



Ю. А. САМОЙЛОВИЧ, НИИМТ (ЕКАТЕРИНБУРГ),
В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, И. А. ТРУСОВА, БГПА,
Ю. В. ДЬЯЧЕНКО, РУП "БМЗ",
И. Л. НУМЕРАНОВА, БГТУ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ЖИДКОЙ СЕРДЦЕВИНЕ СЛИТКА

УДК 621.746.047

Получение качественных слитков и заготовок является актуальной задачей. В настоящее время существует несколько современных методов управления кристаллической структурой стального слитка с целью повышения качества: магнитное торможение струи стали при разливке, электромагнитное перемешивание расплава различных видов, индукционный обогрев головной части слитков. Определенный интерес представляет кондуктивный метод электромагнитного перемешивания.

Главное преимущество кондуктивного метода электромагнитного перемешивания (КЭМП) — высокая экономичность: затраты электроэнергии при использовании КЭМП в 15—20 раз ниже, чем при использовании индукционного метода электромагнитного перемешивания. Причина высокой экономичности метода КЭМП состоит в том, что элементы машин непрерывного литья (опорные ролики, брусья) и сама затвердевающая заготовка используются в качестве деталей устройства электромагнитного перемешивания, за счет чего КПД устройства возрастает в 15—20 раз по сравнению с устройствами индукционного ЭМП.

Методические трудности изучения тепловых и гидродинамических явлений в затвердевающем стальном слитке в промышленных условиях оправдывают использование методов математического моделирования указанных явлений. Развитие современных численных методов (с применением ЭВМ) позволяет преодолеть трудности решения достаточно сложных задач магнитной гидродинамики. Приведем некоторые примеры математического моделирования процессов движения расплава в жидком ядре затвердевающих слитков [1].

В основу математической модели положены уравнения магнитной гидродинамики в безындукционном приближении [2]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \text{grad})v = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \text{div}(v_{\tau} \text{grad}v) + \frac{1}{\rho} (j \times B_{\text{вн}}), \quad (1)$$

The article provides examples of physical and mathematical modeling of the process of motion of melt in the fluid nucleus of the hardening ingots of continuous casting in conductive method of electromagnetic mixing (CMEM). These models can be used while choosing rational parameters of CMEM machines and for development of continuous filling process control algorithms.

$$j = \sigma(-\text{grad } \varphi + v \times B_{\text{вн}}), \quad (2)$$

$$\nabla^2 \varphi = \text{div}(v \times B_{\text{вн}}), \quad (3)$$

$$\text{div}v = 0 \quad (4)$$

при граничных условиях на границе расплава и твердой корки и на поверхности слитка соответственно

$$v = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \tilde{j}_n / \sigma, \quad (6)$$

где v — вектор скорости; t — время; p — давление; j — вектор плотности электрического тока; $B_{\text{вн}}$ — заданная индукция внешнего магнитного поля; φ — потенциал электрического поля; \tilde{j}_n — заданная на внешней поверхности слитка плотность тока в проекции на нормаль к поверхности ($\tilde{j}_n > 0$, если ток направлен из слитка, $\tilde{j}_n < 0$ — внутрь слитка, $\tilde{j}_n = 0$ в случае контакта слитка с неэлектропроводной средой); ρ — плотность расплавленного металла; v_{τ} — коэффициент турбулентной вязкости.

Уравнение (3) получено в предположении, что электропроводность расплавленного металла и твердой корки одинакова ($\sigma_{\text{ж}} = \sigma_{\text{тв}} = \sigma$). Указанное допущение основано на том, что при температурах, имеющих место в слитке при непрерывной разливке стали, различие $\sigma_{\text{ж}}$ и $\sigma_{\text{тв}}$ не превышает 20%.

По принципу суперпозиции полное электрическое поле можно представить в виде суммы внешнего и индуцированного полей:

$$j = j_{\text{вн}} + j_{\text{ин}}, \quad \varphi = \varphi_{\text{вн}} + \varphi_{\text{ин}}, \quad (7)$$

где $j_{\text{вн}}$, $j_{\text{ин}}$, $\varphi_{\text{вн}}$, $\varphi_{\text{ин}}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla^2 \varphi_{\text{вн}} = 0, \quad (8)$$

$$\nabla^2 \varphi_{\text{ин}} = \text{div}(v \times B_{\text{вн}}), \quad (9)$$

$$j_{\text{вн}} = -\sigma \text{grad} \varphi_{\text{вн}}, \quad (10)$$

$$j_{\text{ин}} = \sigma(-\text{grad} \varphi_{\text{ин}} + v \times B_{\text{вн}}), \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{\text{вн}}}{\partial n} &= -\frac{1}{\sigma} \tilde{j}_n, \\ \frac{\partial \varphi_{\text{ин}}}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ на поверхности слитка} \quad (12)$$

В условиях КЭМП параметрами, определяющими процесс перемешивания, являются индукция внешнего магнитного поля и плотность тока внешнего электрического поля. Кроме того, движение жидкого металла зависит от вязкости ν , плотности ρ , электропроводности σ , геометрических размеров жидкого ядра и слитка. В качестве характерных величин выбраны j_0 — плотность тока внешнего электрического поля в центре слитка, B_0 — индукция внешнего магнитного поля под полюсом, l_0 — толщина жидкого ядра; для переменных величин — масштабы: скорости — ν/l_0 , давления — $\rho\nu^2/l_0^2$, электрического потенциала — $B_0\nu$, времени — l_0^2/ν . Уравнения (1)–(6) с учетом (7)–(12) и выбранных масштабов записываются в безразмерном виде (обозначения для безразмерных переменных сохранены те же, что и для размерных):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \text{grad}) v = -\text{grad } p + \text{div} \left(\frac{v_{\tau}}{\nu} \text{grad } v \right) + Q(j_{\text{вн}} \times B_{\text{вн}}) + \text{Ha}^2 (-\text{grad } \varphi_{\text{вн}} + v \times B_{\text{вн}}) B_{\text{вн}}, \quad (13)$$

$$\nabla^2 \varphi_{\text{вн}} = \text{div}(v \times B_{\text{вн}}), \quad (14)$$

$$\nabla^2 \varphi_{\text{вн}} = 0, \quad (15)$$

$$\text{div } v = 0, \quad (16)$$

$$j_{\text{вн}} = -\frac{\text{Ha}^2}{Q} \text{grad } \varphi_{\text{вн}}, \quad (17)$$

$$v = 0 \text{ при } x = \pm l_{\text{ж}}/2b_{\text{ж}}, y = \pm 0,5, z = \pm h/2b_{\text{ж}}, \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{\text{вн}}}{\partial n} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_{\text{вн}}}{\partial n} &= -\frac{Q}{\text{Ha}^2} \bar{j}_n \end{aligned} \right\} \text{ при } x = \pm(l_{\text{ж}}/2b_{\text{ж}} + \alpha), y = \pm(0,5 + \alpha); \quad (19)$$

$$z = \pm h/2b_{\text{ж}}.$$

Здесь $Q = j_0 B_0 l_0^3 / (\rho\nu^2)$ и $\text{Ha}^2 = B_0^2 l_0^2 \sigma / (\rho\nu)$ — безразмерные комплексы; $l_{\text{ж}}$, $b_{\text{ж}}$, h — размеры жидкого ядра; δ — толщина твердой корки; $\alpha = \delta/b_{\text{ж}}$.

Из уравнений (13)–(19) следует, что переменные v , $\varphi_{\text{вн}}$, $j_{\text{вн}}$ определяются значениями критериев Q и Ha^2 , а также соотношением размеров жидкого ядра и слитка, которое характеризуется величиной α , т. е. отношением толщины твердой корки к толщине ядра $\delta/b_{\text{ж}}$.

Численное решение задачи (13)–(19) осуществляли конечно-разностным методом. Поле скоростей определяли с использованием алгоритма расщепления [3]. При реализации метода расщепления на каждом временном шаге возникает необходимость решения разностной задачи Неймана для уравнения Пуассона относительно давления. Разностную задачу для принятой формы жидкого ядра (параллелепипеда) решали с помощью алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье [4]. Таким же образом решали задачу (14), (15), (19) для электрического потенциала внешнего и индуцированного электрических полей.

Настройку разработанной математической модели осуществляли по результатам экспериментов, проведенных с модельным сплавом на основе галлия с использованием роликовой схемы КЭМП (с одной парой роликов).

На рис. 1 показано изменение во времени скоростей течения в нескольких точках вдоль средней плоскости ванны, полученное путем математического моделирования. Очевидно, что вовлечение расплава в движение происходит со значительным запаздыванием. Этот важный вывод указывает на то, что реверсирование тока при ЭМП не следует выполнять с высокой частотой, поскольку для распространения циркуляции по значительной части жидкого ядра слитка требуется достаточно большое время (десятки секунд). Отметим, что период вихревых пульсаций в скрещенных полях также составляет десятки секунд.

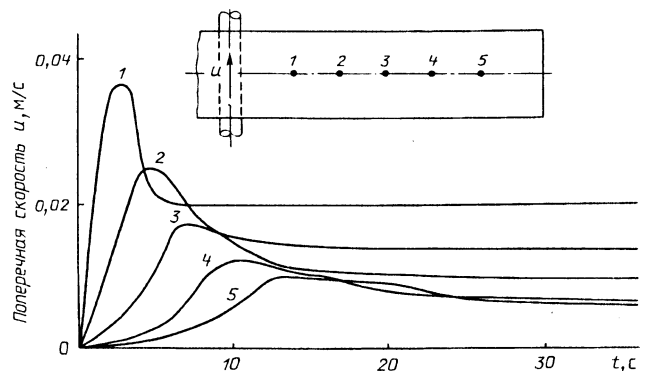


Рис. 1. Возбуждение скорости течения в нескольких точках (1–5) вдоль средней плоскости ванны по данным математического моделирования

Результаты математического моделирования позволили установить зависимость скорости течения сплава в характерных точках жидкого ядра слитка от пропускаемой через расплав плотности электрического тока для роликовой схемы КЭМП (рис. 2). Как видно из рисунка, для изученных значений плотности тока и магнитной индукции ($B = 0,1$ Тл) указанная зависимость по ха-

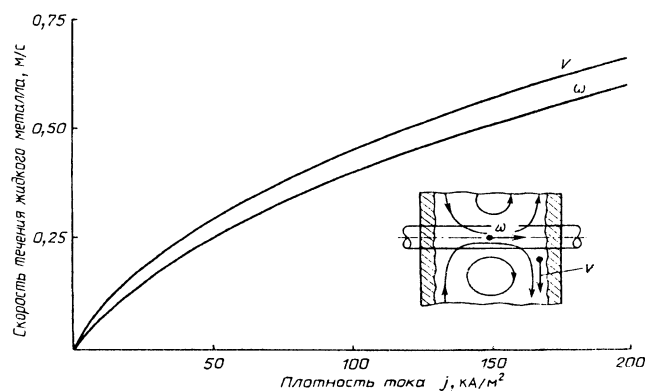


Рис. 2. Зависимость скорости движения расплава в двух характерных точках циркуляции (v , w) от плотности электрического тока; магнитная индукция $B = 0,1$ Тл; толщина плоского слоя расплава $h = 0,15$ м

рактеру близка к "закону квадратного корня". Вместе с тем, с увеличением магнитной индукции при $B \geq 0,15$ Тл кривая зависимости $v = v(B)$ достигает экстремума, после чего дальнейшее увеличение параметра B сопровождается снижением скорости течения расплава.

В дальнейшем разработанную математическую модель использовали для изучения особенностей течения расплава при его движении в скрещенных электрическом и магнитном полях с использованием полюсной схемы КЭМП [1, 6]. Для пропускания через слиток-сляб электрического тока служат восемь роликов. Разность потенциалов создается между четырьмя левыми и четырьмя правыми роликами. При этом ток направлен вдоль широкой грани сляба. С помощью двух полюсов электромагнита, расположенных посредине широких граней, в слитке создается магнитное поле.

Для уравнений (13)—(16) расчетная область представляет собой часть жидкого ядра слитка, ограниченную поперечными сечениями, расположенными на достаточном удалении от зоны перемешивания. Примем, что жидкое ядро слитка в этой области имеет форму параллелепипеда. Расчетная область для уравнений (13)—(16) представляет собой часть непрерывного слитка, ограниченную теми же сечениями. Изучали непрерывный стальной слиток сечением $1,71 \times 0,24$ м. Зона перемешивания была удалена от мениска металла на расстояние 4,5 м. Жидкое ядро на этом горизонте имело сечение $1,59 \times 0,12$ м (толщина твердой корки 0,06 м). Высота h расчетной области была принята равной 3,42 м. Физические характеристики разливаемой стали: $\nu = 0,6 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\rho = 7200$ кг/м³; $\sigma = 0,736 \cdot 10^6$ (Ом·м)⁻¹. Распределение индукции, создаваемой электромагнитом с квадратными полюсами, описывается зависимостью

$$B_x = B_z = 0, B_y = B_0 \exp[-\chi(x^2 + z^2)],$$

где $\chi = 1/2 H_p b_p$, H_p — размер стороны полюса (в расчетах 0,4 м); b_p — зазор между полюсами (в расчетах 0,24 м); B_0 — магнитная индукция в зазоре между полюсами.

Входящий в уравнение (13) коэффициент турбулентной вязкости ν_t вычисляли по упрощенной модели турбулентности, согласно которой он принят постоянным во всем объеме жидкости и равным:

$$\nu_t = \eta \nu_{\max} \quad (20)$$

$$\nu = 2 \cdot 10^{-3} - 3,5 \cdot 10^{-3},$$

где ν_{\max} — максимальное значение безразмерной скорости.

Зависимость (20) применялась в работе [5] и позволила получить хорошее совпадение результатов физического и математического моделирования процесса кондукционного электромагнитного перемешивания.

В ходе математического моделирования для рассматриваемого агрегата КЭМП магнитная индукция варьировалась от 0,025 до 0,25 Тл, ток через слиток — от 1370 до 12340 А, толщина твердой корки принята постоянной $\delta = 0,06$ м.

По результатам расчетов, полученных при значении тока через слиток 4100 А и магнитной индукции 0,1 Тл с использованием приведенной выше модели, установлено, что скорость потока расплава вдоль оси слитка имеет максимум несколько выше области действия максимальной магнитной индукции и быстро уменьшается ниже полюсов электромагнита. Скорость возвратного течения расплавленного металла около узких граней слитка выше скорости течения на оси. Область интенсивного перемешивания наблюдается выше по потоку от полюсов электромагнита.

На рис. 3 показано распределение продольной компоненты скорости w по ширине жидкого ядра слитка ($z = y = 0$) при различных значениях индукции внешнего магнитного поля. Из рисунка видно, что с ростом уровня магнитной индукции профиль скорости под полюсом уплощается, а при $B_0 > 0,1$ Тл становится M -образным. Указанная особенность профиля скорости связана с перераспределением плотности тока в слитке при движении расплава в магнитном поле.

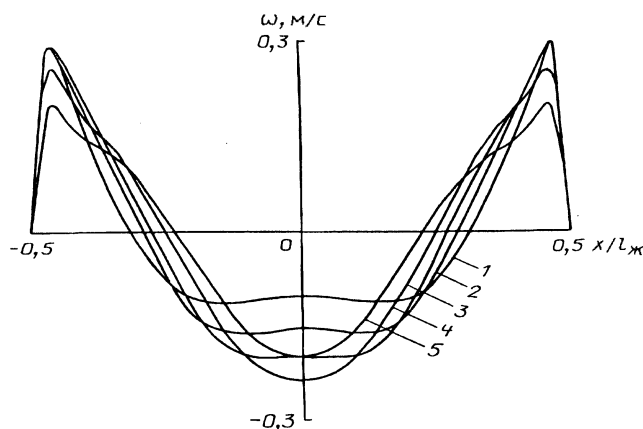


Рис. 3. Распределение продольной компоненты скорости w вдоль оси x ($z = y = 0$): 1 — $B_0 = 0,025$ Тл; 2 — 0,05; 3 — 0,1; 4 — 0,15; 5 — 0,25 Тл; толщина корки $\delta = 0,006$ м; ток через слиток $I = 4100$ А

Многовариантные расчеты по изложенной выше математической модели при варьировании параметров внешних электрического и магнитного полей позволили установить зависимость безразмерной скорости течения расплава от чисел подобия Q и Ha^2 . Указанная зависимость хорошо описывается формулой

$$w(0,0,0) = -3,26 Ha^2 + \sqrt{(3,26 Ha^2)^2 + 10,5 Q} \quad (21)$$

где $w(0,0,0)$ — безразмерная продольная компонента скорости в центре жидкого ядра между полюсами электромагнита.

Преобразуя выражение (21) к размерному виду, получаем

$$w(0,0,0) = -3,26 \frac{B_0^2 l_0 \sigma}{\rho} + \sqrt{\left(3,26 \frac{B_0^2 l_0 \sigma}{\rho}\right)^2 + 10,5 \frac{j_0 B_0 l_0}{\rho}}. \quad (22)$$

Здесь B_0, j_0 — соответственно индукция внешнего магнитного поля и плотность тока внешнего электрического поля в центре слитка.

При управлении процессом электромагнитного перемешивания в промышленных условиях полный ток I через слиток является более удобным режимным параметром, чем плотность тока j_0 . Для принятых условий токоподвода и размеров слитка получена зависимость $j_0 = j_0(I)$, с учетом которой уравнение (22) можно записать в виде

$$w(0,0,0) = -3,26 \frac{B_0^2 l_0 \sigma}{\rho} + \sqrt{\left(3,26 \frac{B_0^2 l_0 \sigma}{\rho}\right)^2 + 0,442 \frac{IB_0}{l_0 \rho}}. \quad (23)$$

На рис. 4 зависимость (23) показана линиями, а точки соответствуют численным расчетам по изложенной выше математической модели. Из рисунка видно, что формула (23) хорошо описывает результаты расчетов (среднеквадратичное отклонение точек от аппроксимирующей зависимости составляет $0,2 \cdot 10^{-2}$ м/с). Зависимость скорости от магнитной индукции при фиксированном значении тока через слиток имеет максимум. С ростом силы тока значенные индукции магнитного поля, при котором достигается экстремум, также возрастает.

Выражение (23) может быть использовано для назначения рациональных параметров перемешивающего устройства в период внедрения КЭМП на установке непрерывной разливки стали (УНРС) и для разработки алгоритма управления режимными

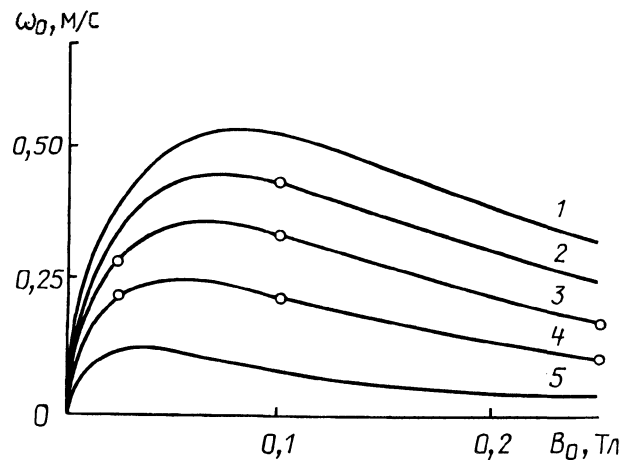


Рис. 4. Зависимость скорости течения расплава под полюсом от индукции магнитного поля: 1 — $I = 12,34$ кА; 2 — 9,6; 3 — 6,86; 4 — 4,1; 5 — 1,37 кА

параметрами устройства КЭМП в рамках автоматизированной системы управления (АСУ) процессом непрерывной разливки.

Литература

1. Самойлович Ю. А. и др. Математическое моделирование процесса кондукционного перемешивания расплава в незатвердевшей части непрерывного слитка // Магнитная гидродинамика. 1987. № 4.
2. Брановер Г. Г., Цинобер А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970.
3. Белоцерковский О. М., Гушин В. А., Шенников О. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. матем. физ. 1975. Т. 15, № 1.
4. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. Самойлович Ю. А., Кабаков З. К., Брыксин В. М. и др. Изучение гидродинамических явлений при кондукционном перемешивании жидкого ядра непрерывного слитка // Совершенствование процессов непрерывной разливки стали. Киев: Изд-во АН УССР, 1985.
6. Самойлович Ю. А., Тимошпольский В. И., Трусова И. А. и др. Стальной слиток: В 3 т. Т. 1. Управление кристаллической структурой. Мн.: Беларуская навука, 2000.