathrm{d}v = e^{-pt}\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t, & v = \dfrac{e^{-pt}}{-p} \end{bmatrix} = \left.\frac{te^{-pt}}{-p}\right|_0^1 + \frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{e^{-p}}{p} - \left.\frac{e^{-pt}}{p^2}\right|_0^1 = -\frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{1}{p^2},$$

$$\int_1^2 (2-t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = 2-t, & \mathrm{d}v = e^{-pt}\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}t, & v = \dfrac{e^{-pt}}{-p} \end{bmatrix} = \left.\frac{(2-t)e^{-pt}}{-p}\right|_1^2 - \frac{1}{p}\int_1^2 e^{-pt}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{e^{-p}}{p} + \left.\frac{e^{-pt}}{p^2}\right|_1^2 = \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2}.$$

Окончательно получим

$$F(p) = \frac{1}{p^2}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right) = \frac{\left(1 - e^{-p}\right)^2}{p^2}.$$

2.2. Использование таблиц и свойств преобразования Лапласа

В операционном исчислении изображения оригиналов непосредственно по определению ищутся редко. Обычно для нахождения изображений используются таблицы соответствия оригиналов и изображений, а также свойства оператора Лапласа. Ниже приведена таблица соответствия основных оригиналов и изображений. Таблица свойств оператора Лапласа приведена в приложении.

Таблица основных оригиналов и изображений

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1.	$\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$	5.	$\operatorname{sh} at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
2.	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	6.	$\operatorname{ch} at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
3.	$\sin at$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	7.	e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$
4.	$\cos at$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$			

Рассмотрим основные свойства оператора Лапласа и примеры их использования для нахождения изображений.

2.2.1. Свойство линейности. Линейной комбинации оригиналов соответствует линейная комбинация изображений, т. е. если $f_1(t) \mapsto F_1(p)$, $f_2(t) \mapsto F_2(p)$ и c_1, c_2 – постоянные комплексные числа, то

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \mapsto c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p). \tag{4}$$

2.2.2. Теорема подобия. Если $f(t) \mapsto F(p)$, то для любого действительного числа $\lambda > 0$

$$f(\lambda t) \mapsto \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \tag{5}$$

Пример 5. Пользуясь свойствами линейности и подобия, найти изображения следующих функций:

5.1. $f(t) = \cos t$, 5.2. $f(t) = 2 - 5\cos 2t$,

5.3. $f(t) = \sin^2 t$, 5.4. $f(t) = \sin 2t \cos 3t$.

5.1. По теореме Эйлера $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. Так как по таблице изображений $e^{it} \mapsto \dfrac{1}{p-i}$, $e^{-it} \mapsto \dfrac{1}{p+i}$, то по свойству линейности

$$f(t) = \cos t \ \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1} = F(p).$$

5.2. По свойству линейности и подобия

$$f(t) = 2 - 5\cos 2t \ \mapsto \ \frac{2}{p} - 5\frac{p}{p^2+4} = F(p).$$

5.3. Воспользуемся формулами понижения степени синуса и свойством линейности

$$f(t) = \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \ \mapsto \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{2}{p\left(p^2+4\right)} = F(p).$$

5.4. Для нахождения изображения предварительно преобразуем исходную функцию к линейной комбинации табличных оригиналов и воспользуемся свойством линейности

$$f(t) = \sin 2t \cos 3t = \frac{1}{2}(\sin 5t - \sin t) \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{5}{p^2+25} - \frac{1}{p^2+1}\right) = F(p).$$

2.2.3. Теорема смещения. Если $f(t) \mapsto F(p)$, то для любого (может быть комплексного) числа a

$$e^{at} f(t) \ \mapsto F(p-a). \qquad (6)$$

Пример 6. Найти изображения следующих функций:

6.1. $f(t) = e^{-3t}\operatorname{ch} 2t$, 6.2. $f(t) = e^{2t}\cos nt$,

6.3. $f(t) = e^{3t}\cos^2 t$, 6.4. $f(t) = 2^t$.

6.1. По таблице изображений имеем $\mathrm{ch}2t \mapsto \dfrac{p}{p^2-4}$. Наличие множителя e^{-3t} предполагает использование теоремы смещения. Следовательно

$$e^{-3t}\mathrm{ch}2t \mapsto \frac{p+3}{(p+3)^2-4}=F(p).$$

6.2. Так как $\cos nt \mapsto \dfrac{p}{p^2+n^2}$, то

$$f(t)=e^{2t}\cos nt \mapsto \frac{p-2}{(p-2)^2-n^2}=F(p).$$

6.3. Так как $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}\mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{p}{p^2+4}\right)$, то по теореме смещения

$$f(t)=e^{3t}\cos^2 t \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-3}+\frac{p-3}{(p-3)^2+4}\right)=F(p).$$

6.4. Выражая показательную функцию через экспоненту, получим

$$f(t)=2^t=e^{t\ln 2}\mapsto \frac{1}{p-\ln 2}=F(p).$$

2.2.4. Дифференцирование изображения. Если $f(t) \mapsto F(p)$, то

$$(-1)^n t^n f(t) \mapsto F^{(n)}(p),\ n=1,2,\ldots \tag{7}$$

Пример 7. Найти изображения следующих функций:

7.1. $f(t)=te^{at}$,

7.2. $f(t)=te^{t}\cos t$,

7.3. $f(t)=t^2\sin t$,

7.4. $f(t)=(t+1)\sin 2t$.

7.1. Наличие множителя t свидетельствует о необходимости применения теоремы о дифференцировании изображения.

Так как $e^{at} \mapsto \dfrac{1}{p-a}$, то

$$f(t)=te^{at} \mapsto (-1)^1\left(\frac{1}{p-a}\right)'=\frac{1}{(p-a)^2}=F(p).$$

7.2. Для нахождения изображения применим теоремы дифференцирования изображения и запаздывания

$$\cos t \mapsto \frac{p}{p^2+1}, \quad t\cos t \mapsto -\left(\frac{p}{p^2+1}\right)'=-\frac{p^2+1-2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

$$f(t)=te^t\cos t \mapsto \frac{(p-1)^2-1}{\left((p-1)^2+1\right)^2}=\frac{p^2-2p}{\left(p^2-2p+2\right)^2}=F(p).$$

7.3. Наличие множителя t^2 свидетельствует о необходимости применения теоремы о дифференцировании изображения

$$\sin t \mapsto \frac{1}{p^2+1}, \quad t^2\sin t \mapsto (-1)^2\left(\frac{1}{p^2+1}\right)''.$$

$$\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'=\frac{-2p}{\left(p^2+1\right)^2}, \quad \left(\frac{1}{p^2+1}\right)''=\left(\frac{-2p}{\left(p^2+1\right)^2}\right)'=\frac{6p^2-2}{\left(p^2+1\right)^3}.$$

$$f(t)=t^2\sin t \mapsto \frac{6p^2-2}{\left(p^2+1\right)^3}=F(p).$$

7.4. Так как $(t+1)\sin 2t = t\sin 2t + \sin 2t$, то, применяя теорему о дифференцировании изображения и свойство линейности, получим

$$\sin 2t \mapsto \frac{2}{p^2+4}, \quad t\sin 2t \mapsto (-1)^1\left(\frac{2}{p^2+4}\right)' = \frac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}.$$

$$f(t) = (t+1)\sin 2t \mapsto \frac{4p}{\left(p^2+4\right)^2} + \frac{2}{p^2+4} = \frac{2p^2+4p+8}{\left(p^2+4\right)^2} = F(p).$$

2.2.5. Интегрирование изображения. Если $f(t) \mapsto F(p)$ и функция $\frac{f(t)}{t}$ ограничена в окрестности нуля, тогда $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом и

$$\frac{f(t)}{t} \mapsto \int_p^\infty F(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (8)$$

Пример 8. Найти изображения следующих функций:

8.1. $f(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$,

8.2. $f(t) = \dfrac{1-\cos t}{t}$,

8.3. $f(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t}$,

8.4. $f(t) = \dfrac{\sin 3t - \sin t}{t}$.

8.1. Функция $f(t)$ непрерывна при всех $t > 0$ и ограничена в окрестности нуля (по правилу Лопиталя $\lim\limits_{t\to+0} \frac{e^t-1}{t} = 1$). Так как

$$e^t - 1 \mapsto \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p},$$

то по теореме об интегрировании изображения (8) получим

$$f(t)=\frac{e^t-1}{t} \mapsto \int_p^\infty \left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z=\left(\ln|z-1|-\ln|z|\right)\Big|_p^\infty=$$

$$=\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|_p^\infty=\ln\frac{p}{p-1}=F(p).$$

8.2. Так как $\lim\limits_{t\to+0}\frac{1-\cos t}{t}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}=\lim\limits_{t\to+0}\sin\frac{t}{2}=0$, то $f(t)$ непрерывна и ограничена при $t>0$. Применим теорему об интегрировании изображения. Так как $1-\cos t\mapsto\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}$, то

$$f(t)=\frac{1-\cos t}{t} \mapsto \int_p^\infty \left(\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z=\left(\ln z-\frac{1}{2}\ln\left(z^2+1\right)\right)\Big|_p^\infty=$$

$$\ln\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\Big|_p^\infty=\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}=F(p).$$

8.3. Функция $f(t)$ является оригиналом. По теореме об интегрировании изображения

$$f(t)=\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{1}{2}\frac{1-\cos 2t}{t} \mapsto \frac{1}{2}\int_p^\infty\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+4}\right)\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln p^2-\ln\left(p^2+4\right)\right)\Big|_p^\infty=\frac{1}{4}\ln\frac{z^2}{z^2+4}\Big|_p^\infty=\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+4}{p^2}=F(p).$$

8.4. Так как $f(t)$ является оригиналом и $\sin 3t-\sin t\mapsto \frac{3}{p^2+9}-\frac{1}{p^2+1}$, то по формуле (8)

$$\frac{\sin 3t-\sin t}{t} \mapsto \int\limits_p^{\infty}\left(\frac{3}{z^2+9}-\frac{1}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z=\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{3}-\operatorname{arctg} z\right)\Bigg|_p^{\infty}=$$

$$=\operatorname{arctg} p-\operatorname{arctg}\frac{p}{3}.$$

2.2.6. Дифференцирование оригинала. Если $f(t) \mapsto F(p)$ и функции $f'(t)$, $f''(t),\ldots,$ $f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то для любого $k=1$, 2, …, n

$$f^{(n)}(t) \mapsto p^n F(p)-\sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0), \tag{9}$$

где $f^{(k)}(0)=\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

В частности

$$f'(t) \mapsto pF(p)-f(0), \quad f''(t) \mapsto p^2F(p)-pf(0)-f'(0).$$

Пример 9. Найти изображения следующих функций:

9.1. $f(t)=\sin^2 t$, 9.2. $f(t)=te^t$.

9.1. Пусть $f(t) \mapsto F(p)$. Так как $f(0)=0$, то $f'(t) \mapsto pF(p)-f(0)=pF(p)$. Вычислим производную функции $f(t)$ и найдем изображение для $f'(t)$

$$f'(t)=\left(\sin^2 t\right)'=2\sin t\cos t=\sin 2t \mapsto =\frac{2}{p^2+4}.$$

Таким образом, по теореме о дифференцировании оригинала для определения изображения $F(p)$ имеем уравнение $pF(p)=\dfrac{2}{p^2+4}$, решая которое получим

$$F(p)=\frac{2}{p\left(p^2+4\right)}.$$

9.2. Пусть $f(t)\ \mapsto\ F(p)$. Так как $f(0)=0$, то

$$f'(t)\ \mapsto\ pF(p)-f(0)=pF(p).$$

Найдем изображение для производной

$$f'(t)=\left(te^t\right)'=e^t+te^t\ \mapsto\ =\frac{1}{p-1}+F(p).$$

Таким образом, для определения $F(p)$ имеем уравнение

$$\frac{1}{p-1}+F(p)=pF(p).$$

Следовательно

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)^2}.$$

2.2.7. Интегрирование оригинала. Если $f(t)\ \mapsto F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\ \mapsto\frac{1}{p}F(p). \tag{10}$$

Пример 10. Найти изображения следующих функций:

10.1. $f(t)=\int_0^t \sin\tau\mathrm{d}\tau$, 10.2. $f(t)=\int_0^t \tau^2e^{-\tau}\mathrm{d}\tau$,

10.3. $f(t)=\int_0^t \tau e^{\tau}\mathrm{d}\tau$, 10.4. $f(t)=\int_0^t \cos^2\tau\mathrm{d}\tau$.

10.1. Так как $\sin t \mapsto \dfrac{1}{p^2+1}$, то по теореме об интегрировании оригинала

$$\int_0^t \sin\tau \mathrm{d}\tau \mapsto \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}.$$

10.2. По теореме запаздывания $t^2e^{-t} \mapsto \dfrac{2!}{(p+1)^3}$. Тогда по формуле (10) получим

$$\int_0^t \tau^2 e^{-\tau}\mathrm{d}\tau \mapsto \frac{1}{p}\cdot\frac{2}{(p+1)^3}=\frac{2}{p(p+1)^3}.$$

10.3. Имеем $te^t \mapsto \dfrac{1}{(p-1)^2}$. Тогда

$$\int_0^t \tau e^{\tau}\mathrm{d}\tau \mapsto \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{(p-1)^2}=\frac{1}{p(p-1)^2}.$$

10.4. Так как $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2} \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{p}{p^2+4}\right)=\dfrac{p^2+2}{p\left(p^2+4\right)}$,

то применяя теорему об интегрировании оригинала получим

$$f(t)=\int_0^t \cos^2\tau \mathrm{d}\tau \mapsto \frac{p^2+2}{p^2\left(p^2+4\right)}.$$

Определение 3. *Сверткой двух функций-оригиналов* $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (обозначается $f_1(t)*f_2(t)$) называется функция

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (11)$$

Операция свертывания функций обладает следующими свойствами:

1) $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$ (коммутативности),

2) $\left(f_1(t)*f_2(t)\right)*f_3(t)=f_1(t)*\left(f_2(t)*f_3(t)\right)$ (ассоциативности),

3) $\left(c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\right)*f_3(t)=c_1f_1(t)*f_3(t)+c_2f_2(t)*f_3(t)$ (линейности).

2.2.8. Теорема Бореля (теорема о свертке). Свертке оригиналов

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

соответствует произведение изображений

$$f_1(t)*f_2(t)\ \mapsto\ F_1(p)\cdot F_2(p). \tag{12}$$

Пример 11. Найти свертку $t*e^t$ и изображение свертки (по свойствам преобразования Лапласа и по теореме о свертке).

11.1. $t*e^t$, 11.2. $\sin t*t$.

11.1. Найдем свертку по формуле (11)

$$t*e^t=\int_0^t(t-\tau)e^\tau\,\mathrm{d}\tau=t\left(e^t-1\right)-\int_0^t\tau e^\tau\,\mathrm{d}\tau=\begin{vmatrix}u=\tau & \mathrm{d}v=e^\tau\mathrm{d}\tau\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}\tau & v=e^\tau\end{vmatrix}=$$

$$=t\left(e^t-1\right)-\tau e^\tau\Big|_0^t+\int_0^t e^\tau\,\mathrm{d}\tau=t\left(e^t-1\right)-\left(\tau\cdot e^\tau-e^\tau\right)\Big|_0^t=$$

$$=te^t-t-te^t+e^t-1=e^t-t-1.$$

Найдем изображение свертки, используя свойства линейности, смещения

$$t*e^t=e^t-t-1\ \mapsto\ \frac{1}{p-1}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Найдем изображение свертки по теореме Бореля

$$t \mapsto \frac{1}{p^2}, \quad e^t \mapsto \frac{1}{p-1}, \quad t * e^t \mapsto \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

11.2. По определению свертки (11)

$$\sin t * t = \int_0^t (t-\tau)\sin\tau\,\mathrm{d}\tau = -\left((t-\tau)\cos\tau + \sin\tau\right)\Big|_0^t = t - \sin t.$$

Найдем изображение свертки, используя свойства линейности

$$t - \sin t \mapsto \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}.$$

По теореме Бореля изображение свертки имеет вид

$$\sin t * t \ \mapsto \ \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}.$$

Пример 12. Найти изображения следующих функций:

12.1. $f(t) = \int_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau}\mathrm{d}\tau$, 12.2. $f(t) = \int_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2\mathrm{d}\tau$,

12.3. $\sin t * \sin 2t$, 12.4. $f(t) = \cos 3t * \sin t$.

12.1. Функция $f(t)$ является сверткой $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$, где $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = e^{2t}$. Так как $\cos t \ \mapsto \ \dfrac{p}{p^2+1}$, $e^{2t} \ \mapsto \ \dfrac{1}{p-2}$, то

$$\int_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau}\mathrm{d}\tau = \cos t * e^{2t} \ \mapsto \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p-2} = \frac{p}{\left(p^2+1\right)(p-2)}.$$

12.2. Функция $f(t)$ является сверткой $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$, где $f_1(t)=e^{-2t}$, $f_2(t)=t^2$. Имеем $e^{-2t} \mapsto \dfrac{1}{p+2}$, $t^2 \mapsto \dfrac{2!}{p^3}$. Тогда

$$\int_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2 d\tau = e^{-2t} * t^2 \mapsto \frac{1}{p+2}\cdot\frac{2}{p^3}=\frac{2}{p^3(p+2)}.$$

12.3. Так как $\sin t \mapsto \dfrac{1}{p^2+1}$, $\sin 2t \mapsto \dfrac{2}{p^2+4}$, то по теореме о свертке

$$\sin t * \sin 2t \mapsto \frac{2}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}.$$

12.4. Так как $\cos 3t \mapsto \dfrac{p}{p^2+9}$, $\sin t \mapsto \dfrac{1}{p^2+1}$, то по теореме о свертке

$$\cos 3t * \sin t \mapsto \frac{p}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+1\right)}.$$

2.2.9. Теорема запаздывания. Если $f(t)\eta(t) \mapsto F(p)$ и $\tau>0$, то

$$f(t-\tau)\eta(t-\tau) \mapsto e^{-p\tau}F(p). \qquad (13)$$

Пример 13. Найти изображения следующих функций:

13.1. $f(t)=e^{t-3}\eta(t-3)$, 13.2. $f(t)=(t-1)^2\eta(t-1)$,

13.3. $f(t)=\left(t^2-6t+11\right)\eta(t-2)$, 13.4. $f(t)=e^{2t}\sin 7(t-3)\eta(t-3)$,

13.5. $f(t)=\sin^2 t \quad (0\le t\le \pi)$, 13.6. $f(t)=e^{-3t}\cos 4(t-2)\eta(t-2)$.

13.1. Для функции $e^t\eta(t)\mapsto\dfrac{1}{p-1}$. По теореме запаздывания

$$e^{t-3}\eta(t-3)\mapsto\frac{e^{-3p}}{p-1}.$$

Следует отметить, что $e^{t-3}\eta(t)=e^{-3}e^t\eta(t)\mapsto\dfrac{e^{-3}}{p-1}$.

13.2. Для функции $t^2\eta(t)\mapsto\dfrac{2}{p^3}$. По теореме запаздывания $(t-1)^2\eta(t-1)\mapsto\dfrac{2e^{-p}}{p^3}$. Следует отметить, что

$$(t-1)^2\eta(t)=\left(t^2-2t+1\right)\eta(t)\mapsto\frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

13.3. Преобразуем квадратный трехчлен, представив его в виде многочлена по степеням $t-2$. Получим

$$t^2-6t+11=(t-2)^2-2(t-2)+3.$$

Найдем изображение для функции-оригинала

$$t^2-2t+3\mapsto\frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p}.$$

По теореме запаздывания имеем

$$\left(t^2-6t+11\right)\eta(t-2)\mapsto\left(\frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p}\right)e^{-2p}=\frac{\left(3p^2-2p+2\right)e^{-2p}}{p^3}.$$

13.4. Преобразуем выражение, выделяя в нем двучлен ($t-3$)

$$e^{2t}\sin 7(t-3)\eta(t-3)=e^6e^{2(t-3)}\sin 7(t-3)\eta(t-3).$$

Для функции $e^{2t}\sin(7t)\eta(t) \mapsto \dfrac{7}{(p-2)^2+49}$. Используя теорему запаздывания

$$e^{2t}\sin 7(t-3)\eta(t-3) \mapsto \frac{7e^{6}e^{-3p}}{(p-2)^2+49}=\frac{7e^{-3(p-2)}}{(p-2)^2+49}.$$

13.5. $f(t)=\sin^2 t=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2t)$. Найдем изображение для функции $g(t)=1-\cos 2t \quad (0\le t\le \pi)$. Представим рассматриваемую функцию в виде

$$g(t)=(1-\cos 2t)\eta(t)-(1-\cos 2t)\eta(t-\pi)=$$
$$=(1-\cos 2t)\eta(t)-(1-\cos 2(t-\pi))\eta(t-\pi) \mapsto$$
$$\mapsto \frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}-\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)e^{-\pi p}==\frac{4}{p\left(p^2+4\right)}\left(1-e^{-\pi p}\right)$$

Следовательно $f(t)=\dfrac{1}{2}g(t) \mapsto \dfrac{2\left(1-e^{-\pi p}\right)}{p\left(p^2+4\right)}$.

13.6. Преобразуем выражение для функции

$$e^{-3t}\cos 4(t-2)\eta(t-2)=e^{-6}e^{-3(t-2)}\cos 4(t-2)\eta(t-2).$$

Для функции $e^{-3t}\cos(4t)\eta(t) \mapsto \dfrac{p+3}{(p+3)^2+16}$. По теореме запаздывания

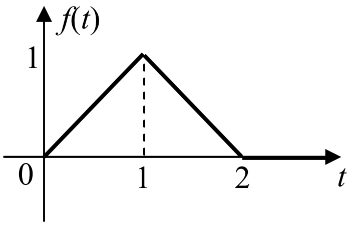
$$e^{-3t}\cos 4(t-2)\eta(t-2) \mapsto \frac{e^{-6}e^{-2p}(p+3)}{(p+3)^2+16}=\frac{e^{-2(p+3)}(p+3)}{(p+3)^2+16}.$$

Теорема запаздывания является удобным способом для нахождения изображений кусочно-непрерывных функций.

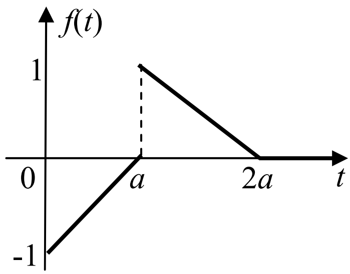
Применяя теоремы подобия и запаздывания, можно найти изображение для оригинала вида $f(bt - t_0)$, где $t_0 > 0$ и b – комплексное число. Пусть $f(t) \mapsto F(p)$, тогда по теореме подобия $f(bt) \mapsto \frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right)$. По теореме запаздывания находим

$$f(bt - t_0) = f\left(b\left(t - \frac{t_0}{b}\right)\right) \mapsto \frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right)e^{-\frac{t_0}{b}p}.$$

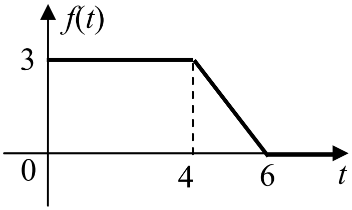
Пример 14. Найти изображения следующих функций, заданных графически:



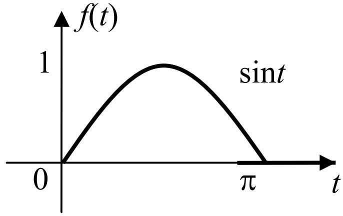
14.1.



14.2.



14.3.



14.4.

14.1. Функция может быть записана в аналитическом виде

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \quad t \ge 2, \\ t, & 0 < t \le 1, \\ 2 - t, & 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Так как

$$f_1(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,1] \\ 0, & t\notin[0,1] \end{cases} = t\eta(t)-t\eta(t-1),$$

$$f_2(t)=\begin{cases} 2-t, & t\in[1,2] \\ 0, & t\notin[1,2] \end{cases} = (2-t)\eta(t-1)-(2-t)\eta(t-2),$$

то составную функцию $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$ представим одним аналитическим выражением в виде

$$\begin{aligned} f(t)&=t\eta(t)-t\eta(t-1)+(2-t)\eta(t-1)-(2-t)\eta(t-2)= \\ &=t\eta(t)-2(t-1)\eta(t-1)+(t-2)\eta(t-2). \end{aligned}$$

Применяя теорему запаздывания, найдем изображение функции

$$f(t)\ \mapsto\ \frac{1}{p^2}-\frac{2e^{-p}}{p^2}+\frac{e^{-2p}}{p^2}=\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-p}\right)^2.$$

14.2. Функция может быть записана в аналитическом виде

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t\le 0,\quad t\ge 2a, \\ -1+\dfrac{t}{a}, & 0<t\le a, \\ 2-\dfrac{t}{a}, & a<t\le 2a. \end{cases}$$

Так как

$$f_1(t)=\begin{cases} -1+\dfrac{t}{a}, & t\in[0,a] \\ 0, & t\notin[0,a] \end{cases} = \left(-1+\frac{t}{a}\right)\eta(t)-\left(-1+\frac{t}{a}\right)\eta(t-a),$$

$$f_2(t)=\begin{cases} 2-\dfrac{t}{a}, & t\in[a,2a] \\ 0, & t\notin[a,2a] \end{cases} = \left(2-\frac{t}{a}\right)\eta(t-a)-\left(2-\frac{t}{a}\right)\eta(t-2a),$$

то функцию $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$ представим в виде

$$f(t)=\left(-1+\frac{t}{a}\right)\eta(t)-\left(-1+\frac{t}{a}\right)\eta(t-a)+$$

$$+\left(2-\frac{t}{a}\right)\eta(t-a)-\left(2-\frac{t}{a}\right)\eta(t-2a)=$$

$$=\left(-1+\frac{t}{a}\right)\eta(t)+\left(3-\frac{2t}{a}\right)\eta(t-a)+\left(\frac{t}{a}-2\right)\eta(t-2a)=$$

$$=\left(-1+\frac{t}{a}\right)\eta(t)+\frac{-2(t-a)+a}{a}\eta(t-a)+\frac{t-2a}{a}\eta(t-2a).$$

Применяя теорему запаздывания (13), найдем изображение функции $f(t)$

$$f(t)\ \mapsto\ -\frac{1}{p}+\frac{1}{ap^2}-\frac{2e^{-ap}}{ap^2}+\frac{e^{-ap}}{p}+\frac{e^{-2ap}}{ap^2}=$$

$$=-\frac{1}{p}+\frac{1}{ap^2}+\frac{(ap-2)e^{-ap}}{ap^2}+\frac{e^{-2ap}}{ap^2}.$$

14.3. Функция может быть записана в аналитическом виде

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0,\quad t\geq 6, \\ 3, & 0\leq t<4, \\ 9-\dfrac{3}{2}t, & 4\leq t<6. \end{cases}$$

С помощью единичной функции Хэвисайда функцию $f(t)$ представим в виде

$$f(t)=3\eta(t)-3\eta(t-4)+\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-6)=$$
$$=3\eta(t)+\left(6-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-6)=$$
$$=3\eta(t)-\frac{3}{2}(t-4)\eta(t-4)+\frac{3}{2}(t-6)\eta(t-6).$$

Применяя теорему запаздывания (13), найдем изображение функции $f(t)$

$$f(t)\ \mapsto\ \frac{3}{p}-\frac{3e^{-4p}}{2p^2}+\frac{3e^{-6p}}{2p^2}\,.$$

14.4. Функция может быть записана в аналитическом виде

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t\le 0,\quad t\ge \pi, \\ \sin t, & 0<t\le \pi. \end{cases}$$

Функцию представим в виде

$$f(t)=\sin t\eta(t)-\sin t\eta(t-\pi)=\left[\sin t=-\sin(t-\pi)\right]=$$
$$=\sin t\eta(t)+\sin(t-\pi)\eta(t-\pi).$$

Применяя теорему запаздывания, найдем изображение

$$f(t)\ \mapsto\ \frac{1}{p^2+1}+\frac{e^{-\pi p}}{p^2+1}=\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}\,.$$

2.2.10. Теорема опережения. Если $f(t)\mapsto F(p)$ и $\tau>0$, то

$$f(t+\tau)\ \mapsto\ e^{p\tau}\left(F(p)-\int\limits_0^{\tau} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t\right). \qquad (14)$$

Здесь $f(t+\tau)=f(t+\tau)\eta(t)$.

На рис. 1 приведены графики функций-оригиналов $f(t)$, $f(t-\tau)\eta(t-\tau)$, $f(t+\tau)$, где $\tau>0$. Для вычисления изображений функций $f(t-\tau)\eta(t-\tau)$, $f(t+\tau)$ по известному изображению $F(p) \mapsfrom f(t)$ используются теоремы запаздывания и опережения соответственно.

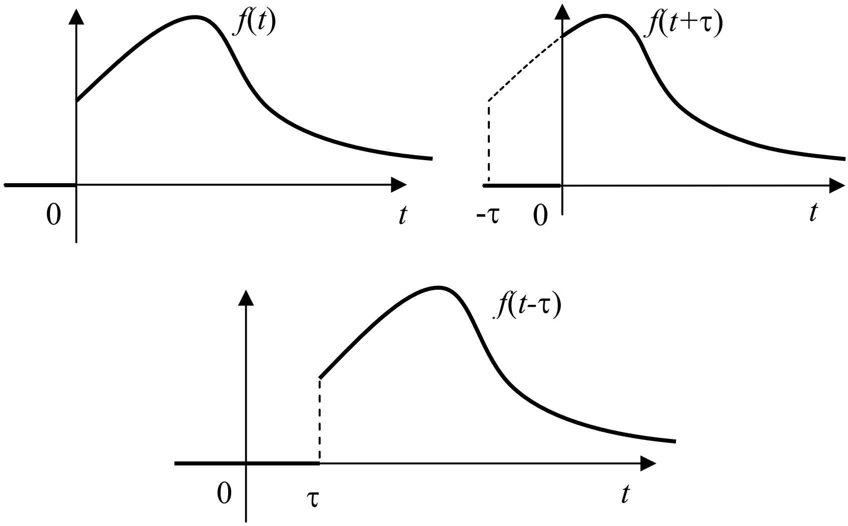


Рис. 1. Графики функций-оригиналов

Пример 15. Найти изображения следующих функций:

15.1. $f(t)=\sin(t+\tau),\quad \tau>0$, 15.2. $f(t)=\cos(t+\tau),\quad \tau>0$.

15.1. Для функции $\sin t \mapsto \dfrac{1}{p^2+1}$. По теореме опережения (14)

$$\sin(t+\tau) \mapsto e^{p\tau}\left(\frac{1}{p^2+1}-\int_0^{\tau}\sin t e^{-pt}\mathrm{d}t\right).$$

Так как

$$\int_0^{\tau} \sin t e^{-pt}\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \text{по частям} \\ \text{два раза} \end{bmatrix} = \left.\frac{-p\sin t - \cos t}{p^2+1} e^{-pt}\right|_0^{\tau} =$$

$$= \frac{-p\sin\tau - \cos\tau}{p^2+1} e^{-p\tau} - \frac{1}{p^2+1},$$

то по теореме опережения

$$\sin(t+\tau) \mapsto \frac{p\sin\tau + \cos\tau}{p^2+1}.$$

15.2. Для функции $\cos t \mapsto \dfrac{p}{p^2+1}$. По теореме опережения

$$\cos(t+\tau) \mapsto e^{p\tau}\left(\frac{p}{p^2+1} - \int_0^{\tau} \cos t e^{-pt}\mathrm{d}t\right).$$

Так как

$$\int_0^{\tau} \cos t e^{-pt}\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \text{по частям} \\ \text{два раза} \end{bmatrix} = \left.\frac{-p\cos t + \sin t}{p^2+1} e^{-pt}\right|_0^{\tau} =$$

$$= \frac{-p\cos\tau + \sin\tau}{p^2+1} e^{-p\tau} + \frac{p}{p^2+1},$$

то получим

$$\sin(t+\tau) \mapsto \frac{p\cos\tau - \sin\tau}{p^2+1}.$$

2.2.11. Изображение периодической функции. Пусть функция-оригинал $f(t)$ имеет период T. Тогда, если $f_0(t) \mapsto F_0(p)$, где

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } 0 < t < T, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T, \end{cases}$$

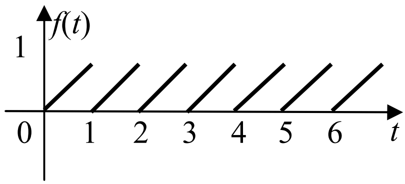
то

$$f(t) \mapsto \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}. \tag{15}$$

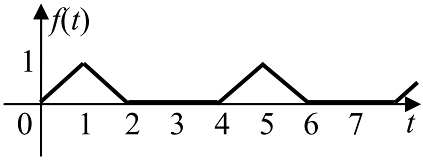
Пример 16. Найти изображения следующих периодических функций:

16.1. $f(t)=|\cos t|$, 16.2. $f(t)=|\sin t|$.

16.3.



16.4.



16.1. Функция $f(t)=|\cos t|$ периодическая с периодом $T=\pi$. Рассмотрим функцию $f_0(t)=\begin{cases}|\cos t|, & 0\le t\le \pi,\\ 0, & t<0,\ t>\pi.\end{cases}$ Найдем изображение для $f_0(t)$.

$$f_0(t) \mapsto \int_0^{\pi}|\cos t|e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\cos te^{-pt}\mathrm{d}t - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos te^{-pt}\mathrm{d}t =$$

$$=\left[\int \cos te^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{e^{-pt}}{p^2+1}(-p\cos t+\sin t)\right]=$$

$$=\frac{1}{p^2+1}\left(2e^{-\frac{\pi}{2}p}+p\left(1-e^{-\pi p}\right)\right).$$

По формуле (15) для изображения периодической функции

$$|\cos t| \mapsto \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}+p\left(1-e^{-\pi p}\right)}{\left(p^2+1\right)\left(1-e^{-\pi p}\right)}.$$

16.2. Функция $f(t)=|\sin t|$ периодическая с периодом $T=\pi$. Рассмотрим функцию $f_0(t)=\begin{cases}|\sin t|, & 0\le t\le \pi,\\ 0, & t<0,\ t>\pi.\end{cases}$ Найдем изображение для $f_0(t)$.

$$f_0(t) \mapsto \int_0^{\pi}|\sin t|e^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\sin t e^{-pt}\mathrm{d}t=$$

$$=\left[\int \sin t e^{-pt}\mathrm{d}t=-\frac{e^{-pt}}{p^2+1}(p\sin t+\cos t)\right]=\frac{1}{p^2+1}\left(1+e^{-\pi p}\right)$$

По формуле для изображения периодической функции

$$|\sin t| \mapsto \frac{1+e^{-\pi p}}{\left(p^2+1\right)\left(1-e^{-\pi p}\right)}.$$

16.3. Функция периодическая с периодом $T=1$. Рассмотрим функцию $f_0(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 1,\\ 0, & t>1.\end{cases}$. Найдем изображение для $f_0(t)$.

$$f_0(t) \mapsto \int_0^1 te^{-pt}\mathrm{d}t=-e^{-pt}\left(\frac{t}{p}+\frac{1}{p^2}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=-e^{-p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)+\frac{1}{p^2}=\frac{1-e^{-p}(p+1)}{p^2}.$$

По формуле для изображения периодической функции

$$f(t) \mapsto \frac{1-e^{-p}(p+1)}{p^2\left(1-e^{-p}\right)}.$$

16.4. Функция периодическая с периодом $T = 4$. Рассмотрим функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1, \\ 2 - t, & 1 < t \le 2, \\ 0, & 2 < t \le 4. \end{cases}$$

Найдем изображение для $f_0(t)$.

$$f_0(t) \mapsto \int_0^1 t e^{-pt} \mathrm{d}t + \int_1^2 (2 - t) e^{-pt} \mathrm{d}t =$$

$$= -e^{-pt}\left(\frac{t}{p} + \frac{1}{p^2}\right)\Bigg|_0^1 + e^{-pt}\left(\frac{t-2}{p} + \frac{1}{p^2}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= -e^{-p}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) + \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{\left(1 - e^{-p}\right)^2}{p^2}.$$

По формуле для изображения периодической функции

$$f(t) \mapsto \frac{1 + e^{-4p}}{\left(p^2 + 1\right)\left(1 - e^{-4p}\right)}.$$

Теорема о дифференцировании по параметру. Если при любом фиксированном x функция $f(x,t)$ является оригиналом, а $F(p,x)$ есть ее изображение, и если в интеграле $F(p,x) = \int\limits_0^{+\infty} f(x,t) e^{-pt} dt$ возможно дифференцирование по параметру x под знаком интеграла, то $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x} \mapsto \dfrac{\partial F(p,x)}{\partial x}$.

Это свойство используется при решении дифференциальных уравнений в частных производных.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

С3. Найти изображения следующих функций:

С3.1. $f\left(t\right)=e^{-t}\cos 2t+t^{3}e^{5t}$,

С3.2. $f\left(t\right)=e^{t+5}+2^{t}$,

С3.3. $f\left(t\right)=\cos^{2}t+\sin 2t\cos 3t$,

С3.4. $f\left(t\right)=te^{t-1}+t^{2}e^{-t+2}$,

С3.5. $f\left(t\right)=t\cos t$,

С3.6. $f\left(t\right)=t^{2}\sin t$,

С3.7. $f\left(t\right)=t\,\mathrm{ch}2t$,

С3.8. $f\left(t\right)=2+t^{3}+t\cos 2t-3^{t}$,

С3.9. $f\left(t\right)=\dfrac{1-e^{t}}{t}$,

С3.10. $f\left(t\right)=\dfrac{\mathrm{sh}\,t}{t}$,

С3.11. $f\left(t\right)=\sin(2t-3)\eta\left(t-\dfrac{3}{2}\right)$,

С3.12. $f\left(t\right)=t^{2}\eta(t-2)$,

С3.13. $f\left(t\right)=\left(t-1\right)^{2}\eta\left(t-2\right)$,

С3.14. $f\left(t\right)=\cos^{2}t$

С3.15. $f\left(t\right)=\sin t\left(\eta\left(t-2\pi\right)+\right.$
$\left.+\eta\left(t-3\pi\right)\right)$,

С3.16. $f\left(t\right)=t^{2}\cos 2t$

С3.17. $f\left(t\right)=te^{t}\sin t$,

С3.18. $f\left(t\right)=\int\limits_{0}^{t}\tau^{2}e^{-\tau}\mathrm{d}\tau$,

С3.19. $f\left(t\right)=\int\limits_{0}^{t}e^{t-\tau}\sin\tau\mathrm{d}\tau$,

С3.20. $f\left(t\right)=\int\limits_{0}^{t}e^{2\tau}\cos\left(t-\tau\right)\mathrm{d}\tau$,

С3.20. $f(t)=\begin{cases}0, & t\le 2\pi,\quad t\ge 3\pi,\\ \sin t, & 2\pi<t<3\pi,\end{cases}$

С3.21. $f(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t\le 1,\\ -t^{2}+4t-3, & 1<t\le 3,\\ t-3, & t>3.\end{cases}$

Ответы.

С3.1. $\dfrac{p+1}{\left(p+1\right)^{2}+4}+\dfrac{6}{\left(p-5\right)^{4}}$.

С3.2. $\dfrac{e^{5}}{p-1}+\dfrac{1}{p-\ln 2}$.

С3.3. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{p}{p^{2}+4}+\dfrac{5}{p^{2}+25}-\dfrac{1}{p^{2}+1}\right)$.

С3.4. $\dfrac{1}{e\left(p-1\right)^{2}}+\dfrac{2e^{2}}{\left(p+1\right)^{3}}$.

C3.5. $\dfrac{-p^2+1}{\left(p^2+1\right)^2}$.

C3.6. $\dfrac{2\left(3p^2-1\right)}{\left(p^2+1\right)^3}$.

C3.7. $\dfrac{p^2+4}{\left(p^2-4\right)^2}$.

C3.8. $\dfrac{2}{p}+\dfrac{3!}{p^4}+\dfrac{p^2-4}{(p^2+4)^2}+\dfrac{1}{p-\ln 3}$.

C3.9. $\ln\dfrac{p-1}{p}$.

C3.10. $\ln\sqrt{\dfrac{p-1}{p+1}}$.

C3.11. $\dfrac{2}{p^2+4}e^{-\frac{3}{2}p}$.

C3.12. $\left(\dfrac{2}{p^3}+\dfrac{4}{p^2}+\dfrac{4}{p}\right)e^{-2p}$.

C3.13. $\left(\dfrac{2}{p^3}+\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{1}{p}\right)e^{-2p}$.

C3.14. $\dfrac{p^2+2}{p\left(p^2+4\right)}$.

C3.15. $\dfrac{e^{-2\pi p}}{p^2+1}\left(1-e^{-\pi p}\right)$.

C3.16. $\dfrac{2p^3-24p}{\left(p^2+4\right)^3}$.

C3.17. $\dfrac{2p-2}{\left(p^2-2p+2\right)^2}$.

C3.18. $\dfrac{2}{p\left(p+1\right)^3}$.

C3.19. $\dfrac{1}{(p-1)\left(p^2+1\right)}$.

C3.20. $\dfrac{p}{(p-2)\left(p^2+1\right)}$.

C3.20. $\dfrac{1}{p^2+1}\left(e^{-2\pi p}+e^{-3\pi p}\right)$.

C3.21. $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^2}\left(1-3e^{-p}-3e^{-3p}\right)-\dfrac{2}{p^3}\left(e^{-p}-e^{-3p}\right)$.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОРИГИНАЛОВ ПО ИЗОБРАЖЕНИЯМ

Для нахождения функции-оригинала по заданному изображению требуется знание таблиц соответствия между оригиналами и изображениями, применение свойств преобразования Лапласа, разложение изображения на простейшие дроби, использование теорем разложения.

3.1. Использование свойств преобразования Лапласа

Прежде всего необходимо привести функцию к более простому, «табличному» виду.

Если знаменатель дроби содержит квадратный трехчлен, то в нем выделяют полный квадрат $ap^2 + bp + c = a\left(p \pm \alpha\right)^2 \pm \beta^2$. При этом числитель дроби представляется виде многочлена от $\left(p \pm \alpha\right)$.

Теоремой об интегрировании оригинала удобно пользоваться для нахождения оригинала дроби $\dfrac{F(p)}{p^n}$, если известен оригинал $f(t)$ изображения $F(p)$.

Наличие в изображении $F(p)$ множителя $e^{-p\tau}, \tau > 0$ свидетельствует о необходимости применения теоремы запаздывания (13).

Если изображение представимо в виде $F(p) = F_1(p)F_2(p)$ или $F(p) = pF_1(p)F_2(p)$ и известны оригиналы $f_1(p) \mapsto F_1(p)$, $f_1(p) \mapsto F_1(p)$, то для нахождения оригинала $f(p) \mapsto F(p)$ используются терема Бореля (10) и интеграл Дюамеля соответственно.

Интеграл Дюамеля. Если

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \mapsto F_1(p)F_2(p),$$

то

$$f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \mapsto pF_1(p)F_2(p). \qquad (16)$$

Замечание. В силу симметричности свертки $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$

$$f_1(t)f_2(0)+\int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f_1(t)f_2(0)+\int_0^t f_1(t-\tau)f_2'(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Пример 17. Найти оригинал, соответствующий изображению (используя интеграл Дюамеля):

17.1. $F(p)=\dfrac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$, 17.2. $F(p)=\dfrac{p^3}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}$,

17.3. $F(p)=\dfrac{2p}{(p-1)\left(p^2-2p-3\right)}$.

17.1. Представим изображение в виде произведения

$$\frac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}=2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{p^2+1} \leftarrow\!\!\mid \sin t = f_1(t), \frac{p}{p^2+1} \leftarrow\!\!\mid \cos t = f_2(t),$$

$$f_1(0)=\sin 0 = 0, \quad f_1'(t)=\cos t,$$

то на основании формулы Дюамеля имеем

$$2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1} \leftarrow\!\!\mid 0+2\int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau =$$

$$=2\int_0^t \frac{\cos t+\cos(t-2\tau)}{2}\mathrm{d}\tau = \left(\tau\cos t-\frac{1}{2}\sin(t-2\tau)\right)\Bigg|_0^t = t\cos t+\sin t.$$

17.2. Представим изображение в виде произведения

$$\frac{p^3}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}=p\cdot\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+4}.$$

$$\frac{p}{p^2+1}\leftarrow\!\!\shortmid\ \cos t=f_1(t),\ \frac{p}{p^2+4}\leftarrow\!\!\shortmid\ \cos 2t=f_2(t),$$

$$f_1(0)=\cos 0=1,\quad f_1'(t)=-\sin t\,.$$

Тогда получаем

$$f(t)=f_1(0)f_2(t)+\int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$=\cos\,0\cdot\cos\,2t+\int_0^t\cos'\tau\cdot\cos\,2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$=\cos 2t-\int_0^t\sin\tau\cos 2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$=\cos\,2t-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\sin(3\tau-2t)+\sin(2t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau=$$

$$=\cos\,2t+\frac{1}{6}\cos\,(3\tau-2t)\Big|_0^t-\frac{1}{2}\cos\,(2t-\tau)\Big|_0^t=\frac{4}{3}\cos\,2t-\frac{1}{3}\cos\,t.$$

17.3. Представим изображение в виде произведения

$$\frac{2p}{(p-1)\left(p^2-2p-3\right)}=p\cdot\frac{1}{p-1}\cdot\frac{2}{(p-1)^2-4}.$$

$$\frac{1}{p-1}\leftarrow\!\!\shortmid\ e^t=f_1(t),\frac{2}{(p-1)^2-4}\leftarrow\!\!\shortmid\ e^t\operatorname{sh}2t=f_2(t),$$

$$f_1(0)=1,\quad f_1'(t)=e^t\,.$$

По формуле Дюамеля

$$f(t)=f_1(0)f_2(t)+\int\limits_0^t f_1'(t-\tau)f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau=e^t\operatorname{sh}2t+\int\limits_0^t e^{t-\tau}e^{\tau}\operatorname{sh}2\tau\,\mathrm{d}\tau=$$

$$=e^t\left(\operatorname{sh}2t+\frac{1}{2}\operatorname{ch}2\tau\Big|_0^t\right)=e^t\left(\operatorname{sh}2t+\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}2\tau-1\right)\right).$$

Пример 18. Используя свойства преобразования Лапласа найти оригинал, соответствующий изображению:

18.1. $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+26}$,

18.2. $F(p)=\dfrac{1}{p\left(p^2+4\right)}$,

18.3. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p+1}$,

18.4. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+4)^2}$,

18.5. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$,

18.6. $F(p)=\dfrac{4}{(p+1)^4}+\dfrac{3p-1}{p^2+4p+29}+\dfrac{e^{-p}}{(p-2)^3}$.

18.1. Преобразуем изображение, выделив полный квадрат в знаменателе. Для нахождения оригинала воспользуемся теоремой смещения, свойством линейности и таблицей изображений.

$$\frac{p}{p^2-2p+26}=\frac{(p-1)+1}{(p-1)^2+25}=\frac{p-1}{(p-1)^2+25}+\frac{1}{(p-1)^2+25}\ \leftarrow\!\!\!\shortmid$$

$$e^t\left(\cos5t+\frac{1}{5}\sin5t\right).$$

18.2. Из таблицы изображений имеем $\dfrac{2}{p^2+4}\ \leftarrow\!\!\!\shortmid\ \sin2t$. Используя свойства линейности и интегрирования оригинала, находим

$$F(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{p^2+4}\ \leftarrow\!\!\mid$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t \sin 2\tau \mathrm{d}\tau=-\frac{1}{4}\cos 2\tau\,\Big|_0^t=\frac{1}{4}\left(1-\cos 2t\right).$$

Найти оригинал можно также, представив исходную функцию в виде суммы простейших дробей,

$$F(p)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)\ \leftarrow\!\!\mid\ \frac{1}{4}\left(1-\cos 2t\right).$$

18.3. Из таблицы изображений имеем $\dfrac{1}{p+1}\ \leftarrow\!\!\mid\ e^{-t}$. Наличие множителя e^{-p} указывает на необходимость применения теоремы запаздывания. Поэтому

$$\frac{e^{-p}}{p+1}\ \leftarrow\!\!\mid\ e^{-(t-1)}\eta\left(t-1\right).$$

18.4. Представим изображение в виде произведения изображений:

$$F(p)=\frac{p}{(p^2+4)^2}=\frac{1}{p^2+4}\cdot\frac{p}{p^2+4},$$

$$\frac{1}{p^2+4}\ \leftarrow\!\!\mid\ \sin 2t,\quad \frac{p}{p^2+4}\ \leftarrow\!\!\mid\ \cos 2t.$$

Применим теорему об умножении изображений (теорему Бореля)

$$F(p)\ \leftarrow\!\!\mid\ \sin 2t*\cos 2t=\int\limits_0^t \sin 2\tau\cos 2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left(\sin(4\tau-2t)+\sin 2t\right)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(4\tau-2t)}{4}+\tau\cdot\sin 2t\right)\Bigg|_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2t}{4}+t\sin 2t+\frac{\cos(-2t)}{4}\right)=\frac{t}{2}\sin 2t.$$

18.5. Для нахождения оригинала воспользуемся теоремой умножения, предварительно представив $F(p)$ в виде произведения изображений

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\;\leftarrow\!\!\!\shortmid$$

$$\sin t*\sin t=\int\limits_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\big(\cos t-\cos(2\tau-t)\big)\mathrm{d}\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\tau\cos t-\frac{\sin(2\tau-t)}{2}\right)\Bigg|_0^t=\frac{1}{2}\left(t\cos t-\frac{\sin t}{2}-\frac{\sin t}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(t\cos t-\sin t\right).$$

18.6. Преобразуем $F(p)$ таким образом, чтобы можно было воспользоваться таблицей изображений:

$$\frac{4}{(p+1)^4}=\frac{4}{3!}\frac{3!}{(p+1)^4}\;\leftarrow\!\!\!\shortmid\;\frac{2}{3}e^{-t}t^3\,;$$

выделим полный квадрат в знаменателе второго слагаемого:

$$\frac{3p-1}{p^2+4p+29}=\frac{3p-1}{(p+2)^2+25}=\frac{3(p+2)-7}{(p+2)^2+25}\;\leftarrow\!\!\!\shortmid$$

$$e^{-2t}\left(3\cos 5t-\frac{7}{5}\sin 5t\right).$$

При построении оригинала, соответствующего третьему слагаемому сначала найдем оригинал для функции $\dfrac{1}{(p-2)^3}\;\leftarrow\!\!\!\shortmid\;\dfrac{1}{2}e^{2t}t^2=$ $=f(t)$, а затем применим теорему запаздывания для оригинала:

$$\frac{e^{-p}}{(p-2)^3}\;\leftarrow\!\!\!\shortmid\;f(t-1)\eta(t-1)=\frac{1}{2}e^{2(t-1)}(t-1)^2\,\eta(t-1).$$

Применяя свойство линейности найдем функцию-оригинал для данного изображения

$$\frac{2}{3}e^{-t}t^3+e^{-2t}\left(3\cos 5t-\frac{7}{5}\sin 5t\right)+\frac{1}{2}e^{2(t-1)}(t-1)^2\,\eta(t-1).$$

3.2. Разложение изображения на простейшие дроби

Если $F(p)=\dfrac{P(p)}{Q(p)}$ есть правильная рациональная дробь, то ее разлагают на сумму простых дробей вида $\dfrac{A}{p-a}$, $\dfrac{A}{(p-a)^k}$, $\dfrac{Mp+N}{p^2+ap+b}$, $\dfrac{Mp+N}{\left(p^2+ap+b\right)^k}$ и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства преобразований Лапласа.

Пример 19. Найти оригинал, соответствующий изображению:

19.1. $F(p)=\dfrac{-5}{p(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}$, 19.2. $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)\left(p^2+4\right)}$.

19.1. Представим $F(p)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$F(p)=\frac{-5}{p(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4p+5}.$$

Для нахождения A, B, C, D имеем уравнение

$$A(p-1)\left(p^2+4p+5\right)+Bp\left(p^2+4p+5\right)+(Cp+D)p(p-1)=-5.$$

Подставляя различные значения p получим систему для определения коэффициентов

$$p=0:\quad -5A=-5,\qquad p=1:\quad 10B=-5,$$

$$p=-1:\quad -4A-2B-2\left(-C+D\right)=-5,$$

$$p=-2:\quad -3A-2B+6\left(-2C+D\right)=-5\,.$$

Находим коэффициенты:

$$A=1,\quad B=-\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2},\quad D=-\frac{3}{2}\,.$$

$$F\left(p\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+3}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{p+2}{\left(p+2\right)^2+1}+\frac{1}{\left(p+2\right)^2+1}\right)\leftarrow$$

$$1-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\left(\cos t+\sin t\right).$$

19.2. Представим $F\left(p\right)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$F\left(p\right)=\frac{1}{p\left(p-1\right)\left(p^2+4\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}\,.$$

Для нахождения коэффициентов A, B, C, D имеем равенство

$$A\left(p-1\right)\left(p^2+4\right)+Bp\left(p^2+4\right)+\left(Cp+D\right)p\left(p-1\right)=1\,.$$

Подставляя в полученное равенство различные значения p получим систему уравнений для определения коэффициентов

$$p=0:\quad -4A=1,\qquad p=1:\quad 5B=1\,,$$

$$p=-1:\quad -10A-5B+2\left(-C+D\right)=1,$$

$$p=2:\quad 8A+16B+2\left(2C+D\right)=1\,.$$

Находим коэффициенты:

$$A=-\frac{1}{4},\quad B=\frac{1}{5},\quad C=\frac{1}{20},\quad D=-\frac{1}{5}.$$

$$F(p)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{20}\cdot\frac{p-4}{p^2+4}\ \leftarrow\!\!\!\!\rightarrow$$
$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}e^t+\frac{1}{20}\cos 2t-\frac{1}{10}\sin 2t=f(t).$$

3.3. Теоремы разложения

Теорема 5 (Римана-Меллина). Пусть функция $f(t)$ оригинал с показателем роста s_0, а $F(p)$ – ее изображение. Тогда в любой точке t непрерывности оригинала $f(t)$ справедлива формула Римана-Меллина

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}\mathrm{d}p. \tag{17}$$

где интегрирование производится вдоль любой прямой $\operatorname{Re}p=s$, $s>s_0$, и интеграл понимается в смысле главного значения.

Равенство имеет место в каждой точке, в которой $f(t)$ непрерывна. В точке t_0, являющейся точкой разрыва 1-го рода функции $f(t)$, правая часть формулы Римана-Меллина равна

$$\frac{1}{2}\big(f(t_0-0)+f(t_0+0)\big).$$

Формула Римана-Меллина (17) является обратной к формуле $F(p)=\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$ и называется *обратным преобразованием Лапласа*.

Непосредственное применение формулы обращения для восстановления оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$ затруднительно. Для нахождения оригинала обычно пользуются теоремами разложения.

Теорема 6 (первая теорема разложения). Если функция $F(p)$ в окрестности точки $p=\infty$ может быть представлена в виде ряда Лорана (точка $p=\infty$ является нулем функции $F(p)$ и $F(p)$ аналитична в окрестности этой точки)

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^{k+1}}=\frac{c_0}{p}+\frac{c_1}{p^2}+\frac{c_2}{p^3}+\ldots,$$

то функция

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot\frac{t^k}{k!}=c_0+c_1t+c_2\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots,\quad t\ge 0$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Пример 20. Найти оригинал, соответствующий изображению, используя первую теорему разложения:

20.1. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$,

20.2. $F(p)=\dfrac{1}{p\left(p^4+1\right)}$,

20.3. $F(p)=\ln\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$,

20.4. $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{\frac{1}{p^2}}$.

20.1. Разложим функцию $F(p)$ в ряд Лорана

$$\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-\cdots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n+1}},\quad |p|>1.$$

Так как $\dfrac{1}{p^{2n+1}} \leftarrow\!\shortmid \dfrac{t^{2n}}{(2n)!}$, то в соответствии с первой теоремой разложения

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n+1}} \leftarrow\!\shortmid \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=\cos t=f(t).$$

20.2. Разложим функцию $F(p)$ в ряд Лорана

$$\frac{1}{p\left(p^4+1\right)}=\frac{1}{p^5\left(1+\dfrac{1}{p^4}\right)}=\frac{1}{p^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{4n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{4n+5}},\quad |p|>1.$$

Так как $\dfrac{1}{p^{4n+5}} \leftarrow\!\shortmid \dfrac{t^{4(n+1)}}{(4(n+1))!}$, то в соответствии с первой теоремой разложения

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{4n+5}} \leftarrow\!\shortmid \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{4(n+1)}}{(4(n+1))!}=f(t).$$

20.3. Используя разложение в степенной ряд функции

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots$$

получим

$$\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}-\cdots-\frac{1}{np^n}-\cdots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^n}.$$

Ряд сходится при $|p|>1$ по признаку Даламбера. Тогда в соответствии с первой теоремой разложения

$$F(p)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^n} \leftarrow\!\!\shortmid$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n(n-1)!}=-\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=-\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}-1\right)=\frac{1-e}{t}=f(t).$$

20.4. Используя разложение в степенной ряд функции

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

получим

$$\frac{1}{p}e^{\frac{1}{p^2}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,p^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,p^{2n+1}}.$$

Согласно первой теореме разложения

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,p^{2n+1}} \leftarrow\!\!\shortmid \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!(2n)!}=f(t).$$

Теорема 7 (вторая теорема разложения). Пусть функция $F(p)$ комплексной переменной p аналитична во всей плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$, расположенных в полуплоскости $\operatorname{Re} p < s_0$. Если $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)=0$, и $F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль любой вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = s,\ s>s_0$, то $F(p)$ является изображением, и оригинал $f(t)$, соответствующий изображению $F(p)$, определяется формулой

$$F(p) \leftarrow \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right] = f(t). \qquad (18)$$

Если p_k – полюс порядка m_k, то

$$\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right] = \lim_{p\to p_k}\left\{\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left(\left(p-p_k\right)^{m_k} F(p)e^{pt}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{t^{m_k-1-j}}{j!\left(m_k-1-j\right)!} \lim_{p\to p_k}\left\{\frac{d^j}{dp^j}\left(\left(p-p_k\right)^{m_k} F(p)\right)\right\}.$$

Если $F(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ – рациональная правильная несократимая дробь, p_k – полюсы порядка m_k, $(k = 1, 2, ..., n)$ функции $F(p)$, то оригинал $f(t)$, соответствующий изображению $F(p)$, определяется формулой

$$F(p) \leftarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(m_k-1\right)!} \lim_{p\to p_k}\left\{\frac{\mathrm{d}^{m_k-1}}{\mathrm{d}p^{m_k-1}}\left(\left(p-p_k\right)^{m_k} F(p)e^{pt}\right)\right\} = f(t). \qquad (18)$$

В частности, если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – простые полюсы $F(p)$, то функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t} \qquad (19)$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Пример 21. Используя вторую теорему разложения, найти оригинал соответствующий изображению

21.1. $F(p)=\dfrac{p^2+p-1}{(p-2)(p-5)(p+4)}$, 21.2. $F(p)=\dfrac{p-1}{(p+1)\left(p^2+4\right)}$,

21.3. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^3}$, 21.4. $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2-1\right)^2}$,

21.5. $F(p)=\dfrac{1}{p^3(p-1)}$, 21.6. $F(p)=\dfrac{p^3}{\left(p^2+1\right)^2}$.

21.1. Функция $F(p)=\dfrac{p^2+p-1}{(p-2)(p-5)(p+4)}$ имеет простые полюсы (нули знаменателя) $p_1=2,\ p_2=5,\ p_3=-4$. Обозначим

$$P(p)=p^2+p-1,\quad Q(p)=p^3-3p^2-18p+40,$$

$$Q'(p)=3p^2-6p-18.$$

Тогда для $p_1=2$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_1=2}=\left.\frac{p^2+p-1}{3p^2-6p-18}\right|_{p_1=2}=-\frac{5}{18},$$

для $p_2=5$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_2=5}=\left.\frac{p^2+p-1}{3p^2-6p-18}\right|_{p_2=5}=\frac{29}{27},$$

для $p_3=-4$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_3=-4}=\left.\frac{p^2+p-1}{3p^2-6p-18}\right|_{p_3=-4}=\frac{11}{54}.$$

Следовательно по формуле (19)

$$F(p)=\frac{p^2+p-1}{(p-2)(p-5)(p+4)} \leftarrow\!\!\shortmid$$
$$-\frac{5}{18}e^{2t}+\frac{29}{27}e^{5t}+\frac{11}{54}e^{-4t}=\frac{1}{54}\left(11e^{-4t}+58e^{5t}-15e^{2t}\right)=f(t).$$

21.2. Функция $F(p)$ правильная рациональная несократимая дробь, для которой точки $p_1=-1,\ p_2=-2i,\ p_3=2i$ являются простыми полюсами. Обозначим

$$P(p)=p-1,\quad Q(p)=p^3+p^2+4p+4,\quad Q'(p)=3p^2+2p+4.$$

Так как для $p_1=-1$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_1=-1}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_1=-1}=-\frac{2}{5},$$

для $p_2=-2i$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_2=-2i}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_2=-2i}=\frac{-1-2i}{-8-4i}=\frac{1+2i}{8+4i}=\frac{4+3i}{20},$$

для $p_3=2i$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_3=2i}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_3=2i}=\frac{-1+2i}{-8+4i}=\frac{1-2i}{8-4i}=\frac{4-3i}{20},$$

то по второй теореме разложения получим:

$$f(t)=\frac{-2}{5}e^{-t}+\frac{4+3i}{20}e^{-2it}+\frac{4-3i}{20}e^{2it}=\frac{-2}{5}e^{-t}+\frac{2}{5}\cos 2t+\frac{3}{10}\sin 2t.$$

21.3. Функция $F(p)$ в точке $p=1$ имеет полюс 3-го порядка. По второй теореме разложения находим

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)^3} \leftarrow\!\shortmid \frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\Big((p-1)^3 F(p)e^{pt}\Big)=$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\frac{d^2 e^{pt}}{dp^2}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}t^2 e^{pt}=\frac{t^2}{2!}e^t .$$

21.4. Функция $F(p)$ в точках $p_1=1$ и $p_2=-1$ имеет полюсы 2-го порядка. Следовательно, по второй теореме разложения находим

$$F(p)=\frac{p}{\left(p^2-1\right)^2} \leftarrow\!\shortmid$$

$$\frac{1}{1!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\Big((p-1)^2 F(p)e^{pt}\Big)+\frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\Big((p+1)^2 F(p)e^{pt}\Big)=$$

$$=\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}p}{(p+1)^2}\right)+\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}p}{(p-1)^2}\right)=$$

$$=\lim_{p\to 1}\frac{\left(te^{pt}p+e^{pt}\right)(p+1)^2-e^{pt}p\cdot 2(p+1)}{(p+1)^4}+$$

$$+\lim_{p\to -1}\frac{\left(te^{pt}p+e^{pt}\right)(p-1)^2-e^{pt}p\cdot 2(p-1)}{(p-1)^4}=$$

$$=\frac{1}{16}\Big(\left(te^t+e^t\right)4-4e^t\Big)+\frac{1}{16}\Big(\left(-te^{-t}+e^{-t}\right)4-4e^{-t}\Big)=$$

$$=\frac{1}{4}t\,e^t-\frac{1}{4}t\,e^{-t}=\frac{t}{2}\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\frac{t}{2}\operatorname{sh}t .$$

21.5. Функция $F(p)$ в точках $p_1=0$ имеет полюс 3-го порядка, а в $p_2=1$ полюс первого порядка. Следовательно, по второй теореме разложения находим:

$$F(p)=\frac{1}{p^3(p-1)} \leftarrow \operatorname*{Res}_{p=0}\left[F(p)e^{pt}\right]+\operatorname*{Res}_{p=1}\left[F(p)e^{pt}\right]=$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)+\left.\frac{1}{\left(p^4-p^3\right)'}e^{pt}\right|_{p=1}=$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\frac{e^{pt}\left(\left(t^2p-t^2\right)(p-1)-2(tp-t-1)\right)}{(p-1)^3}+e^t=-1-t-\frac{t^2}{2}+e^t .$$

21.6. Представим функцию $F(p)$ в виде $F(p)=\dfrac{p^3}{(p-i)^2(p+i)^2}$.

Точки $p_1=i,\ p_2=-i$ являются полюсами 2-го порядка. Вычислим вычеты функции $\Phi(p)=F(p)e^{pt}$ в этих полюсах

$$\operatorname*{Res}_{p=i}\left[F(p)e^{pt}\right]=\frac{1}{1!}\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left(\frac{p^3e^{pt}}{(p+i)^2}\right)=$$

$$=\lim_{p\to i}\frac{e^{pt}\left(\left(3p^2+p^3t\right)(p+i)-2p^3\right)}{(p+i)^3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{4i}\right)e^{it},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-i}\left[F(p)e^{pt}\right]=\frac{1}{1!}\lim_{p\to -i}\frac{d}{dp}\left(\frac{p^3e^{pt}}{(p-i)^2}\right)=$$

$$=\lim_{p\to -i}\frac{e^{pt}\left(\left(3p^2+p^3t\right)(p-i)-2p^3\right)}{(p-i)^3}=\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{4i}\right)e^{-it},$$

$$F(p)=\frac{p^3}{\left(p^2+1\right)^2} \leftarrow \left(\frac{1}{2}-\frac{t}{4i}\right)e^{it}+\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{4i}\right)e^{-it}=\cos t-\frac{t}{2}\sin t .$$

3.4. Задачи для самостоятельного решения

С4. Найти оригиналы по заданным изображениям:

С4.1. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$,

С4.2. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$,

С4.3. $F(p)=\dfrac{1}{p^3+2p^2+p}$,

С4.4. $F(p)=\dfrac{p+3}{p\left(p^2-4p+3\right)}$,

С4.5. $F(p)=\dfrac{4-p+p^2}{p^3-p^2}$,

С4.6. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$,

С4.7. $F(p)=\dfrac{4-p}{(p-2)^3}$,

С4.8. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+1)(p+2)}$,

С4.9. $F(p)=\dfrac{p^2}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+9\right)}$,

С4.10. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$,

С4.11. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{p}{3}}}{p\left(p^2+1\right)}$,

С4.12. $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

Ответы.

С4.1. $e^{-2t}\sin t$.

С4.2. $\dfrac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)$.

С4.3. $1-e^{-t}-te^{-t}$

С4.4. $1-2e^{t}+e^{3t}$.

С4.5. $2e^{t}-4t-3$.

С4.6. $e^{-t}\left(1-t^2\right)$.

С4.7. $e^{2t}\left(t^2-t\right)$.

С4.8. $\dfrac{1}{4}\left(2t-3+4e^{-t}-e^{-2t}\right)$.

С4.9. $\dfrac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t)$.

С4.10. $\left(e^{t-1}-1\right)\eta(t-1)$.

С4.11. $\left(1-\cos\left(t-\dfrac{1}{3}\right)\right)\eta\left(t-\dfrac{1}{3}\right)$.

С4.12. $\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}e^{-2t}(4\sin t-3\cos t)$.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Операционное исчисление широко используется для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Функции из пространства оригиналов и операции над ними заменяются функциями и операциями в пространстве изображений, которые оказываются более простыми. Начальные условия учитываются при записи уравнений в изображениях и нет необходимости решать системы уравнений для определения произвольных постоянных, как это делается при применении классических методов. Операционное исчисление можно применять для широкого класса кусочно-непрерывных функций и функций, заданных графически.

Операционное исчисление позволяет находить не только частные решения дифференциальных уравнений и систем, но и общие решения.

Операционное исчисление используется для решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений; для вычисления несобственных интегралов.

Замечание. При решении уравнений (систем) для изображений не следует приводить дроби к общему знаменателю, так как следующий этап (нахождение оригинала) связан с представлением дробей в виде суммы простейших дробей.

4.1. Вычисление некоторых интегралов

Используя преобразование Лапласа можно вычислять некоторые несобственные интегралы.

а) использование определения преобразования Лапласа. Пусть $f(t)$ – функция-оригинал с показателем роста s_0 и $f(t) \mapsto F(p)$, тогда для $a > s_0$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t = F(a); \tag{20}$$

б) использование теоремы об интегрировании оригинала. Пусть $f(t) \mapsto F(p)$ и существует $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$. Так как по теореме об интегрировании оригинала $\int\limits_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{p}F(p)$, то при условии сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ имеет место соотношение

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = F(0); \tag{21}$$

в) использование теоремы об интегрировании изображения.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\infty} F(p)\,\mathrm{d}p, \tag{22}$$

где во втором интеграле интегрирование ведется по положительной полуоси.

Пример 23. Вычислить интегралы:

23.1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2t}\sin 5t\,\mathrm{d}t$, 23.2. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2t}t^3\,\mathrm{d}t$,

23.3. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, 23.4. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t,\ a>0, b>0$.

23.1. Примем $f(t)=\sin 5t$. Функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0 = 0$. Найдем изображение для $f(t)$. $f(t)=\sin 5t \mapsto \dfrac{5}{p^2+25} = F(p)$. Так как искомый интеграл есть преобразование Лапласа функции $f(t)=\sin 5t$ при $p=2$, то по формуле (20) получим

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-2t}\sin 5t\,\mathrm{d}t = F(2) = \frac{5}{2^2+25} = \frac{5}{29}.$$

Если положим $f_1(t) = e^{-2t}\sin 5t$, то $f_1(t) \mapsto \dfrac{5}{(p+2)^2+25} = F_1(p)$.

Использование формулы (21) дает тот же результат

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sin 5t\,\mathrm{d}t = F_1(0) = \frac{5}{(0+2)^2+25} = \frac{5}{29}.$$

23.2. Примем $f(t) = t^3$. Тогда $f(t) = t^3 \mapsto \dfrac{3!}{p^4} = F(p)$ и по формуле (20) получим

$$\int_0^{\infty} e^{-2t}t^3\mathrm{d}t = F(2) = \frac{3!}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

23.3. Примем $f(t) = \sin t$. Тогда $f(t) = \sin t \mapsto \dfrac{1}{p^2+1} = F(p)$ и по формуле (22)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

23.4. Пусть $f(t) = e^{-at} - e^{-bt}$. Тогда $F(p) = \dfrac{1}{p+a} - \dfrac{1}{p+b}$. Для вычисления интеграла используем формулу (22)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b}\right)\mathrm{d}p = \left(\ln|p+a| - \ln|p+b|\right)\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \left(\ln\left|\frac{p+a}{p+b}\right|\right)\Bigg|_0^{\infty} = \ln\frac{b}{a}.$$

4.2. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Операционный метод значительно упрощает вычисления по сравнению со стандартными методами, в частности, при этом особенно эффективен, когда $f(t)$ – разрывная функция.

Пример 24. Решить задачу Коши:

24.1. $x' - x = 1,$
$x(0) = -1,$

24.2. $x'' + x = 2\cos t,$
$x(0) = 0, \quad x'(0) = -1,$

24.3. $x'' + 2x = t + \dfrac{t^3}{3},$
$x(0) = x'(0) = 0,$

24.4. $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t},$
$x(0) = 1, \ x'(0) = 3,$

24.5. $x'' + x' + 6x = 3(\cos 3t - \sin 3t),$
$x(0) = 0, x'(0) = 3,$

24.6. $x''' - x'' - 6x' = 0,$
$x(0) = 15, x'(0) = 2, x''(0) = 56.$

24.1. Пусть функция $x(t)$ имеет изображение $X(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала получим $x'(t) \mapsto pX(p) - x(0) = pX(p) + 1$. Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения. Выпишем получившееся операторное уравнение $pX(p) + 1 - X(p) = \dfrac{1}{p}$. Откуда получим $X(p) = -\dfrac{1}{p}$. Таким образом $x(t) = -1$.

24.2. Перейдем от оригиналов к изображениям

$$x(t) \mapsto X(p), \quad x'(t) \mapsto pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \mapsto p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1, \quad \cos t \mapsto \frac{p}{p^2+1}.$$

Запишем уравнение для изображений

$$p^2 X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1}.$$

Решим уравнение для изображений

$$X(p) = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

По теореме о дифференцировании изображения найдем оригинал первого слагаемого

$$\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2} = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' \leftarrow t\sin t.$$

Следовательно, решение имеет вид

$$x(t) = t\sin t - \sin t = (t-1)\sin t.$$

24.3. Пусть $x(t) \mapsto X(p)$. Перейдем в уравнении к изображениям

$$p^2 X(p) - px(0) - x'(0) + 2X(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{3}\frac{3!}{p^4}.$$

Так как $x(0) = x'(0) = 0$, то

$$\left(p^2+2\right)X = \frac{p^2+2}{p^4}, \quad X(p) = \frac{1}{p^4}.$$

Найдя оригинал по данному изображению, получим решение задачи Коши

$$X(p)=\frac{1}{p^4}=\frac{3!}{3!\,p^4} \leftarrow\!\shortmid\ \frac{t^3}{3!}=\frac{t^3}{6}=x(t).$$

24.4. Перейдем от оригиналов к изображениям

$$x(t)\ \mapsto\ X(p),\quad x'(t)\ \mapsto\ pX(p)-1,$$

$$x''(t)\ \mapsto\ p^2X(p)-p-3,\quad e^{3t}\ \mapsto\ \frac{1}{p-3}.$$

Запишем уравнение для изображений

$$p^2X(p)-p-3-3pX(p)+3+2X(p)=\frac{2}{p-3}.$$

Решим уравнение для изображений

$$\left(p^2-3p+2\right)X(p)=\frac{2}{p-3}+p,$$

$$X(p)=\frac{p^2-3p+2}{(p-3)\left(p^2-3p+2\right)}=\frac{1}{p-3}.$$

Найдем оригинал для функции $X(p)$

$$X(p)=\frac{1}{p-3} \leftarrow\!\shortmid\ e^{3t}=x(t).$$

24.5. Пусть $x(t)\ \mapsto\ X(p)$. Перейдем в уравнении к изображениям

$$p^2X(p)-px(0)-p'(0)+pX(p)-x(0)+6X(p)=$$
$$=3\left(\frac{p}{p^2+9}-\frac{3}{p^2+9}\right).$$

Так как $x(0)=0, \quad x'(0)=3$, получим

$$p^2X(p)-3+pX(p)+6X(p)=\frac{3(p-3)}{p^2+9},$$

$$X(p)=\frac{3}{p^2+9} \leftarrow\!\shortmid \sin 3t = x(t).$$

24.6. Перейдем от оригиналов к изображениям

$$x(t) \mapsto X(p), \quad x'(t) \mapsto pX(p)-15,$$

$$x''(t) \mapsto p^2X(p)-15p-2,$$

$$x'''(t) \mapsto p^3X(p)-15p^2-2p-56.$$

Решим уравнение для изображений

$$\left(p^3-p^2-6p\right)X(p)=15p^2-13p-36, \quad X(p)=\frac{15p^2-13p-36}{p(p-3)(p+2)}.$$

Функция $X(p)$ правильная рациональная несократимая дробь, для которой точки $p_1=0, p_2=3, p_2=-2$ являются простыми полюсами. Так как

$$P(p)=15p^2-13p-36, \quad Q(p)=p^3-p^2-6p,$$
$$Q'(p)=3p^2-2p-6,$$

то, для $p_1=0$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_1=0}=\frac{-36}{-6}=6,$$

для $p_2 = 3$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_2=3} = \frac{60}{15} = 4\,,$$

для $p_3 = -2$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_3=-2} = \frac{50}{10} = 5\,,$$

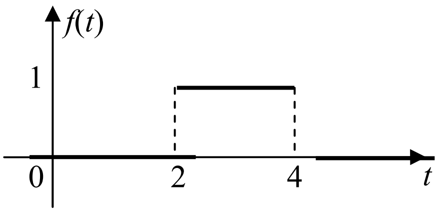
и по второй теореме разложения получим

$$x(t) = 6 + 5e^{-2t} + 4e^{3t}\,.$$

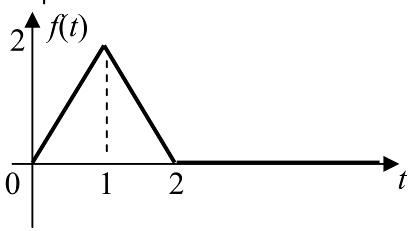
Замечание. Во многих практических задачах правая часть дифференциального уравнения задается графически. В этом случае алгоритм решения не изменяется, а для нахождения изображения оригинала, заданного графиком, используются теорема запаздывания и методы из разд. 2.2.

Пример 25. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения с правой частью, заданной графически:

25.1. $\begin{array}{l} x'' + x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{array}$



25.2. $\begin{array}{l} x'' + 4x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{array}$



25.1. Перейдем от оригиналов к изображениям

$$x(t) \mapsto X(p), \quad x'(t) \mapsto pX(p), \quad x''(t) \mapsto p^2 X(p),$$

$$f(t) = \eta(t-2) - \eta(t-4) \mapsto \frac{1}{p}\left(e^{-2p} - e^{-4p}\right).$$

Решим уравнение для изображений

$$\left(p^2+1\right)X(p) = \frac{1}{p}\left(e^{-2p} - e^{-4p}\right),$$

$$X(p) = \frac{1}{p\left(p^2+4\right)}\left(e^{-2p} - e^{-4p}\right).$$

Так как

$$\frac{1}{p\left(p^2+1\right)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \mapsfrom 1 - \cos t\,,$$

то

$$x(t) = \left(1 - \cos(t-2)\right)\eta(t-2) - \left(1 - \cos(t-4)\right)\eta(t-4).$$

Решение задачи Коши можно представить в аналитическом виде:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 2, \\ 1 - \cos(t-2), & 2 \le t < 4, \\ \cos(t-4) - \cos(t-2), & t \ge 4. \end{cases}$$

25.2. Перейдем от оригиналов к изображениям

$$x(t) \mapsto X(p), \quad x'(t) \mapsto pX(p), \quad x''(t) \mapsto p^2 X(p),$$

$$f(t)=2t\eta(t)-2t\eta(t-1)+(4-2t)\eta(t-1)-(4-2t)\eta(t-2)=$$
$$=2t\eta(t)-4(t-1)\eta(t-1)+2(t-2)\eta(t-2)\mapsto$$
$$\mapsto \frac{2}{p^2}-\frac{4}{p^2}e^{-p}+\frac{2}{p^2}e^{-2p}=\frac{2}{p^2}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right).$$

Решим уравнение для изображений

$$\left(p^2+4\right)X(p)=\frac{2}{p^2}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right),$$

$$X(p)=\frac{2}{p^2\left(p^2+4\right)}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right).$$

Так как

$$\frac{2}{p^2\left(p^2+4\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+4}\right)\leftarrow \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right),$$

то

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin t\right)\eta(t)-\left(t-1-\frac{1}{2}\sin(t-1)\right)\eta(t-1)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(t-2-\frac{1}{2}\sin(t-2)\right)\eta(t-2).$$

Замечание. Если в задаче Коши за начальный момент времени взято $t=t_0\neq 0$, то вводят новую переменную $\tau=t-t_0$. Тогда $\tau=0$ при $t=t_0$.

Пример 26. Решить задачу Коши

26.1. $\begin{array}{l} x''+x=t, \\ x(1)=1, \quad x'(1)=0, \end{array}$

26.2. $\begin{array}{l} x''+x=-2\sin t, \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1. \end{array}$

26.1. Положим $t=\tau+1,\ x(t)=x(\tau+1)=z(\tau)$. Тогда уравнение и начальные условия примут вид

$$z''+z=\tau+1, \quad z(0)=1, \quad z'(0)=0.$$

Перейдем от оригиналов к изображениям

$$z(\tau)\ \mapsto\ Z(p), \quad z'(\tau)\ \mapsto\ pZ(p)-1, \quad z''(\tau)\ \mapsto\ p^2Z(p)-p,$$

$$\tau+1\ \mapsto\ \frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

Запишем уравнение для изображений

$$p^2Z(p)-p+pZ(p)-1=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

Решая операторное уравнение и переходя к оригиналам, получим

$$Z(p)=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p}\ \leftarrow\!\!\shortmid\ 1+\frac{\tau^2}{2}=z(\tau).$$

Возвращаясь к исходной переменной t, получим решение задачи Коши

$$x(t)=1+\frac{(t-1)^2}{2}.$$

26.2. Положим $t=\tau+\dfrac{\pi}{2}, \quad x(t)=x\left(\tau+\dfrac{\pi}{2}\right)=z(\tau)$. Тогда уравнение и начальные условия примут вид

$$z''+z=-2\sin\left(\tau+\frac{\pi}{2}\right), \quad z(0)=0, \quad z'(0)=1.$$

Перейдем от оригиналов к изображениям

$$z(\tau) \mapsto Z(p), \quad z'(\tau) \mapsto pZ(p), \quad z''(\tau) \mapsto p^2 Z(p) - 1,$$

$$-2\sin\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\tau \mapsto \frac{-2p}{p^2+1}.$$

Запишем уравнение для изображений

$$p^2 Z(p) - 1 + Z(p) = \frac{-2p}{p^2+1}.$$

Решим уравнение для изображений

$$Z(p) = \frac{1}{p^2+1} - \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

Переходя к оригиналам получим

$$\frac{1}{p^2+1} \leftarrow\!\!\shortmid \sin\tau, \quad \frac{p}{\left(p^2+1\right)^2} \leftarrow\!\!\shortmid \sin\tau * \cos\tau = \frac{1}{2}\tau\sin\tau,$$

$$z(\tau) = (1-\tau)\sin\tau.$$

Возвращаясь к исходной переменной t, получим решение исходной задачи Коши

$$x(t) = \left(1 - t + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \left(t - 1 - \frac{\pi}{2}\right)\cos t.$$

4.3. Общее решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Операционное исчисление позволяет найти не только частное, но и *общее решение* дифференциального уравнения

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = f(t).$$

Для этого достаточно положить $x^{(k)}(0) = C_k, k = 0, \ldots, n-1$. Решив задачу Коши с произвольными начальными условиями, мы получим общее решение уравнения. Подставляя в полученное общее решение конкретные значения для C_k можно находить решения различных задач Коши для заданного уравнения.

Пример 27. Найти общие решения дифференциальных уравнений

27.1. $x'' + 4x = 0$, 27.2. $x'' - 2x' + x = e^t$.

27.1. Выберем произвольные начальные условия: $x(0) = C_1$, $x'(0) = C_2$. Пусть $x(t) \mapsto X(p)$. Тогда $x'(t) \mapsto pX(p) - C_1$, $x''(t) \mapsto p^2 X(p) - pC_1 - C_2$. Для задачи Коши $x'' + 4x = 0$, $x(0) = C_1$, $x'(0) = C_2$ операторное уравнение иметь вид

$$p^2 X(p) - C_1 p - C_2 + 4X(p) = 0.$$

$$X(p) = \frac{C_1 p + C_2}{p^2 + 4} \leftarrow C_1 \cos 2t + \frac{C_2}{2} \sin 2t = x(t).$$

Решение задачи зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2, является общим решением данного однородного уравнения. Общее решение дифференциального уравнения $x'' + 4x = 0$ можно также записать в виде $x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$, где c_1, c_2 - произвольные постоянные.

27.2. Для задачи Коши $x'' - 2x' + x = e^t$, $x(0) = C_1$, $x'(0) = C_2$ с произвольными начальными данными изображение будет иметь вид

$$\left(p^2 X(p) - C_1 p - C_2\right) - 2\left(pX(p) - C_1\right) + X(p) = \frac{1}{p-1}.$$

$$X(p) = \frac{C_1 p - 2C_1 + C_2}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3} = \frac{C_1(p-1) - C_1 + C_2}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3} \leftarrow\!\!\shortmid$$

$$\leftarrow\!\!\shortmid\ C_1 e^t + (C_2 - C_1) t e^t + \frac{t^2}{2} e^t = x(t).$$

Решение задачи зависит от двух произвольных постоянных, представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения $x_{\text{общ}}(t) = C_1 e^t + (C_2 - C_1) t e^t$ и частного решения $x_{\text{част}}(t) = \frac{t^2}{2} e^t$, следовательно, является общим решением данного неоднородного дифференциального уравнения. Общее решение дифференциального уравнения $x'' - 2x' + x = e^t$ можно записать в виде $x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{t^2}{2} e^t$, где c_1, c_2 - произвольные постоянные.

4.4. Применение интеграла Дюамеля для решения дифференциальных уравнений

В рассмотренных выше примерах изображение от правой части дифференциального уравнения определялось с использованием определения и свойств преобразования Лапласа. Рассмотрим способ решения задачи Коши, применение которого не требует нахождения изображения правой части дифференциального уравнения. В случае, если изображение правой части получается сложным (например, в виде ряда) или его получение невозможно, то задача Коши может быть решена с использованием интеграла Дюамеля

$$pF_1(p)F_2(p) \leftarrow\!\!\shortmid \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau)\,d\tau + f_1(t) f_2(0),$$

где $F_1(p) \leftarrow f_1(t)$, $F_2(p) \leftarrow f_2(t)$.

Пусть требуется найти решение задачи Коши с нулевыми начальными данными для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \tag{23}$$

$$x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0 .$$

Наряду с (23) рассмотрим задачу Коши для такого же уравнения, но с правой частью равной 1.

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n z = 1, \tag{24}$$

$$z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(n-1)}(0) = 0 .$$

Операторные уравнения для (23) и (24) имеют вид

$$A(p)X(p) = F(p), \quad A(p)Z(p) = \frac{1}{p}, \tag{25}$$

где

$$X(p) \leftarrow x(t),\ Z(p) \leftarrow z(t),\ F(p) \leftarrow f(t),$$

$$A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n .$$

Из (25) воспользовавшись формулой Дюамеля получим

$$X(p) = pZ(p)F(p) \leftarrow \int_0^t f(\tau) z'(t-\tau)\mathrm{d}\tau + f(t)z(0) = x(t).$$

С учетом нулевых начальных условий решение задачи Коши (23) будет иметь вид

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)z'(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{26}$$

Замечание. Задача Коши с ненулевыми начальными условиями сводится к задаче Коши с нулевыми начальными условиями простой заменой искомой функции. Так, например, задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$a_0x''+a_1x'+a_2x=f(t),\quad x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_1$$

с помощью замены

$$y(t)=x(t)-x_0-x_1t$$

приводится к задаче Коши с нулевыми начальными условиями

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=f_1(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0\,,$$

где

$$f_1(t)=f(t)-a_1x_1-a_2x_0-a_2x_1t\,.$$

Пример. 28. Решить задачу Коши

28.1. $x'(t)-x(t)=\dfrac{1}{e^t+3}$, $\quad x(0)=0$,

28.3. $x''(t)-x(t)=\dfrac{1}{e^t+1}$, $\quad x(0)=x'(0)=0$,

28.3. $x''(t)-x'(t)=\dfrac{e^{2t}}{\left(1+e^t\right)^2}$, $\quad x(0)=x'(0)=0$,

28.4. $x''(t)+x(t)=\mathrm{tg}\,t$, $\quad x(0)=1,\ x'(0)=2$.

28.1. Решим задачу Коши для уравнения $z'(t)-z(t)=1$, $z(0)=0$. Для этого составим операторное уравнение

$$pZ(p)-Z(p)=\frac{1}{p},\quad Z(p)=\frac{1}{p(p-1)}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\leftarrow e^{t}-1=z(t).$$

Так как $z'(t)=\left(e^{t}-1\right)'=e^{t}$, то по формуле (26) находим

$$x(t)=\int_0^t\frac{e^{t-\tau}}{e^{\tau}+3}\mathrm{d}\tau=e^{t}\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{e^{\tau}\left(e^{\tau}+3\right)}=\frac{e^{t}}{3}\left(\int_0^t e^{-\tau}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{3}\int_0^t\frac{3+e^{\tau}-e^{\tau}}{e^{\tau}+3}\mathrm{d}\tau\right)=$$

$$=\frac{e^{t}}{3}\left(-e^{-\tau}\Big|_0^t-\frac{1}{3}\left(\tau-\ln\left(e^{\tau}+3\right)\right)\Big|_0^t\right)=$$

$$=\frac{e^{t}}{3}\left(-e^{-t}+1-\frac{1}{3}\left(t-\ln\left(e^{t}+3\right)\right)-\frac{1}{3}\ln 4\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{e^{t}}{3}-\frac{1}{9}te^{t}+\frac{1}{9}e^{t}\ln\frac{e^{t}+3}{4}.$$

28.2. Решим задачу Коши для уравнения $z''(t)-z(t)=1$, $z(0)=z'(0)=0$. Для этого составим операторное уравнение

$$p^2Z(p)-Z(p)=\frac{1}{p},\quad Z(p)=\frac{1}{p\left(p^2-1\right)}=\frac{p}{p^2-1}-\frac{1}{p}\leftarrow$$

$$\operatorname{ch}t-1=z(t).$$

Так как $z'(t)=(\operatorname{ch}t-1)'=\operatorname{sh}t$, то по формуле (26) находим

$$x(t)=\int_0^t\frac{1}{1+e^{\tau}}\operatorname{sh}(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{e^{t-\tau}-e^{-t+\tau}}{1+e^{\tau}}\mathrm{d}\tau=$$

$$=\frac{e^{t}}{2}\int_0^t\frac{e^{-\tau}}{1+e^{\tau}}\mathrm{d}\tau-\frac{e^{-t}}{2}\int_0^t\frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}}\mathrm{d}\tau.$$

Так как

$$\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1+e^{\tau}}\mathrm{d}\tau = -\int_0^t \frac{e^{-\tau}\mathrm{d}e^{-\tau}}{1+e^{-\tau}} = -\int_0^t \frac{e^{-\tau}+1-1}{1+e^{-\tau}}\mathrm{d}e^{-\tau} =$$

$$= -e^{-\tau}\Big|_0^t + \ln\left(1+e^{-\tau}\right)\Big|_0^t = -\left(e^{-t}-1\right) + \ln\frac{1+e^{-t}}{2},$$

$$\int_0^t \frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}}d\tau = \ln\left(1+e^{t}\right) - \ln 2 = \ln\frac{1+e^{t}}{2}$$

то

$$x(t) = \frac{e^{t}}{2}\ln\frac{1+e^{-t}}{2} - \frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{1+e^{t}}{2} - \frac{e^{t}}{2}\left(e^{-t}-1\right).$$

28.3. Решим задачу Коши для уравнения $z''(t) - z'(t) = 1$, $z(0) = z'(0) = 0$. Для этого составим операторное уравнение

$$p^2 Z(p) - pZ(p) = \frac{1}{p}, \quad Z(p) = \frac{1}{p^2(p-1)} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1} \leftarrow$$

$$-1 - t + e^{t} = z(t).$$

Так как $z'(t) = \left(-1-t+e^{t}\right)' = -1+e^{t}$, то по формуле (26) находим

$$x(t) = \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{\left(1+e^{\tau}\right)^2}\left(-1+e^{t-\tau}\right)\mathrm{d}\tau = -\int_0^t \frac{e^{2\tau}}{\left(1+e^{\tau}\right)^2}\mathrm{d}\tau + e^{t}\int_0^t \frac{e^{\tau}}{\left(1+e^{\tau}\right)^2}\mathrm{d}\tau =$$

$$= -\int_0^t \frac{e^{\tau}+1-1}{\left(1+e^{\tau}\right)^2}\mathrm{d}\left(1+e^{\tau}\right) + e^{t}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\left(1+e^{\tau}\right)}{\left(1+e^{\tau}\right)^2} =$$

$$= -\ln\left(1+e^{\tau}\right)\Big|_0^t - \frac{1}{1+e^{\tau}}\Big|_0^t - e^{t}\frac{1}{1+e^{\tau}}\Big|_0^t =$$

$$= -\ln\left(1+e^{t}\right) + \ln 2 - \frac{1}{1+e^{t}} + \frac{1}{2} + e^{t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{t}}\right) = -\ln\frac{1+e^{t}}{2} + \frac{1}{2}\left(e^{t}-1\right).$$

28.4. Функция $\operatorname{tg} t$ не является оригиналом (имеет разрывы второго рода), поэтому найти ее изображение невозможно. Решаем задачу с $f(t)=1$ и однородными начальными условиями:

$$z''(t)+z(t)=1,\ \ z(0)=0,\ \ z'(0)=0\,.$$

$$p^2 Z(p)+Z(p)=\frac{1}{p},\quad Z(p)=\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\ \leftarrow\!\!\dashv$$

$$1-\cos t=z(t)\,.$$

Так как $z'(t)=(1-\cos t)'=\sin t$, то по формуле (26) находим решение задачи с $f(t)=\operatorname{tg} t$ и нулевыми начальными условиями:

$$x(t)=\int_0^t \operatorname{tg}\tau\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t \frac{\sin\tau(\sin t\cos\tau-\cos t\sin\tau)}{\cos\tau}\mathrm{d}\tau=$$

$$=\sin t\int_0^t \sin\tau d\tau-\cos t\int_0^t\frac{\sin^2\tau}{\cos\tau}\mathrm{d}\tau=-\sin t\cos\tau\Big|_0^t-\cos t\int_0^t\frac{1-\cos^2\tau}{\cos\tau}\mathrm{d}\tau=$$

$$=-\sin t\cos\tau\Big|_0^t-\cos t\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)\right|-\sin\tau\right)\Bigg|_0^t=$$

$$=-\sin t\cos t+\sin t-\cos t\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\right|+\cos t\sin t=$$

$$=\sin t-\cos t\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\right|.$$

Наконец, решаем однородное уравнение с заданными начальными условиями:

$$x''(t)+x(t)=0,\ \ x(0)=1,\ \ x'(0)=2\,.$$

$$p^2X(p)-p-2+X(p)=0,$$

$$X(p)=\frac{p+2}{p^2+1}=\frac{p}{p^2+1}+\frac{2}{p^2+1}\ \leftarrow\!\!\dashv\ \cos t+2\sin t\,.$$

Решение исходной задачи – сумма двух последних функций (решения неоднородного уравнения с нулевыми начальными данными и решения однородного уравнения с ненулевыми начальными данными):

$$x(t) = 3\sin t + \cos t - \cos t \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right|.$$

4.5. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пример 29. Решить системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями:

29.1. $\begin{cases} x' + y = 2e^t, \\ y' + x = 2e^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1,$

29.2. $\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t, \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = y'(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

29.1. Пусть $x(t) \mapsto X(p)$ и $y(t) \mapsto Y(p)$. Учитывая, что

$$x'(t) \mapsto pX - x(0) = pX(p) - 1, \quad y'(t) \mapsto pY(p) - y(0) = pY - 1,$$

$$e^t \mapsto \frac{1}{p-1}$$

получим операторную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + Y(p) = \dfrac{2}{p-1}, \\ pY(p) - 1 + X(p) = \dfrac{2}{p-1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pX(p) + Y(p) = \dfrac{p+1}{p-1}, \\ pY(p) + X(p) = \dfrac{p+1}{p-1}. \end{cases}$$

Решая систему, получим $X(p) = Y(p) = \dfrac{1}{p-1}$. Воспользовавшись таблицей изображений, найдем $x(t) = y(t) = e^t$.

29.2. Имеем

$$x(t) \mapsto X(p), \quad x'(t) \mapsto pX(p)-x(0)=pX(p),$$

$$x''(t) \mapsto p^2X(p)-x'(0)=pX(p)-1,$$

$$y(t) \mapsto Y(p), \quad y'(t) \mapsto pY(p)-y(0)=pY(p),$$

$$y''(t) \mapsto p^2Y(p)-y'(0)=p^2Y,$$

$$e^t \mapsto \frac{1}{p-1}, \quad e^{-t} \mapsto \frac{1}{p+1}.$$

Запишем систему операторных уравнений

$$\begin{cases} p^2X-1+pX+p^2Y-Y=\dfrac{1}{p-1}, \\ pX+2X-pY+Y=\dfrac{1}{p+1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(p^2+p\right)X+\left(p^2-1\right)Y=\dfrac{p}{p-1}, \\ (p+2)X+(1-p)Y=\dfrac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений относительно X и Y по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p^2+p & p^2-1 \\ p+2 & 1-p \end{vmatrix}=p(p+1)(1-p)-(p+2)\left(p^2-1\right)=$$

$$=2(1+p)^2(1-p),$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} \dfrac{p}{p-1} & p^2-1 \\ \dfrac{1}{p+1} & 1-p \end{vmatrix}=1-2p, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} p^2+p & \dfrac{p}{p-1} \\ p+2 & \dfrac{1}{p+1} \end{vmatrix}=\frac{3p}{1-p}.$$

Таким образом

$$X(p)=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{1-2p}{2(p+1)^2(1-p)}=\frac{1}{8}\frac{1}{p-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{8}\frac{1}{p+1},$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{3p}{2(p+1)^2(1-p)^2}=\frac{3p}{2\left(p^2-1\right)^2}.$$

Перейдем к оригиналам. Так как $e^t \mapsto \frac{1}{p+1}$ и $\operatorname{sh} t \mapsto \frac{1}{p^2-1}$, то по теореме дифференцирования изображения находим

$$\left(\frac{1}{p^2-1}\right)'=-\frac{2p}{\left(p^2-1\right)^2} \leftarrow\!\mapsfrom -te^{-t},\ \left(\frac{1}{p^2-1}\right)'=-\frac{2p}{\left(p^2-1\right)^2} \leftarrow\!\mapsfrom -t\operatorname{sh} t.$$

Следовательно, решением системы будет

$$x(t)=\frac{1}{4}\operatorname{sh} t+\frac{3}{4}te^{-t},\quad y(t)=\frac{3}{4}t\operatorname{sh} t.$$

4.6. Задачи для самостоятельного решения

С5. Вычислить интегралы

С5.1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2t}\sin 3t\cos 2t\,\mathrm{d}t$, С5.2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\sin at}{t}\mathrm{d}t,\quad \alpha>0, a>0$,

С5.3. $\int\limits_0^{+\infty} t^2 e^{-at}\,\mathrm{d}t, a>0$, С5.4. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3t}t\cos t\,\mathrm{d}t$.

Ответы. **С5.1.** $\frac{27}{145}$. **С5.2.** $\operatorname{arcctg}\frac{\alpha}{a}$. **С5.3.** $\frac{2}{a^3}$. **С5.4.** $\frac{2}{25}$.

С6. Решить задачу Коши

С6.1. $x' + x = e^t$, $x(0) = 0$,

С6.2. $x' - 2x = 0$, $x(0) = 1$,

С6.3. $x'' + x' - 2x = e^t$, $x(0) = -1, \quad x'(0) = 0$,

С6.4. $x''' + x' = e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$,

С6.5. $x''' - x'' = 4e^{2t}$, $x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 4$,

С6.6. $x'' + 2x' + 10x = \sin 3t + 6\cos 3t$, $x(0) = x'(0) = 1$,

С6.7. $x'' + x = 0$, $x(\pi) = 1,\ x'(\pi) = 0$,

С6.8. $x'' + x = 2\cos t$, $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\ x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$,

С6.9. $x'' + x' = \cos t$, $x(0) = -1, \quad x'(0) = 1$,

С6.10. $x'' + x' = te^t + 4\sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Ответы.

С6.1. $\dfrac{1}{2}\operatorname{sh} t$. **С6.2.** e^{2t}. **С6.3.** $-\dfrac{2}{9}e^{-2t} - \dfrac{7}{9}e^t + \dfrac{1}{3}te^t$.

С6.4. $\dfrac{1}{10}e^{2t} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5}\cos t - \dfrac{1}{5}\sin t$. **С6.5.** e^{2t}.

С6.6. $e^{-t}\cos 3t - e^{-t}\sin 3t + \sin 3t$. **С6.7.** $-\cos t$.

С6.8. $\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin t$. **С6.9.** $\left(\dfrac{t}{2} + 1\right)\sin t - \cos t$.

С6.10. $\dfrac{1}{2}(t-1)e^t + \dfrac{1}{2}\cos t + 2(\sin t - t\cos t)$.

С7. Решить задачу Коши (интеграл Дюамеля)

С7.1. $x''(t) = \operatorname{arctg} t$, $x(0) = x'(0) = 0$,

С7.2. $x''(t) - x'(t) = \dfrac{1}{1+e^t} + 2$, $x(0) = 1,\ x'(0) = -2$.

Ответы.

C7.1. $\dfrac{t^2-1}{2}\operatorname{arctg} t-\dfrac{t}{2}\ln\left(1+t^2\right)+\dfrac{t}{2}$.

C7.2. $\left(e^t+1\right)\left(\ln\dfrac{e^t+1}{2}-t\right)+e^t-2t$.

C8. Найти общие решения дифференциальных уравнений

C8.1. $x''+2x'+x=1$, C8.2. $x''-2x'+10x=2e^{-t}\cos 3t$,

C8.3. $x''+x'-2x=3e^t$, C8.4. $x'''+x'=2$.

Ответы.

C8.1. $c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+1$. **C8.2.** $e^{-t}\left(c_1\cos 3t+\dfrac{c_2+t}{3}\sin 3t\right)$.

C8.3. $c_1e^{-2t}+c_2e^t+te^t$. **C8.4.** $c_1\cos t+c_2\sin t+c_3t+2t$.

C9. Решить системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями:

C9.1. $\begin{cases} x'+x=y+e^t, \\ y'+y=x+e^t, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=1,$

C9.2. $\begin{cases} x'=-y, \\ y'=2x+2y, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=1,$

C9.3. $\begin{cases} x'=2y, \\ y'=2x, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=2,$

C9.4. $\begin{cases} x'=3x+4y, \\ y'=4x-3y, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=1,$

C9.5. $\begin{cases} x'+y=0, \\ y'-2x-2y=0, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=1,$

C9.6. $\begin{cases} x'+3x+y=e^{-t}, \\ y'-x+y=e^{-2t}, \end{cases}$ $x(0)=-1,\ y(0)=-2.$

Ответы.

C9.1. $x(t)=e^{t}$, $y(t)=e^{t}$.

C9.2. $x(t)=e^{t}(\cos t-2\sin t)$, $y(t)=e^{t}(\cos t+3\sin t)$.

C9.3. $x(t)=y(t)=2e^{2t}$.

C9.4. $x(t)=\frac{6}{5}e^{5t}-\frac{1}{5}e^{-5t}$, $y(t)=\frac{3}{5}e^{5t}+\frac{2}{5}e^{-5t}$.

C9.5. $x(t)=e^{t}(\cos t-2\sin t)$, $y(t)=e^{t}(\cos t+3\sin t)$.

C9.6. $x(t)=e^{-2t}\left(-1+4t-\frac{1}{2}t^{2}\right)$, $y(t)=e^{-2t}\left(-3-3t+\frac{1}{2}t^{2}\right)+e^{-t}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица свойств преобразования Лапласа

	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$	Примечания
1	$f(t)$	$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$	преобразование Лапласа
2	$f(\lambda t),\ \lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$	теорема подобия
3	$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$	теорема смещения
4	$f(t-\tau)$, $\tau>0,\quad \tau-\mathrm{const}$	$e^{-\tau p}F(p)$	теорема запаздывания
5	$f(t+\tau)$, $\tau>0,\ \tau-\mathrm{const}$	$e^{p\tau}\left(F(p)-\int\limits_0^{\tau} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t\right)$	теорема опережения
6	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$	дифференцирование оригинала
7	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-$ $-\sum\limits_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1}f^{(k)}(0)$	дифференцирование оригинала
8	$\int\limits_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{p}F(p)$	интегрирование оригинала
9	$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^nF(p)}{\mathrm{d}p^n}$	дифференцирование изображения
10	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^{\infty} F(p)\mathrm{d}p$	интегрирование изображения
11	$f_1(t)*f_2(t)=$ $=\int\limits_0^{\tau} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$F_1(p)F_2(p)$	умножение изображений (теорема Бореля)
12	$\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)\mathrm{d}\tau+$ $f_1(t)f_2(0)$	$pF_1(p)F_2(p)$	интеграл Дюамеля

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учебное пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М.: Наука, 1981. – 304 с.

2. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.]; под ред. С. Н. Федина. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.

3. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – М.: Высшая школа, 2001. – 445 с.

4. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математики. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятности. Математическая статистика: в 4 частях / А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – Ч. 4. – 338 с.

5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. – Т. 2. – 544 с.

6. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 т. / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2004. – Т. 2. – 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КОРЗНИКОВ Александр Дмитриевич
КОРОЛЕВА Ольга Михайловна

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-43 01 01 «Электрические станции»,
1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети»,
1-43 01 03 «Электроснабжение (по отраслям)»,
1-43 01 04 «Тепловые электрические станции»,
1-43 01 05 «Промышленная теплоэнергетика»,
1-43 01 08 «Паротурбинные установки
атомных электрических станций»,
1-43 01 09 «Релейная защита и автоматика»

Редактор *В. И. Акуленок*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 05.02.2020. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 5,00. Уч.-изд. л. 3,91. Тираж 200. Заказ 177.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.