

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АД С ВСТРАИВАЕМЫМ КОМБИНИРОВАННЫМ ТОРМОЗНЫМ УСТРОЙСТВОМ

Кандидаты техн. наук, доценты СОЛЕНКОВ В. В., БРЕЛЬ В. В.

*Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого*

Как известно, точное аналитическое исследование картины электро-механического преобразования энергии в реальной электрической машине практически не удастся. Этому препятствуют сложность и многообразие процессов и связей в ней. Поэтому на практике рассматривают так называемую идеализированную электрическую машину, для которой обычно принимаются следующие допущения [1]:

1) магнитная цепь ненасыщена, энергия магнитного поля сосредоточена в воздушном зазоре;

2) механические потери и потери в стали пренебрежимо малы (не учитываются потери трения в подшипниках, явления гистерезиса и вихревых токов);

3) распределение МДС и индукции в пространстве синусоидально (не учитываются высшие гармоники, создаваемые обмотками реальной машины);

4) воздушный зазор равномерен;

5) энергия электростатического поля невелика (не учитывается влияние емкостей внутри обмоток и между ними);

6) активные сопротивления и индуктивности рассеяния обмоток статора, а также максимальные значения взаимоиндуктивностей между любыми обмотками статора и ротора неизменны в течение исследуемых процессов.

Несмотря на определенные упрощения, такой подход позволяет с достаточной для инженерной практики точностью описать поведение электро-механических устройств в различных режимах работы.

**Основная часть исследования.** Учитывая изложенное выше, перечисленные допущения использовали при математическом описании переходных процессов в асинхронных двигателях с встраиваемыми комбинированными тормозными устройствами (АД с ВКТУ) [2, 3]. Исследуемая модель АД с ВКТУ, выполненная на базе трехфазного АД с короткозамкнутым ротором, приведена на рис. 1. Пунктиром условно показано последовательное включение обмотки силового растормаживающего электромагнита с одной из фазных обмоток базового двигателя (в данном случае – с обмоткой фазы *A*). Последовательное включение обмотки электромагнита используется для исследования переходных процессов при несимметричных схемах управления силовым электромагнитом.

Короткозамкнутая обмотка ротора представлена двумя сосредоточенными обмотками, магнитные оси которых совпадают с ортогональными осями *d* и *q*, жестко связанными с ротором. Подобная замена, согласно [4], не вызывает затруднений при определении связи между расчетными параметрами, используемыми в теории установившегося режима, и параметрами, применяемыми при исследовании переходных процессов.

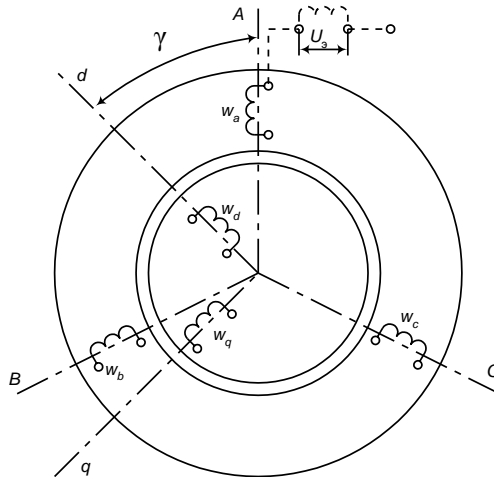


Рис. 1. Модель АД с ВКТУ в непреобразованной системе координат

Дополнительно было принято, что:

- фазные обмотки статора базового двигателя симметричны, т. е. имеют одинаковое число витков, одинаковые активные сопротивления, самоиндуктивности и взаимный сдвиг магнитных осей;
- питание осуществляется от сети бесконечно большой мощности (при этом процессы, происходящие в тормозном электродвигателе, не оказывают влияния на сеть);
- напряжения фаз  $A$ ,  $B$  и  $C$  сети синусоидальны и симметричны, т. е.

$$\left. \begin{aligned} u_A &= U_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0); \\ u_B &= U_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0 - 120^\circ); \\ u_C &= U_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0 + 120^\circ), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $U_m$  – амплитудное значение фазных напряжений;  $\omega_0$  – угловая частота сети;  $\alpha_0$  – начальная фаза напряжения  $u_A$ .

С учетом принятых допущений переходные процессы в АД с ВКТУ могут быть описаны системой дифференциальных уравнений, содержащей в общем случае три типа уравнений: уравнения электрического равновесия, составленные для контуров каждой из обмоток по второму закону Кирхгофа; уравнения моментов (его называют также уравнением движения ротора или уравнением механического равновесия) и уравнения преобразования электромагнитной энергии в механическую.

Уравнения электрического равновесия для фаз  $A$ ,  $B$  и  $C$  статора исследуемого АД с ВКТУ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u_A &= \frac{d\psi_A}{dt} + r_1 i_A + u_3; \\ u_B &= \frac{d\psi_B}{dt} + r_1 i_B; \\ u_C &= \frac{d\psi_C}{dt} + r_1 i_C. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Соответственно для эквивалентных обмоток ротора  $d$  и  $q$  можно записать:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{d\psi_d}{dt} + r_2 i_d; \\ 0 &= \frac{d\psi_q}{dt} + r_2 i_q. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

При этом потокосцепления фазных обмоток статора  $\psi_A$ ,  $\psi_B$ ,  $\psi_C$  и эквивалентных обмоток ротора  $\psi_d$  и  $\psi_q$  определяются по соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \psi_A &= (L_1 - M_1)i_A + M_{12}i_d \cos \gamma - M_{12}i_q \sin \gamma; \\ \psi_B &= (L_1 - M_1)i_B + M_{12}i_d \cos(\gamma - 120^\circ) - M_{12}i_q \sin(\gamma - 120^\circ); \\ \psi_C &= (L_1 - M_1)i_C + M_{12}i_d \cos(\gamma + 120^\circ) - M_{12}i_q \sin(\gamma + 120^\circ); \\ \psi_d &= L_2 i_d + M_{12} \left[ i_A \cos \gamma + i_B \cos(\gamma - 120^\circ) + i_C \cos(\gamma + 120^\circ) \right]; \\ \psi_q &= L_2 i_q + M_{12} \left[ i_A \sin \gamma + i_B \sin(\gamma - 120^\circ) + i_C \sin(\gamma + 120^\circ) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В выражениях (2)–(4) использованы следующие обозначения:  $r_1 = r_A = r_B = r_C$  – активное сопротивление фазы статора;  $r_2 = r_d = r_q$  – активное сопротивление одной из эквивалентных обмоток ротора;  $L_1 = L_A = L_B = L_C$  – полная индуктивность фазы статора;  $L_2 = L_d = L_q$  – полная индуктивность одной из эквивалентных обмоток ротора;  $M_1 = M_{AB} = M_{BC} = M_{CA}$  – взаимоиндуктивности между любыми двумя обмотками статора;  $M_{12} = M_{Ad} = M_{Bd} = \dots$  – максимальная величина взаимоиндуктивности между любой обмоткой статора и любой эквивалентной обмоткой ротора;  $u_3$  – мгновенное значение напряжения на зажимах электромагнита;  $i$  – ток в фазной обмотке статора или в эквивалентной обмотке ротора;  $\gamma$  – угол поворота между магнитными осями обмоток статора и ротора (рис. 1).

Отметим, что в рассматриваемом случае включения растормаживающего электромагнита последовательно с одной из обмоток статора фазные напряжения, токи и потокосцепления обмоток базового электродвигателя становятся несимметричными. Однако линейные напряжения при условии сети бесконечно большой мощности остаются по-прежнему симметричными. Учитывая это, а также соотношения (2), уравнения равновесия относительно линейных напряжений  $u_{AB}$ ,  $u_{BC}$  и  $u_{CA}$  можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u_{AB} &= \frac{d(\psi_A - \psi_B)}{dt} + r_1(i_A - i_B) + u_3; \\ u_{BC} &= \frac{d(\psi_B - \psi_C)}{dt} + r_1(i_B - i_C); \\ u_{CA} &= \frac{d(\psi_C - \psi_A)}{dt} + r_1(i_C - i_A) - u_3, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где с учетом (1):

$$\left. \begin{aligned} u_{AB} &= U_m \sqrt{3} \sin(\omega_0 t + \alpha_0 + 120^\circ); \\ u_{BC} &= U_m \sqrt{3} \sin(\omega_0 t + \alpha_0); \\ u_{CA} &= U_m \sqrt{3} \sin(\omega_0 t + \alpha_0 - 120^\circ). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнение моментов в соответствии с законом сохранения энергии имеет вид

$$M = \frac{J}{p} \frac{d\omega_p}{dt} + M_c + M_T + M_M(\omega_p), \quad (7)$$

где  $M$  – электромагнитный момент, развиваемый электродвигателем;  $J$  – суммарный момент инерции вращающихся масс, приведенный к оси вращения электродвигателя;  $p$  – число пар полюсов электродвигателя;  $\omega_p$  – угловая скорость ротора, эл. рад./с;  $M_c$  – статический момент сопротивления;  $M_T$  – тормозной момент, возникающий в результате трения фрикционных накладок тормозного устройства (электромеханический тормоз);  $M_M(\omega_p)$  – тормозной момент электромагнитной муфты скольжения (электромагнитный тормоз).

Характер и длительность действия тормозного момента электромеханического тормоза можно определить из следующих соображений. В отключенном состоянии, когда напряжение на обмотках электродвигателя и электромагнита отсутствует, тормозной момент согласно [5] равен

$$M_{то} = F_{пр} \nu R_{cp} z, \quad (8)$$

где  $F_{пр}$  – усилие возвратной пружины;  $\nu$  – коэффициент трения материала фрикционных накладок;  $R_{cp}$  – средний радиус поверхности трения;  $z$  – коэффициент, учитывающий конструктивные особенности тормозного устройства.

После подачи напряжения на якорь растормаживающего силового электромагнита начинает действовать тяговое усилие  $F_{тяг}$ , увеличивающееся во времени и направленное против усилия пружины. При этом величина  $M_T$ , пропорциональная разности  $F_{пр} - F_{тяг}$ , будет уменьшаться и станет равной нулю в момент трогания якоря, когда  $F_{пр} = F_{тяг}$ . С этого момента якорь притягивается к сердечнику электромагнита, размыкая тем самым фрикционные накладки тормоза. Следовательно, длительность действия тормозного момента на вал электродвигателя равна времени трогания  $t_{тр}$  растормаживающего электромагнита. Учитывая это, а также приняв для определенности, что со стороны нагрузки на вал действует момент сопротивления реактивного типа (типа «сухого» трения), уравнение (7) перепишем следующим образом:

$$\frac{J}{p} \frac{d\omega_p}{dt} = M - (M_c + M_T 1t_{\text{тр}} + M_M(\omega_p)) \text{sign } \omega_p, \quad (9)$$

где  $1t_{\text{тр}}$  и  $\text{sign } \omega_p$  – функции, определяемые соотношениями:

$$1t_{\text{тр}} = \begin{cases} 1 & \text{при } t < t_{\text{тр}}; \\ 0 & \text{при } t \geq t_{\text{тр}}; \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{sign } \omega_p = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega_p > 0; \\ -1 & \text{при } \omega_p < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Наконец, электромагнитный момент АД с ВКТУ в соответствии с [1] определяется по формуле

$$M = \frac{dW_{\text{эм}}}{d\gamma} p, \quad (12)$$

где  $W_{\text{эм}}$  – полная электромагнитная энергия тормозного двигателя,

$$W_{\text{эм}} = \frac{1}{2} [\Psi_A i_A + \Psi_B i_B + \Psi_C i_C + \Psi_d i_d + \Psi_q i_q]. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12) и учитывая при этом соотношения (4), окончательно получим:

$$\begin{aligned} M = & -M_{12} p i_A i_d \sin \gamma + i_q \cos \gamma + \\ & + i_B [i_d \sin \gamma - 120^\circ + i_q \cos \gamma - 120^\circ] + \\ & + i_C [i_d \sin \gamma + 120^\circ + i_q \cos \gamma + 120^\circ]. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, уравнения (4)–(6), (9) и (14) образуют систему, описывающую электромеханические переходные процессы в тормозных электродвигателях в реальных фазных координатах. Используя решение системы относительно токов в обмотках, нетрудно найти потери энергии в статоре и роторе конкретного электродвигателя по соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} W_s &= r_1 \int_0^t i_A^2 + i_B^2 + i_C^2 dt; \\ W_r &= r_2 \int_0^t i_d^2 + i_q^2 dt, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где  $W_s$ ,  $W_r$  – потери энергии в статоре, роторе.

Наличие периодических коэффициентов в уравнениях (4), (5) и (14) значительно усложняет решение полученной системы. Поэтому с помощью известных преобразований и формул [1, 4] перейдем к уравнениям в ортогональной системе координат  $\alpha$ ,  $\beta$ , неподвижной относительно несимметричной части АД с ВКТУ (рис. 2):

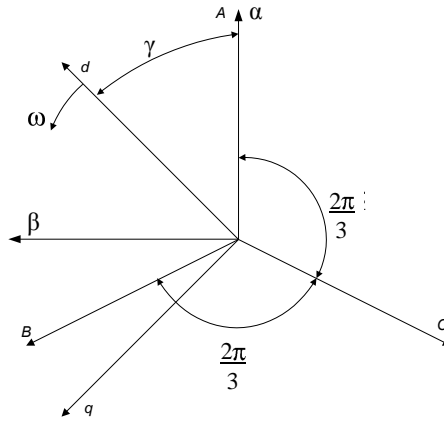


Рис. 2. Ортогональная система координат  $\alpha, \beta$

$$\left. \begin{aligned} u_{s\alpha} &= \frac{d\Psi_{s\alpha}}{dt} + r_1 i_{s\alpha} + \frac{2}{3} u_{\omega}; \\ u_{s\beta} &= \frac{d\Psi_{s\beta}}{dt} + r_1 i_{s\beta}; \end{aligned} \right\} (16) \quad \left. \begin{aligned} 0 &= \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} + r_2 i_{r\alpha} + \omega_p \Psi_{r\beta}; \\ 0 &= \frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} + r_2 i_{r\beta} - \omega_p \Psi_{r\alpha}; \end{aligned} \right\} (17)$$

$$M = \frac{3}{2} M_{12} P \quad i_{r\alpha} i_{s\beta} - i_{s\alpha} i_{r\beta}, \quad (18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_{s\alpha} &= U_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0); \\ u_{s\beta} &= U_m \sin(\omega_0 t + \alpha_0); \end{aligned} \right\} (19) \quad \left. \begin{aligned} \Psi_{s\alpha} &= (L_1 - M_1) i_{s\alpha} + M_{12} i_{r\alpha}; \\ \Psi_{s\beta} &= (L_1 - M_1) i_{s\beta} + M_{12} i_{r\beta}; \end{aligned} \right\} (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{r\alpha} &= L_2 i_{r\alpha} + \frac{3}{2} M_{12} i_{s\alpha}; \\ \Psi_{r\beta} &= L_2 i_{r\beta} + \frac{3}{2} M_{12} i_{s\beta}. \end{aligned} \right\} (21)$$

При этом величины реальных токов в обмотках электродвигателя определяются по формулам обратных преобразований и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} i_A &= i_{s\alpha}; \\ i_B &= -\frac{1}{2} i_{s\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{s\beta}; \\ i_C &= -\frac{1}{2} i_{s\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{s\beta}; \end{aligned} \right\} (22) \quad \left. \begin{aligned} i_d &= i_{r\alpha} \cos \gamma + i_{r\beta} \sin \gamma; \\ i_q &= i_{r\alpha} \sin \gamma - i_{r\beta} \cos \gamma. \end{aligned} \right\} (23)$$

С учетом (22) и (23) выражения для потерь энергии (15) перепишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} W_s &= \frac{3}{2} r_1 \int_0^t i_{s\alpha}^2 + i_{s\beta}^2 dt; \\ W_r &= r_2 \int_0^t i_{r\alpha}^2 + i_{r\beta}^2 dt. \end{aligned} \right\} (24)$$

Далее, заменив токи роторных обмоток в (16)–(18), (20), (21) и (24) их приведенными величинами подобно [6] и введя в уравнения параметры Т-образной схемы замещения асинхронного двигателя, получим:

$$\left. \begin{aligned} u_{s\alpha} &= \frac{d\Psi_{s\alpha}}{dt} + r_1 i_{s\alpha} + \frac{2}{3} u_3; \\ u_{s\beta} &= \frac{d\Psi_{s\beta}}{dt} + r_1 i_{s\beta}; \\ 0 &= \frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} + r_2' i_{r\alpha}' + \omega_p \Psi_{r\beta}; \\ 0 &= \frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} + r_2' i_{r\beta}' - \omega_p \Psi_{r\alpha}; \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$M = \frac{3}{2} \frac{x_m}{\omega_o} p \quad i_{r\alpha}' i_{s\beta} - i_{s\alpha} i_{r\beta}' ; \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} W_s &= \frac{3}{2} r_1 \int_0^t i_{s\alpha}^2 + i_{s\beta}^2 dt; \\ W_r &= r_2' \int_0^t i_{r\alpha}'^2 + i_{r\beta}'^2 dt, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{s\alpha} &= \omega_o^{-1} x_s i_{s\alpha} + x_m i_{r\alpha}' ; \\ \Psi_{s\beta} &= \omega_o^{-1} x_s i_{s\beta} + x_m i_{r\beta}' ; \\ \Psi_{r\alpha} &= \omega_o^{-1} x_r i_{r\alpha}' + x_m i_{s\alpha} ; \\ \Psi_{r\beta} &= \omega_o^{-1} x_r i_{r\beta}' + x_m i_{s\beta} . \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$x_s = x_1 + x_m$  – полное индуктивное сопротивление обмотки статора;  $x_r = x_2' + x_m$  – полное индуктивное сопротивление приведенной обмотки ротора;  $x_1$  и  $x_2'$  – индуктивные сопротивления рассеяния статорной и приведенной роторной обмоток;  $x_m$  – индуктивное сопротивление взаимодукции.

В результате преобразований получены системы уравнений (25), (26) и (28) с постоянными коэффициентами, описывающие совместно с уравнением (9) электромеханические переходные процессы в идеализированных асинхронных двигателях с тормозными устройствами. Отличие этой системы от известных [1, 6] заключается в наличии дополнительного слагаемого  $\frac{2}{3} u_3$  в уравнении равновесия напряжений для эквивалентной обмотки

статора по оси  $\alpha$  и дополнительных слагаемых  $M_T 1t_{тр}$  и  $M_M(\omega_p)$  в уравнении моментов. Число уравнений в системе (десять), на первый взгляд, меньше числа неизвестных (тринадцать). В действительности же новые неизвестные  $u_3$ ,  $M_T$  и  $M_M(\omega_p)$  могут быть выражены через токи (потокосцепления) и параметры, входящие в эти уравнения.

В частном случае, когда  $u_3 = 0$ , системы уравнений (9), (25), (26) и (28) позволяют исследовать переходные процессы в тормозных электродвигателях с симметричными схемами управления.

При  $u_3 = 0$ ;  $M_T = 0$  и  $M_m(\omega_p) = 0$  уравнения (9), (25), (26) и (28) совпадают с уже известными уравнениями электромеханического преобразования энергии в асинхронных двигателях общепромышленного исполнения [1, 6]. Последнее обстоятельство подтверждает достоверность преобразований и выводов, проведенных выше.

Из ряда факторов, оказывающих наибольшее влияние на изменение параметров АД в переходных режимах, следует отметить насыщение магнитной цепи. При этом различают насыщение по пути основного магнитного потока и по пути потоков рассеяния. В зависимости от величины основного магнитного потока, а следовательно, и индукции изменяется магнитная проводимость по пути основного магнитного потока. Это проявляется в основном как изменение сопротивления взаимоиндукции обмоток статора и ротора  $x_m$ . Влияние величины основного магнитного потока на проводимость рассеяния незначительно, и им пренебрегают [1]. Величина основного магнитного потока связана с ЭДС воздушного зазора, т. е. зависит от напряжения питания асинхронного двигателя.

Насыщение магнитной цепи по пути потоков рассеяния зависит от величин токов в обмотках, с увеличением которых, например при пуске асинхронного двигателя, сопротивление рассеяния уменьшается, что обусловлено увеличением потоков рассеяния вокруг пазов. Однако для широкого ряда общепромышленных двигателей малой и средней мощности экспериментальные исследования показали, что уравнения (9), (25), (26) и (28) для идеализированной машины справедливы и для реальной насыщенной асинхронной машины [1]. Отсюда следует, что изменение взаимоиндукции  $x_m$  при несимметрии одной из фаз статора является незначительным для упомянутых машин.

## ВЫВОД

Из рассмотренного следует, что приведенная система уравнений для АД с ВКТУ является адекватной и позволяет математически описывать переходные процессы в различных АД с ВКТУ на базе электромеханического тормоза и электромагнитной муфты скольжения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С и п а й л о в, Г. А. Математическое моделирование электрических машин / А. В. Сипайлов, А. В. Лоос. – М.: Высш. шк., 1980. – 176 с.
2. С о л е н к о в, В. В. Асинхронный электродвигатель со встроенным комбинированным тормозным устройством на базе электромеханического тормоза и электромагнитной муфты / В. В. Соленков, В. В. Брель // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2011. – № 6. – С. 20–26.
3. С о л е н к о в, В. В. Бесконтактные схемы форсировки в тормозных устройствах асинхронных двигателей / В. В. Соленков, В. В. Брель // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2009. – № 4. – С. 31–36.
4. К о н о н е н к о, Е. В. Замена короткозамкнутой обмотки ротора асинхронного двигателя эквивалентной двухфазной / Е. В. Кононенко // Известия Томского политехнического института. – 1974. – Т. 200. – С. 3–5.
5. А л е к с а н д р о в, М. П. Тормозные устройства / М. П. Александров, А. Г. Лысяков. – М.: Машиностроение, 1985. – 312 с.
6. К о н о н е н к о, Е. В. Электрические машины: специальный курс / Е. В. Кононенко, Г. А. Сипайлов, К. А. Хорьков. – М.: Высш. шк., 1975. – 279 с.

Представлена кафедрой  
автоматизированного электропривода

Поступила 01.07.2013