3. Если CI изменяется в пределах $]0; +\infty)$, то $T_c > T_s$. Возможно пренебрежение процессами обмена с внешней средой, так как внутренние процессы являются преобладающими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимович Л. С., Гургенидзе И. И. Энергоемкость производства сельскохозяйственной продукции // Вопросы агроэнергетики: Сб. науч. трудов / Под ред. Е. М. Зайца. – Мн.: УП «Технопринт», 2001. – 239 с.
2. Зайцева Н. К., Гаркуша К. Э. Модель энергетических потоков в животноводческих комплексах // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2002. – № 2. – С. 85–89.
3. Фельдман О. В. Потоковые модели агроэкосистем // Математическое моделирование. – 1999. – Т. 11. – № 10. – С. 31–48.
4. Finn J. T. Measures of ecosystem structure and function derived from analysis of flows // J. Theor. Biol. – 1976. – V. 56. – P. 363–380.
5. Денисенко Е. А. Механизмы функционирования и структурной организации агросистем. – М.: Ин-т геол. АН РФ, 1990.

Представлена кафедрой
энергетики

Поступила 1.07.2002

УДК 518:517.392

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ

Канд. физ.-мат. наук, доц. ЛАСЫЙ П. Г.

Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим классическую смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа в круге радиусом $R > 0$:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left(r(ru'_r)'_r + u''_{\varphi\varphi}\right) = 0; \qquad (1)$$

$$\left(u'_r + \alpha u\right)\Big|_{r=R} = f(\varphi), \qquad (2)$$

где $R \ni \alpha > 0$, а граничную функцию $f(\varphi)$ мы будем предполагать кусочно-монотонной и удовлетворяющей условию Липшица на отрезке $[-\pi, \; \pi]$

(липшициевость функции означает, что существует положительная постоянная L такая, что $|f(\varphi_1)-f(\varphi_2)|\le L|\varphi_1-\varphi_2|,\ \ \varphi_1,\varphi_2\in[-\pi,\ \pi]$).

Задача (1), (2) весьма часто используется в приложениях, она возникает, в частности, при исследовании различных процессов стационарного тепло- и массообмена.

Наряду с классическими аналитическими и численными методами решения этой задачи в последнее время разрабатываются достаточно эффективные приближенные аналитические методы, основанные на использовании специальных функций – полилогарифмов [1, 2] – и их обобщения – λ-полилогарифмов [3]. В работе [4] было найдено довольно громоздкое приближенное решение данной задачи, выражающееся через полилогарифмы при дополнительном условии $\alpha<\dfrac{1}{R}$. В статье [3] указанное ограничение было снято за счет введения λ-полилогарифмов, являющихся обобщением полилогарифмов, причем удалось значительно упростить структуру приближенного решения и повысить порядок его точности.

Целью настоящей работы является представление приближенного решения данной задачи через степенные и логарифмические функции, что позволяет получить в определенном смысле «элементарное» решение задачи (1), (2).

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующим приближенным решением задачи (1), (2), полученным в [3, теорема 1]:

$$u_n(r,\varphi,\lambda)=\frac{R}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}f(\varphi_m+h/2)\left(\frac{h}{2\lambda}+\operatorname{Im}\left(L_\lambda^2\left(\frac{r}{R}e^{i(\varphi_{m+1}-\varphi)}\right)-L_\lambda^2\left(\frac{r}{R}e^{i(\varphi_m-\varphi)}\right)\right)\right),$$

где

$$\lambda=\alpha R\ ;\ h=\frac{2\pi}{n};\ \varphi_m=-\pi+mh\,,$$

а функция $L_\lambda^2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{z^k}{k(k+\lambda)}$ является λ-дилогарифмом [3], причем допускаемая при этом погрешность вычислений имеет равномерно в круге $r\le R$ порядок малости $O(h^\gamma)$; $\gamma\in(0,1)$ относительно шага h.

Будем использовать рациональные аппроксимации параметра λ, т. е. рациональные $\lambda_Q=\dfrac{\mu}{\nu}\approx\lambda$. В [3] доказано, что $L_{\lambda_Q}^2(z)$ является элементарной функцией, а именно:

$$L_{\lambda_Q}^2(z)=\frac{\nu}{\mu}\left(-\ln(1-z)+z^{-\frac{\mu}{\nu}}\left(\nu z^{\frac{t+1}{\nu}}\sum_{k=0}^{s}\frac{z^k}{k\nu+t+1}+\sum_{k=0}^{\nu-1}\tau_k^{t-\nu+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt[\nu]{z}}{\tau_k}\right)\right)\right),\quad(3)$$

где

$s=\left[\frac{\mu-1}{\nu}\right]$, $t=\mu-1-s\nu$, $\tau_k=e^{\frac{2\pi k}{\nu}i}$ $(k=\overline{0,\nu-1})$ – корни степени ν из единицы.

Аппроксимируем точное решение $u(r,\varphi,\lambda)$ задачи (1), (2) элементарной функцией $u_n(r,\ \varphi,\ \lambda_Q)$ и оценим погрешность аппроксимации.

Так как [3, формула (10)]

$$u(r,\varphi,\lambda)=\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)\left(\frac{1}{2\lambda}+\operatorname{Re}L_\lambda^1\left(\frac{r}{R}e^{i(\phi-\varphi)}\right)\right)d\phi,$$

для любых положительных λ_1, λ_2

$$|u(r,\varphi,\lambda_1)-u(r,\varphi,\lambda_2)|\le\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\phi)|\left(\left|\frac{1}{2\lambda_1}-\frac{1}{2\lambda_2}\right|+\left|L_{\lambda_1}^1\left(\frac{r}{R}e^{i(\phi-\varphi)}\right)-L_{\lambda_2}^1\left(\frac{r}{R}e^{i(\phi-\varphi)}\right)\right|\right)d\phi,$$

откуда, использовав неравенство

$$\left|L_{\lambda_1}^1(z)-L_{\lambda_2}^1(z)\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z^k}{k+\lambda_1}-\frac{z^k}{k+\lambda_2}\right)\right|\le|\lambda_1-\lambda_2|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}|\lambda_1-\lambda_2|,$$

получим

$$|u(r,\varphi,\lambda_1)-u(r,\varphi,\lambda_2)|\le R\tilde{f}\left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{\pi^2}{3}\right)|\lambda_1-\lambda_2|, \tag{4}$$

где

$$\tilde{f}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\phi)|d\phi$$

– среднее значение функции $f(\varphi)$ на отрезке $[-\pi,\ \pi]$.

Теперь приступим к оценке погрешности аппроксимации $u(r,\varphi,\lambda)\approx u_n(r,\varphi,\lambda_Q)$. Так как

$$|u(r,\varphi,\lambda)-u_n(r,\varphi,\lambda_Q)|\le|u(r,\varphi,\lambda)-u(r,\varphi,\lambda_Q)|+|u(r,\varphi,\lambda_Q)-u_n(r,\varphi,\lambda_Q)|,$$

то, воспользовавшись неравенством (4) и неравенством [3, теорема 1]:

$$|u(r,\varphi,\lambda_Q)-u_n(r,\varphi,\lambda_Q)|\le R\left(A_\gamma\lambda_Q+B_\gamma+\frac{C_\gamma}{\lambda_Q}\right)h^\gamma,$$

где $A_\gamma, B_\gamma, C_\gamma$ – положительные постоянные, зависящие лишь от $\gamma \in (0,1)$, можем записать:

$$\left|u(r,\varphi,\lambda)-u_n(r,\varphi,\lambda_Q)\right| \le R\left(\tilde{f}\left(\frac{1}{\lambda\lambda_Q}+\frac{\pi^2}{3}\right)\left|\lambda_Q-\lambda\right|+\left(A_\gamma\lambda_Q+B_\gamma+\frac{C_\gamma}{\lambda_Q}\right)h^\gamma\right).$$

Сформулируем полученный результат в виде следующего утверждения.

Теорема. *Приближенное решение краевой задачи (1), (2) выражается формулой*

$$u_n(r,\varphi,\lambda_Q)=\frac{R}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1} f(\varphi_m+h/2)\left(\frac{h}{2\lambda_Q}+\mathrm{Im}\left(L^2_{\lambda_Q}\left(\frac{r}{R}e^{i(\varphi_{m+1}-\varphi)}\right)-L^2_{\lambda_Q}\left(\frac{r}{R}e^{i(\varphi_m-\varphi)}\right)\right)\right) \tag{5}$$

и, следовательно, при рациональном λ_Q вычисляется через степенные и логарифмические функции (формула (3)), причем

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda_Q\to\lambda}} u_n(r,\varphi,\lambda_Q)=u(r,\varphi,\lambda)$$

равномерно в круге $r\le R$ и при $\left|\lambda_Q-\lambda\right|\le h^\gamma$ также равномерно, погрешность аппроксимации имеет порядок малости $O(h^\gamma)$, $\gamma\in(0,1)$ относительно шага h.

В заключение приведем пример приближенного решения задачи (1), (2) по формуле (5) с краевым условием

$$u'_r(\sqrt{2},\varphi,\lambda)+\pi u(\sqrt{2},\varphi,\lambda)=$$

$$=2^{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\,(1+\cos\varphi)^{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}\left(\pi\cos\frac{(\sqrt{2}-1)\varphi}{2}+(1+\pi)\cos\frac{(\sqrt{2}+1)\varphi}{2}\right),$$

где $\lambda=\pi\sqrt{2}$.

Точным решением этой задачи является функция

$$u(r,\varphi,\lambda)=(r^2+2\sqrt{2}\cos\varphi+2)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{2}+r\cos\varphi}\right).$$

Выбрав в качестве приближенного значения параметра λ рациональное число $\lambda_Q=\dfrac{111}{25}$, получим при $n=60$:

Таблица 1

r	$u(r, 0, \lambda)$	$u_{60}(r, 0, \lambda_Q)$	$u\left(r, \frac{\pi}{4}, \lambda\right)$	$u_{60}\left(r, \frac{\pi}{4}, \lambda_Q\right)$	$u\left(r, \frac{\pi}{2}, \lambda\right)$	$u_{60}\left(r, \frac{\pi}{2}, \lambda_Q\right)$
0,0	1,63253	1,63322	1,63253	1,63322	1,63253	1,63322
0,141421	1,86809	1,86885	1,79584	1,79659	1,62775	1,62846
0,282843	2,11271	2,11351	1,95951	1,9603	1,61346	1,6142
0,424264	2,36592	2,36676	2,1238	2,12465	1,58978	1,59058
0,565685	2,62734	2,62819	2,28895	2,28984	1,55693	1,55779
0,707107	2,89662	2,89747	2,45513	2,45605	1,51514	1,51609
0,848528	3,17343	3,17428	2,62247	2,62343	1,46473	1,46578
0,989949	3,45752	3,45835	2,7911	2,79208	1,40601	1,40716
1,13137	3,74861	3,74942	2,96109	2,96209	1,33932	1,34058
1,27279	4,04648	4,04725	3,13251	3,13353	1,265	1,26637
$\sqrt{2}$	4,35092	4,35122	3,30541	3,3066	1,18337	1,18505

Анализ таблицы позволяет утверждать, что уже при сравнительно небольших значениях n приближенная формула (5) дает возможность получить достаточно хорошую аппроксимацию решения поставленной краевой задачи.

Замечание. Для вычислений использовалась программа, написанная в среде компьютерной алгебры Mathematica 4.0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пыхтеев Г. Н., Мелешко И. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления. – Мн.: Изд-во БГУ, 1976. – 68 с.

2. Мелешко И. Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения. – Мн.: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. – 197 с.

3. Ласый П. Г., Мелешко И. Н. Применение λ-полилогарифмов к приближенному решению третьей краевой задачи для уравнения Лапласа // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 2. – С. 30–36.

4. Ласый П. Г., Мелешко И. Н. Об одном представлении решения третьей краевой задачи теории теплопроводности с помощью полилогарифмов // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2000. – № 2. – С. 42–49.

Представлена кафедрой
высшей математики № 2

Поступила 10.06.2002