МЕТАЛЛУРГИЯ

The article provides numerical solution of the problem of optimal control over two-stage processes of metallurgical production. As an optimization criterion the author takes duration of the process with preset approximation accuracy to the distribution demand when process duration is fixed.

Н. П. ВОРОНОВА, Н. И. БЕРЕЗОВСКИЙ, Е. К. КОСТЮКЕВИЧ, БГПА

ОБ ОДНОМ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССОМ ТЕРМООБРАБОТКИ

УДК 621.365.22

Целью предлагаемого исследования является математическая постановка и решение численными методами задач выбора режимных параметров различных процессов металлургического производства, включающих в себя нагрев, вагранку, цементацию, что позволило бы рассчитать изменение температуры контролируемой среды для получения желаемого распределения влаги по глубине объекта. Результаты, полученные в данной работе, основываются на исследованиях К. А. Лурье [1], Ю. Н. Андреева [2] и А. Г. Бутковского [3].

В качестве критериев оптимизации можно принять продолжительность процесса при заданной точности приближения к требуемому распределению при фиксированной продолжительности процесса. Управляющими воздействиями являются температура в зоне обработки и длительность процесса.

Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(W,t)\frac{\partial W}{\partial x}\right],\ x > 0,\ t > 0, \qquad (1)$$

где W — температура на расстоянии x от поверхности в момент времени t; $D(W, t)$ — коэффициент температуропроводности:

$$D(W,t) = A + B(W)\exp\left(-\frac{kW(t)}{R}\right); \qquad (2)$$

A, B, k, R — const.

Начальное условие $W(x,0)=W_0$ (W_0 — начальная температура (2)). Граничное условие рассмотрим как граничное условие III рода

$$D(W,t)\frac{\partial W}{\partial x}(0,t) = \beta\left[W^0(t) - W(0,t)\right], \qquad (3)$$

где $W^0(t)$ —температура среды; β — коэффициент теплоотдачи.

Пусть задано $W^*(x)$ — распределение температуры на поверхности, которое требуется получить. Тогда величину функционала

$$y_0 = \int_0^{x_0}[W^*(x) - W(x,t)]^2 dx \qquad (4)$$

(x_0 — глубина слоя) необходимо минимизировать.

Управляющие функции процесса $W_0(t), W(t)$ подчинены ограничениям:

$$W^0_{\min}(t) \le W^0(t), \qquad (5)$$

$$W_{\min}(t) \le W(t) \le W_{\max}(t), \qquad (6)$$

где $W^0_{\min}(t), W^0_{\max}(t), W_{\min}(t), W_{\max}(t)$ — функции, заданные в отрезке продолжительности процесса $[0;\ t_0]$.

В результате задача о наилучшем приближении к заданному распределению формулируется следующим образом: выбрать функции $W^0(t)$, $W(t)$ и продолжительность t_0 такими, чтобы функционал (4) достигал минимума на решениях уравнений (1) — (3) при выполнении ограничений (5), (6).

Задачу можно сформулировать и так: при заданной точности достижения заданного распределения $W^*(x)$ выбрать режимы $W^0(t)$, $W(t)$ такими, чтобы при выполнении ограничений (5), (6) и при заданной величине функционала $y_0=y_0^*$ продолжительность процесса t_0 была бы наименьшей.

Упростим задачу и рассмотрим кусочно-постоянные управляющие функции вида: $W(t) = W_i$, $W^0(t) = W_i^0$ при $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1,N}$, как предлагается в работе [4]. Поставленная выше задача сводится к задаче о выборе $3N$ управляющих параметров $W_i^0, W_i, i = \overline{1,N}$. Будем также считать, что коэффициенты $D(W,t)$ не зависят от W. Введем замену переменной

$$\varphi_i = \int_0^{t_i} D(t)\,dt. \qquad (7)$$

На основании замены (7) число управляющих параметров сокращается до $2N$, при этом

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{i} D_k(t_k - t_{k-1}).$$

Вместо граничного условия вида (3) рассмотрим граничное условие I рода, считая, что поверхность мгновенно нагревается до равновесных с атмосферой температур и

$$W(0,t) = W^0(t).$$

При принятых допущениях распределение температур в момент окончания процесса $t_0 = t_N$ примет вид

$$W(x,t_N) = W_N^0 + \sum_{i=0}^{N-1}(W_i^0 - W_{i+1}^0)\Phi_i, \quad W_0^0 \equiv W_0, \qquad (8)$$

где $\Phi_i = \Phi\left[\frac{x}{2(\varphi_N - \varphi_i)}\right]; \quad \Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^u e^{-t^2}dt.$

Подставляя решение (8) в (4), получаем явное выражение минимизируемого функционала от $2N$ управляющих параметров $\varphi_i, W_i^0, i = \overline{1, N}$.

Дифференцируя (4) по управляющим параметрам, получаем формулы для расчета частных производных:

$$\frac{\partial y_0}{\partial W_i^0} = 2\int\limits_0^{x_0}\left[W^*(x) - W(x, t_N)\right]\left[\Phi_i - \Phi_{i-1}\right]dx, \quad (9)$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial \varphi_i} = 2\int\limits_0^{x_0}\left[W^*(x) - W(x, t_N)\right]\frac{\partial W(x, t_N)}{\partial \varphi_i}dx,$$

где $\frac{\partial W(x, t_N)}{\partial \varphi_i} = \sum\limits_{i=0}^{N-1}(W_i^0 - W_{i+1}^0)\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi_i}$.

Рассмотрим метод оптимизации двухстадийного (N = 2) процесса, где потенциал температур выбирался на двух интервалах. Двухстадийный процесс сушки позволяет очень близко подойти к желаемому распределению температур по толщине слоя, например во время процесса цементации.

В качестве управляющих параметров выбирали величины φ_1, φ_2, и W_1^0. Значение W_2^0 считалось заданным на основании экспериментальных данных [5].

Тогда в качестве ограничений рассматривали условия: $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2 \geq 0$, $0 \leq W_1^0 \leq 0{,}9$, $W_2^0 = 0{,}8$. Улучшение первоначально принятого управления $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0{,}01$; $W_{10}^0 = 0{,}98$ осуществлялось методом наискорейшего спуска. Интегралы в формулах (4), (8) и (9) вычисляли по формуле Гаусса при n = 20.

Относительное уменьшение функционала (4) приведено ниже.

Номер итерации	1	2	3
Величина функционала	91,3	30,8	10,7

Номер итерации	4	5	6	7
Величина функционала	3,1	0,98	0,29	0,07

Параметры управления на седьмой итерации получились равными φ_1=0,198, φ_2=0,234, W_1^0=0,4.

Решение предложенной задачи может служить для отладки алгоритмов оптимизации и качественного исследования свойств, оптимальных режимов нагрева и охлаждения.

Из анализа полученных результатов можно сделать ряд выводов, полезных для практики.

1. Длительность процесса в рабочей зоне существенно меньше для данной модели процесса, чем длительность его в зоне насыщения. Модель не предполагает значительного удлинения зоны.

2. Степень приближения, получаемая при двухфазном разбиении объекта, является допустимой. В связи с этим нет необходимости введения третьей зоны, в результате чего процесс вычислений станет объемным, но адекватность модели существенно не изменится.

3. Чем меньше уровень температур в первой зоне, тем более точное приближение может быть получено, одновременно с этим сокращается и общее время процесса.

4. Приведенная методика может быть использована для расчета двухстадийных процессов, таких, как цементация. Концентрация углерода в поверхностном слое высоко- и малолегированных хромомолибденовых сталей значительно влияет на их механические свойства.

5. Очевидно, что алгоритм решения задачи останется без изменения, если задавать различные граничные условия: I, II или III рода. Изменится лишь незначительно решение (8), но при этом останется зависимость функции $W(x, t_N)$ от функции Лапласа, что весьма удобно в вычислениях.

Литература

1. Лурье К.А. Оптимальные задачи для распределительных систем // Оптимальные системы. Статические методы. М.: Наука, 1967.

2. Андреев Ю. Н. Влияние нестабильности режимных параметров на глубину цементации // Печи и сушка машиностроительной промышленности. М.: Теплопроект, 1972. Вып. 23.

3. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.

4. Воронова Н. П., Михнова Р. В. Разработка оптимального по времени режима работы печи садочного типа // Изв. вузов. Энергетика. 1996. № 1-2.

5. Богатов Б. А., Березовский Н. И. Разработка математических моделей и номограмм для управления сушкой сыпучих материалов // Изв. вузов. Энергетика. 1993. № 4.

6. Малевич Ю. А., Воронова Н. П., Березовский Н. И., Костюкевич Е. К. Управление процессом сушки с применением ультразвука // Изв. вузов. Энергетика. 1999. № 5.